

£)с а0W ОШЙ

ХАРЬКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

На правах рукописи

Кнышев И.П.

УДК 621.391

**Теория аналого-цифрового преобразования
сигналов и оценка погрешностей**

05.12.02. Телекоммуникационные системы и сети

Диссертация
на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант
Поляков П.Ф., д.т.н., профессор

Харьков 2001

	2
	6
1. МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРОБЛЕМАТИКА АЦП, ЦАП И ПРЕОБРАЗУЕМЫХ СИГНАЛОВ	14
1.1 Проблематика аналого-цифрового преобразования	—
1.2 Методы и проблематика временной дискретизации	19
1.3 Методы и проблематика амплитудного квантования	24
1.4 Методы представления сигналов	31
1.5 Критерии анализа АЦП	41
Выводы к разделу 1	. 47
2. МЕТОДОЛОГИЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ	49
2.1 Идеальная дискретизация	—
2.2 Дискретизация сигналов с неограниченным спектром	57
2.3 Дискретизация с конечным числом отсчетов	67
2.4 Нестабильность интервала дискретизации	79
2.5 Погрешность при восстановлении реальными фильтрами	85
2.6 Дискретизация сигналов на фоне шума	98
2.7 Дискретизация импульсами конечной длительности	105
2.8 Задержки при дискретизации	119
Выводы к разделу 2	127

3.	ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ	13
3.1	Идеальная дискретизация	
3.2	Дискретизация сигналов с неограниченным спектром	13
3.3	Дискретизация сигналов на фоне шума	14
3.4	Дискретизация импульсами конечной длительности	14
	Выводы к разделу 3	15
4.	ТЕОРИЯ КВАНТОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ	15
4.1	Идеализированное квантование	
4.2	Квантование сигналов большого уровня	16
4.3	Квантование детерминированных сигналов на фоне шума	17
4.4	Квантование аналитических сигналов	18
	Выводы к разделу 4	19
5.	ТЕОРИЯ КВАНТОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ	19
5.1	Идеальное квантование	—
5.2	Погрешности амплитудного квантования	19
5.3	Оптимизация аналого-цифрового преобразователя	20
5.4	Квантование марковских сигналов	21
	Выводы к разделу 5	22

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	228
ПРИЛОЖЕНИЕ А	
Функции распределения детерминированных сигналов	240
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	
Особенности дискретизации узкополосных сигналов	246
ПРИЛОЖЕНИЕ В	
Среднеквадратическая ошибка нестабильности частоты дискретизации	255
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	
Параметры оптимальных АЦП детерминированных сигналов	259
ПРИЛОЖЕНИЕ Е	
Акты внедрения результатов исследований	268

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

	- аналого-цифровой преобразователь
ИКМ	- импульсно-кодовая модуляция
НТК	- научно-техническая конференция
СВХ	- схема выборки и хранения
ЦАП	- цифро-аналоговый преобразователь
$\text{cosec}(x)$	- функция $\cos(x)/x$
$\text{dir}[x, y] = \begin{cases} 1, & x > y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$	- ступенчатая функция
$\text{ext}(x)$	- наименьшее целое число, не менее X
$Fd_u(x)$	- интегральная функция распределения значений сигнала $u(t)$ по уровням x
$\text{int}(x)$	- наибольшее целое число, не более X
$M_{\text{макс}}^{[0]}$	- максимальное значение сигнала
$M_{\text{макс}}^{\text{BI}}$	- максимальное значение n -ой производной сигнала
$\text{sinc}(x)$	- функция $\sin(x)/x$
$Wd_u(x)$	- дифференциальная функция распределения значений сигнала $u(t)$ по уровням x
$a=f_g/f_m$	- относительная частота дискретизации
A_t	- интервал временной дискретизации
A_u	- интервал амплитудного квантования
Лпс	- отношение энергии первой производной к энергии сигнала
Лвп	- отношение энергии второй производной к энергии первой производной сигнала
$CO_g=27cf_g$	- частота дискретизации

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние и перспективы развития общества характеризуется широким внедрением цифровых методов и аппаратуры практически во все сферы человеческой деятельности: науку, технику, экономику, культуру, быт. Сочетание мощных вычислительных средств и разветвленной телекоммуникационной сети привело к появлению информационных технологий, давших новый импульс развития общества. В частности, это одна из побудительных причин ускоренного развития сетей связи практически всех стран мира. Генеральное направление развития систем телекоммуникаций всех ведущих стран, включая Украину и Россию, - это использование цифровых методов и аппаратных средств в общегосударственных и ведомственных сетях связи всех видов. Подтверждением тому могут служить концепции развития средств телекоммуникации на железнодорожном транспорте [11, 35].

Сообщения в телекоммуникационных и информационно-измерительных системах от первичных источников поступают, в значительной части случаев, в виде аналоговых (непрерывных) сигналов. Это, прежде всего, относится к речевой и телевизионной информации, сигналам первичных датчиков измерительных и управляющих систем (тензометрические, фотометрические и т.п.) и др.

Дальнейшая обработка, передача по линиям связи, хранение сигналов могут осуществляться с использованием аналоговых или цифровых методов и устройств. Огромные успехи микроэлектроники в разработке и промышленном освоении микропроцессоров, запоминающих устройств и других элементов цифровой техники позволили реализовать сложные и эффективные алгоритмы обработки сигналов, системы передачи и обработки информации с самой высокой надежностью, эффективностью, защищенностью, дальностью связи и др. показателями, недостижимыми для аналоговых систем.

Формирование, обработка, передача и хранение непрерывных сигналов в цифровых системах и устройствах возможна после их преобразования из аналоговой формы в цифровую. Эту функцию выполняют аналого-цифровые преобразователи (АЦП), являющиеся неременной составной частью цифровых систем

телекоммуникации, информационно-измерительных и управляющих систем. Процесс преобразования включает три процедуры: временную дискретизацию, амплитудное квантование и кодирование отсчетов. Эти процедуры выполняются, как правило, последовательно, с возможными промежуточными преобразованиями отдельных параметров квантуемого сигнала.

Как всякий первичный преобразователь, АЦП в значительной мере определяет сложность и эффективность всей системы. Неоптимальный выбор параметров и характеристик АЦП может привести либо к низкой эффективности (при заниженных значениях), либо к аппаратной, алгоритмической и точностной избыточности (при завышенных значениях) всей системы в целом. Это обуславливает большой интерес исследователей и разработчиков к проблемам преобразования сигналов из аналоговой формы в цифровую и наоборот. Подтверждением тому служит поток публикаций по проблеме в целом и отдельным процедурам преобразования. В качестве примера можно указать монографии [7, 19, 23, 27, 33, 74, 80, 126] и статьи, в которых анализируются процессы временной дискретизации [15, 16, 30, 66, 73, 76, 88, 91, 106, 114, 115, 117, 118, 124, 125, 128, 131, 132], амплитудного квантования [3, 8, 18, 21, 32, 63, 72, 79, 81, 84, 101, 108, 109, 116, 119, 123, 127], их взаимосвязь [7, 22, 63, 74, 116], а также общие вопросы оптимизации АЦП и используемые критерии [4, 8, 62, 75].

В подавляющем большинстве публикаций рассматривается либо только одна из процедур аналого-цифрового преобразования, либо каждая из процедур независимо. При этом используются различные математические аппараты, методы аппроксимации и критерии. Для временной дискретизации характерно наличие теоретической базы (теорема Котельникова) и большая проработанность по сравнению с амплитудным квантованием. Большое количество публикаций и разнородность подходов обусловило необходимость рассмотреть с единых позиций процедуры дискретизации и квантования, сформулировать обобщенные требования

Здесь и далее ссылки на литературу не исчерпывают всей полноты публикаций по теме.

к процедурам, АЦП и сигналам, получить или уточнить оценки возникающих погрешностей.

Проблема анализа и оптимизации аналого-цифрового преобразователя сигналов в телекоммуникационных и информационно-измерительных системах в целом не решена. Это связано с отсутствием единого теоретического обоснования (единой методологии) анализа процессов временной дискретизации и амплитудного квантования, различными подходами к анализу детерминированных и случайных сигналов, различными методиками оценки возникающих погрешностей. Имеются попытки оптимизации АЦП по отдельным процедурам преобразования или группам ошибок [8, 72, 81, 127], однако вводимые ограничения (условия) не позволяют обобщить и использовать полученные результаты вне рассматриваемых случаев.

Диссертационная работа посвящена проблеме создания единой теории временной дискретизации и амплитудного квантования при анализе и оптимизации АЦП и оценке возникающих погрешностей.

Актуальность темы. Расширение областей применения цифровых методов и аппаратуры неизбежно приводит к расширению спектра требований к характеристикам и параметрам преобразователей по точности, быстродействию, видам преобразуемых сигналов, сложности устройств и т.п. Возникают проблемы анализа и оптимизации АЦП, применимости полученных ранее результатов в новых условиях и областях, пригодности используемых критериев и разработка их новых видов, в большей степени отвечающих требованиям отдельных применений.

Широкое применение в цифровых системах адаптивных алгоритмов, в том числе и при аналого-цифровом преобразовании сигналов, требуют, с одной стороны, глубокого понимания процессов преобразования и предельных соотношений и, с другой стороны, наличия достаточно простых оценок погрешностей. Особое значение оценки погрешностей приобретают при разработке адаптивных систем для реального масштаба времени, с ограничениями по массогабаритным показателям, потребляемой мощности и т.п.

Связь с научными программами, планами, темами. Тема диссертационной работы входила, как составная часть, в ряд научно-исследовательских работ,

выполненных по госбюджетной и хоздоговорной тематике в Харьковской государственной академии железнодорожного транспорта.

□ «Повышение эффективности и надежности систем связи», Харьков, 1984-1986, ГР № 01830055151. Диссертант являлся соисполнителем темы.

□ «Разработка и исследование методов и систем автоматического контроля и управления сложных радиоэлектронных комплексов», Харьков, 1985, ГР № 01840015777. Диссертант являлся соисполнителем темы.

□ «Разработка и внедрение систем спутниковой связи в общем комплексе единой структуры связи МПС», Харьков, 1988, ГР № 01880028494. Диссертант являлся ответственным исполнителем темы.

□ «Исследование возможностей создания системы радиосвязи для контроля и управления объектами нефтяной промышленности», Харьков, 1989, ГР № 01890083224. Диссертант являлся соисполнителем темы.

□ “Розробка та дослідження спеціалізованих систем передачі аналогових та дискретних сигналів у цифрових мережах зв’язку залізничного транспорту”, 1997, ГР № 0197U003555. Диссертант являлся ответственным исполнителем темы, выполненной в рамках отраслевой программы информатизации на железнодорожном транспорте Украины.

Цели и задачи исследования. Объектом исследования являются процессы аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования сигналов в телекоммуникационных и информационно-измерительных системах. Предметом исследования являются условия и требования идеальных процедур квантования и дискретизации, методология их описания и оптимизации параметров, а также ошибки, возникающие в реальных условиях и системах. Цель диссертационных исследований заключается в разработке единой теории анализа временной дискретизации и амплитудного квантования, единого теоретического аппарата оптимизации АЦП детерминированных и случайных сигналов, систематизации методологических требований идеального преобразования и оценка погрешностей, возникающих в реальных устройствах.

Для достижения поставленных целей решались следующие задачи.

Формулирование единой теории анализа процессов временной дискретизации и амплитудного квантования сигналов.

Систематизация, уточнение и формулировка требований идеальной дискретизации и квантования.

Обоснование наиболее эффективных критериев анализа АЦП в условиях реальных применений.

Обобщение вероятностных методов анализа на детерминированные сигналы.

Получение оценок погрешностей преобразования для реальных условий, применимых в инженерной практике.

Разработка методов определения параметров оптимальных и квазиоптимальных АЦП по минимуму погрешностей преобразования для детерминированных и случайных сигналов.

Основу методов исследования составляют классическая теория сигналов, аппарат преобразования Фурье (спектральный анализ) и теория вероятности.

Показана возможность и эффективность применения вероятностных методов для анализа детерминированных сигналов (помимо корреляционного анализа), при использовании введенных автором интегральной и дифференциальной функций распределения детерминированного сигнала по уровням.

Используя классическую теорию сигналов, методы спектрального преобразования Фурье, теорию вероятностей было осуществлено обобщение теоремы Котельникова на процедуру амплитудного квантования, что позволило прийти к единой теории анализа и оптимизации АЦП.

Методы условной и безусловной одномерной и многомерной оптимизации использовались при оптимизации АЦП детерминированных и случайных сигналов.

Получение оценок погрешностей временной дискретизации и амплитудного квантования базировалось на использовании методов приближения сигналов или их спектров степенными функциями. Погрешности восстановления реальными фильтрами сигналов по отсчетам основаны на теории фильтров.

При проверке полученных теоретических положений и результатов широко использовались методы статистических испытаний и машинного моделирования.

Научная новизна полученных результатов.

О Сформулированы условия идеального амплитудного квантования, обобщающие теорему Котельникова на случай амплитудного квантования.

ЦI Предложен корреляционный критерий, эффективный при анализе амплитудного квантования сигналов.

[f] Для анализа процессов амплитудного квантования детерминированных сигналов предложено использовать интегральную и дифференциальную функции распределения сигнала по значениям. Получены аналитические выражения этих функций для ряда сигналов.

В Сформулирована единая теория анализа процессов временной дискретизации и амплитудного квантования сигналов.

Ц Показано влияние начальной фазы дискретизирующей последовательности импульсов на результаты дискретизации. Получено соотношение фаз исходного сигнала и дискретизирующей последовательности, при котором искажения отсутствуют.

Показано преобразование детерминированного сигнала в нестационарный случайный процесс при амплитудном квантовании на фоне шума.

fI Получены аналитические выражения взаимосвязи интервалов временной дискретизации и амплитудного квантования, учитывающие корреляционные функции сигнала и шума.

Практическое значение полученных результатов.

О Получены оценки среднеквадратичных погрешностей временной дискретизации, возникающих при ограниченном числе отсчетов, неограниченности спектра сигнала, неидеальности характеристик восстанавливающих фильтров, дискретизации на фоне шумов, а также в схеме выборки и хранения АЦП, пригодные для инженерной практики.

О Получены выражения целевых функций для оптимизации АЦП детерминированных и случайных сигналов, позволяющие применить стандартные методы оптимизации.

О Показана возможность осуществления в процессе временной дискретизации когерентного детектирования или преобразования частоты.

О Получены условия неискаженного частотного преобразования спектров полосовых сигналов при дискретизации.

О Показано, что в результате оптимизации возможно уменьшение уровня шумов квантования для гауссова сигнала на (1,5...2)дБ, для гармонического колебания - на величину ~ 1 дБ.

О Получены выражения для функции распределения и параметров случайного сигнала, являющегося результатом амплитудного квантования детерминированного сигнала на фоне шума

Апробация работы. Результаты диссертационных исследований докладывались на следующих научно-технических конференциях, семинарах, школах.

□ VIII Всесоюзная конференция по теории кодирования и передачи информации. Куйбышев, КАИ, 1981.

□ Всесоюзная научно-техническая конференция (ВНТК) «Измерение параметров и формы спектра радиотехнических сигналов». Харьков, НПО «Метрология», 1981.

□ Школа специалистов на ВДНХ СССР «Помехи и борьба с ними». Москва, ЦПНТОРЭС им. А.С. Попова, 1982.

□ Научно-техническая конференция (НТК) «Повышение эффективности систем передачи и обработки информации». Севастополь, Севастопольский приборостроительный институт, 1982.

□ Всесоюзная школа-семинар «Микропроцессоры в системах связи и управления». Харьков-Алушта, ХИИТ, 1986.

□ ВНТК «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического и машинного моделирования». Тамбов, ТВАИИУ, 1991.

□ IV Всероссийская конференция «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического и машинного моделирования». Тамбов, ТВАИИУ, 1995.

□ Школа-семинар «Микропроцессорные системы связи и управления на железнодорожном транспорте». Харьков-Алушта, ХарГАЗТ, 1994, 1995.

□ Українська НТК "Метрологія та вимірювальна техніка" (Метрологія-95). Харків, ДНВО "Метрологія", 1995.

□ НТК Харківського військового університету. Харків, ХВУ, 1999.

□ XLIV, XLV, *46 - 49, 51, 52 НТК кафедр інститута і спеціалістів залізничного транспорту. Харків, ХИИТ, 1982 - 1987, 1989, 1990г.г.

□ 56-62 НТК кафедр академії та спеціалістів залізничного транспорту за міжнародною участю. Харків, ХарДАЗТ, 1994-2000р.р.

Матеріали дисертаційних досліджень опубліковані в 14 статтях в науково-технічних журналах, 11 статтях в науково-технічних збірниках трудов, 8 тезисах доповідей на науково-технічних конференціях, семінарах, школах і т.п.

В статті [98] автору належить аналіз процесів перетворення спектрів сигналів при зсуві з несучої на нульову частоту.

РАЗДЕЛ 1

МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРОБЛЕМАТИКА АЦП, ЦАП И ПРЕОБРАЗУЕМЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Проблематика аналого-цифрового преобразования сигналов

Процесс преобразования сигналов из непрерывной (аналоговой) формы в цифровую и наоборот включает несколько процедур, выполняемых, как правило, последовательно и отдельными устройствами. На рис. 1.1.1 приведена укрупненная структурная схема, содержащая аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифровое оборудование (ЦО) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП).

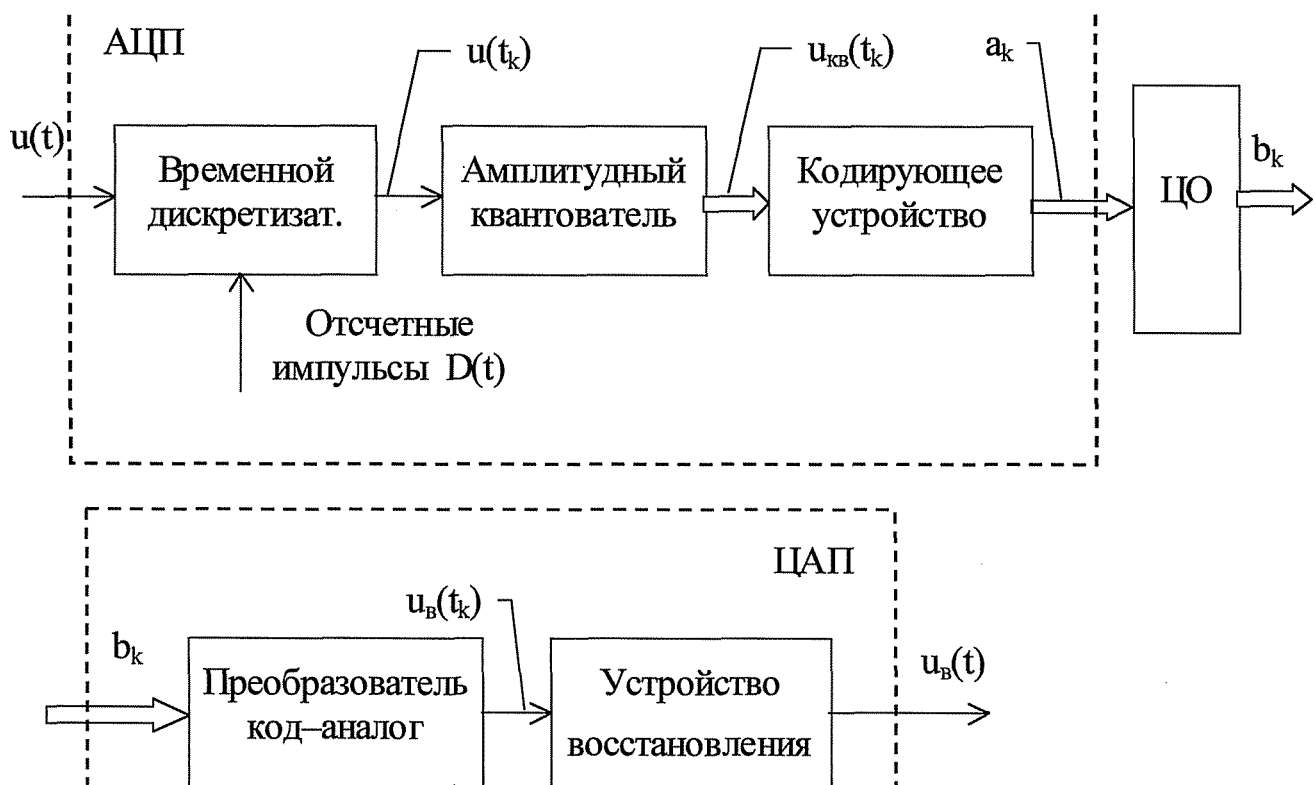


Рис. 1.1.1 Структурная схема преобразования сигналов

В АЦП непрерывный входной сигнал $u(t)$ дискретизируется по времени $u(t_k)$ и квантуется по амплитуде $u_g(t_k)$ с преобразованием квантованных значений в соответствующие кодовые комбинации a_k .

Цифровое оборудование выполняет одну или несколько операций по передаче, хранению, обработке цифровых сигналов с целью повышения

помехоустойчивости, уплотнения каналов, обеспечения конфиденциальности, выделению и преобразованию информации и т.п.. В результате обработки или (и) воздействия помех входной код a_k преобразуется в выходной b_k

В ЦАП кодовые комбинации b_k преобразуются в соответствующие величины выходного напряжения v_k дискретные по времени и значению, с последующим преобразованием в непрерывный выходной сигнал $u_B(t)$. Это преобразование может осуществляться устройствами восстановления различных типов: интерполирующих, экстраполирующих, с использованием фильтров или генераторов восстанавливающих функций.

Современные телекоммуникационные и информационно-измерительные системы в большинстве случаев являются смешанными, содержащими аналоговое и цифровое оборудование, с преобразованием аналоговых и цифровых сигналов на входах, выходах или (и) в промежуточных точках. Эти преобразования могут осуществляться даже при отсутствии АЦП или ЦАП как физических объектов.

В цифровых системах связи, вещания, аудио- и видеозаписи, телеметрии и др. сигналы подвергаются обработке, прежде всего с целью уменьшения влияния помех и искажений, вносимых оборудованием и линиями связи. Входные и выходные сигналы имеют, как правило, аналоговую форму представления и выходной сигнал должен воспроизводить входной с максимальной точностью (не хуже заданной). В таких системах возможна оценка качества преобразования путем сопоставления входного и выходного аналоговых сигналов. В общем случае оценка качества процесса преобразования должна производиться по критерию качества всей системы. Однако это, как правило, выливается в трудноразрешимую задачу. В такой ситуации анализ, синтез и оптимизацию АЦП и ЦАП выполняют как самостоятельную задачу, учитывая общесистемные цели соответствующим выбором критерия оценки качества преобразования и граничных условий.

Таким образом, для проведения анализа, синтеза и оптимизации процесса преобразования необходимо иметь описание (модель) АЦП и ЦАП, знать (по возможности) параметры и характеристики преобразуемых сигналов и определиться с критерием оценки качества.

Большое разнообразие типов АЦП и ЦАП требует введения некоторой системы их классификации. На рис. 1.1.2 приведена укрупненная схема классификации, в основу которой положены отдельные процедуры, выполняемые АЦП и ЦАП. В ряде источников [7, 27, 33] приведены более подробные схемы классификации с использованием различных подходов.

Главное внимание в работе уделяется наиболее простым в технической реализации преобразователям с равномерной временной дискретизацией, детерминированным амплитудным квантованием и восстановлением с использованием фильтров.

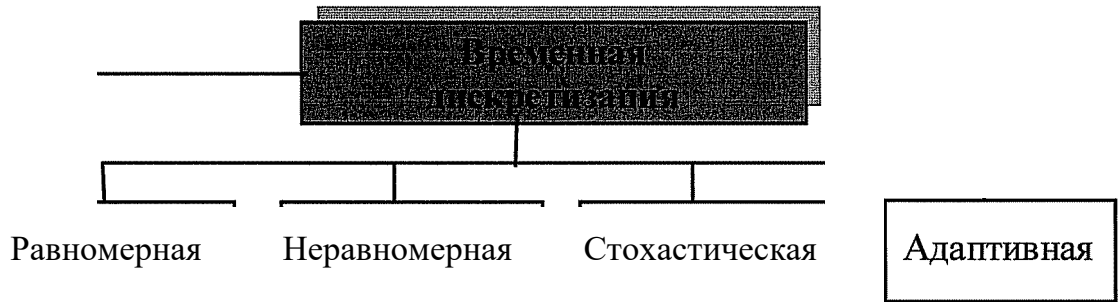
Использование различных методов кодирования отсчетов после амплитудного квантования позволяет уменьшить ошибки, вносимые ЦО при обработке сигналов, обнаруживать неисправности АЦП, улучшить согласование с каналом связи и т.п. [1]. Выбор оптимального кода является самостоятельной и достаточно сложной задачей, выходящей за рамки данной работы. Это же относится к адаптивным и стохастическим методам дискретизации, результаты исследований которых можно найти в [34, 80].

В разделе 1.2 рассмотрены разновидности временной дискретизации, методы их описания, а также определены основные задачи исследования процедуры дискретизации.

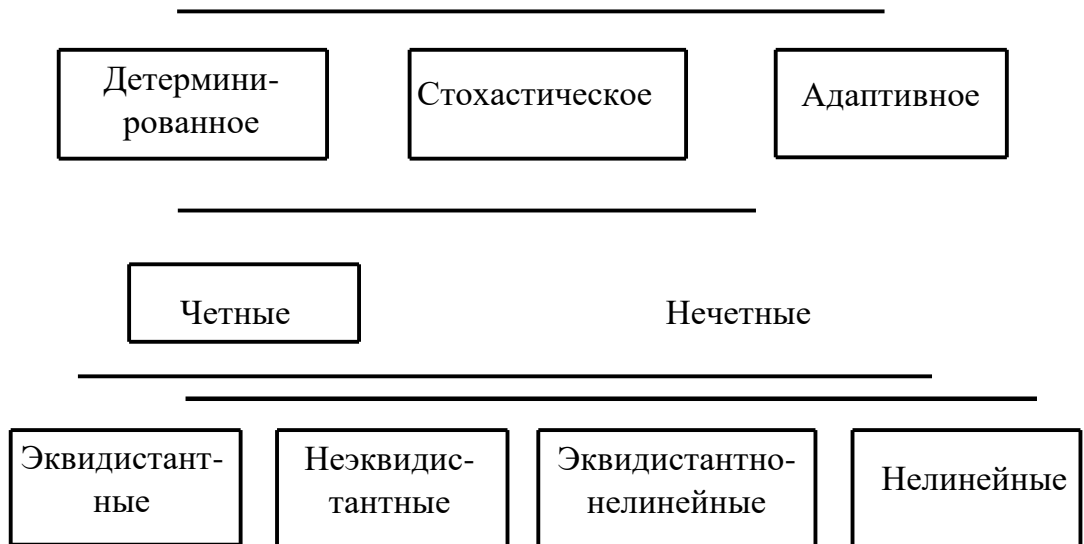
В разделе 1.3 с позиций предстоящего анализа рассмотрены и классифицированы основные типы амплитудных характеристик АЦП, предложено их описание, приведена связь с параметрами и определены задачи исследования процедуры амплитудного квантования.

Аналого-цифровому преобразованию могут подвергаться как детерминированные, так и случайные сигналы. При анализе процесса преобразования, оценке возникающих погрешностей необходимы различные формы описания сигналов и представления их параметров. Помимо традиционных, возникает необходимость в применении специфических характеристик и параметров анализируемых сигналов, а также отыскание новых подходов к анализу. В разделе 1.4 рассмотрены наиболее

**Методы
классификации АЦП и ЦАП**



И. 'Скван/юнапи'



Кодирование

Восстановление

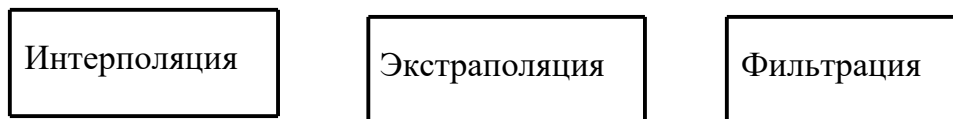


Рис. 1.1.2 Классификация АЦП-ЦАП

важные методы представления сигналов и их параметров, используемые в последующих разделах. При этом основное внимание уделено специальным видам характеристик и параметров сигналов, необходимость в которых возникает при анализе АЦП.

В разделе 1.5 рассмотрены наиболее употребительные виды критериев, используемых в информационно-измерительных системах. В их числе приведен и корреляционный критерий, предложенный для анализа АЦП и позволивший установить взаимосвязь его временных и амплитудных параметров. Проведено сопоставление наиболее широко распространенного среднеквадратичного критерия с корреляционным.

1.2. Методы и проблематика временной дискретизации

Процедура временной дискретизации непрерывных сигналов широко используется в системах связи, телевидения, телеметрии, статистическом анализе и многих других областях самостоятельно, или как составная часть аналого-цифрового преобразования. Изложение теории дискретизации, методов её реализации и их классификацию можно найти в целом ряде монографий, учебников [26, 27, 33, 74, 114] и в большом числе статей [22, 30, 78, 88, 91, 117 и др.].

Наибольшее применение нашла равномерная (регулярная) дискретизация в силу простоты анализа и технической реализации. На рис. 1.2.1,а показан исходный сигнал $u(t)$ и на рис. 1.2.1,б показан результат равномерной дискретизации. При этом непрерывный во времени сигнал заменяется своими выборками (отсчетами) $u(t_k)$, взятыми в моменты $t_k = kA_t + t_0$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, где $A_t = t_{k+1} - t_k$ - шаг дискретизации, t_0 - начальное смещение отсчетов. Обычно полагают $t_0 = 0$. Частоту дискретизации можно определить из временного интервала (шага):

$$\omega_{\sim} = 2\pi f_{\sim} = \frac{2\pi}{A_t} \quad (1.2.1)$$

В равномерной дискретизации можно выделить случай идеальной дискретизации, определяемый теоремой Котельникова и обеспечивающий тождественное восстановление исходного сигнала по его выборкам. Дальнейшая детализация методов равномерной дискретизации связана с различиями в используемых базисных функциях, методах технической реализации, критериях оценки точности и т.п..

Неравномерная дискретизация предполагает взятие отсчетов в моменты t_k , $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, причем для различных значений k интервал $t_{k+1} - t_k = A_{tk}$ принимает разные значения. Можно указать функциональную зависимость момента или интервала дискретизации от его порядкового номера k : $t_k = F_t(k)$ или $A_{tk} = F_A(k)$.

Важным частным случаем является периодическая неравномерная дискретизация, при которой выполняется условие $A_{tk} = A_{t(k+N)}$. Пример неравномерной перио-

дической дискретизации сигнала приведен на рис. 1.2.1,в. В этом случае имеется конечное число (не более N) различных значений интервала $A^k, k \in \overline{1, N}$,

располагающихся на отрезке времени $T_N = \sum_{j=k}^{k+N} A_{t(j-k)}$, одинаковом для любого k .

Величина T_N определяет период неравномерной дискретизации. При периодической неравномерной дискретизации ещё возможен идеальный случай, когда восстанавливаемый сигнал тождественен исходному аналоговому сигналу.

Для описания неравномерной дискретизации используют ещё ряд параметров: минимальное, максимальное и среднее значение интервала A_k , величину отклонения от среднего значения (девиацию). Дальнейшая детализация метода может осуществляться по видам функций $F_i(k)$ или $P_d(k)$, используемым критериям точности и пр.

При стохастической (случайной) дискретизации моменты t_k или A_k являются случайными величинами. На рис. 1.2.1,г приведен пример стохастической дискретизации сигнала $u(t)$. Теоретически все системы дискретизации являются стохастическими в силу нестабильности частоты дискретизации (D_g , наличия сбоев в работе АЦП, ЦО, ЦАП, особенностей функционирования некоторых систем и т. п. В принятой классификации (рис. 1.1.2) под стохастической подразумевается дискретизация с преднамеренно введенной нестабильностью интервала A_k .

При описании процесса стохастической дискретизации можно использовать два способа. В первом способе совокупность точек дискретизации $t_k, |k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, рассматривается как случайный точечный процесс, описываемый некоторым потоком событий (пуассоновским, Пальма, Эрланга и др.) [20, 27]. Другой способ (рис. 1.2.1,г) предполагает, что точки дискретизации t_k получаются как результат отклонения от равномерной дискретизации за счет добавления некоторой случайной величины A^k , - $t_k = kA_t + A^k$. Совокупность значений $A^k, |k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, образует выборку случайного процесса A^k . При описании A^k можно использовать все характеристики случайных процессов: законы распределения вероятностей, характеристические и корреляционные функции, моменты и др. [20, 27]. В системах

стохастической дискретизации случайный процесс является, как правило, стационарным с нулевым средним значением.

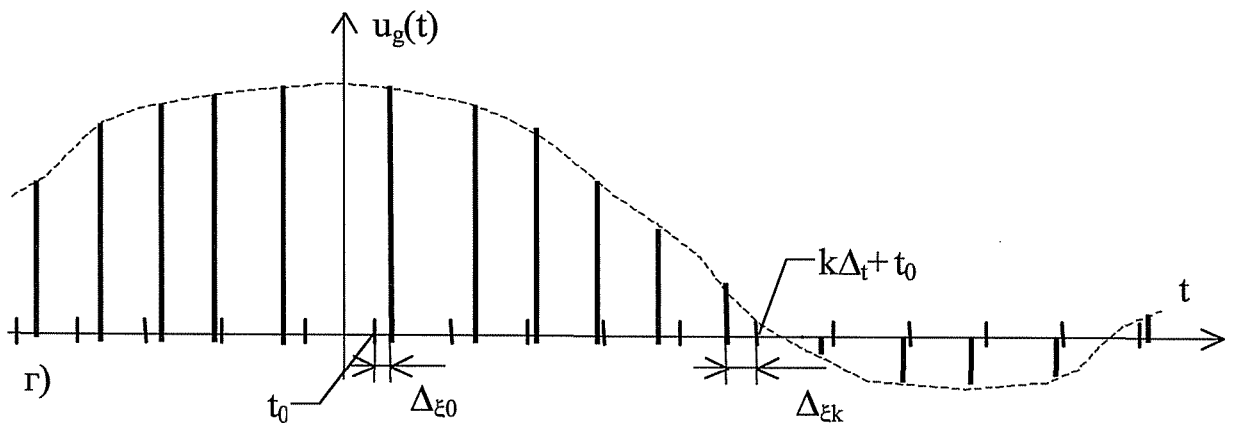
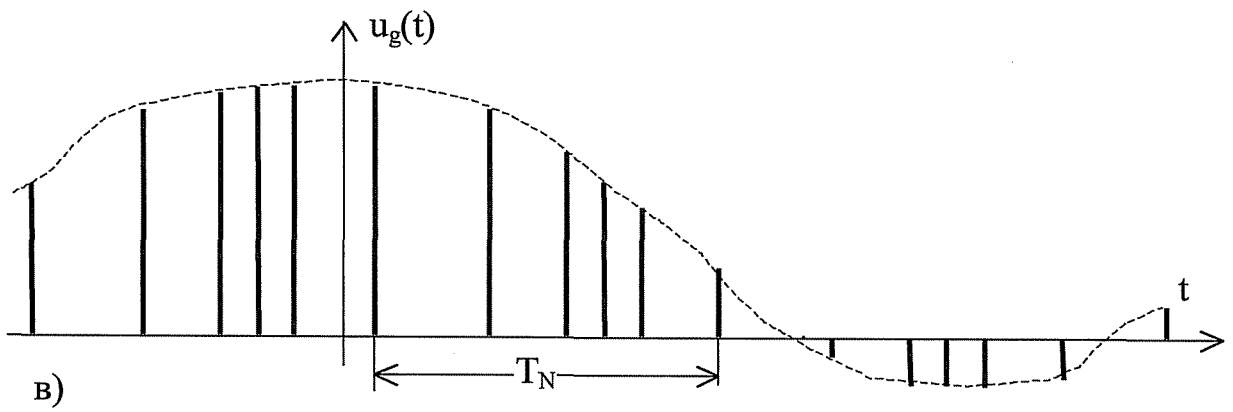
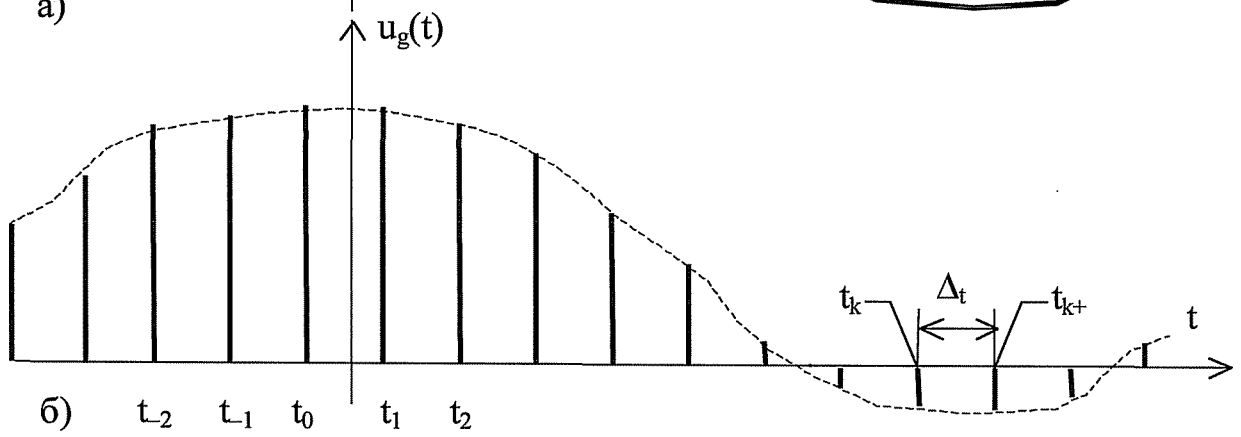
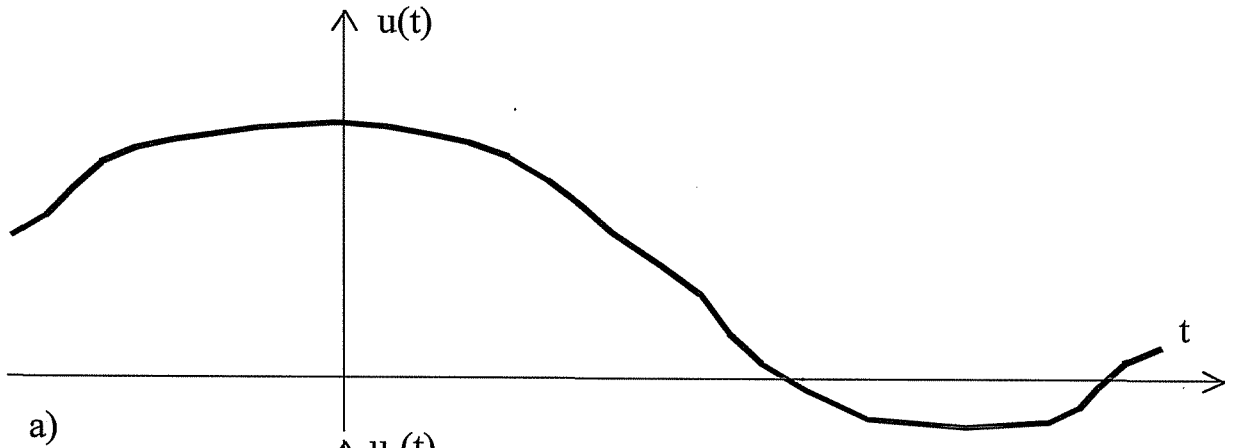


Рис. 1.2.1 Методы временной дискретизации

Особенностью схем временной дискретизации, входящих в состав АЦП, является дополнительная функция запоминания значения выборки на время амплитудного квантования. Поэтому в АЦП временной дискретизатор называют схемой выборки и хранения (СВХ). Это устройство, структурная схема которого приведена на рис. 1.2.2, содержит ключ, запоминающую емкость C и схему считывания. Ключ замыкается короткими импульсами дискретизации (взятия отсчетов) и на этом интер-вале времени запоминающая емкость заряжается до значения входного сигнала. В паузах между отсчетными импульсами емкость хранит значение отсчета. Схема считывания представляет собой повторитель напряжения с большим входным сопротивлением.

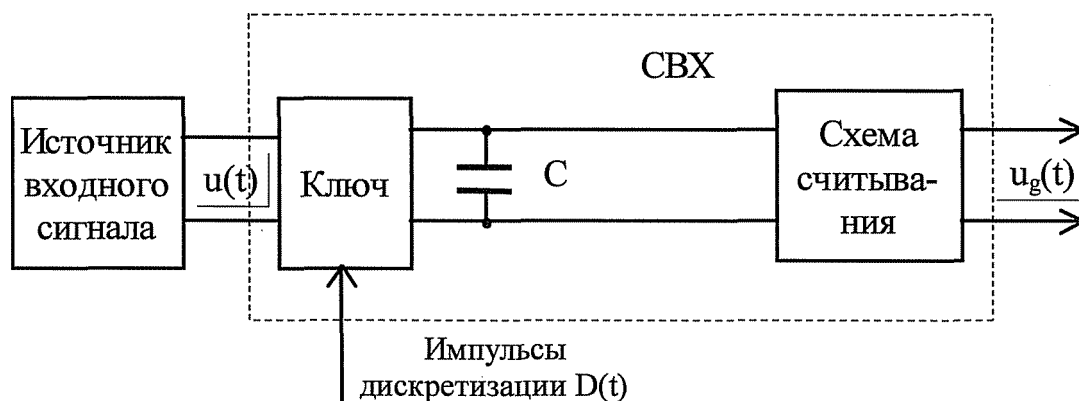


Рис. 1.2.2 Структурная схема выборки и хранения АЦП

Методологическим вопросам временной дискретизации, оценкам возникающих погрешностей, особенностям применения теоремы Котельникова в особых случаях и т.п. посвящено большое число работ [16, 22, 27, 30, 33, 34, 74, 76, 78, 82, 85, 88, 90, 91, 114, 117, 118, 125, 128]. Можно считать, что проблема, в основном, хорошо проработана. Тем не менее, целый ряд аспектов требуют уточнения и детализации, а задача в целом - систематизации и обобщения в рамках АЦП. Можно указать на следующие проблемы.

> Необходимо объединить и сформулировать всю совокупность условий (требований) применимости теоремы Котельникова к сигналам и устройствам. Это

позволит уточнить источники и характер погрешностей в реальных устройствах.

> Требуется рассмотрения вопрос фазовых соотношений сигнала и дискретизирующей последовательности в теореме Котельникова. Влияние фазы косвенно учитывается в работе [33] введением ограничения на спектры дискретизируемых сигналов, что является излишне жестким условием.

> Требуется более детальные оценки погрешностей, вносимых временной дискретизацией в сигналы с неограниченным спектром, при ограниченном числе использованных отсчетов, при восстановлении сигналов реальными фильтрами, при дискретизации импульсами конечной длительности, нестабильностью частоты дискретизации и др.

> Необходимо уточнить некоторые особенности дискретизации сигналов на фоне шума, узкополосных и случайных сигналов.

В данной работе сделана попытка с единых позиций проанализировать все причины возникновения погрешностей временной дискретизации и получить оценки их величин.

1.3. Методы и проблематика амплитудного квантования

Амплитудное квантование дискретного сигнала $u(t_k)$ в АЦП представляет собой процесс отображения континуального множества значений входной величины на конечное множество выходных уровней, представляемых в виде кодовых комбинаций. Отсчет входного сигнала сравнивается с совокупностью фиксированных уровней $\mathbf{U} \in \{u_i; i \in \overline{1, N_v + 1}\}$ и при попадании входной величины $u(t_k)$ между некоторыми уровнями U_j и U_{j+1} ($U_j < U < U_{j+1}$) выходной величине присваивается некоторое фиксированное значение $u_{кв}(t_k)$, преобразуемое в кодовую комбинацию $(a_j)_k$. Каждой кодовой комбинации a_j можно поставить в соответствие некоторое значение y , из множества $\mathbf{V} \in \{y_j; j \in \overline{1, N_v + 1}\}$ выходных состояний АЦП. Фактически при этом используется совместная характеристика АЦП и цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), осуществляющего обратное преобразование кода a_j в аналоговую величину y . Такой прием используется в связи с тем, что анализировать устройство, имеющее различные формы представления входной и выходной величин, невозможно, не приведя их к одному типу: аналоговому или цифровому [120].

Качество преобразования определяется сопоставлением входной и выходной (в системе, обычно, аналоговых) величин, поэтому целесообразно привести все величины к аналоговой форме. Это также позволит одновременно анализировать АЦП и ЦАП. При анализе используется совместная амплитудная характеристика АЦП-ЦАП, устанавливающая связь между входной непрерывной величиной $y_{вх}$ АЦП и выходным состоянием $y_{вых}$ ЦАП. При этом подразумевается, что выход АЦП непосредственно соединен с входом ЦАП.

Параметрами амплитудной характеристики являются разрядность v , основание кода p и интервал (шаг) амплитудного квантования по входу - A_n и по выходу - A_v . Вид амплитудной характеристики определяют два вектора - входных уровней сравнения \mathbf{U} и выходных уровней состояния \mathbf{V} :

$$\mathbf{U} \in \{u_i = l_u(i), i \in \overline{1, N_v}; U_0 = \Delta_j; u_{N_v+1} = \infty\}, \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{V} \in \{V_j = f_v(j), j \in \overline{1, N_v+1}\}, \quad (1.3.2)$$

где N_v - целое число, определяющее размерность векторов.

Величина N_v определяет количество физически реализуемых уровней сравнения в векторе U . Кроме них в этом векторе имеются два условных бесконечных уровня $U_0 = -\infty$ и $U_{N_v+1} = \infty$. Вектор V имеет N_v+1 только физически реализуемых выходных уровней ЦАП.

В АЦП каждому элементу вектора V ставится в соответствие кодовая комбинация из множества $A \in \{a_j, j \in 1, N_v + 1\}$ ($v_j \rightarrow a_j$). Размерность векторов U, V и мощность множества A определяются разрядностью v , основанием кода p и типом АЦП.

Если в выходном коде A АЦП использованы все возможные кодовые комбинации при данных разрядности v и основании p , то

$$N_v = p^v - 1 \quad (1.3.3, a)$$

и такой преобразователь будем называть АЦП 1-го типа. При двоичном основании кода ($p=2$) получим АЦП, который будем называть нечетным, и

$$N_v = 2^v - 1. \quad (1.3.3, б)$$

Если одна из возможных комбинаций исключается, то

$$N_v = p^v - 2 \quad (1.3.4, a)$$

и такой преобразователь будем называть АЦП 2-го типа. При двоичном основании АЦП будем называть четным и тогда

$$N_v = 2^v - 2. \quad (1.3.4, б)$$

Поскольку двоичное основание нашло в АЦП наибольшее применение, то в дальнейшем будем полагать $p = 2$, если не оговаривается иное значение.

Четность или нечетность N_v определяет особенность симметричной амплитудной характеристики в начале координат. На рис. 1.3.1 приведены формы характеристик идеализированных АЦП, имеющих фиксированные интервалы $A_n = U_{i+1} - U_i$ и $A_v = V_{j+1} - V_j$, $i \in 1, N_v$, при $v \rightarrow \infty$. На рис. 1.3.1, а изображена характеристика нечетного АЦП и на рис. 1.3.1, б - четного. Так как у нечетного АЦП имеется уровень $U_{(N_v+1)/2} = 0_5$ то характеристика такого преобразователя обладает свойством ограничителя в окрестностях точки $y_{вх} = 0$ (для $|u_{вх}| < A_u$). Четный

АЦП обладает в этой точке “мертвой зоной”.

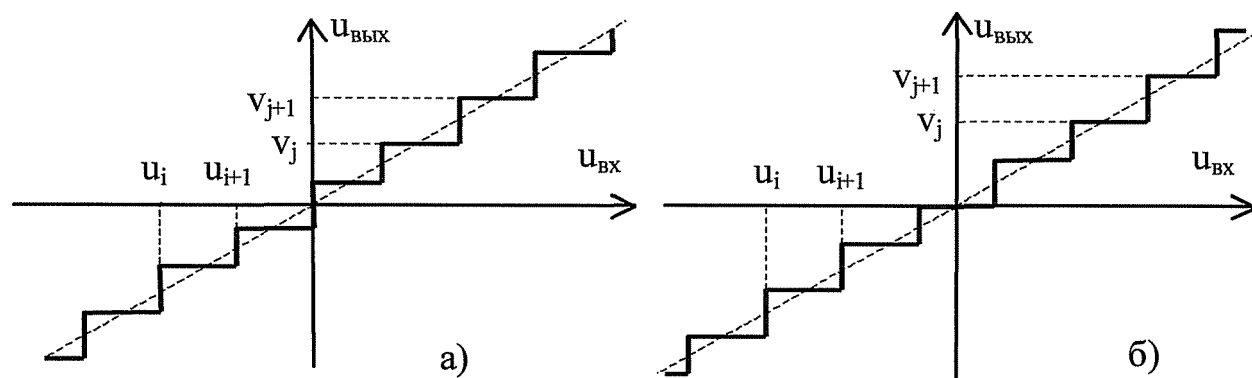


Рис. 1.3.1 Амплитудные характеристики идеализированных АЦП

Важнейшим свойством гипотетического АЦП (рис. 1.3.1) является отсутствие эффекта ограничения по максимуму при любых значениях входного сигнала $|U_{ВХ}| > A_u$.

Реальные АЦП обладают конечными значениями параметров u_b , u_{N_v} , v_b , v_{N_v+1} и v . Это позволяет определить динамические диапазоны АЦП и ЦАП:

$$D_u = u_{N_v} - u_i, \quad (1.3.5)$$

$$D_v = v_{N_v+1} - v_i. \quad (1.3.6)$$

Форма амплитудной характеристики АЦП определяется видом функциональных зависимостей $u_i = f_u(i)$ и $v_j = f_v(j)$, связывающих уровни сравнения и состояния с их номерами. Можно выделить четыре характерных вида амплитудной характеристики: эквидистантную (равномерную), эквидистантно-нелинейную (равномерно-нелинейную), неэквидистантную (неравномерно-линейную) и нелинейную.

Равномерные АЦП-ЦАП. Функции $f_u(i)$ и $f_v(j)$ у этих АЦП линейны и могут быть представлены в виде:

$$u_j = u_i + (j-1)A_u, \quad j \in \{1, N_v\}; \quad v_j = v_i + (j-1)A_v, \quad j \in \{1, N_v+1\}, \quad (1.3.7)$$

где u_i и v_i - первые (начальные) элементы векторов U и V ; A_u и A_v - постоянные интервалы квантования.

Динамические диапазоны (1.3.5), (1.3.6) АЦП-ЦАП такого типа будут равны

$$D_u = (N_v-1)A_u \quad \text{и} \quad D_v = N_v A_v. \quad (1.3.8)$$

На рис. 1.3.2 приведены амплитудные характеристики нечетного (рис. 1.3.2,а) и четного (рис. 1.3.2,б) эквидистантного АЦП. Характерным признаком такого АЦП является постоянство интервалов дискретизации $A_u = u_{i+1} - u_i$ и $A_v = v_{j+1} - v_j$ при любых значениях i и j , что обуславливает линейность усредненной характеристики

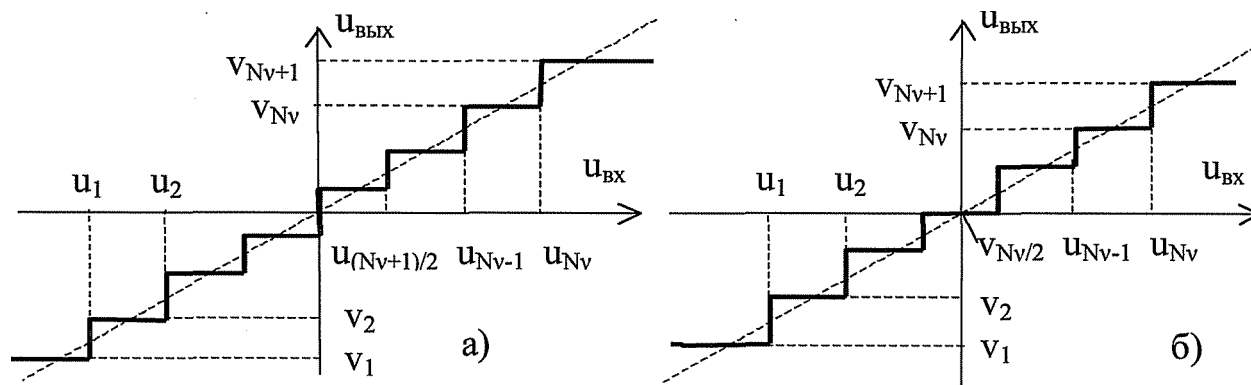


Рис. 1.3.2 Амплитудные характеристики равномерных АЦП

(пунктир на рис. 1.3.2). Главное достоинство равномерного АЦП-ЦАП в простоте его технической реализации и многообразии схемных решений.

Равномерно-нелинейные АЦП-ЦАП. У этих преобразователей функция $f_u(i)$ линейна, а $f_v(j)$ нелинейная относительно номера уровня. В результате этого интервал A_u остается постоянным, независимо от значения i , а интервалы A_vj изменяются в зависимости от значения j . На рис. 1.3.3 приведены возможные формы амплитудной характеристики нечетного (рис. 1.3.3,а) и четного (рис. 1.3.3,б) эквидистантно-нелинейного АЦП-ЦАП. Характерной особенностью данного АЦП является нелинейность преобразования входных сигналов при равномерном расположении входных уровней сравнения. Выбором вида функции $f_v(j)$ можно осуществлять сжатие или расширение динамического диапазона выходных сигналов. Техническая реализация данного АЦП не сложнее, чем у равномерного, но несколько усложняется реализация ЦАП.

Неравномерно-линейные АЦП-ЦАП. Данный тип преобразователей имеет нелинейные функции $f_u(i)$ и $f_v(j)$, но они выражаются через единую функцию

$$f_u(i) = f(2i), i \in 1, N_v, f_v(j) = f(2j-1), j \in 1, N_v + 1. \quad (1.3.9)$$

На рис. 1.3.4 приведены амплитудные характеристики нечетного (рис. 1.3.4,а) и

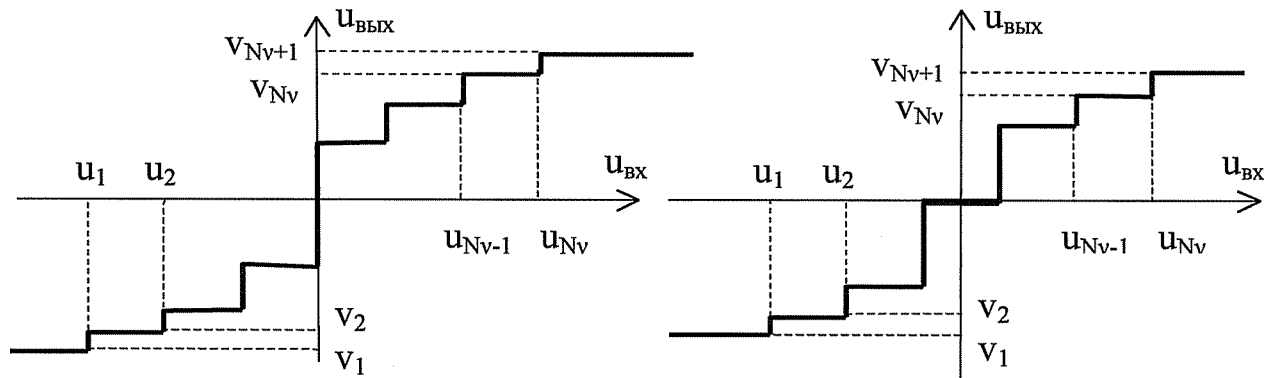


Рис. 1.3.3 Амплитудные характеристики равномерно-нелинейных АЦП

четного (рис. 1.3.4,6) неэквидистантного АЦП-ЦАП. Благодаря единой функции $f(\diamond)$ усредненная характеристика (пунктир на рис. 1.3.4) остается линейной. Такой вид преобразования позволяет соответствующим выбором функции $f(\diamond)$ осуществить сжатие динамического диапазона входного сигнала АЦП с последующим его восстановлением в ЦАП. Тем самым уменьшается динамический диапазон цифрового сигнала (разрядность v). В частности, в качестве функции $f(*)$ могут быть использованы широко применяемые в многоканальных системах связи с ИКМ характеристики типа ц и типа А, а также сегментные характеристики компрессии, рекомендуемые МККТТ [5, 69].

Нелинейные АЦП-ЦАП. Эти преобразователи имеют нелинейные и различные функции $f_u(i)$ и $f_v(j)$. Возможный вид амплитудной характеристики данного вида АЦП-ЦАП приведен на рис. 1.3.5,а - нечетного типа и на рис. 1.3.5,б - четного.

В нелинейных АЦП-ЦАП осуществляется нелинейное преобразование сигналов, характер которого определяется видом функций $f_u(i)$ и $f_v(j)$. Амплитудная характеристика такого преобразователя может быть нечетно-симметричной относительно нуля или некоторого значения входной величины (см. рис. 1.3.2-1.3.5), либо несим-метричной. На рис. 1.3.6 приведены амплитудные характеристики линейного (рис. 1.3.6,а) и нелинейного (рис. 1.3.6,б) несимметричного АЦП-ЦАП.

Еще одной характеристикой АЦП-ЦАП является матрица расстояний между выходными уровнями состояний

$$L = \{A_{vj} = V_j - V_i; i, j \in \{1, N_v + 1\}\}. \quad (1.3.10)$$

Матрица (1.3.10) является кососимметрической с нулевыми элементами на главной диагонали. В случае равномерного АЦП-ЦАП матрица (1.3.10) примет вид (1.3.11).

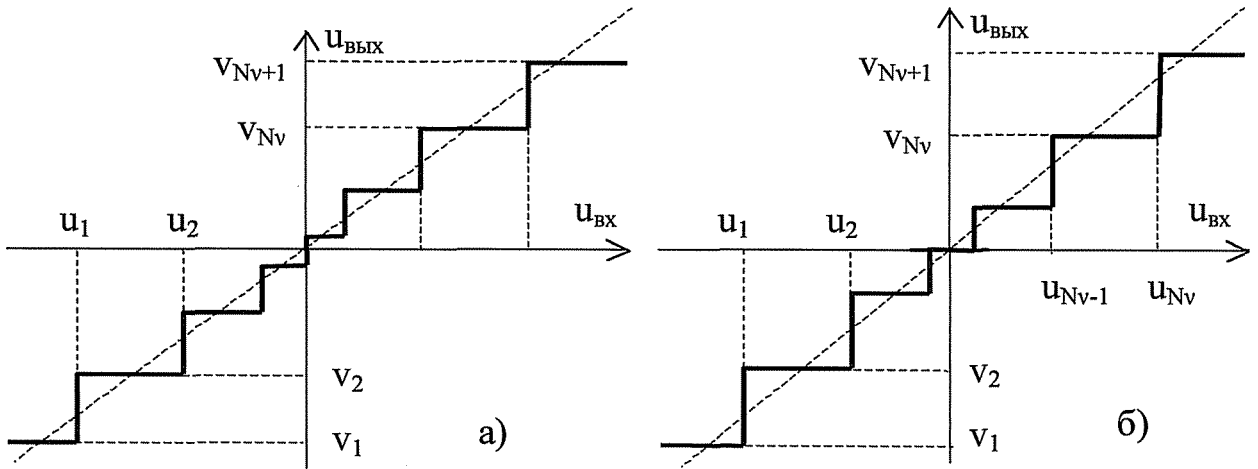


Рис. 1.3.4 Амплитудные характеристики неравномерно-линейных АЦП

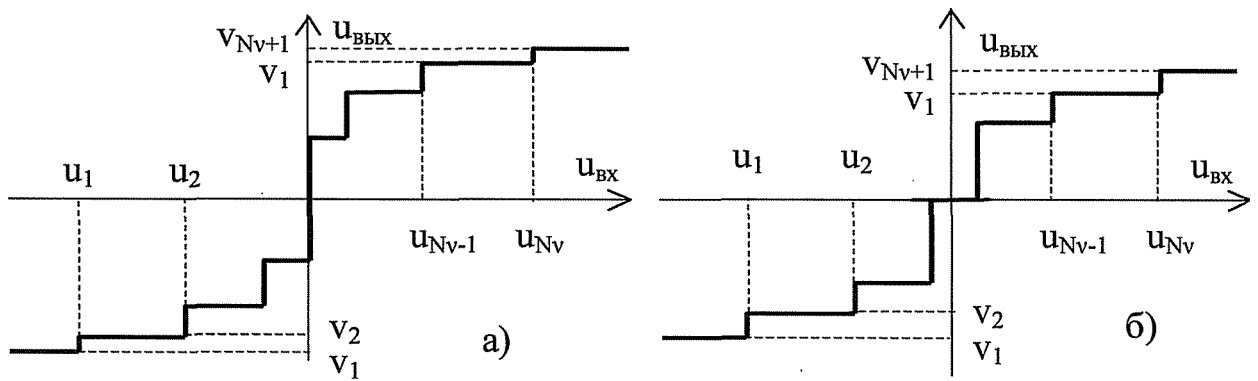


Рис. 1.3.5 Амплитудные характеристики нелинейных АЦП

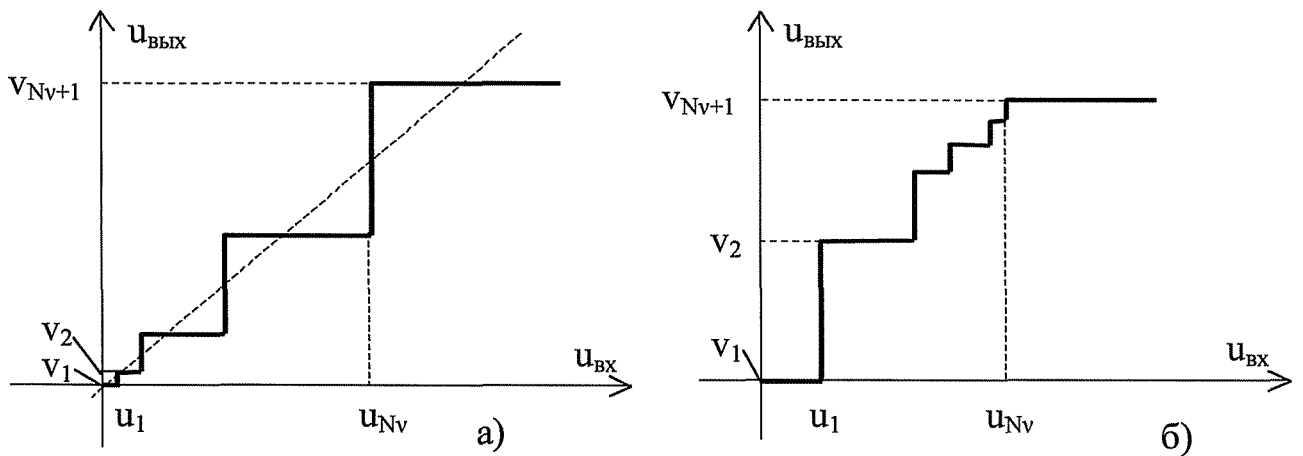


Рис. 1.3.6 Амплитудные характеристики несимметричных АЦП

Основная проблема амплитудного квантования заключается в отсутствии теоретической базы, подобной теореме Котельникова для временной дискретизации. Между тем, процессы квантования и дискретизации фактически

отличаются только физической природой параметра: напряжение (или ток) и время. Очевидно, что теорему Котельникова можно обобщить на амплитудное квантование при соответствующей формулировке и определении условий её справедливости.

$$D = A < \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & -N_v-1 & N_v & \\ -1 & 0 & 1 & -N_v-2 & N_v-1 & \\ -2 & -1 & 0 & -N_v-3 & N_v-2 & \\ & & & & & \\ -N_v & -(N_v-1) & -(N_v-2) & -1 & 0 & \end{array} \quad (1.3.11)$$

В значительной части работ по амплитудному квантованию сигналов используется упрощенный подход, при котором квантователь сводится к линейному устройству, вносящему шум квантования [7, 19, 22, 23, 25, 64, 71, 74, 87 и др.]. Такой подход справедлив при выполнении жестких условий, которые не всегда выполняются, особенно в части необходимого соотношения интервалов временной дискретизации и амплитудного квантования.

Для случайных сигналов разработана статистическая теория квантования [3, 21, 63, 72, 123,127], позволившая определить параметры случайного процесса на выходе АЦП и погрешность квантования. Однако при этом затруднена оценка составляющих суммарной ошибки и их предельных значений.

Таким образом возникает необходимость решения следующих задач амплитудного квантования.

- > Разработка единой теории амплитудного квантования - временной дискретизации путем обобщения теоремы Котельникова на амплитудное квантование (идеальное квантование).
- > Определение взаимосвязи интервалов амплитудного квантования и временной дискретизации для различных условий преобразования.
- > Определение вероятностных характеристик и параметров детерминированных и случайных сигналов, квантуемых на фоне шума.
- > Разработка единого подхода к оптимизации АЦП детерминированных и случайных сигналов.

1.4. Методы представления сигналов

Аналого-цифровому преобразованию подвергаются детерминированные и случайные сигналы. При их описании и анализе используют различные математические аппараты. Для детерминированных сигналов широко используют временное представление и анализ, различные интегральные преобразования (Фурье, Лапласа, Гильберта и др.). Для случайных сигналов основным аппаратом анализа является теория вероятности и математическая статистика.

Детерминированные сигналы используются преимущественно в качестве несущих (связь, телевидение, навигация), зондирующих (радиолокация), испытательных и др.. При цифровом формировании таких сигналов преобразованию на этапе проектирования подвергается некоторый аналоговый прототип .

При временном описании детерминированных сигналов используют представление в виде некоторой функции $u(t)$. Эта функция должна удовлетворять условиям физической реализуемости. Одно из условий - это ограниченность энергии сигнала:

$$Э_c = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt < \infty . \quad (1.4.1)$$

Другое условие - это ограниченность максимального и минимального значений сигнала и его производных :

$$|u^{(n)}(t)| < M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.2)$$

где $u^{(n)}(t)$ - n-ая производная сигнала $u(t)$.

У физически реализуемых сигналов основная доля энергии сигнала сосредоточена на ограниченном временном интервале. Величина этого интервала определяется эффективной длительностью сигнала, которая равна

$$T_{эфф} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt} \quad (1.4.3)$$

где $t_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$ - среднее временное значение сигнала.

Без ущерба для общности, заменой переменной t на $t_i = t - tq$ можно обеспечить $t_{cp} = 0$. В этом случае можно считать, что вне интервала $[-aT_{\text{эфф}}; aT_{\text{эфф}}]$ значения сигнала пренебрежимо малы и не вносят существенного вклада в общую энергию (1.4.1). Значение коэффициента $a > 0,5$ и зависит от формы сигнала и требуемой точности анализа.

Детерминированные сигналы часто удовлетворяют условию периодичности:

$$u(t) = u(t + kT_n), \quad -\infty < t < \infty, \quad |k| \in \{0; 1; 2; \dots\}, \quad (1-4.4)$$

где T_n - период сигнала.

Энергия сигнала на интервале периода будет конечной и не зависящей от начальной точки t_0 :

$$E_{T_n} = \int_{t_0}^{t_0 + T_n} u^2(t) dt < \infty.$$

На бесконечном временном интервале периодические сигналы не удовлетворяют условию физической реализуемости в соответствии с (1.4.1). Для устранения этого недостатка воспользуемся временным интервалом $[t_{\text{нач}}; t_{\text{кон}}]$ конечной длительности $T_{\text{раб}} = t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}}$, определяющим время функционирования системы. Это может быть интервал между моментами включения и выключения аппаратуры, время занятия канала связи, максимальное время анализа или формирования сигнала и т.п. .

Будем считать, что сам сигнал и условие периодичности возможны лишь на интервале $[t_{\text{нач}}; t_{\text{кон}}]$:

$$u(t) = u(t + kT_n),$$

Тогда энергия периодического сигнала также будет конечной и равной

$$E_{\text{стл}} = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} u^2(t) dt = N_{\text{пов}} E_{T_n} < \infty, \quad (1.4.5)$$

где $N_{п0}B = T_{раб}/T_{п} \gg 1$ - количество периодов сигнала $u(t)$ на интервале $T_{раб}$ ($N_{п0}B^{<00}$)- Выполнение условия (1.4.5) позволяет рассматривать периодические сигналы как физически реализуемые.

Вероятностные методы анализа сигналов и систем позволяют получить результаты, недостижимые другими методами. Целесообразно также использование единой методики анализа сигналов, независимо от его типа. Всё это обуславливает желательность (необходимость) распространения вероятностных методов на детерминированные сигналы.

Будем рассматривать детерминированный сигнал $u(t)$ как единственную реализацию эргодического случайного процесса. Для определения относительной доли времени пребывания («вероятности») сигнала на отдельных значениях x целесообразно ввести интегральную $F_d(x)$ и дифференциальную $W_d(x)$ функции распределения сигнала по уровням x :

$$F_d(x) = \frac{1}{T_0} \int_{x_0 - T_0/2}^{x_0 + T_0/2} \text{dir}[x; u(t)] dt,$$

(1.4.6,а)

$$W_d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_{x_0 - T_0/2}^{x_0 + T_0/2} [\text{dir}[x + \Delta x; u(t)] - \text{dir}[x; u(t)]] dt, \quad (1.4.6,б)$$

где $\text{dir}[x; u(t)] = \begin{cases} 1, & u(t) < x, \\ 0, & u(t) > x \end{cases}$ - ступенчатая функция, связанная с функцией

Дирака $\delta(x)$ соотношением $\text{dir}[x; u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[x - u(t)] du(t)$.

Физически функция $F_d(x)$ представляет собой суммарную относительную долю интервала T_0 на которой значения сигнала не превышают x . Функция $W_d(x)$ представляет собой предельное значение суммарной относительной доли интервала T_0 , на которой значения сигнала $u(t)$ лежат в интервале $[x; x + \Delta x]$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

В случае периодического сигнала интегрирование в (1.4.6) осуществляется на интервале периода $T_{п} - T_0 = T_{п}$. У непериодического сигнала интегрирование осуществляется на интервале его существования, формирования или обработки,

который, в частности, может определяться требуемой точностью. Этот интервал должен быть существенно больше эффективной длительности сигнала $T_{\text{эфф}}$.

Из определения следует, что функция $F_d(x)$ обладает следующими свойствами.

- Функция неотрицательна $0 < F_d(x) < 1$ с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- Функция неубывающая: $F_d(x_1) > F_d(x_2)$ если $X_1 > x_2$.
- Предельные значения: $F_d(-\infty) = 0$ и $F_d(\infty) = 1$.
- Функция $F_d(x)$ не зависит от временного сдвига (начальной фазы) $u(t)$.

Свойства функции $W_d(x)$:

- Функция неотрицательна $0 < W_d(x) < \infty$ с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- Функция $W_d(x)$ не зависит от временного сдвига (начальной фазы) $u(t)$.
- Функция $W_d(x)$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} W_d(x) dx = 1$.

Связь между функциями выражается соотношениями:

$$F_d(x) = \int_{-\infty}^x W_d(y) dy, \quad W_d(x) = \frac{dF_d(x)}{dx} \quad (1.4.7)$$

Из приведенных свойств и соотношений легко просматривается аналогия функций (1.4.6) с соответствующими функциями распределения вероятности случайного сигнала [67, 86].

Вид функций (1.4.6) для конкретных сигналов приведен в Приложении А. Мощным инструментом исследований является спектральный анализ. Используя преобразование Фурье [26, 31] можно получить спектр сигнала $u(t)$:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (1.4.8)$$

У физически реализуемых сигналов основная доля энергии также сосредоточена в ограниченной полосе частот, что связано с ограничениями (1.4.2). В соответствии с теоремой Парсеваля [112] получим

$$3. = \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.4.9)$$

Полосу частот, в которой сосредоточена большая часть энергии сигнала, можно определить по эффективной ширине спектра

$$A_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega}} \quad (1.4.10)$$

где $\omega_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega}}$ средняя частота спектра сигнала.

При $\omega_{\text{эфф}} \gg A_{\text{эфф}}$ сигнал $u(t)$ называют узкополосным, а при $\omega_{\text{эфф}} = 0$ - видеосигналом. Аналого-цифровому преобразованию подвергаются преимущественно видеосигналы. Преобразование узкополосных сигналов сопряжено с рядом особенностей, требующих дополнительного рассмотрения.

В теории дискретизации важное место занимают сигналы с финитным спектром, у которых при $\omega_{\text{эфф}} = 0$ справедливо соотношение

$$\text{и } \omega_{\text{эфф}} = 0 \quad \begin{cases} |\omega| < \omega_m, \\ |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (1.4.11)$$

где $\omega_m = 2\pi F_m$ - граничная частота спектра.

В соответствии со свойствами преобразования Фурье [26, 31] сигнал со спектром (1.4.11) во времени бесконечен, но его эффективная длительность (1.4.3) может быть конечной.

При анализе детерминированных сигналов $u(t)$ или $u_i(t)$ и $i_g(1)$ используются [26] автокорреляционная и взаимокорреляционная функции:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau) dt, \quad (1.4.12)$$

$$\text{Var}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(t)u_2(t+T)|^2 dt. \quad (1.4.13)$$

Для корреляционной функции справедлива теорема Винера-Хинчина:

$$B_D = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |U_1(j\omega)U_2(j\omega)|^2 e^{j\omega T} d\omega. \quad (1.4.14)$$

Рассмотрим связь между автокорреляционной функцией сигнала $u(t)$ и взаимокорреляционной функцией сигнала с его производной $u^{[1]}(t)$.

Из свойств преобразования Фурье следует, что спектр сигнала $u(t) \Rightarrow U(j\omega)$ и его производной $u^{[1]}(t) \Rightarrow U_n(j\omega)$ связаны соотношением:

$$U_n(j\omega) = j\omega U(j\omega). \quad (1.4.15)$$

Полагая в (1.4.21) $u_1(t) = u^{[1]}(t)$, $u_2(t) = u(t+x)$ и учитывая [26] соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [U_1(j\omega)U_2(j\omega)] e^{j\omega x} d\omega, \quad \text{а также появление множителя } \exp(j\omega x) \text{ в}$$

спектре сигнала с задержкой x , получим

$$\text{Var}_{uu}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |U_1(j\omega)U_2(j\omega)|^2 e^{j\omega T} d\omega. \quad (1.4.16)$$

Сопоставив (1.4.14) и (1.4.16), легко заметить, что справедливо соотношение

$$\text{Var}_{uu}(T) = R'(T). \quad (1.4.17)$$

Из четности корреляционной функции (1.4.12) следует, что

$$\text{Var}_{uu}(0) = 0. \quad (1.4.18)$$

Равенство (1.4.17) свидетельствует о некоррелированности сигнала и его производной в совпадающие моменты времени.

Проведя аналогичные рассуждения для любой пары $u^M(t)$ и $u^{[n+1]}(t)$ производных и их взаимокорреляционной функции

$$\text{Var}_{n(n+1)}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} j u^{[n]}(t) u^{[n+1]}(t + x) dt,$$

можно сделать вывод о их некоррелированности в совпадающие моменты времени:

$$\text{Var}_{n(n+1)}(0) = 0.$$

Для сигналов с ограниченным спектром справедливо [128] неравенство:

$$M_{C < A P^{\wedge}}^{\text{TM}} = V 23 X - \quad (1.4.19)$$

Из свойств преобразования Фурье следует, что спектр (1.4.15) производной сигнала также ограничен частотой ω_T и тогда справедливо соотношение

$$M_{C < 72 F_m 3}, \quad (1.4.20)$$

где $\mathcal{E}^{\circledast} = \int_{-\infty}^{\infty} |u^{\circledast}(t)|^2 dt$ - "энергия" производной сигнала.

Используя отношение энергий производной и сигнала

$$P_{\text{пс}} = \mathcal{E}_c^{(1)} / \mathcal{E}_c, \quad (1.4.21)$$

можно из (1.4.20) получить

$$M_{\text{макс}} = d / \wedge c - \wedge T \text{Лпс} \blacksquare$$

(1.4.22,а)

В табл. 1.4.1 приведены выражения для коэффициента (1.4.21) для ряда сигналов с ограниченными и неограниченными спектрами.

Аналогично, для второй производной $u^{[2]}(t)$ можно ввести коэффициент

значения которого для рассмотренных сигналов приведены в табл. 1.4.1.

Тогда, для сигналов с ограниченным спектром и максимальной частотой

$\omega_{\text{гп}} = 2\pi/T_T$ справедливо соотношение для максимума второй производной

$$M_{\text{КС}} S_{\text{ЖЭ}}^{\text{ТМ}} = \dots = \dots$$

Для сигналов с финитным спектром коэффициенты $C_{\text{ПС}}$ и $T_{\text{ВП}}$ пропорциональны квадрату максимальной частоты F_m , поэтому можно записать

$$L_{\text{ПС}} \sim R_{\text{ПС}}(2\pi F_m) \quad \text{и} \quad T_{\text{ВП}} \sim r_{\text{ВП}}(2\pi F_m),$$

где $r_{\text{ПС}}$ и $r_{\text{ВП}}$ - постоянные коэффициенты, зависящие только от формы спектра сигнала. В табл. 1.4.1 приведены значения $r_{\text{ПС}}$ и $r_{\text{ВП}}$ для рассмотренных сигналов, причем у гауссова сигнала принято $F_m = 1/a$.

Подставив значения $C_{\text{ПС}}$ и $C_{\text{ВП}}$ в (1.4.22,а) и учитывая (1.4.19), получим:

$$c < \dots = 2 < \dots, \quad (1.4.22,б)$$

что уточняет известное [118] неравенство $M^{\text{КС}} < F_m M^{\text{КС}}$

Значения энергетических коэффициентов сигналов Таблица 1.4.1

Сигнал	$\frac{\sin(27iF_m t)}{2fF_m t}$	$\frac{\cos(27iF_m t)}{1-(4F_m t)^2}$	$\frac{\sin(27tF_m t)}{27cF_m t}^{-12}$	$\text{expt-}t^a$
ЛПС	$(27tF_m)^2/3$	$(173-2/7c^2)(27iF_m)^2$	$(27rF_m)^2/10$	$1/2a^2$
рПС	1/3	$1/3-2/c^2$	0,1	1/2
ЦВП	$3(27iF_m)^2/5$	$0,158(2TiF_m)^2$	$2(2?rF_m)^2/7$	$3/2a^2$
РВП	3/5	$\frac{3L^2}{10(jC^2 - 6)} \frac{6}{71^2}$	2/7	3/2

Для второй производной сигнала можно получить подобное же соотношение

$$\text{макс} \dots \quad (1.4.23)$$

В реальных системах аналого-цифровому преобразованию чаще всего подвергаются случайные сигналы. Для описания таких сигналов и анализа их преобразования используется математический аппарат теории вероятностей и статистической радиотехники [67, 68, 86, 102,103, 110 и др.].

Наиболее полно случайный процесс $\xi(t)$ описывают функции распределения плотности вероятности: одномерная - $W(u,t)$, двумерная - $W_2(u_1, U_2, t_1, t_2)$ и n -мерная - $W_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Для двумерной функции справедливо соотношение

$$W_2(x,y,t_1,t_2) = W_x C_x \wedge W_{y/y/x} = W_y C_y \wedge W_{y/x C_x/y}, \quad (1.4.24)$$

где $W_{yy}(y/x, t_1, t_2)$ и $W_{yx}(x/y, t_1, t_2)$ - условные функции распределения плотности вероятности значения y случайной величины $\xi(t)$ в момент t_2 , когда в момент t_1 имеется значение x или значения x в момент t_1 , когда в момент t_2 имеется значение y .

По известной функции распределения можно определить моменты случайной величины $\xi(t)$, среди которых наиболее часто используют среднее значение и дисперсию:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x, t) dx, \quad (1.4.25)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x, t) dx, \quad (1.4.26)$$

а также корреляционную функцию

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y W_2(x, y, t_1, t_2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y W_x(x, t_1) W_{yy}(y/x, t_1, t_2) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x y W_y(y, t_2) W_{yx}(x/y, t_1, t_2) dx dy, \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

У стационарных случайных сигналов выполняются соотношения $a(t) = a_0$, $\langle y^2(t) \rangle = \langle y^2 \rangle$, $R(t_1, t_2) = R(\tau)$, $W_{yx}(x/y, t_1, t_2) = W_{yx}(x/y, \tau)$ и $W_{yy}(y/x, t_1, t_2) = W_{yy}(y/x, \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Стационарный случайный сигнал обладает энергетическим спектром $G(\omega)$, который связан с корреляционной функцией преобразованием Фурье (теорема Винера-Хинчина [67]):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (1.4.28)$$

$$R(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} fG(\omega) e^{j\omega T} dG. \quad (1.4.29)$$

Подставив (1.4.27) в (1.4.28), получим

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) W_y(y/x, x) dy dx e^{j\omega T} dT = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) W_{yx}(x/y, x) dy dx e^{j\omega T} dT.$$

Поменяв местами порядок интегрирования и обозначив условные спектральные функции процесса $f(t)$

$$G_{py}(y/x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{yy}(x/y, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau, \quad (1.4.30, a)$$

$$G_{px}(x/y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{yx}(x/y, \tau) e^{j\omega \tau} d\tau, \quad (1.4.30, b)$$

получим

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} G_{py}(y/x, \omega) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(y) \int_{-\infty}^{\infty} G_{px}(x/y, \omega) dx dy. \quad (1.4.31)$$

Для δ -коррелированного случайного процесса, когда $R(T) = \delta(T)$ и $W_{yy}(y/x, T) = W(y)$, $W_{yx}(x/y, T) = W(x)$, имеем $G_{px}(x/y, \omega) = W(x)\delta(\omega)$ и $G_{py}(y/x, \omega) = W(y)\delta(\omega)$.

1.4. Методы представления сигналов

Аналого-цифровому преобразованию подвергаются детерминированные и случайные сигналы. При их описании и анализе используют различные математические аппараты. Для детерминированных сигналов широко используют временное представление и анализ, различные интегральные преобразования (Фурье, Лапласа, Гильберта и др.). Для случайных сигналов основным аппаратом анализа является теория вероятности и математическая статистика.

Детерминированные сигналы используются преимущественно в качестве несущих (связь, телевидение, навигация), зондирующих (радиолокация), испытательных и др.. При цифровом формировании таких сигналов преобразованию на этапе проектирования подвергается некоторый аналоговый прототип .

При временном описании детерминированных сигналов используют представление в виде некоторой функции $u(t)$. Эта функция должна удовлетворять условиям физической реализуемости. Одно из условий - это ограниченность энергии сигнала:

$$\mathcal{E}_c = \int_{-\infty}^{\infty} f u^2(t) dt < \infty . \quad (1.4.1)$$

Другое условие - это ограниченность максимального и минимального значений сигнала и его производных :

$$|u(t)| < M^M, \quad |u^{(n)}(t)| < M^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.2)$$

где $u^{(n)}$ - n-ая производная сигнала $u(t)$.

У физически реализуемых сигналов основная доля энергии сигнала сосредоточена на ограниченном временном интервале. Величина этого интервала определяется эффективной длительностью сигнала, которая равна

$$\hat{\tau}_{эфф} \sim \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_{cp})^2 u^2(t) dt} . \quad (1.4.3)$$

где $t_{cp} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ftu^2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f dt}$ - среднее временное значение сигнала.

Без ущерба для общности, заменой переменной t на $t_i = t - t_{cp}$ можно обеспечить $t_{i,cp} = 0$. В этом случае можно считать, что вне интервала $[-aT_{эфф}; aT_{эфф}]$ значения сигнала пренебрежимо малы и не вносят существенного вклада в общую энергию (1.4.1). Значение коэффициента $a > 0,5$ и зависит от формы сигнала и требуемой точности анализа.

Детерминированные сигналы часто удовлетворяют условию периодичности:

$$u(t) = u(t + kT_n), -\infty < t < \infty, k \in \{0; 1; 2; \dots\}, \quad (1.4.4)$$

где T_n - период сигнала.

Энергия сигнала на интервале периода будет конечной и не зависящей от начальной точки t_0 :

$$\mathcal{E}_{T_n} = \int_{t_0}^{t_0 + T_n} Ju^2(t)dt < \infty.$$

На бесконечном временном интервале периодические сигналы не удовлетворяют условию физической реализуемости в соответствии с (1.4.1). Для устранения этого недостатка воспользуемся временным интервалом $[t_{нач}; t_{кон}]$ конечной длительности $T_{раб} = t_{нач} - t_{кон}$, определяющим время функционирования системы. Это может быть интервал между моментами включения и выключения аппаратуры, время занятия канала связи, максимальное время анализа или формирования сигнала и т.п. .

Будем считать, что сам сигнал и условие периодичности возможны лишь на интервале $[t_{нач}; t_{кон}]$:

$$u(t) = u(t + kT_n), t_{нач} < t < t_{кон} - T_n.$$

Тогда энергия периодического сигнала также будет конечной и равной

$$\mathcal{E}^{TM} = \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} Ju^2(t)dt = N_{ноб} \mathcal{E}_{T_n} < \infty, \quad (1.4.5)$$

где $N_{п0}B = T_{раб}/T_{п} \gg 1$ - количество периодов сигнала $u(t)$ на интервале $T_{раб}$ ($N_{п0}B^{<00}$)- Выполнение условия (1.4.5) позволяет рассматривать периодические сигналы как физически реализуемые.

Вероятностные методы анализа сигналов и систем позволяют получить результаты, недостижимые другими методами. Целесообразно также использование единой методики анализа сигналов, независимо от его типа. Всё это обуславливает желательность (необходимость) распространения вероятностных методов на детерминированные сигналы.

Будем рассматривать детерминированный сигнал $u(t)$ как единственную реализацию эргодического случайного процесса. Для определения относительной доли времени пребывания («вероятности») сигнала на отдельных значениях x целесообразно ввести интегральную $F_d(x)$ и дифференциальную $W_d(x)$ функции распределения сигнала по уровням x :

$$F_d(x) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \text{dir}[x; u(t)] dt,$$

(1.4.6,а)

$$W_d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \text{dir}[x; u(t)] dt - \text{dir}[x; u(t)], \quad (1.4.6,б)$$

где $\text{dir}[x; u(t)] = \begin{cases} 1, & u(t) > x \\ 0, & u(t) < x \end{cases}$ - ступенчатая функция, связанная с функцией

Дирака $\delta(x)$ соотношением $\text{dir}[x; u(t)] = 1 - \delta[x - u(t)]$.

Физически функция $F_d(x)$ представляет собой суммарную относительную долю интервала T_0 на которой значения сигнала не превышают x . Функция $W_d(x)$ представляет собой предельное значение суммарной относительной доли интервала T_0 , на которой значения сигнала $u(t)$ лежат в интервале $[x; x + \Delta x]$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

В случае периодического сигнала интегрирование в (1.4.6) осуществляется на интервале периода $T_{п} - T_0 = T_{п}$. У непериодического сигнала интегрирование осуществляется на интервале его существования, формирования или обработки,

который, в частности, может определяться требуемой точностью. Этот интервал должен быть существенно больше эффективной длительности сигнала $T_{эфф}$.

Из определения следует, что функция $F_d(x)$ обладает следующими свойствами.

- Функция неотрицательна $0 < F_d(x) < 1$ с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- ® Функция неубывающая: $F_d(x_1) > F_d(x_2)$ если $x_1 > x_2$.
- ® Предельные значения: $F_d(-\infty) = 0$ и $F_d(\infty) = 1$.
- Функция $F_d(x)$ не зависит от временного сдвига (начальной фазы) $u(t)$.

Свойства функции $W_d(x)$:

- Функция неотрицательна $0 < W_d(x) < \infty$ с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- Функция $W_d(x)$ не зависит от временного сдвига (начальной фазы) $u(t)$.
- Функция $W_d(x)$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} W_d(x) dx = 1$.

Связь между функциями выражается соотношениями:

$$F_d(x) = \int_{-\infty}^x W_d(y) dy, \quad W_d(x) = \frac{dF_d(x)}{dx}. \quad (1.4.7)$$

Из приведенных свойств и соотношений легко просматривается аналогия функций (1.4.6) с соответствующими функциями распределения вероятности случайного сигнала [67, 86].

Вид функций (1.4.6) для конкретных сигналов приведен в Приложении А.

Мощным инструментом исследований является спектральный анализ.

Используя преобразование Фурье [26, 31] можно получить спектр сигнала $u(t)$:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (1.4.8)$$

У физически реализуемых сигналов основная доля энергии также сосредоточена в ограниченной полосе частот, что связано с ограничениями (1.4.2). В соответствии с теоремой Парсеваля [112] получим

$$O-4-9)$$

Полосу частот, в которой сосредоточена большая часть энергии сигнала, можно определить по эффективной ширине спектра

$$A^{(0)} \text{эфф} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(a) \cdot (a - \omega_{cp})^2 U^2(a) da}{\int_{-\infty}^{\infty} f(a) da}}, \quad (1.4.10)$$

где $\omega_{cp} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a f(a) da}{\int_{-\infty}^{\infty} f(a) da}$ - средняя частота спектра сигнала.

При $\omega_{cp} \gg \Delta \omega$ сигнал $u(t)$ называют узкополосным, а при $\omega_{cp} = 0$ - видеосигналом. Аналого-цифровому преобразованию подвергаются преимущественно видеосигналы. Преобразование узкополосных сигналов сопряжено с рядом особенностей, требующих дополнительного рассмотрения.

В теории дискретизации важное место занимают сигналы с финитным спектром, у которых при $\omega_{cp} = 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} f(a) &= 0, & |a| < \omega_m, \\ f(a) &= 0, & |a| > \omega_m, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

где $\omega_m = 2\pi F_m$ - граничная частота спектра.

В соответствии со свойствами преобразования Фурье [26, 31] сигнал со спектром (1.4.11) во времени бесконечен, но его эффективная длительность (1.4.3) может быть конечной.

При анализе детерминированных сигналов $u(t)$ или $u_i(t)$ и $i_g(1)$ используются [26] автокорреляционная и взаимокорреляционная функции:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t + \tau) dt, \quad (1.4.12)$$

$$\text{Var}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(t+x)dt. \quad (1.4.13)$$

Для корреляционной функции справедлива теорема Винера-Хинчина:

$$R_{uu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\omega)U_2(j\omega) \exp(j\omega x) d\omega. \quad (1.4.14)$$

Рассмотрим связь между автокорреляционной функцией сигнала $u(t)$ и взаимокорреляционной функцией сигнала с его производной $u^{[1]}(t)$.

Из свойств преобразования Фурье следует, что спектр сигнала $u(t) \Rightarrow U(j\omega)$ и его производной $u^{[1]}(t) \Rightarrow U_n(j\omega)$ связаны соотношением:

$$U_n(j\omega) = j\omega U(j\omega). \quad (1.4.15)$$

Полагая в (1.4.21) $u_1(t) = u^{[1]}(t)$, $u_2(t) = u(t+x)$ и учитывая [26] соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\omega)U_2(j\omega) d\omega, \text{ а также появление множителя } \exp(j\omega x) \text{ в}$$

спектре сигнала с задержкой x , получим

$$\text{Var}_{uu'}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega U(j\omega)|^2 \exp(-j\omega x) d\omega. \quad (1.4.16)$$

Сопоставив (1.4.14) и (1.4.16), легко заметить, что справедливо соотношение

$$\text{Var}_{uu'}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} R'(z) dz. \quad (1.4.17)$$

Из четности корреляционной функции (1.4.12) следует, что

$$\text{Var}_{uu'}(0) = 0. \quad (1.4.18)$$

Равенство (1.4.17) свидетельствует о некоррелированности сигнала и его производной в совпадающие моменты времени.

Проведя аналогичные рассуждения для любой пары $u^{[n]}(t)$ и $u^{[n+1]}(t)$ производных и их взаимокорреляционной функции

$$\text{Var}_{n(n+1)}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{[n]}(t)u^{[n+1]}(t+T)dt,$$

можно сделать вывод о их некоррелированности в совпадающие моменты времени:

$$\text{Var}_{n(n+1)}(0) = 0.$$

Для сигналов с ограниченным спектром справедливо [128] неравенство:

$$\frac{M^{(0)}_{xy \text{ макс}} < I_{\text{эп}} \Delta_c}{\nu T C} \quad , \quad (1.4.19)$$

Из свойств преобразования Фурье следует, что спектр (1.4.15) производной сигнала также ограничен частотой ω_T и тогда справедливо соотношение

$$M^{(1)}_{\text{макс}} < J2F \Theta^{(1)} \quad , \quad (1.4.20)$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} u^{(1)}(t) dt$ - "энергия" производной сигнала.

Используя отношение энергий производной и сигнала

$$M_{\text{пс}} = \Theta_c^{(1)}/\Theta \quad (1.4.21)$$

можно из (1.4.20) получить

$$M_{\text{макс}} \sim \Delta_c^{-1} \Theta_{\text{пс}} \quad \blacksquare$$

(1.4.22,a)

В табл. 1.4.1 приведены выражения для коэффициента (1.4.21) для ряда сигналов с ограниченными и неограниченными спектрами.

Аналогично, для второй производной $u^{[2]}(t)$ можно ввести коэффициент

$$\Theta_c^{[2]} = \int_{-\infty}^{\infty} |u^{[2]}(t)|^2 dt,$$

значения которого для рассмотренных сигналов приведены в табл. 1.4.1.

Тогда, для сигналов с ограниченным спектром и максимальной частотой

$\omega_{\text{гр}} = 2\pi P_T$ справедливо соотношение для максимума второй производной

$$M_{\text{ма}} M^{2 \cdot 9 < 2} = V 2 F_m \rho_{\text{пс}} 3 \ll = \text{ДПАЛ} .$$

Для сигналов с финитным спектром коэффициенты $t|_{\text{пс}}$ и $t|_{\text{вп}}$ пропорциональны квадрату максимальной частоты F_m , поэтому можно записать

$$\rho_{\text{пс}} = \rho_{\text{пс}}(2\Gamma T) \text{ И } T|_{\text{вп}} = \rho_{\text{вп}}(27CF_m) ,$$

где $\rho_{\text{пс}}$ и $\rho_{\text{вп}}$ - постоянные коэффициенты, зависящие только от формы спектра сигнала. В табл. 1.4.1 приведены значения $\rho_{\text{пс}}$ и $\rho_{\text{вп}}$ для рассмотренных сигналов, причем у гауссова сигнала принято $F_m = 1/a$.

Подставив значения $\Gamma|_{\text{пс}}$ и $\rho_{\text{вп}}$ в (1.4.22,а) и учитывая (1.4.19), получим:

$$M^{\circ} L < 78 \wedge 3 \wedge = 2 \Pi F_m \ll M^{\circ} L \quad (1.4.22,6)$$

что уточняет известное [118] неравенство $M^{\circ}_{\text{кс}} < F_m M^{\wedge}_{\text{кс}} \bullet$

Значения энергетических коэффициентов сигналов Таблица 1.4.1

Сигнал	$\sin(27cF_m t)$ $2\Gamma T 1$	$\cos(2?rF_m t)$ $1 - C 4 F_m t)^2$	$\text{sm}(27cF_m t)$ $2?cF_m t$	$\exp^{t^a a^2}$
Лпс	$(2jtF_m)^2/3$	$(1/3 - 2/7T^2)(27tF_m)^2$	$(27rF_m)^2/10$	$1/2a^2$
Рпс	1/3	$1/3 - 2/\Gamma T^2$	0Д	1/2
Лвп	$3(2rtF_m)^2/5$	$0,158(27iF_m)^2$	$2(27tF_m)^2/7$	$3/2a^2$
рвп	3/5	$\frac{37C^2}{10(\Gamma T^2 - 6)} \Gamma T^2$	2/7	3/2

Для второй производной сигнала можно получить подобное же соотношение

$$M_{\text{макс}} - (2\Gamma T) \rho_{\text{пс}} \rho_{\text{вп}}^{\wedge} \text{-макс} \bullet \quad (1.4.23)$$

В реальных системах аналого-цифровому преобразованию чаще всего подвергаются случайные сигналы. Для описания таких сигналов и анализа их преобразования используется математический аппарат теории вероятностей и статистической радиотехники [67, 68, 86, 102, 103, 110 и др.].

Наиболее полно случайный процесс $\xi(t)$ описывают функции распределения плотности вероятности: одномерная - $W(u,t)$, двумерная - $W_2(u_1, U_2, t_1, t_2)$ и n -мерная - $W_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Для двумерной функции справедливо соотношение

$$W_2(x,y,t_1,t_2) = W_x C_x \wedge W_{y|y/x} = W_y C_y \wedge W_{x|x/y}, \quad (1.4.24)$$

где $W_{y|y/x}(y/x, t_1, t_2)$ и $W_{x|x/y}(x/y, t_1, t_2)$ - условные функции распределения плотности вероятности значения y случайной величины $\xi(t)$ в момент t_2 , когда в момент t_1 имеется значение x или значения x в момент t_1 , когда в момент t_2 имеется значение y .

По известной функции распределения можно определить моменты случайной величины $\xi(t)$, среди которых наиболее часто используют среднее значение и дисперсию:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x, t) dx, \quad (1.4.25)$$

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 W(x, t) dx, \quad (1.4.26)$$

а также корреляционную функцию

$$\begin{aligned} R(M_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} W_2(x, y, t_1, t_2) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} W_x(x, t_1) W_{y|y/x}(y/x, t_1, t_2) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} W_{y|y/x}(y/x, t_1, t_2) W_x(x/y, t_1, t_2) dx dy, \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

У стационарных случайных сигналов выполняются соотношения $a(t) = a_0$, $\sigma^2(t) = \sigma_0^2$, $R(t_1, t_2) = R(\tau)$, $W_{yx}(x/y, t_1, t_2) = W_{yx}(x/y, \tau)$ и $W_{y|y/x}(y/x, t_1, t_2) = W_{y|y/x}(y/x, \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Стационарный случайный сигнал обладает энергетическим спектром $G(\omega)$, который связан с корреляционной функцией преобразованием Фурье (теорема Винера-Хинчина [67]):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-j\omega x} dx = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau, \quad (1.4.28)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f(\omega + \tau) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.4.29)$$

Подставив (1.4.27) в (1.4.28), получим

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) W_y(y/x, \tau) dy dx e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) W_y(x/y, \tau) dy dx e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Поменяв местами порядок интегрирования и обозначив условные спектральные функции процесса ϕ

$$G_{py}(y/x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(y/x, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.4.30, a)$$

$$G_{px}(x/y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x/y, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.4.30, b)$$

получим

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x) G_{px}(x/y, \omega) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(y) G_{py}(y/x, \omega) dy \quad (1.4.31)$$

Для δ -коррелированного случайного процесса, когда $R(\tau) = \delta(\tau)$ и $W_{yy}(y/x, \tau) = W(y)$, $W_{yx}(x/y, \tau) = W(x)$, имеем $G_{px}(x/y, \omega) = W(x)\delta(\omega)$ и $G_{py}(y/x, \omega) = W(y)\delta(\omega)$.

1.5. Критерии анализа АЦП

В результате дискретизации, квантования в АЦП и восстановления в ЦАП входной сигнал $u(t)$ преобразуется в выходной $u_B(t)$. Погрешность преобразования можно представить в виде разности

$$s(t) = u(t) - u_B(t). \quad (1.5.1)$$

Оценить качество преобразования сигнала в отдельных узлах или в системе в целом можно по каким-либо числовым характеристикам, полученным из (1.5.1). Эти числовые характеристики и служат критериями анализа, синтеза и оптимизации АЦП, ЦАП или всей системы. В зависимости от назначения системы, требований к надежности, используемых сигналов и т.п. возможно получение и применение различных числовых характеристик функции (1.5.1) [77, 99].

Рассматривая совокупность функций (1.5.1) на множестве сигналов $u(t)$ и $u_B(t)$ как некоторое функциональное пространство и определив в нем соответствующую метрику [99, 112] можно через норму функции определить её числовую характеристику (функционал). Этот функционал может быть определён на некотором отрезке времени, либо на всей временной оси, что даёт соответственно интервальные или интегральные критерии.

Пусть временная ось разбита на интервалы $0_j = t_{j+1} - t_j$, $|j| \in \{0; 1; 2; \dots\}$. Будем рассматривать погрешность $s(t)$ на одном из этих интервалов. Тогда можно получить следующие интервальные критерии (функционалы).

Критерий максимального отклонения

$$E_{mj} = \max_{t \in 0_j} |e(t)| = \lim_{n \rightarrow +} \sqrt[n]{J [e(t)]^n dt} \quad (1.5.2)$$

Выражение (1.5.2) определяет норму функции $s(t)$ в линейном метрическом пространстве и такая метрика называется чебышевской. Её применение эффективно для сигналов с ограниченными максимальными значениями (1.4.2).

Интегральный интервальный критерий

$$\overline{S_j} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} J_s(t) dt \quad (1.5.3)$$

определяет среднюю величину погрешности на интервале $[t_j; t_{j+1}]$.

Среднеквадратичный критерий

$$\overline{j s^2(t) dt} \quad (1.5.4)$$

Выражение (1.5.4) определяет норму функции $s(t)$ в гильбертовом пространстве. Применение этого критерия эффективно для сигналов с ограниченной энергией (1.4.1). Возможна иная форма представления среднеквадратичного критерия

$$\overline{\epsilon^2} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} j s^2(t) dt. \quad (1-5.5)$$

В этом случае функционал (1.5.5) может трактоваться как "энергия" погрешности $s(t)$ на интервале $[t_j; t_{j+1}]$, если $u(t)$ и $u_B(t)$ представляют собой напряжение (или ток) на сопротивлении 1 Ом.

В рассмотренных критериях может использоваться весовая функция, учитывающая важность тех или иных значений $s(t)$, степень влияния на параметры системы и т.п.. В частности, при весовой функции $q(t)$ среднеквадратичный критерий (1.5.5) принимает вид

$$\overline{S_{jB}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} J q(t) s^2(t) dt.$$

Переход от интервальных критериев (1.5.2) - (1.5.5) интегральным осуществляется дополнительным усреднением первых по ансамблю их возможных значений на бесконечной оси времени. В результате получают следующие критерии.

Критерий максимального отклонения

$$\delta_m = \sup_j [s_{mj}] \quad (1.5.6)$$

определяет точную верхнюю грань функции $s(t)$ на всей оси времени.

Интегральный критерий

$$\delta = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{-M}^M \epsilon^2 dt \quad (1.5.7)$$

определяет среднее значение погрешности (1.5.1) на всей оси времени.

Среднеквадратичный критерий

$$s^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{-M}^M \epsilon^2 dt \quad \text{или} \quad s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s^2(t)| dt \quad (1.5.8, a)$$

дает значение «энергии» погрешности на всей оси времени.

Если сигналы $u(t)$ и $u_B(t)$ имеют, соответственно, спектры $U(j\omega)$ и $U_B(j\omega)$, то критерий (1.5.8,а) может быть определен в частотной области:

$$s^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega) - U_B(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.5.8, б)$$

Тождественность выражений (1.5.8,а) и (1.5.8,б) легко доказывается возведением в квадрат подынтегральных выражений и их почленным интегрированием с использованием равенства Парсеваля (см. (1.4.1) и (1.4.17)) и соотношения [26]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u_B(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)U_B^*(j\omega)d\omega$$

Рассмотренные критерии предполагают детерминированность сигналов $u(t)$, $u_B(t)$. Если сигналы случайны, а $s(t)$ можно рассматривать как псевдослучайный процесс даже при детерминированных $u(t)$ и $u_B(t)$, то критерии можно получить через характеристики случайного процесса.

Используя усреднение по ансамблю реализации $e(t)$, можно получить среднее

значение и дисперсию погрешности (1.5.1):

$$e_{cp}(t) = \text{mi}\{s(t)\}, \quad (1.5.9)$$

$$(1.5.10)$$

Если случайный процесс $s(t)$ стационарный, то $s_{cp}(t) = \epsilon_{cp}$ и $\text{ct}(t) = \sigma^2$ а если он является эргодическим, то усреднения по ансамблю реализации и по времени эквивалентны. Тогда критерии (1.5.7) и (1.5.9) также эквивалентны, а (1.5.8) и (1.5.10) связаны [67] соотношением $\epsilon^2 = \sigma^2 - \epsilon_p^2$.

При случайном характере сигналов или функции $s(t)$ могут быть использованы еще ряд критериев.

Вероятностный критерий

$$P\{|s(t)| \leq S_0\} = P_0, \quad (1.5.11)$$

где P_0 - допустимая вероятность того, что погрешность (1.5.1) не превысит некоторую величину S_0 .

Информационный критерий предполагает максимизацию количества информации в выходном (преобразованном) сигнале о входном. В некоторый момент времени, когда входной сигнал принимает значение u , а выходной - u_B , в одном отсчете количество информации J будет равно

$$J = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(u, u_B) \frac{W_2(u, u_B)}{W(u)W(u_B)} \ln \frac{W_2(u, u_B)}{W(u)W(u_B)} du du_B, \quad (1.5.12)$$

где $W_2(u, u_B)$ - двумерная плотность вероятности значений входного и выходного сигналов.

Может быть также предложен корреляционный критерий

$$F^2_{SR} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [R(\tau) - R_B(\tau)]^2 d\tau}, \quad (1.5.13)$$

где $R(\tau)$ и $R_B(\tau)$ - автокорреляционные функции сигналов $u(t)$ и $u_B(t)$ соответственно.

Критерий (1.5.13) может быть применен при анализе как случайных, так и

детерминированных сигналов, используя их автокорреляционные функции (1.4.12) или (1.4.27).

В случае детерминированных сигналов и эргодических случайных процессов выражение (1.5.13) может быть преобразовано, используя (1.5.1), к виду:

$$\varepsilon_R^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [u(t)\varepsilon(t-\tau) + u(t-\tau)\varepsilon(t) - \varepsilon(t)\varepsilon(t-\tau)] dt \right\}^2 d\tau,$$

где $s(t-\tau) = u(t-x) - u_B(t-\tau)$.

Выполнив обратную подстановку (1.5.1), получим

$$\varepsilon_R^2 = \int_{-\infty}^{\infty} J[2R(x) - 2B(\tau) - R_s(z)]^2 d\tau$$

где $B(\tau)$ - взаимокорреляционная функция сигналов $u(t)$ и $u_B(t)$

$R_E(\tau)$ - автокорреляционная функция погрешности $s(t)$.

Если $B(\tau)$, $R_E(\tau)$ и $R(\tau)$ представляют собой δ -функции (сигналы некоррелированные) и учитывая, что $R(0) = \overline{OQ} = 3_c$, $R_E(0) = s^2$ и $B(0) = \overline{o^2} = \int_{-\infty}^{\infty} J u(t) u_B(t) dt$ - «энергия

взаимодействия» сигналов, получим

$$SR = 2c_0 - 2o_B - s^2. \quad (1.5.14, a)$$

Подставив (1.5.1) в (1.5.8,а), можно получить

$$\varepsilon^2 = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{CB} - 2a_B, \quad (1.5.15)$$

где \mathcal{E}_{CB} - энергия сигнала $u_B(t)$.

Из выражений (1.5.14,а) и (1.5.15) следует

$$\varepsilon^{\wedge} = |\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_c|. \quad (1.5.14, b)$$

Соотношения (1.5.14) и (1.5.15) показывают взаимосвязь и отличия средне-квадратичного и корреляционного критериев при некоррелированных сигналах. В

общем случае корреляционный критерий учитывает временные связи в сигнале.

Анализ и оптимизация системы (следовательно, и АЦП) может осуществляться по одному или нескольким критериям. Количество и конкретный тип используемых критериев определяется назначением системы, решаемыми задачами, областью применения и т.п. Так, в информационно-измерительных системах при оценке параметров используется одновременно несколько критериев. Оценка параметра должна быть [68] несмещенной, состоятельной и эффективной. Это достигается одновременным использованием критериев (1.5.9), (1.5.10) и (1.5.11).

В основе рассмотренных критериев лежит ошибка преобразованного сигнала. Возможен также учет и других параметров: стоимости, надежности, технической реализации и др. [4, 62, 75]. В системах, решающих задачи обнаружения сигналов, проверки статистических гипотез, используют целый класс критериев [12, 68, 70], которые могут быть использованы и при анализе АЦП.

Из всего многообразия критериев наибольшее применение в телекоммуникационных системах нашел среднеквадратичный критерий (1.5.8) в силу его универсальности, возможности получения во многих случаях аналитического решения задач оптимизации и др. преимуществ.

При анализе процесса амплитудного квантования продуктивно использование корреляционного [37] и информационного [22] критериев. Одновременно с ними, обычно, используется и интегральный критерий (1.5.7).

Выводы к разделу 1

Проведенный анализ публикаций по проблематике аналого-цифрового преобразования сигналов выявил недостаточную фундаментальную проработку темы и позволил определить основные направления исследований.

В рассмотренной литературе анализ процессов временной дискретизации и амплитудного квантования проводится независимо, с использованием различных подходов. Теоретическую базу временной дискретизации составляет теорема Котельникова [26, 33]. Имеется большое число работ [15, 27, 30, 33, 88, 106, 117], уточняющих особенности применения теоремы к случайным сигналам, сигналам с неограниченным спектром, узкополосным, с неравномерной дискретизацией и т.п..

Амплитудное квантование не имеет базисной теоремы, из которой следовали бы предельные соотношения, источники погрешностей и пути уменьшения составляющих ошибок. В работах посвященных статистической теории амплитудного квантования [63, 72, 119, 127] фактически разрабатывались вероятностные методы и применение аппарата теории вероятности для определения ошибок амплитудного квантования. Для этого преобразования необходимо разработать основную теорему, подобную теореме Котельникова, определяющую условия идеального квантования (без ошибок).

Интуитивно предполагаемая зависимость между интервалами временной дискретизации и амплитудного квантования требует установления конкретных соотношений.

Всё это позволило обосновать необходимость и сформулировать основное направление диссертационной работы: ***разработка единой теории аналого-цифрового преобразования сигналов и оценка возникающих погрешностей.***

Для этого автором сформулировано понятие идеального АЦП как совокупности идеального временного дискретизатора (на базе теоремы Котельникова) и идеального амплитудного квантователя. Переход от идеальных процедур и устройств к реальным позволил уточнить источники ошибок и получить их оценки.

При анализе и оптимизации АЦП предлагается использовать корреляционный критерий, подобный среднеквадратичному, но учитывающий корреляционные связи в сигнале. Применение этого критерия позволяет, в частности, установить взаимосвязь интервалов временной дискретизации и амплитудного квантования.

Определение корреляционного критерия, его связь со среднеквадратическим и возможные области применения опубликованы в работах автора [37, 46].

Для детерминированных сигналов вводятся интегральная и дифференциальная функции распределения по уровням, аналогичные функциям распределения вероятности случайных сигналов. Это позволит применить математический аппарат и методы анализа случайных процессов к детерминированным сигналам и прийти к единой методике анализа и оптимизации АЦП. Определение, свойства и выражения функций для конкретных сигналов приведены в работе автора [60].

РАЗДЕЛ 2

МЕТОДОЛОГИЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

2.1. Идеальная дискретизация

В основе преобразования непрерывного сигнала $u(t_k)$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$ лежит теорема Котельникова (отсчетов) [33, 74] и интерполяционное разложение целых аналитических функций [114].

Теорема была сформулирована для детерминированных сигналов в предположении, что отсчеты берутся в равноотстоящие моменты времени $t_k = t_0 - kA_t$, где $A_t = t_{k+1} - t_k = \text{const}$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$ - интервал временной дискретизации.

Процедуру взятия отсчетов можно представить [5] как умножение аналогового сигнала $u(t)$ на дискретизирующую функцию $D(t)$, представляющую собой периодическую последовательность отсчетных сигналов. При анализе в качестве отсчетных сигналов используют δ -функции и тогда

$$D(t) = A_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kA_t - t_0), \quad (2.1.1)$$

где t_0 - начальное смещение, определяющее начальную фазу последовательности $\omega_g = 2\pi t_0 / A_t$. Обычно полагают $t_0 = 0$ ($\omega_g = 0$). В реальных системах дискретизации функция $D(t)$ представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов большой скважности.

Дискретный сигнал можно записать как совокупность отсчетов в виде:

$$u_g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t + t_0) \delta(kA_t + t_0) = u(t)D(t). \quad (2.1.2)$$

Рассмотрим сигнал (2.1.2) в частотной области. Из свойств преобразования Фурье [26, 31] следует, что спектр сигнала (2.1.2) будет определяться сверткой спектров $u(t) \Rightarrow U(j\omega)$ и $D(t) \Rightarrow W(j\omega)$. Так как функция $D(t)$ периодическая, то

спектр $W(j\omega)$ линейчатый. При дискретизации S -функциями спектр $W_g(jG)$ будет равен

$$W_g(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_s(j\omega) \exp(-jk\omega_0 t_0).$$

На рис. 2.1.1,а показан модуль спектра $U(j\omega)$ некоторого сигнала $u(t)$ и на рис. 2.1.1,б - модуль спектра $W_s(j\omega)$ при $t_0=0$. Если спектр $U(j\omega)$ финитный и не имеет составляющих с частотами выше $\omega_T = 2\pi/T$, а интервал A_t выбран так, что удовлетворяет условию $A_t < 1/2F_m$ (как показано на рис. 2.1.1), то в результате свертки получим:

$$U_g(j\omega) = U(j\omega) * W_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[j(\omega + k\omega_0)], \quad (2.1.3)$$

где $\omega_0 = 2\pi/A_t$ - частота дискретизации (1.2.1).

Модуль спектра $U_g(j\omega)$ изображен на рис. 2.1.1,в.

Согласно теореме Котельникова (отсчетов) [26] непрерывный сигнал, в спектре которого нет составляющих с частотами выше F_m , полностью определяется своими отсчетами, следующими с интервалом $A_t < 1/2F_m$:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) \frac{\sin[\pi(t - kA_t)/A_t]}{\pi(t - kA_t)/A_t} \quad (2.1.4)$$

Согласно (2.1.4) абсолютно точное восстановление сигнала возможно по бесконечной последовательности отсчетов и при восстанавливающей функции

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0/2, \\ 0, & |\omega| > \omega_0/2. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Выражение (2.1.5) - это импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), частотная характеристика которого имеет вид:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0/2, \\ 0, & |\omega| > \omega_0/2. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Форма частотной характеристики (2.1.6) показана на рис. 2.1.1, г сплошной линией.

В теореме рассматривается идеальная дискретизация сигнала, когда погрешность восстановления отсутствует (равна нулю). Это возможно при выполнении

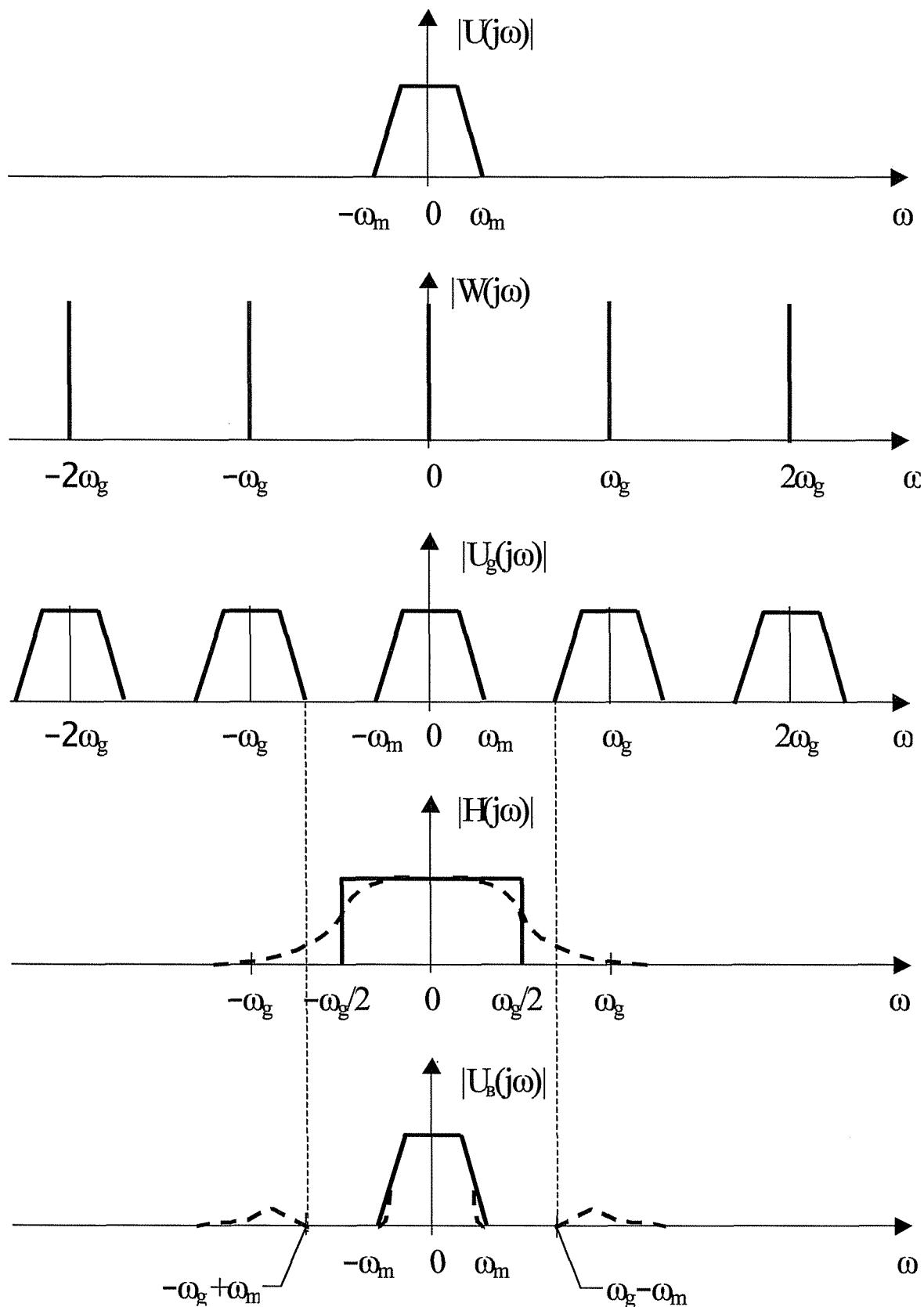


Рис. 2.1.1 Преобразование спектров при дискретизации

целого ряда условий. В различных формулировках теоремы некоторые условия подразумеваются и не упоминаются. В общем виде эти условия можно дать в следующей формулировке.

- Спектр сигнала должен быть финитным с максимальной составляющей F_m .
- Количество отсчетов должно быть бесконечно большим (т.к. сигнал во времени бесконечен).
- Восстанавливающее устройство должно быть идеальным фильтром нижних частот или генератором функций (2.1.5).
- Интервалы между отсчетами A_t должны быть абсолютно одинаковыми (нестабильность частоты f_g должна равняться нулю) и удовлетворять условию $A_t < 1/2F_m$.
- Дискретизация должна осуществляться δ -функциями.
- Задержки во времени при дискретизации и восстановлении должны отсутствовать.
- Дискретизируемый сигнал должен быть без шумов, либо ширина спектра шума должна быть не более ширины спектра сигнала.
- При дискретизации с частотой $f_g = 2F_m$ необходимо обеспечить определенное соотношение начальных фаз сигнала и дискретизирующей последовательности.

Практически все перечисленные требования физически нереализуемы и можно лишь с той или иной степенью точности приближаться к ним.

Реальные сигналы, как правило, не имеют четко выраженного финитного спектра, хотя основная доля их энергии сосредоточена в некоторой конечной полосе частот, определяемая величиной (1.4.10). При дискретизации это приводит к перекрытию парциальных спектров (при различных k в (2.1.3)) и появлению погрешности при восстановлении.

Работа любого физически реализуемого устройства возможна на ограниченном временном интервале $[t_{\text{на4}}; t_{\text{кон}}]$. Это приводит к тому, что в сумме (2.1.4) возможно только конечное число слагаемых и восстанавливающие функции

(или фильтр) не могут быть реализованы в виде (2.1.5) или с частотной характеристикой (2.1.6). Реальный фильтр обладает характеристикой условно изображенной пунктиром на рис. 2.1.1,г. Это также приводит к появлению погрешностей усечения ряда (2.1.4) и изменению характеристики (2.1.6).

Использование в качестве дискретизирующей последовательности $D(t)$ импульсов конечной длительности $t_{\text{нв}} \ll T$ приводит к тому, что отсчет $U_3(kA_t)$ непостоянен и изменяется в соответствии с $u(t)$ на интервале $[kA_t - t_m; kA_t]$, либо принимает некоторое усредненное (интегрированное) на этом интервале значение. В любом случае это приводит к появлению погрешности восстановления.

Нестабильность частоты следования отсчетных импульсов приводит к смещению восстанавливающих функций (2.1.5) и появлению еще одной погрешности восстановления. Идеальное восстановление сигнала возможно и при периодической неравномерной дискретизации [114]. Моменты взятия отсчетов в этом случае можно выразить следующим образом:

$$W) = A_{ti} + kT_n, \quad i \in \{1, N_n\}, \quad k \in \{0; 1; 2; \dots\},$$

где $T_n = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} A_{ti}$ – период повторения групп отсчетов;

N_n - число интервалов в группе;

$$A_{ti} = t_{i+1} - t_i, \quad i \in \{1, N_n\}.$$

Условие абсолютной стабильности теперь относится к каждому интервалу в группе при их периодическом повторении.

В реальных системах полезные сигналы всегда сопровождаются шумом (помехами). Отношение сигнал/шум в разных системах может иметь значения как много больше, так и меньше единицы. Как правило, шум носит флуктуационный характер и его спектр значительно шире спектра сигнала. Дискретизация такой смеси может привести к недопустимому ухудшению отношения сигнал/шум.

Дискретизация сигналов с финитным спектром при частоте $f_g = 2F_m$ требует выполнения определенных фазовых соотношений, обеспечивающих точное восстановление сигнала.

В общем спектре $U(j\omega)$ исходного сигнала $u(t)$ выделим спектральную составляющую с частотой $\omega_r = 2\pi E_r$. Её можно записать в виде

$$U(j\omega_m) \Rightarrow U_m(a)_m \cos(\omega_{mt} + \phi_c) = A_m(\omega_m) \cos(\omega_{mt}) + jB_m(\omega_m) \sin(\omega_{mt}), \quad (2.1.7)$$

где $U_m(\omega_r)$ - амплитуда спектральной составляющей; $A_m(\omega_m)$ и $B_m(\omega_m)$ - амплитуды её действительной и мнимой части; ϕ_c - начальная фаза.

Первая спектральная составляющая дискретизирующей последовательности $D(t)$ имеет частоту ω_g и её можно записать в виде $W(j\omega)g \Rightarrow V_i \cos(\omega_g t + \phi_g)$, где V_i - амплитуда и ϕ_g - начальная фаза (см. рис. 2.1.1).

В спектре дискретизированного сигнала (2.1.3) в результате свертки на частоте ω_r помимо составляющей (2.1.7) появится составляющая первого парциального спектра ($k=1$ в (2.1.3))

$$U[j(\omega_g t - \omega_{mt} + \omega_g - \phi_c)] = U[j(a)_{mt} + \phi_g - \phi_c] \quad (2.1.8)$$

Амплитуды спектральных составляющих (2.1.7) и (2.1.8) одинаковы и результат их суммирования зависит от соотношения фаз ϕ_c и ϕ_g . При $\phi_g = 0$ исчезает мнимая часть составляющей (2.1.7), а при $\phi_g = \pi/2$ - действительная часть. Из (2.1.8) следует, что для неискаженного восстановления сигнала необходимо выполнить условие:

$$\phi_g = 2\phi_c. \quad (2.1.9)$$

Соблюдение фазовых соотношений важно также при дискретизации сигналов с конечным числом ненулевых отсчетов [114]. У этих сигналов выполняются соотношения: $u(p) = 0$, $t_i + i - t_j = A_t/m$, $|i| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, где m - некоторое постоянное число ($m \in \{1; 2; 3; \dots\}$). В качестве примера можно привести сигнал с одним ненулевым отсчетом:

$$u_s(t) = U_0 \delta(t - 2j\pi F_m t), \quad (2.1.10)$$

и с двумя ненулевыми отсчетами:

$$U_k(0) U_0 [1 - (4FJ)^{2N}] \quad (2.1.11)$$

Для получения только одного отсчета у сигнала $u_s(t)$ дискретизирующие импульсы должны поступать в моменты $t_j = j/2F_m$ (начальная фаза $\psi_g = 0$). Для получения только двух отсчетов у сигнала $u_k(t)$ дискретизирующие импульсы должны поступать в моменты $t_i = (2i+1)/4F_m$ (начальная фаза $\psi_g = \pi/2$). Нарушение данных фазовых соотношений (детерминированное или случайное) приведет к появлению бесконечного числа ненулевых отсчетов.

Выполнение условия (2.1.9) выливается в сложную техническую задачу. Снять это требование можно двумя путями: выбрав $f_g > 2F_{ra}$ у сигнала с финитным спектром или обеспечив $U(j\omega_g/2) = 0$.

Таким образом, в реальных системах восстановленный сигнал можно выразить следующим образом

$$u_B(t) = \sum_{k=-N}^N u_3(kA_{tk})g(t - kA_{tk} - t_{3afl}), \quad (2.1.12)$$

где $u_3(-)$ - значение отсчета, полученное в реальном дискретизаторе;

A_{tk} - величина интервала дискретизации на k -ом шаге;

$g(-)$ - импульсная характеристика устройства восстановления;

$2N+1$ - число отсчетов, используемых при восстановлении;

t_{3afl} - величина задержки в АЦП.

Погрешность восстановления можно определить как разность

$$s(t) = u(t) - u_B(t). \quad (2.1.13)$$

Она складывается из составляющих, обусловленных несоблюдением отдельных требований идеальной дискретизации. При получении оценок погрешности (2.1.13) составляющие погрешности можно считать некоррелированными. Правомерность такого предположения подтверждается независимостью этих требований, различиями во влиянии требований на параметры и в объектах этих влиянии. В этой связи общую погрешность (2.1.13) можно рассматривать как сумму отдельных

погрешностей, появляющихся в результате нарушения только одного из требований идеальной дискретизации. Другой особенностью отдельных погрешностей является их монотонная зависимость от интервала A_t . С уменьшением интервала все погрешности уменьшаются, что приводит к отсутствию точек экстремума.

Важным свойством дискретного сигнала (2.1.4) при идеальной дискретизации является справедливость [74, 114] соотношения

$$A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} u^2(kA_t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = 3_c, \quad (2.1.14)$$

определяющего энергетическую эквивалентность исходного и дискретизированного сигналов.

В каждом конкретном случае при дискретизации возможно появление дополнительных требований, условий и возможностей. В качестве примера такого особого случая в Приложении Б рассмотрены особенности дискретизации узкополосных сигналов. На выбор частоты дискретизации налагаются дополнительные ограничения, позволяющие одновременно с дискретизацией осуществить преобразование частоты или детектирование сигналов. Результаты этих исследований приведены в работе [50].

2.2. Дискретизация сигналов с неограниченным спектром

Теоретические спектры сигналов, ограниченных по длительности конечным временным интервалом, бесконечны. Поэтому, физически реализуемые сигналы, имея конечную эффективную ширину спектра (1.4.18), не имеют четко выраженной верхней граничной частоты. Обобщение теоремы Котельникова на сигналы с бесконечным спектром, осуществленное в работе [106], для практических целей малоприспособно. Фактически это связано с увеличением числа отсчетов, что эквивалентно увеличению частоты дискретизации f_g и в пределе $f_g \rightarrow \infty$.

Дискретизация сигналов с неограниченным спектром или с максимальной частотой $F_m > f_g/2$ приводит к появлению погрешности (ошибки) при восстановлении [33, 54, 66, 106, 114, 125, 128, 131].

При дискретизации сигнала $u(t)$, имеющего спектр $U(j\omega)$ (см. рис.2.2.1,а), и последующем восстановлении по выборкам с помощью идеального ФНЧ, получим сигнал

$$u_{\Sigma}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) \frac{\sin[\omega_g(t - 2kA_t)/2]}{\sin[\omega_g(t - 2kA_t)/2]} \quad (2-2.1)$$

Анализ в спектральной области показывает, что у дискретизированного сигнала (совокупности выборок) парциальные спектры на поднесущих частотах $k\omega_g$, $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$, в (2.1.3) взаимно перекрываются (см. рис. 2.2.1,в). В результате этого при восстановлении сигнала по отсчетам, даже с использованием идеального ФНЧ с характеристикой (2.1.6) (см. рис. 2.2.1,г), спектр восстановленного сигнала (2.2.1) будет отличаться от исходного (см. рис. 2.2.1,д) и имеет вид:

$$U_{\Sigma}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j\omega + k\omega_g) \quad (2.2.2)$$

В спектре (2.2.2) первое слагаемое представляет собой полезную составляющую, энергия которой равна:

$$\Delta_{\text{с}} = \frac{i m_g^2}{-0_g/2} f |U(j\omega)|^2 < f_0. \quad (2.2.3)$$

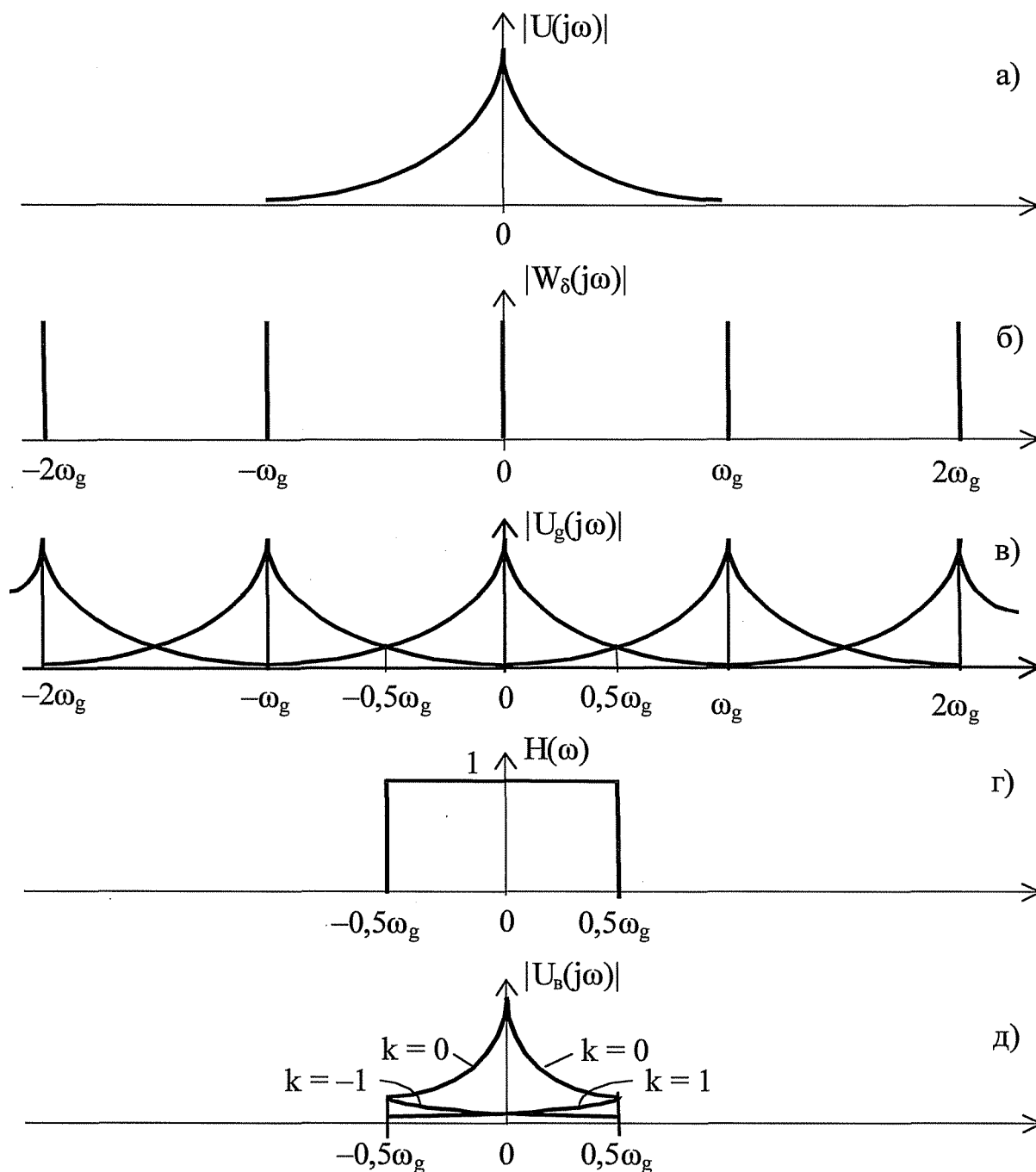


Рис. 2.2.1. Преобразование спектров при дискретизации

Второе слагаемое в (2.2.2.) представляет собой сумму спектральных составляющих исходного спектра $U(j\omega)$, имевших частоты $|\omega| > \omega_g/2$, и является помехой. Свёртка спектров сигнала и дискретизирующей последовательности $W_\delta(j\omega)$ (рис. 2.2.1,б) смещает эти спектральные составляющие в область $[-\omega_g/2; \omega_g/2]$ поднесущими

частотами $k\omega_g$, $|k| \in \{1; 2; 3\}$. Отсюда следует, что энергия спектральных составляющих в (2.2.2), обусловленных поднесущими $k\omega_g$, будет равна:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U[j(\omega + k\omega_g)] + U[j(\omega - k\omega_g)] \right\}^2 d\omega \leq \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega = 3 \cdot 3 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

В общем случае $\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_b < 3$, где 3 - полная энергия сигнала $u(t)$ (1.4.17).

Среднеквадратическое значение погрешности в соответствии с (1.5.8) можно нормировать к значению энергии сигнала и тогда получим:

$$\epsilon_{\text{нс}}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [u(t) - u_b(t)]^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt} = \frac{\epsilon^2}{3} \quad (2.2.5)$$

Интеграл в числителе (2.2.5) можно заменить [114] эквивалентным значением

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega) - U_b(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.2.6)$$

Это выражение следует из того, что $U_b(j\omega)$ не имеет составляющих с частотами выше $\omega_g/2$.

Вводя обозначение доли полной энергии в полосе $[-\omega_g/2; \omega_g/2]$

$$P_s(\omega_g) = \mathcal{E}_b / \mathcal{E}$$

и подставив в (2.2.6) выражение (2.2.2), получим

$$V^2 = 2 \cdot [1 - \Gamma_{18}(\Phi_8)] \quad (2.2.7)$$

Рассмотрим величины оценок (2.2.7) для некоторых сигналов.

Прямоугольный импульс $u_n(t)$ длительностью t_n (см. раздел 1.4) имеет функцию

$\text{Тлсн} \wedge \text{Og}$ вида [26, 28]

$$L_{\text{ЭП}}(\omega) \approx \frac{1}{71} \text{Si}(\omega T_{\text{г}}/2) \frac{4 \sin^2(a)_{\text{г}} T_{\text{г}}/4}{\omega} \quad (2.2.8)$$

где $\text{Si}(-)$ - функция интегрального синуса [121].

Подставив (2.2.8) в (2.2.7) и используя обозначение относительной частоты дискретизации $a = f_{\text{г}} T_{\text{г}}/2$, получим:

$$s^2_{\text{з, дБ}} < 10 \lg \left[2 \frac{1 - \text{arctg}^2(2a)}{\pi} \frac{\sin^2(a)}{a} \right] \quad (2.2.9)$$

Зависимость (2.2.9) приведена на рис. 2.2.2, график 1.

Экспоненциальный импульс во временной области записывается в виде:

$$u_0 e^{-\alpha t} \quad (2.2.10)$$

0, ∞ .

Спектр такого сигнала [92] равен

$$U_3(j\omega) = U_0 / (\alpha + j\omega) \quad (2.2.11)$$

Для этого сигнала функция $\text{arctg}(a)$ будет равна:

$$\text{arctg}^2(a) = -\text{arctg}^2(a) \quad (2.2.12)$$

Подставив (2.2.12) в (2.2.7) и (2.2.8), получим

$$s^2_{\text{з, дБ}} < 10 \lg \{ 2 [1 - \text{arctg}^2(2a)/\pi] \}, \quad (2.2.13)$$

где $a = f_{\text{г}} T_{\text{г}}/2$ - относительная частота дискретизации. График зависимости (2.2.13) приведен на рис. 2.2.2, кривая 1. Этот график в пределах точности расчетов совпадает с аналогичным графиком для прямоугольного импульса.

Косинусоидальный импульс во временной области имеет вид:

$$u_{\text{К}}(t) = \begin{cases} U_0 \cos\left(\frac{\pi t}{T_{\text{г}}}\right), & |t| \leq T_{\text{г}}/2, \\ 0, & |t| > T_{\text{г}}/2. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

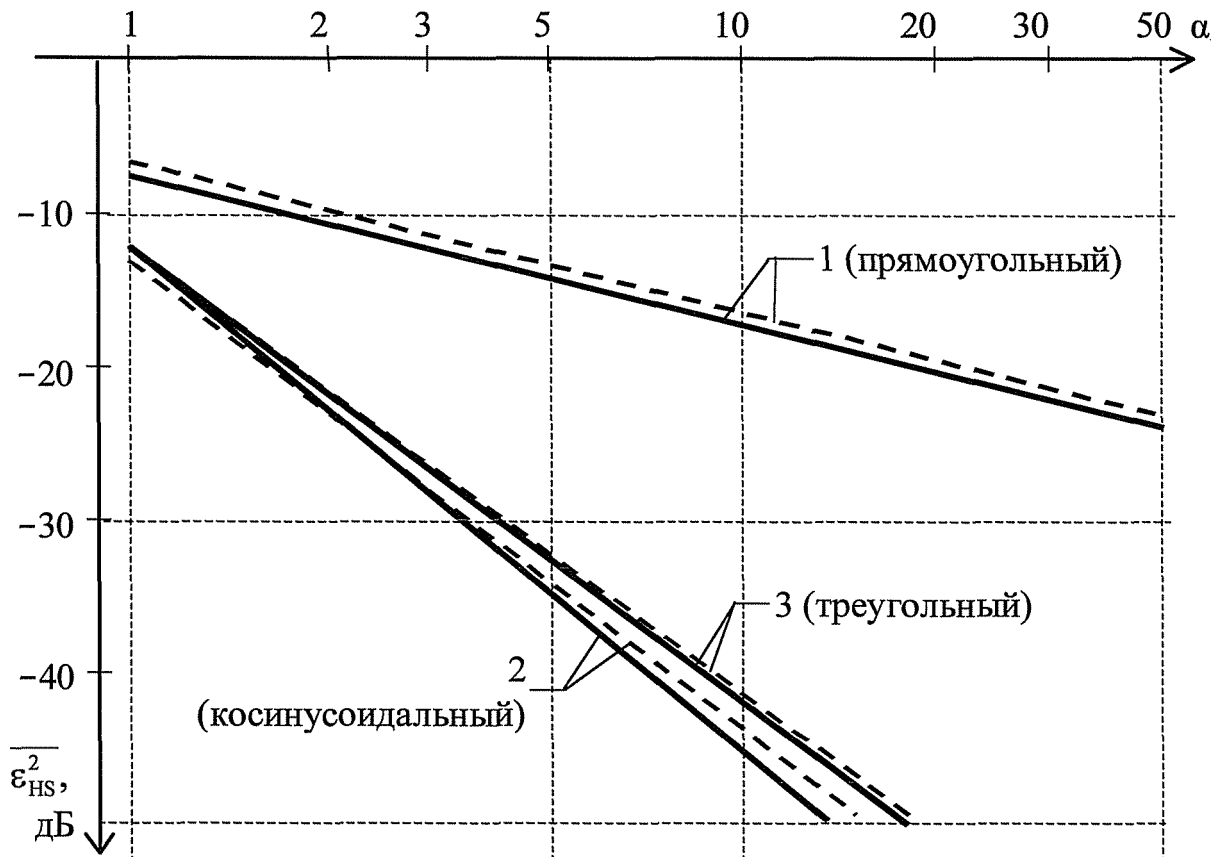


Рис. 2.2.2 Погрешности дискретизации сигналов со степенными спектрами

Спектр этого сигнала [92] описывается выражением

$$U_k(j\omega) = \frac{71U_0t_H \cos(\alpha)t_H/2}{2 \left((D/2)^2 - ((Bt_H/2))^2 \right)} \tag{2.2.15}$$

и имеет [28] функцию $r_{sk}(\alpha)g$ равную

$$\begin{aligned} \wedge_{IsK^g} &= \frac{1}{2} \frac{x \ddot{e} \cdot i Si}{(T\Gamma/2)^2 - (\alpha)t_H/4)^2} + \frac{71}{2} \frac{-Si}{2} + \frac{71}{4} \frac{w g^L_H}{4} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{71}{2} \frac{1}{4} \ln \frac{271 + O_{,,t,,}}{271 - COgt_H} \right\} i-Ci \tag{2.2.16} \\ &+ Ci \frac{71}{2} \frac{1}{4} \end{aligned} \end{aligned}$$

где $Si(\ll)$ и $Ci(\ll)$ - функции интегрального синуса и косинуса соответственно [121].

Подставив (2.2.16) в (2.2.7), получим зависимости $\epsilon_{НС}^2, dB$, график которой приведен на рис. 2.2.2, кривая 2. В этом случае относительная частота дискретизации принята равной

$$\alpha = f_g t_H / 2.$$

Треугольный импульс во временной области можно записать в виде

Для него функция $r_{ST}(G)g$ равна [26]

$$\eta_{ST}(\omega_g) = \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} 4\text{Si}(4\Xi_g) - 2\text{Si}(2\Xi_g) - \frac{\sin^4(\Xi_g)}{\Xi_g^3} - \frac{2\sin^3(\Xi_g)\cos(\Xi_g)}{\Xi_g^2} \\ - \frac{2\sin^2(\Xi_g)[3\cos^2(\Xi_g) - \sin^2(\Xi_g)]}{\Xi_g} \end{array} \right\} \quad (2.2.17)$$

где $S_g = \Omega)gt_H/8$, и амплитудный спектр [92] имеет вид:

$$u_T(\omega) = \frac{U_{0TH}}{2} \frac{|\sim \sin(\omega)t_H/4|}{\omega t_H/4} \quad (2.2.18)$$

Подставив (2.2.17) в (2.2.7), получим зависимость $\epsilon^{дБ}$ от относительной частоты дискретизации $a = f_g t_H/2$. График этой зависимости приведен на рис. 2.2.2, кривая 3. Этот график достаточно близко совпадает с соответствующим графиком для косинусоидального импульса (график 2).

Гауссов импульс $u_T(t)$ (см. раздел 1.4) имеет [26] функцию $r_{sr}(\Omega g)$ равную:

$$T]_{sr}(\omega_g) = \Phi(a\omega_g/2), \quad (2.2.19)$$

где $\Phi(\omega)$ -интеграл вероятности [121].

Подставив (2.2.19) в (2.2.7), получим:

$$4, дБ = 10 \lg\{2[1 - \Phi(a/2)]\}, \quad (2.2.20)$$

где $a = 2af_g$ - относительная частота дискретизации.

Зависимость (2.2.20) приведена на рис. 2.2.3, график 1.

Сигнал с линейной частотной модуляцией во временной области описывается выражением

$$и \quad \begin{cases} fu_0 \exp(jp, t^2), & 0 < t < T_{\text{H}}, \\ [0, t > T_{\text{H}}, t < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = 2\pi A f T_{\text{H}}$ - крутизна частотной модуляции;

$A f$ - девиация частоты;

T_{H} - длительность сигнала.

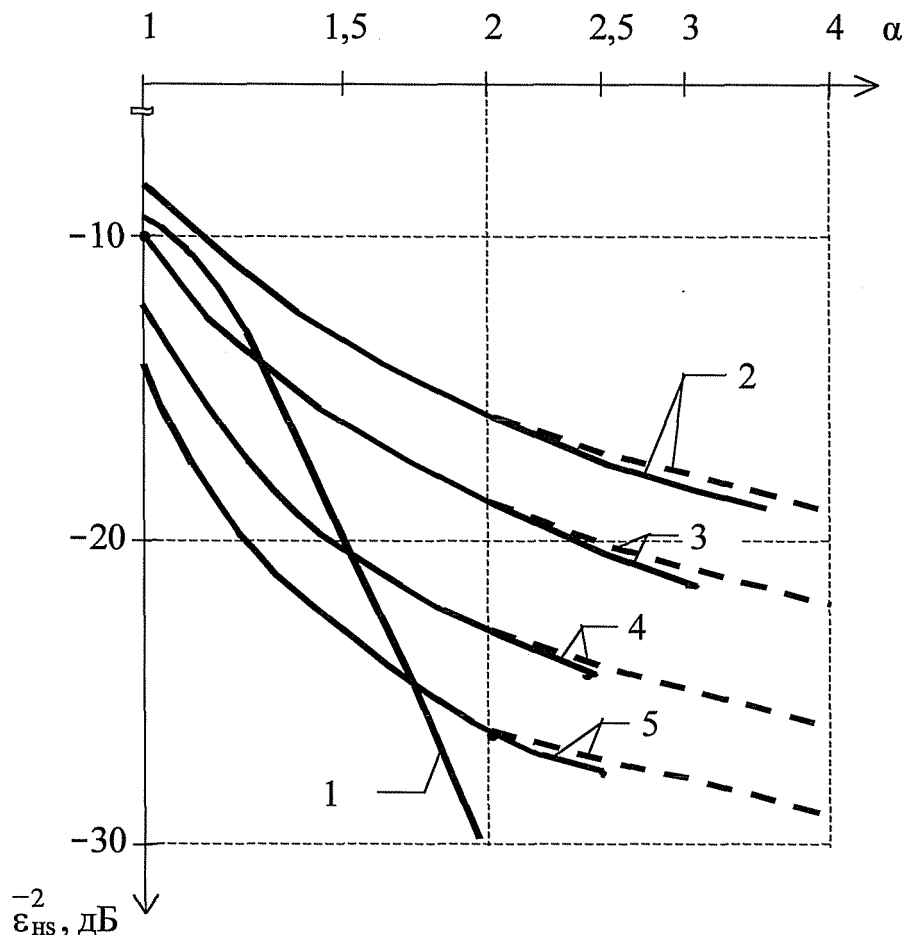


Рис. 2.2.3 Погрешности дискретизации гауссова и ЛЧМ-сигналов

Амплитудный спектр этого сигнала описывается [92] выражением:

$$|S(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 dx + C(X_2)^2 + [S(X_1) + S(X_2)]^2, \quad (2.2.22)$$

где $X_2 = \frac{0}{2\pi u A f}$

$B = T_{\text{H}} A f$ - база сигнала,

$C(*)$, $S(\omega)$ - интегралы Френеля [121].

Для определения величины отношения сигнал/помеха было осуществлено численное интегрирование спектра (2.2.22) в соответствии с (2.2.3) и (2.2.4) и рассчитаны значения $\epsilon^2_{s,дБ}$ для разных значений базы сигнала B и относительной частоты дискретизации $a = f_g/Af$. На рис. 2.2.3 приведена зависимость s^2_s , дБ для базы сигнала $B = 10$ - кривая 2, $B = 20$ - кривая 3, $B = 50$ - кривая 4 и $B = 100$ - кривая 5.

Выражения для погрешностей оказались достаточно сложными, даже для простейших сигналов $u_n(t)$, $u_K(t)$, $u(t)$. Вместе с тем из графиков рис. 2.2.2, 2.2.3 можно сделать вывод о том, что величина среднеквадратичной погрешности зависит от скорости убывания амплитуд спектральных составляющих на частотах $\omega > \omega_0/2$. У сигналов (прямоугольный, экспоненциальный), имеющих разрыв во временной области, спектральные составляющие убывают пропорционально ω (см. спектр (2.2.11)). У сигналов (косинусоидальный, треугольный), имеющих разрыв первой производной, спектральные составляющие убывают пропорционально ω^2 (см. спектры (2.2.15) и (2.2.18)). В общем случае, если сигнал имеет разрыв n -ой производной, то его спектр убывает пропорционально ω^{n+1} .

Для получения более простых оценок погрешностей аппроксимируем такие спектры функцией вида:

$$S_{\text{ап}}(\omega) \approx \frac{A_0 \omega_0^n}{\omega^{n+1}} \quad \omega > \omega_{\text{ап}}, \quad (2.2.23)$$

где A_0 - амплитуда спектральных составляющих сигнала при $\omega \rightarrow 0$;

ω_0 и $\omega_{\text{ап}}$ - граничная частота, определяемая из условия равенства энергией исходного и аппроксимирующего спектров;

n - степень, определяющая скорость убывания спектра.

Энергия аппроксимирующего сигнала (2.2.23) в соответствии с (1.4.1) равна

$$E_{\text{ап}} = \frac{A_0^2 \omega_0^{2n}}{7C} \frac{2\pi}{2n+1}$$

а энергия восстановленного сигнала (2.2.3)

Отсюда следует, что

$$|s_{an}| \approx 1 \quad (2.2.24)$$

Подставив (2.2.24) в (2.2.7), получим:

$$\frac{r^{2n-1}}{4\pi} > \quad (2-2.25)$$

В табл. 2.2.1 приведены выражения $|s_{an}|$ для нескольких значений степени n , а в табл. 2.2.2 выражения $(0^{\wedge}$ и $S_{g_{an}}$ для некоторых сигналов. В табл. 2.2.2 указаны также номера графиков аппроксимирующих зависимостей, изображенные на рис. 2.2.2 пунктиром. Как видно из рисунка, аппроксимация достаточно близка к рассмотренным сигналам (отклонение в худшем случае составляет ~ 1 дБ). Существуют сигналы, у которых скорость убывания спектральных составляющих изменяется с ростом ω . Так у гауссова сигнала скорость убывания возрастает с ростом ω , а у сигналов с частотной модуляцией - уменьшается. Тем не менее, у этих сигналов спектр имеет более "компактную" форму и погрешность восстановления может быть получена меньше, чем у сигналов с постоянной скоростью убывания спектральных составляющих при одинаковых частотах дискретизации.

У ЛЧМ-сигнала огибающая имеет прямоугольную форму, поэтому можно предположить, что при больших частотах убывание спектральных составляющих пропорционально ω . Для значений $\omega c > (2 \dots 2,5)$ можно предложить упрощенную оценку ошибки

$$\delta^{\wedge} = 1/2 \omega c, \quad \delta^{\wedge}, \text{дБ} = 10 \lg\{1/2 \omega c\}. \quad (2.2.26)$$

На рис. 2.2.3 пунктиром изображены зависимости (2.2.26) для соответствующих значений базы сигнала В.

Погрешность ограничения аппроксимирующего спектра Таблица 2.2.1

п	1		2	3
σ_{san}	2	$\frac{S_s}{\sigma_{sa}}$	$\frac{S_s}{\sigma_{sa}}$ И	$\frac{1}{\sigma_{sa}}$ S_s σ_{sa}

Параметры аппроксимирующего спектра

Таблица 2.2.2

Сигнал	Прямоуг. $U_n(t)$	Экспоненц. $U_z(t)$	Треугольн. $U_r(t)$	Косинусоид. $U_k(t)$
σ_{an}	$\frac{1}{2t_H}$	$\frac{KX}{2}$	$\frac{1}{2t_H}$	$\frac{37\Gamma^3}{32t_H}$
σ_{saa}^2	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{4a}$	$\frac{1}{16a^3}$	$27 f \text{ л}^2 \text{ Y}$ $16^{\wedge}32a \text{ J}$
Графики на рис. 2.2.2	1	1	3	2

В работе [106] приводятся нижняя и верхняя границы ошибки (2.2.5), однако нижняя оценка получена в предположении, что энергия \mathcal{E}_n (2.2.4) равна нулю. Верхняя оценка получена в предположении, что эта энергия более чем в 2 раза превышает энергию спектральных составляющих исходного сигнала с частотами выше $\omega_g/2$. Это противоречит закону сохранения энергии. В работе [66] также получена заниженная оценка погрешности (2.2.5) в том же предположении, что энергия \mathcal{E}_n (2.2.4) равна нулю.

2.3. Дискретизация с конечным числом отсчетов

Формирование и обработка любого сигнала производится на конечном интервале времени. Это может быть обусловлено конечным временем работы устройства, ограниченным временем предоставления канала связи, ограничением на объем запоминающего устройства и т.п.. Кроме того физические сигналы имеют конечную длительность (по крайней мере эффективную (1.4.3)), поэтому их обработку или формирование целесообразно вести на интервале $[t_{cp} - aT_{эфф}; t_{cp} + aT_{эфф}]$, где $a > 1$ - некоторое число, зависящее от формы сигнала, требуемой точности обработки или формирования и т.п..

Будем считать $t_{cp}=0$, а интервал $T_0 = 2aT_{эфф} = (2N+1)A_t$, где $A_t = 1/f_g$ - интервал временной дискретизации. В этом случае в сумме (2.1.4) будет участвовать конечное число $(2N+1)$ членов и восстановленный сигнал

$$u_N(t) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}(kA_t) \text{sinc}[\pi(t-kA_t)/A_t] \quad (2.3.1)$$

будет отличаться от исходного $u(t)$. Возникающую при этом ошибку (погрешность) можно определить как

$$s_N(t) = u(t) - u_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} \hat{u}(kA_t) \text{sinc}(\theta_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \hat{u}(kA_t) \text{sinc}(\theta_k), \quad (2.3.2)$$

где $\theta_k = \pi(t - kA_t)/A_t$.

Используя среднеквадратичный критерий (1.5.8,а) и учитывая ортогональность функций $\text{sinc}(\theta_k)$ при различных k

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\theta_k) \text{sinc}(\theta_n) dt = \begin{cases} A_t, & k = n; \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

получим [114,125] среднеквадратичное значение погрешности (2.3.2) в виде:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s_N(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} |\hat{u}(kA_t)|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\hat{u}(kA_t)|^2 \quad (2.3.4)$$

Далее будем рассматривать симметричные сигналы, удовлетворяющие условию $u(t) = u(-t)$ или $u(t) = -u(-t)$. Это не снижает общности полученных результатов, но существенно упрощает запись выражений, т.к. позволяет осуществлять анализ только для $t > 0$. Для несимметричных сигналов достаточно провести аналогичные выкладки для $t < 0$.

Для полной энергии сигнала $u(t)$ справедливо [74,114] соотношение

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = A_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(kA_t). \quad (2.3.5)$$

Введем обозначение $\eta_T(N)$ для доли энергии сигнала, приходящейся на интервал $[-T_0/2; T_0/2]$:

$$\eta_T(N) = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt} = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt}, \quad (2.3.6)$$

Тогда энергию сигнала вне этого интервала можно представить как

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} = [1 - \eta_T(N)] \mathcal{E}. \quad (2.3.7)$$

Рассмотрим поведение функции $u(t)$ вне интервала $[-T_0/2; T_0/2]$. Конечное значение энергии (2.3.5) и ограниченная ширина спектра обуславливают убывание сигнала при $|t| > T_{\text{эфф}}$ и $\lim_{|t| \rightarrow \infty} u(t) = 0$. При этом возможны два характера убывания

спектра, показанные на рис. 2.3.1: монотонный (рис. 2.3.1,а) - при постоянном знаке производной $u'(t)$ и немонотонный (рис. 2.3.1,б) - при знакопеременной производной $u'(t)$.

Штриховкой на рис. 2.3.1 показано отличие значений $u^2(t)$ и отсчета $u^2(kA_t)$ на интервалах $[kA_t; (k+1)A_t]$, $|k| > N+1$. Очевидно, что при равных энергиях $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ погрешность δ_N^2 будет больше у сигнала с постоянной производной $u'(t)$.

Запишем энергию $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ в виде:

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} = \int_{-\infty}^{-(N+1)A_t} u^2(t) dt + \int_{(N+1)A_t}^{\infty} u^2(t) dt = 2 \int_{(N+1)A_t}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (2.3.8)$$

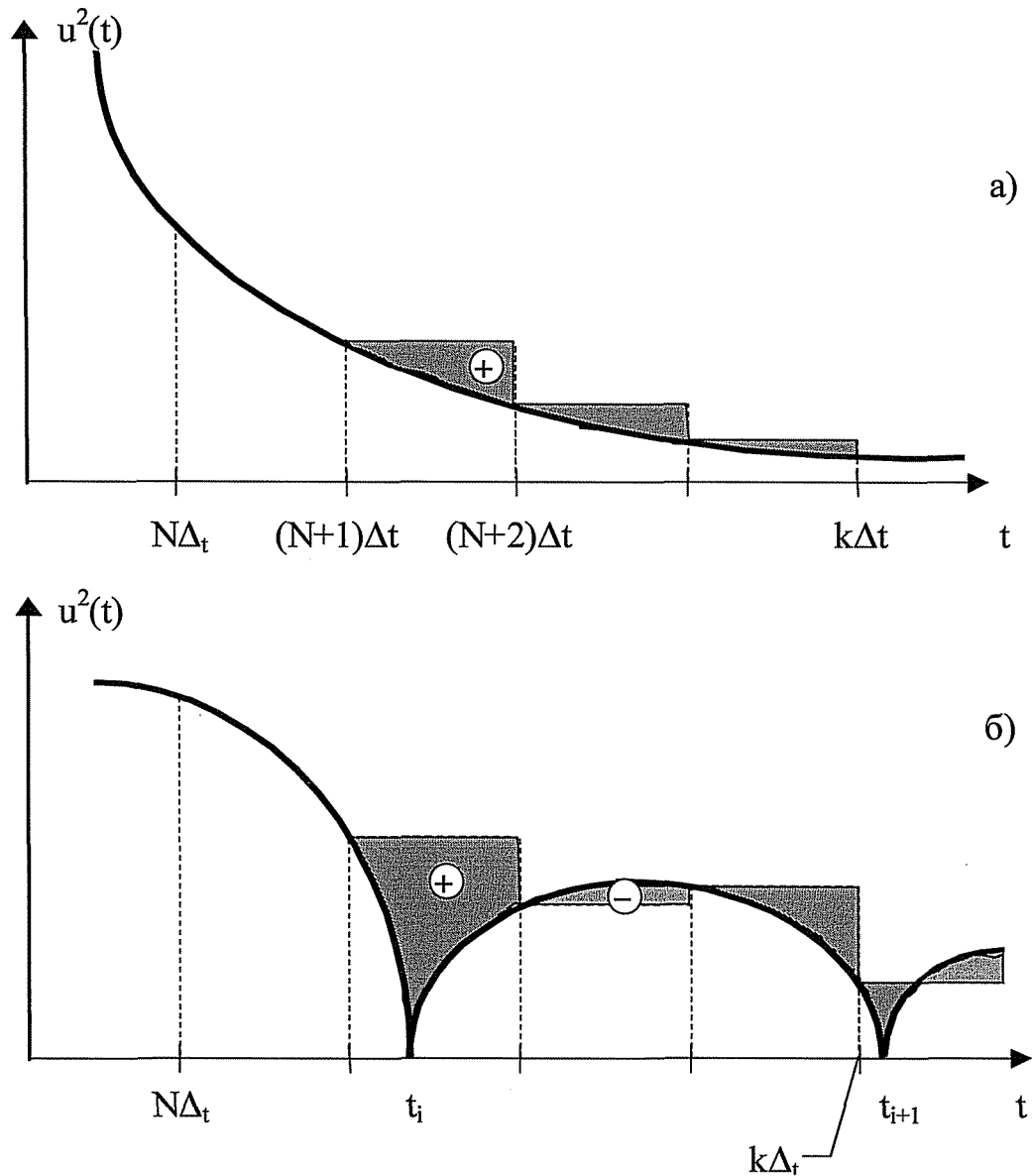


Рис. 2.3.1 Два характера убывания сигналов

Разложим [95] функцию $u(t)$ в окрестностях точек kA_t , $|k| > N$, в ряд Тейлора:

$$u(kA_t + \tau) = u(kA_t) + u'(kA_t)\tau - \frac{1}{2}u''(kA_t)\tau^2 + \dots$$

где $\tau = t - kA_t$, и, учитывая только первую производную, подставим в (2.3.8). После

возведения в квадрат и интегрирования по отдельным интервалам $[kA_t; (k+1)A_t]$

получим:

$$\mathcal{E}_{oc} = 2\Delta_t \sum_{k=N+1}^{\infty} u^2(k\Delta_t) + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\{ [u'(k\Delta_t)]^2 \left(\frac{\Delta_t^3}{3} \right) + u(k\Delta_t) u'(k\Delta_t) \Delta_t^2 \right\} \quad (2.3.9)$$

Из (2.3.9), учитывая соотношения (2.3.4) и (2.3.7), следует

$$\varepsilon_N^2 \approx (1 - \eta_\tau(N)) \Theta - 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\{ \left[u'(k\Delta_t) \right]^2 \left(\frac{\Delta_t^3}{3} \right) - u(k\Delta_t) u'(k\Delta_t) \Delta_t^2 \right\}. \quad (2.3.10)$$

В случае монотонно убывающей функции $|u(t)|$ произведение $u(k\Delta_t)u'(k\Delta_t)$ всегда отрицательно и последнее слагаемое в сумме увеличивает ошибку s_N^2 .

Величина погрешности зависит также от энергии Θ_{oc} и скорости убывания сигнала при $|t| > T_0/2$. Из свойств преобразования Фурье следует, что скорость убывания сигнала определяется видом его спектра.

При разрывном характере спектра (например, у сигнала $u_s(t) = U_0 \text{sinc}(27tF_{mt})$) убывание, определяемое по касательной к точкам локальных экстремумов, пропорционально t .

При непрерывном спектре, но разрывной первой производной спектра (например, у сигналов $u_p(t) = U_0 [\text{sinc}(27tF_{mt})]^2$ или $u_c(t) = U_0 \cos(27tF_{mt}) / [1 - (4F_{mt})^2]$), убывание пропорционально t^2 .

В общем случае, при непрерывном спектре и его производных до $(n-1)$ -ой включительно и разрывной n -ой производной спектра сигнал убывает пропорционально t^{n+1} .

Существуют сигналы, скорость убывания которых изменяется с ростом $|t|$.

Из выражения (2.3.4) следует, что если все значения $u(k\Delta_t)$, $|k| > N$ равны нулю, то погрешность восстановления также будет равна нулю. Для этого необходимо, чтобы у сигнала со знакопеременным убыванием (см. рис. 2.3.1,6) моменты равенства нулю значений сигнала $u(t_j) = 0$, $|j| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, удовлетворяли условию $t_{j+1} - t_j = A_i/m$, где m - целое число, $m \in \{1; 2; 3; \dots\}$.

В [114] доказано существование и рассмотрена методика получения сигналов с ограниченным спектром, имеющих конечное ЧИСЛО M_0 отсчетов, отличных от нуля. В частности такими сигналами являются при $M_0=1$ - $u_s(t)$ (см. (2.1.10)) и при $M_0=2$ - $u_c(t)$ (см. (2.1.11)). Однако ошибка s_N^2 будет равна нулю при строго определенном фазовом соотношении такого сигнала и дискретизирующих импульсов. Для сигнала $u_s(t)$ дискретизирующие импульсы должны поступать в

моменты $t_j = i/2F_m$, а для сигнала $u_c(t)$ - в моменты $t_i = (2i+1)/4F_m$, $i \in \{0; 1; 2; \dots\}$.

Всякое смещение дискретизирующих импульсов (детерминированное или случайное) из этих точек на некоторую величину где $|\xi| < 0,5$, приведет к появлению ошибки со среднеквадратичным значением

$$C_N = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} A_t u^2[(k+5)/2aF_m] + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_t u^2[(k+5)/2aF_m], \quad (2.3.11)$$

где $a = f_g/2F_m$ - относительная частота дискретизации.

К такому же результату приведет и повышение частоты дискретизации, когда $a > 1$. Для некоторых сигналов были рассчитаны погрешности (2.3.11) при детерминированных и случайных смещениях отсчетов

На рис. 2.3.2 приведены зависимости относительной погрешности

$$\epsilon^{\wedge}, \text{дБ} = 10 \lg(\epsilon^{\wedge}/\epsilon) \quad (2.3.12)$$

от величины детерминированного сдвига всех отсчетов на величину ξ при $N=10$ для сигнала $u_s(t)$ при $os=1$ - график 1, $os=1,01$ - график 2, $a=1,1$ - график 3; для сигнала $u_c(t)$ при $a=1$ - график 4, $a=1,1$ - график 5. На этом же рисунке график 6 - это зависимость (2.3.12) при $N=10$ и $os=1$ для сигнала $u_p(t)$, имеющего интервалы между точками нулевого значения больше, чем $1/2F_m$.

На рис. 2.3.3 приведена зависимость среднего значения ошибки (2.3.12) при $N=10$, $a=1$ и случайном смещении ξ_k , $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, всех отсчетов. При этом полагось, что случайные величины ξ_k имеют нулевое среднее значение и равномерную плотность вероятности на интервале $[-A^{\wedge}; D_p]$. График 1 на рис. 2.3.3 соответствует сигналу $u_s(t)$, график 2 - сигналу $u_c(t)$, и график 3 - сигналу $u_p(t)$.

Из рис. 2.3.2, 2.3.3 следует, что теоретически возможное точное восстановление некоторых сигналов по конечному числу отсчетов представляет, в значительной мере, академический интерес. В реальных системах обеспечение строгого фазового соответствия между сигналом и дискретизирующими

импульсами, абсолютной стабильности интервала A_t и равенства $A_t=1/2F_m$ представляет трудноразрешимую задачу.

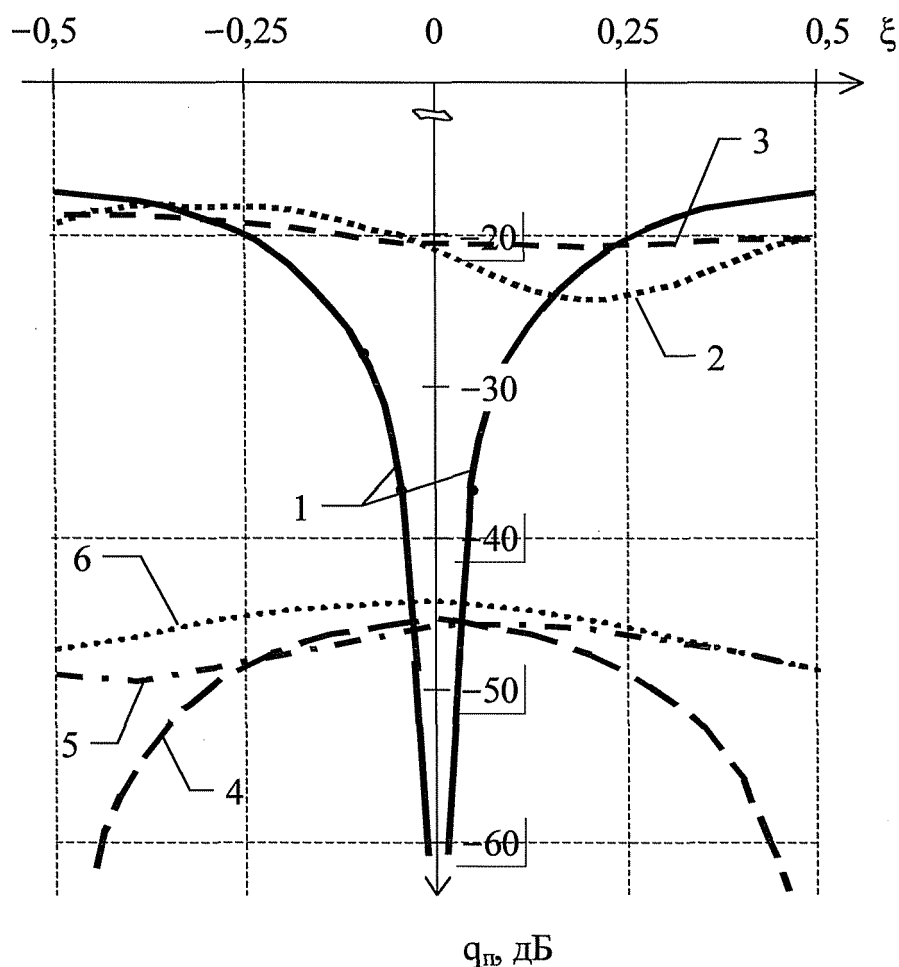


Рис. 2.3.2 Погрешности смещения отсчетов

При известном аналитическом выражении $u(t)$ величина погрешности s_N^2 может быть рассчитана по выражениям (2.3.4) или (2.3.11). На рис. 2.3.4 приведены зависимости максимальных значений нормированной погрешности (2.3.12) при $a=1$ от числа использованных отсчетов $N_0 = 2N+1$ при наиболее неблагоприятном смещении отсчетных импульсов для $|\xi| < 0.5$ и сигналов $u_s(t)$ - график 1, $u_c(t)$ - график 2 и $u_p(t)$ - график 3.

Дискретизации могут подвергаться сложные сигналы с базой $B = 2T_{\text{эфф}}R_T \gg 1$. Типичным примером такого сигнала является сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). При пассивном методе формирования [65] получают ЛЧМ-

сигнал $s(t)$ с равномерным амплитудным спектром в полосе $[\omega_0 - A_f; \omega_0 + A_f]$. У такого сигнала огибающая описывается функцией

$$\sqrt{\frac{1}{215} \{ \text{Шс}(X_1) + C(X_2) \}^2 + [s(x_0) + S(X_2)]^2},$$

где $X_1 = \sqrt{1 + 21/T_{\text{эфф}} f}$;

A_f - ширина спектра (девиация частоты);

$T_{\text{эфф}}$ - эффективная длительность сигнала;

$C(X_i)$, $S(X_j)$ - интегралы Френеля [121].

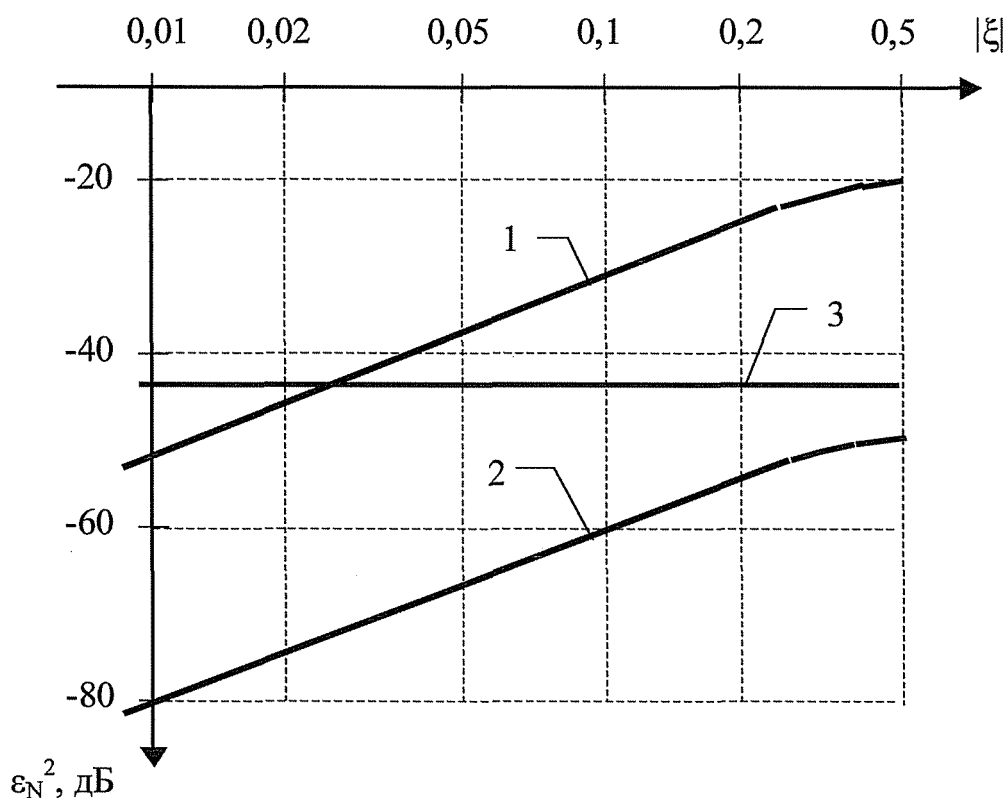


Рис. 2.3.3 Средние значения погрешности смещения

Дискретизация такого сигнала и ограничение числа отсчетов также приводят к погрешности (2.3.4). Численным интегрированием была рассчитана погрешность (2.3.12) при интервале дискретизации $A_t = 1/2A_f$. На рис. 2.3.5 приведены графики зависимости относительной среднеквадратичной погрешности SN от числа отсчетов

на степень свободы сигнала $N/B\omega_c$ при базе сигнала $B=10$ - кривая 2, $B=20$ - кривая 3, $B=50$ - кривая 4, $B=100$ - кривая 5. Особенностью таких сигналов является уменьшение скорости убывания сигнала с ростом $|\xi| > T_{\text{эфф}}/2$. При $N/B\omega_c > 1$ скорость

убывания близка к t^n , где $n > 1$ и зависит от величины V . При $N/V \gg 1$ скорость убывания становится пропорциональной t , что и должно следовать из прямоугольности спектра ЛЧМ-сигнала.

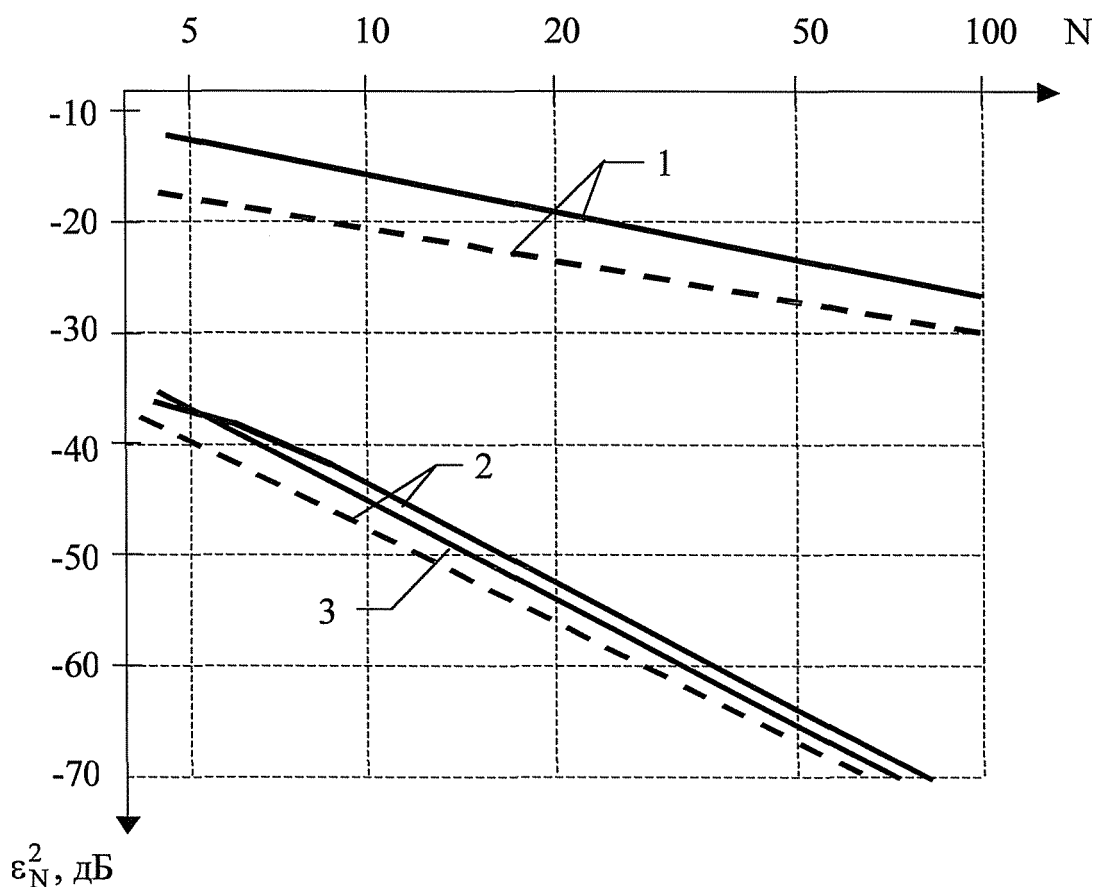


Рис. 2.3.4 Максимальные значения нормированной погрешности

Ещё одним характерным типом является гауссов сигнал - $u_r(t) = U_0 \exp(-t^2/2a^2)$, где a - эквивалентная длительность сигнала. Дискретизация $u_r(t)$ с шагом $A_t = 1/2aF_m = a/2a$, $F_m = 1/a$ - эффективная ширина спектра, при ограниченном числе отсчетов приводит к появлению ошибки ограничения (2.3.4). В соответствии с (2.3.4) и (2.3.12) были рассчитаны величины ошибок при $a=1$ и $\xi=0$. На рис. 2.3.5, кривая 1 приведен график зависимости от числа отсчетов $(N+1)/2a$. Из рис. 2.3.5 видно, что у гауссова сигнала скорость монотонного убывания увеличивается с ростом $|t|$.

Рассчитывать погрешность s_N^2 в соответствии с (2.3.4) или (2.3.11) не всегда удобно и целесообразно. Желательно иметь оценку этой погрешности, связанную с

параметрами сигнала. Из рис. 2.3.1,а следует, что такую оценку можно представить (см. также [114]) в виде:

$$\hat{\epsilon} < \epsilon_{oc}(1 + P),$$

где P - постоянная, зависящая от формы сигнала и, возможно, от величины N .

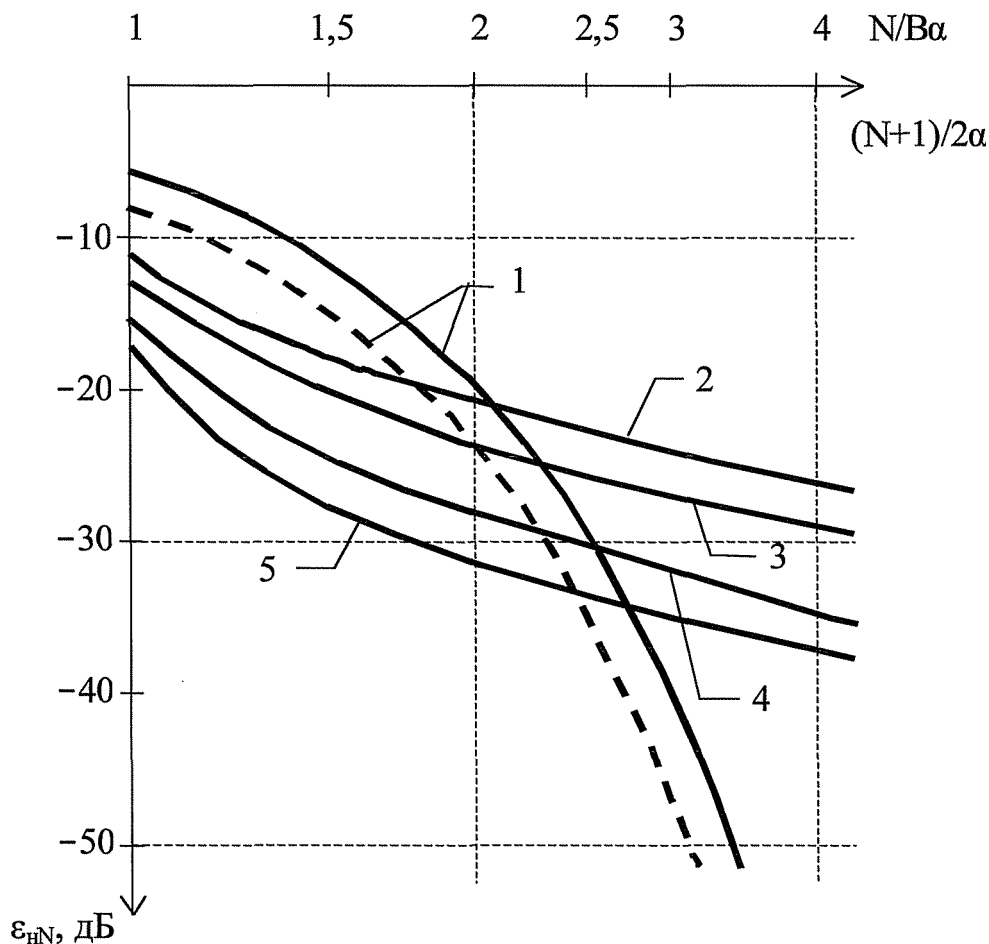


Рис. 2.3.5 Погрешности гауссова и ЛЧМ-сигнала

Если использовать выражение (2.3.10), то относительную величину погрешности можно записать в виде:

$$\epsilon_{nN} = S^2 S[l-n_T(N)](1 + P). \quad (2.3.13)$$

Воспользовавшись результатами работы [28] и дуальностью преобразования Фурье, можно для ряда сигналов получить выражения $T_T(N)$ и по ним - оценку (2.3.13). Для сигнала $u_s(t)$

$$\hat{T}_s(N) = 2\text{Si}(2\theta_N) - \sin^2(\theta_N)/\theta_N \text{ /я}$$

где $\theta_N = \pi(N+1)/a$, $\text{Si}(-)$ - функция интегрального синуса [121].

Для сигнала $u_p(t)$

$$\text{nxp}(N) \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos(2\theta_N) - 2 + 4\text{Si}(2\theta_N) - 2\text{Si}(\theta_N)}{\theta_N} + \frac{\sin(2\theta_N) - 2\sin(\theta_N) + 2\cos(2\theta_N) - 2\cos(\theta_N)}{\theta_N} \right\}$$

Для гауссовского сигнала $u_r(t)$ (см. раздел 1.4)

$$\text{WN} = O[(N+1)/2a],$$

где $\Phi(-)$ - интеграл вероятности [121].

Для определения величины p на рис. 2.3.4 и 2.3.5 приведены зависимости $10\lg[1-T]_{T(N)}$ от числа отсчетов N : на рис. 2.3.4 для сигнала $u_s(t)$ (пунктирный график 1) и для сигнала $u_c(t)$ (пунктирный график 2), а на рис. 2.3.5 для сигнала $u_r(t)$ (пунктирный график 1). Из сопоставления графиков следует, что для наибольшего значения погрешности s_N^2 величина $p \sim 1 \dots 1,5$ у сигналов со знакопеременным убыванием ($u_s(t)$, $u_c(t)$) и $0 \sim 1 \dots 2$ у сигналов с монотонным убыванием ($u_r(t)$).

Выражения, описывающие функцию $T]_{T(N)}$, даже для относительно простых сигналов $u_s(t)$, $u_p(t)$, $u_c(t)$ получаются сложными в вычислении. Поэтому желательно иметь оценку, выражающуюся через элементарные функции. Для получения этой оценки воспользуемся аппроксимацией сигнала вида [114]:

$$u(t) = \begin{cases} U_0, & |t| < t_{\text{ап}}, \\ U_0 \frac{t_{\text{ап}}^{\pi}}{t^{\pi}}, & |t| > t_{\text{ап}} \end{cases} \quad (2.3.14)$$

где π - целое число ($\pi > 1$), задающее скорость убывания сигнала при $|t| > t_{\text{ра}}$;

U_0 - амплитудное значение аппроксимируемого сигнала $u(t)$ (при $t \rightarrow 0$);

- момент времени, определяемый из условия равенства энергий исходного и аппроксимирующего сигналов.

Определим энергию сигнала (2.3.14):

$$Z_{an} = \int_0^{\infty} 2/u^2(t) dt = 2U \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2(t)} dt \quad \text{ап} \quad \begin{matrix} 211 \\ 2n-1 \end{matrix} \quad (2.3.15)$$

Приравняв её энергии Э сигнала $u(t)$, получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}(2\pi-1)}{4nUg} dt \quad (2.3.16)$$

Будем рассматривать случай, когда $\tan(NAt) < NA_t$. Определим энергию остатка сигнала при $t \sim NA_t$:

$$\hat{\mathcal{E}}_{\text{осап}} = \frac{\int_0^{\infty} u^2 \text{ан}(t) dt}{(N+1)A_t} = \frac{\mathcal{E}(2\pi-1)}{(2n - 1) \int_0^{\infty} (N+1)A_t^{2n-1}} \quad (2.3.17)$$

Подставив (2.3.16) в (2.3.17) и разделив на энергию сигнала, получим:

$$1 - n \tan(N) = 2 \frac{\mathcal{E}(2\pi-1)}{(N+1)A_t U Q} \quad (2.3.18)$$

В табл. 2.3.1 приведены выражения (2.3.18) для некоторых сигналов и значения показателя степени n , исходя из формы их спектров.

Параметры аппроксимирующего сигнала

Таблица 2.3.1

Сигнал	$U_0 \text{sinc}(27i; F_{mt})$	$U_0 \text{sinc}^2(2rc F_{mt})$	$1J_{\nu} \cos(2_n F_{mty} [1 - (4F_{rt})^2])$
n	1	2	2
$1 \text{ "T"}_{\text{тап}}(H)$	a $8(N+1)$	$\Gamma 7 3^3$ $1 3 \text{ лта}$	$1 \Gamma a \sim ^3$
		$4 _{64(N+1)J}$	$4 _{2(N+1)J}$
График нарис. 2.3.6	1	2	3

На рис. 2.3.6 приведены графики зависимостей $101g[1 - r|_{\text{тан}}(N)]$ для трех типов сигналов в соответствии с табл. 2.3.1. На этом же рисунке пунктиром изображены графики точных зависимостей $101g[1 - T|_{\text{т}}(N)]$, идентичных пунктирным графикам

рис. 2.3.4. Сопоставление графиков показывает, что для рассмотренных сигналов аппроксимация (2.3.18) дает результаты, отличающиеся от действительных значений не более, чем на 1 дБ.

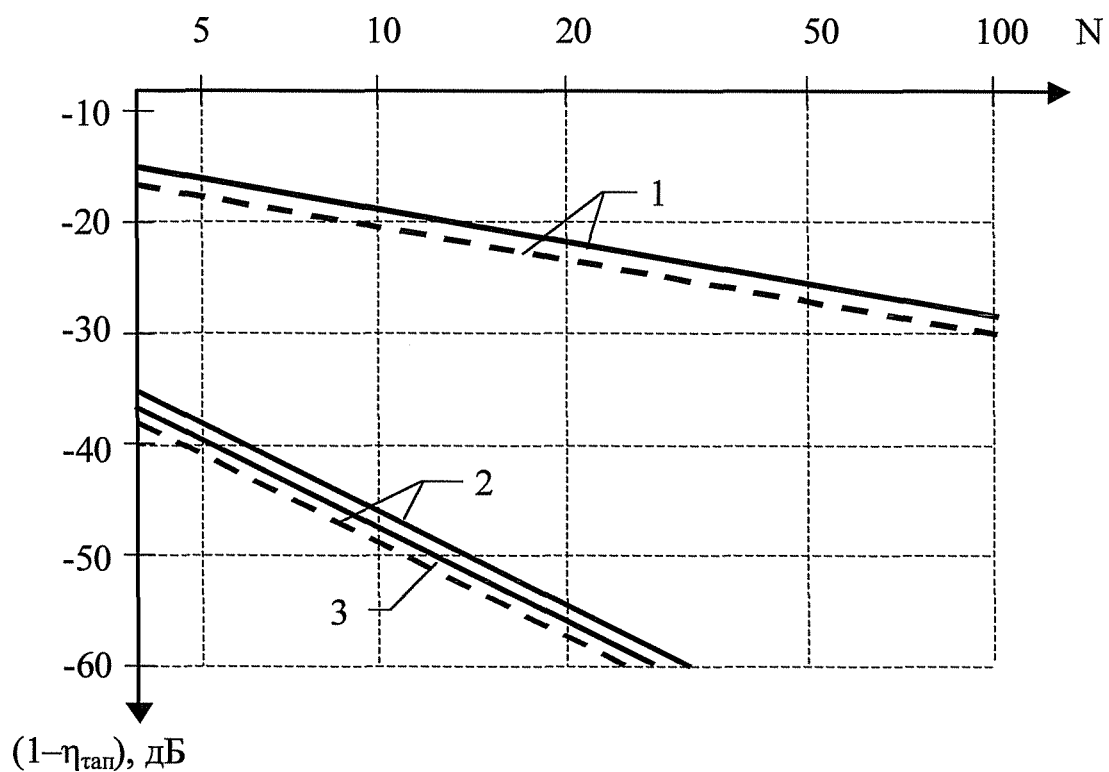


Рис. 2.3.6 Относительная доля энергии сигналов

2.4. Нестабильность интервала дискретизации

Отсчетная функция $D(t)$ (2.1.1) в реальных системах представляет собой периодическую последовательность коротких импульсов прямоугольной формы. Формирование такой последовательности осуществляется в устройствах с задающим генератором высокого качества. Как правило, это кварцевые генераторы с относительной нестабильностью частоты $\delta_f < 10^{-5}$. В системах дискретизации особое значение имеет кратковременная нестабильность частоты на интервале существования дискретизируемого сигнала $u(t)$ или его обработки $[-T_0/2; T_0/2]$.

Мгновенное значение частоты следования отсчетных импульсов ω_{gk} в момент $t_k = kA_t$ будет отличаться от номинального значения (ω_{g0}). Тогда

$$\frac{\omega_{gk} - \omega_{g0}}{\omega_{g0}} \sim 10^{\log i} \text{ сок}$$

будет мгновенным значением относительной нестабильности частоты генератора ω_{g0} . Переходя от частоты к периоду $A_t = 2\pi/\omega_{g0}$, можно ввести мгновенное изменение интервала дискретизации A_k от номинального значения в момент времени kA_t (см. рис. 2.4.1). Относительное изменение $\Delta A_k/A_t$ определяется нестабильностью частоты и равно $\delta_k^A = \delta_{шк}$.

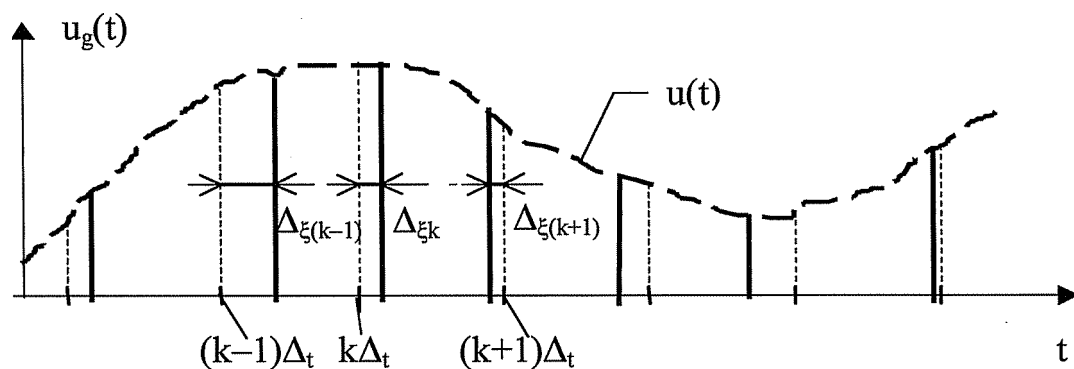


Рис. 2.4.1 Дискретизация с нестабильным периодом

Значения δ_k^A являются случайными величинами с нулевым средним значением и некоторым стандартным отклонением $\sigma_n \ll 1$. Совокупность значений δ_k^A ,

$k \in \{0; 1; 2; \dots\}$, можно рассматривать как нормальный случайный процесс с дисперсией σ^2 , для которой справедливо соотношение $\sigma^2 = 5f$.

Таким образом, дискретизация сигналов в реальных системах сопровождается смещением отсчетных импульсов из точек идеальной дискретизации kA_t , $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ $= N$. Это иллюстрирует рис. 2.4.1, на котором показаны исходный сигнал $u(t)$, точки дискретизации kA_t и величины смещения Δ_k на каждом шаге. Совокупность Δ_k , $k \in N$, образует выборку случайной величины Δ .

При восстановлении по таким отсчетам будет получен сигнал

$$u_H(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t + \Delta_k) \text{sinc}[\pi(t - kA_t - \Delta_k)/A_t], \quad (2.4.1)$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, отличающийся от исходного $u(t)$. Влияние смещения отсчетов на ошибку восстановления, совместно с неточностями в получении отсчетов и другими факторами, рассмотрено в [114]. Однако по полученным результатам затруднительно определить требования к стабильности частоты f_g (к величине $5f$).

Для определения степени отличия (2.4.1) и $u(t)$ воспользуемся ошибкой $\delta_H(t) = u(t) - u_H(t)$ и её среднеквадратическим значением $\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_H^2(t) dt$. Можно показать (см. Приложение В), что среднеквадратическую ошибку ϵ_H^2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_H^2 < 4\pi^2 \sigma^2 M_2 \{s J/3 - (6j/3 - \pi^4 \sigma^2 M_4 (oj/60 + \\ + \Delta \ll \gg [M_2 K] - 7T^2 M_4 \{s P\} / 3) + \Delta \ll \ll \gg D^* M_4 \} - 3A^2 R_{02}(0) 7t^2 M_4 A\} + \\ + 4D^4 R_{13}(0) M_4 \} + 2A^3 R_{12}(0) M_3 \text{ У-} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Для нормальной случайной величины справедливы [67] соотношения: $M_4 = 3M_2 = 3\sigma^4, M_3 = 0$. Можно также показать (см. раздел 1.4 и [67]), что в совпадающие моменты времени $R_{nm}(0) = 0$ при $m = n+1, n \in \{0, 1, 2\}$.

С учетом этих соотношений из (2.4.2) получим:

$$E^2 < 8 \{ A^2 3 \mathcal{E}^{*n} + 38 \Lambda^4 \mathcal{E}_c / 60 - A^2 \Lambda^2 \mathcal{E}^{*o} / 3 + A^4 \mathcal{E}^{*2} \} + 2 A^4 R_n(0) - 3 A^2 R_{02}(0) + 4 \Gamma^4 \mathcal{E}_c / 3 \}. \quad (2-4.3)$$

Качество системы дискретизации характеризуется относительная ошибка

$$\epsilon^2 / \mathcal{E}_c < 8 \{ \Gamma_n + 4 \Lambda^2 / 3 + 35 \Lambda^4 / 60 - \Lambda^2 \Gamma_n / 3 + \Lambda_n + 2 \Gamma_{13}(0) - 3 \Gamma_{02}(0) \}, \quad (2.4.4)$$

где $\Gamma_n = A^2 3 \Lambda^4 / \mathcal{E}_c = \text{пс}$, $\Lambda_n \sim A \Delta 3 \Lambda^2 / \mathcal{E}_c$ - коэффициенты, определяемые отношением энергий сигнала и его первой и второй производных (см. (1.4.21));

$\Gamma_{13}(0) = \Lambda_{13}(0) / \mathcal{E}_c$, $\Gamma_{02}(0) = A^2 R_{02}(0) / \mathcal{E}_c$ - нормированные взаимно-корреляционные функции.

Учитывая, что нестабильность частоты $\delta f \ll 1$, а в выражении (2.4.4) сумма в квадратных скобках принимает отрицательное значение и по модулю мала, то относительная ошибка не превысит величину

$$\epsilon_n / \mathcal{E}_c \Lambda^2 \epsilon^2 = 8 f (4 \Lambda^2 / 3 + \Gamma_n) -$$

Определим значения коэффициента Γ_n для некоторых типов сигналов.

Гармоническое колебание $u_k(t) = U_0 \cos(2\pi F_m t)$ имеет на интервале периода $T_k = 1/F_m$ энергию

$$\mathcal{E}_k = \int_0^{T_k} \cos^2(2\pi F_m t) dt = U_0^2 / 2 F_m.$$

Производная этого сигнала $u^{\wedge}(t) = 2\pi F_m U_0 \sin(2\pi F_m t)$ имеет на интервале периода энергию $\mathcal{E}_k = 2\pi F_m U_0^2$. При интервале дискретизации $\Lambda_t = 1/2a F_m$, где $a > 1$ - относительная частота дискретизации, получим функцию

$$u_s(t) = U_0 \text{sinc}(2\pi a F_m t) / \mathcal{E}_k / 2a^2,$$

Сигнал $u_s(t) = U_0 \text{sinc}(2\pi a F_m t)$ имеет энергию $\mathcal{E}_s = U_0^2 / 2 F_m$ и производную

$$U_g(t) = U_0 27tF_m \Gamma \cos(27cF_m t) - S_m C(27F_m) m Q$$

Энергия производной равна

$$\mathcal{E}' = \int_0^T |u'(t)|^2 dt = U_0^2 27^2 F_m^2 / 3 .$$

Тогда, учитывая что $A_t = 1/2aF_m$, получим

$$\eta_{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{3a^2} .$$

Сигнал $u_c(t) = U_0 \cos(27cF_m t) / (1 - (4F_m t)^2)$ имеет энергию $\mathcal{E}_c = \frac{\pi}{10\Gamma}$, а

его производная - $\mathcal{E}'_c = 0,57c^2 U_0 F_m$. Тогда получаем

$$\eta_{\Gamma} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) / \alpha$$

Сигнал и p ($O = U_n [\sin c(2 \pi \Gamma t)]^2$) имеет энергию $\mathcal{E}_p = U_0^2 / 3F_m$. Его производная обладает энергией $\mathcal{E}'_p = 87cF_m U_0$. У этого сигнала коэффициент η_{Γ} будет равен:

$$\eta_{\Gamma} = \frac{2\pi}{\alpha^2}$$

У гауссовского сигнала $u_r(t) = U_0 \exp\left(-t^2 / 2\hat{a}\right)$ энергия равна $\mathcal{E}_r = U_0^2 \hat{a} / \Gamma$ а у его производной - $\mathcal{E}'_r = \frac{\sqrt{\pi} U_0^2}{2\hat{a}}$ Тогда отношение энергий равно

$$\eta_{\Gamma} = \frac{\Delta_t^2 \mathcal{E}'_r}{\mathcal{E}_r} = \frac{2}{\alpha^2} ,$$

где предполагается, что $A_t = 2a/\hat{a}$.

В табл. 2.4.1 приведены выражения для коэффициента Γ_{Γ} и нормированной погрешности s_{Γ}^2 для рассмотренных сигналов, имеющих различные скорости убывания спектра.

На рис. 2.4.2 для сигналов из табл. 2.4.1 приведены графики зависимостей $8^2, \text{flB} = 101g(s^2/3)$ от нестабильности частоты дискретизации при наихудшем зна-

чении $a = 1$, когда ошибка максимальна. Для этого условия приведены также значения ошибки при нестабильности частоты $5_f = 1(\Gamma^3$. Графики для рассмотренных сигналов практически совпали (отличия в значениях не превышают 1,5дБ), что свидетельствует о слабом влиянии формы сигнала (скорости убывания спектра) на

Величины погрешности от нестабильности частоты

Таблица 2.4.1

Сигнал	Пн	$\epsilon_{\text{н}}^2/\Theta$	График на рис.2.4.2	Значение $\epsilon_{\text{н}}^2, \text{Ж}$	
$U \sin(27tF_{\text{mt}})$	$л/2a^2$	8?	$\frac{4\tau c^2}{3} \frac{71}{2a^2};$	2	-48,3
$U \operatorname{sinc}(2TcF_{\text{mt}})$	$7C^2/3a^2$	8?	$\frac{(л_{\text{н}}^2}{471} \frac{71}{3} \frac{1}{3a^2};$ Γ^7	1	-47,8
$\frac{\cos(27iF_{\text{mt}})}{1-(4F_{\text{mt}})^2}$	$\frac{(A/)}{<6 J/} \frac{1}{a^2}$	8?	$\frac{4\Gamma^2}{43} \frac{7C^2-6}{6a^2_y}$	1	-47,7
$U_0 \operatorname{sinc}^2(27cF_{\text{mt}})$	$2T^2/a^2$	8?	$\frac{47^2}{3} \frac{27^2}{5a^2} \frac{1}{7}$	1	-47,7
$U_0 \exp(-4)$	$2/a^2$	8?	$\frac{4\Gamma^2}{3} \frac{2}{a^2},$	2	-48,2

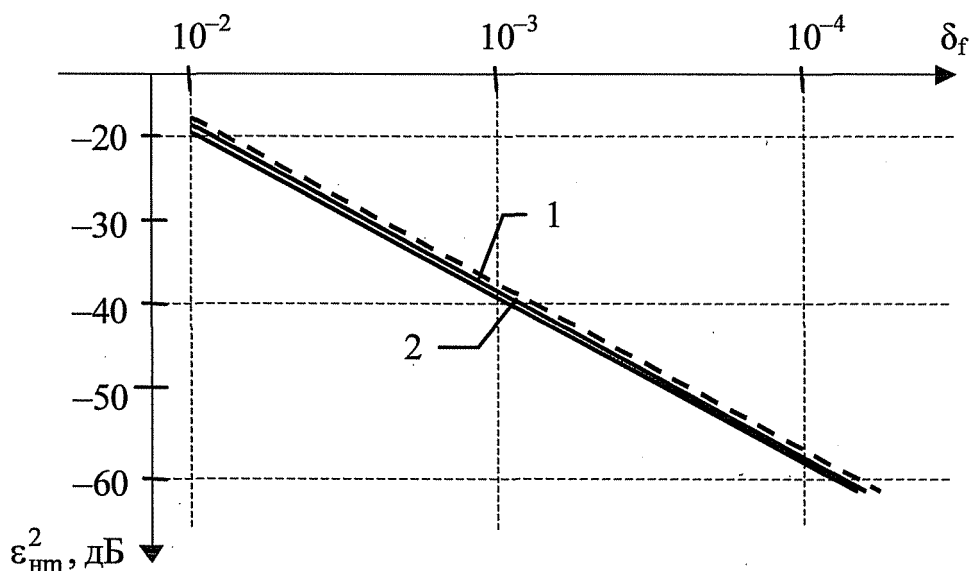


Рис. 2.4.2. Погрешность нестабильности дискретизации

уровень погрешности. Для инженерной практики вместо соотношения (2.4.4) можно предложить использовать оценку

$$S208f, \quad (2.4.5)$$

пригодную для любого сигнала. График зависимости (2.4.5) приведен на рис. 2.4.2 (пунктирная линия) и практически совпадает с графиком 1. При $\delta_f = 10^{-3}$ погрешность (2.4.5) составляет -47дБ.

Из результатов анализа графиков рис. 2.4.2 и табл. 2.4.1 можно сделать следующий вывод. Погрешность зависит, главным образом, от стабильности частоты задающего генератора. Обеспечив $\delta_f < 10^{-4}$, можно получить ошибку от нестабильности A_f менее -60дБ.

2.5. Погрешность при восстановлении реальными фильтрами

Восстановление непрерывного сигнала по бесконечному (или конечному) множеству отсчетов, взятых в соответствии с теоремой Котельникова, осуществляется реальными фильтрами, имеющими частотную характеристику отличающуюся от характеристики (2.1.6). Это приводит к появлению помехи от не полностью подавленных парциальных спектров дискретизированного сигнала на частотах $k\omega_g$ (см. рис. 2.1.1).

Сигнал на выходе восстанавливающего фильтра определим, осуществив преобразование Фурье его спектра:

$$U_{\text{ф}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [U_g(j\omega)H(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

где $U_g(j\omega)$ - спектр дискретизированного сигнала (2.1.3);

$H(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра.

С учетом (2.1.3) получим:

$$U_{\text{ф}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[j(\omega + k\omega_g)] H(j\omega) e^{j\omega t} da \quad (2.5.1)$$

Спектр исходного сигнала $U(j\omega)$ отвечает условию (1.4.11) теоремы Котельникова, поэтому из (2.5.1) получим:

$$U_{\text{ф}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U[j(\omega + k\omega_g)] H(j\omega) e^{j\omega t} da \quad (2.5.2)$$

Погрешность восстановления определим как разность

$$\epsilon_{\text{ф}}(t) = u(t) - u_{\text{ф}}(t) \quad (2.5.3)$$

Если считать, что в пределах полосы $[-\omega_T; \omega_T]$ частотная характеристика фильтра незначительно отличается от единицы, то можно полагать

$$u(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_T}^{\omega_T} U(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Тогда из (2.5.3) с учетом (2.5.2) получим

$$\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} U[j(\omega + k\omega_g)] H(j\omega) e^{j\omega_c t} \quad (2.5.4)$$

Спектр погрешности $\epsilon_{\Phi}(\omega)$, как это видно из (2.5.4), равен

$$\epsilon_{\Phi}(j\omega) \sim \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} U[j(\omega + k\omega_g)] H(j\omega). \quad (2.5.5)$$

Среднеквадратическое значение погрешности можно определить интегрированием квадрата значений (2.5.4) или (2.5.5) в бесконечных пределах:

$$\overline{\epsilon_{\Phi}^2} \sim \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega + k\omega_g)|^2 |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.5.6)$$

Парциальные слагаемые в (2.5.4) и (2.5.5) имеют разные поднесущие частоты $k\omega_g$. В силу ортогональности тригонометрических функций и четности $U[j(a+ka)g]$ для значений k , выражение (2.5.6) можно записать в виде:

$$\overline{\epsilon_{\Phi}^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k(\omega_g - \omega_m)} |U(j\omega_c + k\omega_g)|^2 |H(j\omega)|^2 \quad (2.5.7)$$

В системах передачи информации для восстановления сигналов по отсчетам широкое применение получили фильтры различных типов. Для их описания используют характеристику затухания $A(\omega)$, которая связана с частотной характеристикой $H(\omega)$ соотношением

$$A(\omega) = 20 \lg[|H(\omega)|/H_{in}], \quad (2.5.8)$$

где H_{in} - максимальное значение $H(\omega)$ на всей оси частот.

Характеристики затухания реально используемых фильтров соответствуют одному из трех видов [97, 113], показанных на рис. 2.5.1.

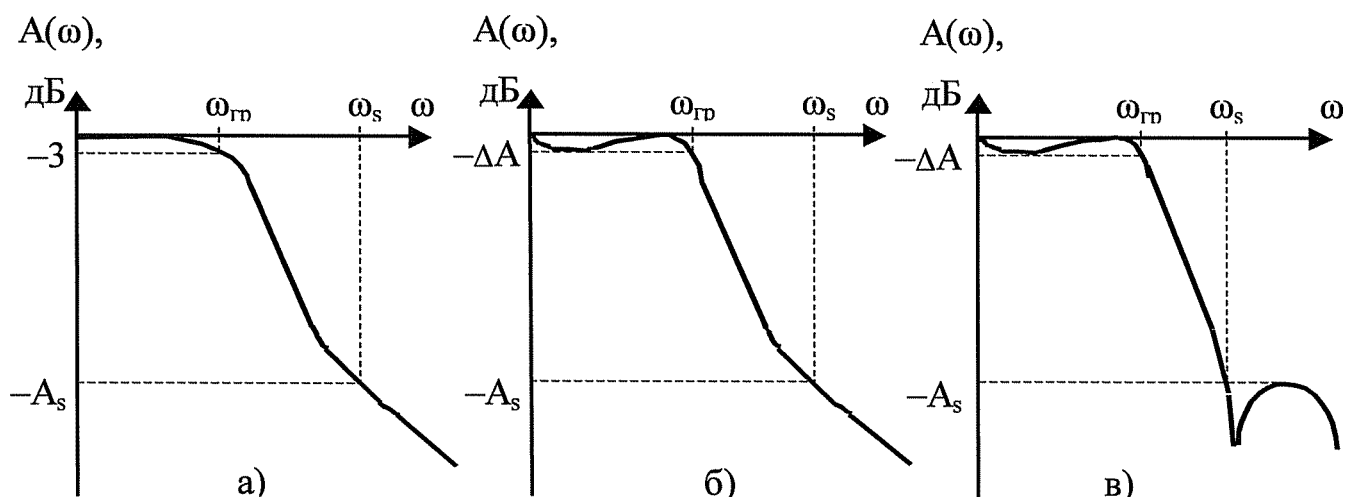


Рис. 2.5.1 Характеристики затухания фильтров

Наиболее простые фильтры (Баттерворта, Гаусса) обладают характеристикой (рис. 2.5.1,а) с монотонным возрастанием затухания. В полосе пропускания $[0; \omega_{гр}]$ затухание достигает максимального значения $LA=3\text{дБ}$ на граничной частоте Юф. В полосе задерживания $[\omega_s; \infty]$ затухание возрастает начиная с некоторого минимального значения A_s на частоте ω_s . Полоса частот $[\omega_{гр}; \omega_s]$ является переходной от пропускания к задерживанию.

Фильтры Чебышева с характеристикой, показанной на рис. 2.5.1,б, имеют колебательный характер затухания в полосе пропускания с неравномерностью не превышающей ΔA . Максимальная частота, на которой затухание не превышает ΔA , является граничной $\omega_{гр}$. В полосе задерживания затухание возрастает монотонно, начиная с некоторого значения A_s на частоте ω_s . Переходная полоса частот $[\omega_{гр}; \omega_s]$ у фильтров Чебышева меньше аналогичной полосы фильтров Баттерворта при одинаковых порядках фильтров n .

Эллиптические фильтры (Кауэра) имеют колебательный характер затухания (см. рис. 2.5.1,в) в полосе пропускания и задерживания. В полосе пропускания неравномерность затухания не превышает ΔA до частоты $\omega_{гр}$. В полосе задерживания обеспечивается затухание не менее некоторого гарантированного значения A_s , начиная с частоты ω_s . При заданных значениях ΔA , A_s , ($\omega_{гр}$ и ω_s) эллиптические фильтры имеют наименьший порядок по сравнению с другими фильтрами. В системах, где важнейшим параметром является затухание, (например многока-

нальные системы связи), эллиптические фильтры обеспечивают наиболее эффективную и экономически целесообразную аппроксимацию характеристики (2.1.6) [97].

В качестве первой, предварительной оценки погрешности восстановления реальным фильтром сигнала по отсчетам воспользуемся ступенчатой аппроксимацией его характеристики затухания. Будем считать, что в пределах парциального спектра $[\omega_{сг} - \omega_{сн}; \omega_{сг} + \omega_{сн}]$ затухание фильтра постоянно и равно наименьшему значению A_{sk} (см. рис. 2.5.2,в). Тогда из (2.5.7) получим

$$\epsilon_{\Phi} = \epsilon_{\Phi 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{sk}}{1 + \frac{2\pi \Delta f}{\omega_{сг}}} \quad (2.5.9)$$

где $H_{sk} = 10^{-0.1 A_{sk}}$ и $\epsilon_{с}$ - энергия сигнала (1.4.9).

Для получения конкретных значений величины ошибки ϵ_{Φ} воспользуемся [74] аппроксимацией частотной характеристики фильтра (рис. 2.5.1,а) в виде

$$|H_T(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{2\pi \Delta f}{\omega_{сг}}} \quad (2.5.10)$$

где n - порядок фильтра ($n \in \{1; 2; 3; \dots\}$).

Полагая, что $\omega_{сг} = 2\pi \nu_{сг}$ и $\omega_{сн} = \omega_{сг} \nu_{сн}$, где $\nu_{сг} > 1$ и $\nu_{сн} > 1$, получим из (2.5.9) и (2.5.10)

$$(2.5.11)$$

Нормируя величину погрешности (2.5.11) к величине энергии $\epsilon_{с}$ сигнала $u(t)$, получим в логарифмических единицах

$$s_{J_0, \text{flB}} = 10 \lg \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{\Phi}^{2k-1}} \quad (2.5.12)$$

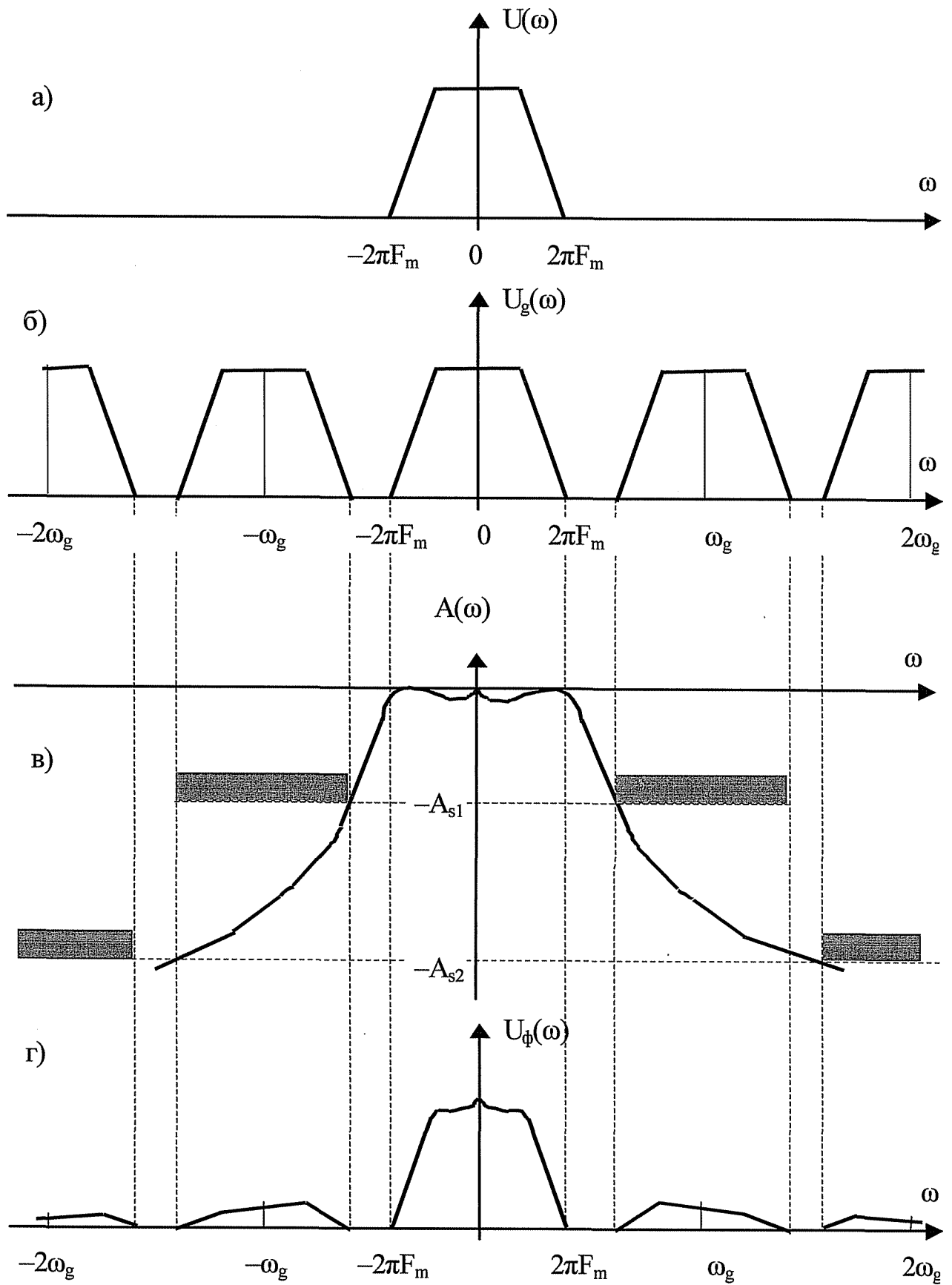


Рис. 2.5.2 Преобразование спектров при дискретизации и восстановлении

На рис. 2.5.3 приведена зависимость погрешности (2.5.12) от относительной частоты дискретизации a (сплошные линии графиков) для нескольких значений порядка фильтра n и при $c_\phi = 1$, откуда наглядно следует, что применение реальных фильтров требует повышения частоты дискретизации ($a > 1,5 \dots 2$) по сравнению с идеальным случаем.

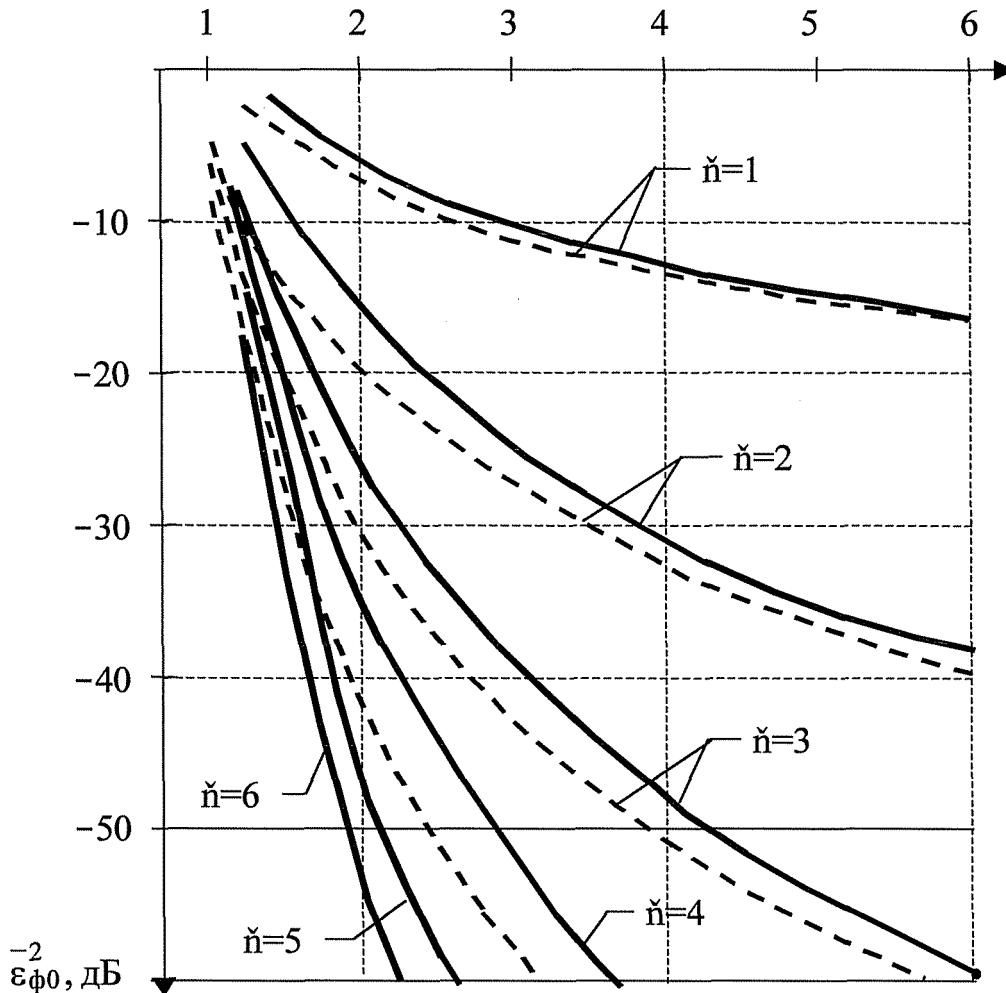


Рис. 2.5.3 Погрешность при восстановлении фильтром Баттерворта

Очевидно также (см. рис. 2.5.2), что оценка (2.5.12) завышена, т.к. затухание фильтра возрастает в диапазоне частот частичного спектра.

Для сигнала $u_s(t) = U_0 \frac{\sin(2\pi c F_m t)}{2\pi c F_m t}$ имеющего в полосе $[-\mathcal{R}_m; \mathcal{R}_m]$ равномерный

спектр $U(j\mathcal{R}) = U_0/2F_m$ и энергию $3_c = U_0^2 \mathcal{R}_T$, из (2.5.7) легко получить

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi}^2 &= E \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \\ &= 3CS \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 da \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Подставив в (2.5.13) характеристику (2.5.10) и разделив на энергию сигнала \mathcal{E}_s , получим нормированную величину погрешности для сигнала $u_s(t)$

$$\left(\frac{\sigma_{\phi}}{\mathcal{E}_s} \right)^2 \tag{2.5.14}$$

Простейший RC-фильтр нижних частот имеет характеристику вида (2.5.10) при $p=1$. Для него из (2.5.14) получим:

$$\frac{\sigma_{\phi}}{\mathcal{E}_s} = 101g \int_{-\infty}^{\infty} \arctg \frac{2\omega\sigma_k + 1}{\dots} \tag{2.5.15}$$

На рис. 2.5.3 пунктирный график при $p=1$ соответствует зависимости (2.5.15) при $\sigma_{\phi}^2=1$.

Для значений $p>1$ и $\sigma_{\phi}^2 > 0$ в знаменателе (2.5.10) можно пренебречь единицей и тогда из (2.5.14) можно получить оценку погрешности

$$\sigma_{\phi}^2 \approx 101g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\dots} \tag{2.5.16}$$

На рис. 2.5.3 пунктиром приведены графики зависимости (2.5.16) для значений $p=2...4$ при $\sigma_{\phi}^2=1$. Сопоставление погрешностей σ_{ϕ}^2 и σ_{ϕ}^2 показывает, что

для фильтров высокого порядка ($p>5...7$) оценка погрешности σ_{ϕ}^2 при $a = 1...2$ слишком завышена, но с ростом частоты дискретизации ($a>2$) различие оценок существенно снижается. Это наглядно видно на рис. 2.5.4, где сплошными линиями

приведены зависимости (2.5.12) и пунктирными - (2.5.16) для $a = 1,5; 2; 3$ и 4 при $\zeta_f=1$. Расхождение оценок ϵ_{f0} и может достигать ЮдБ при $a=1,5$ и снижаться до ЗдБ при $a=4$.

Обычно в фильтрах выполняется условие $\mathbb{R}_{gr} = \cos_t$ ($\zeta_f=1$), однако при жестких ограничениях на величину амплитудных и фазовых искажений возможен выбор $\mathbb{R}_{gr} > \text{Ют}$ ($M-f > 1$). Это приведет к дополнительному увеличению погрешности (2.5.7). На рис. 2.5.5 приведены зависимости погрешности (2.5.16) от ζ_f для нескольких фильтров с порядками $p=1...6$ при $a=2$ - сплошные линии и $a=3$ - пунктирные ЛИНИИ. Чем выше порядок фильтра, тем сильнее увеличивается погрешность ϵ_f с ростом ζ_f .

Аппроксимация (2.5.10) достаточно хорошо описывает фильтры Баттерворта. Для фильтров других типов необходимо уточнить величины погрешностей. Это можно сделать, воспользовавшись оценкой и учитывая, что при $p>2$ и $a > 1,5$ добавка от слагаемых N_{sk} , $k>2$ незначительна. Так, в наиболее неблагоприятном случае, у фильтра Гаусса второго порядка ($p=2$) при $a=1,5$ учет двух слагаемых в сумме (2.5.9) дает погрешность $\epsilon_{f0>дБ} = -6,63\text{дБ}$, а определение только по первому —2 слагаемому N_{s1} дает значение $\epsilon_{f0,дБ} = -6,79\text{дБ}$. Таким образом выражение (2.5.9), с учетом (2.5.8), может быть преобразовано к виду

$$(2.5.17)$$

Для рассматриваемых фильтров в литературе [97,113] имеются подробные таблицы и номограммы нормированных характеристик, что позволяет в соответствии с (2.5.17) проводить сопоставление и выбирать тип фильтра и его порядок. На рис. 2.5.3 приведены оценки погрешности $\delta_{f0>}$ дБ для фильтров Баттерворта и на рис. 2.5.6 - для фильтров Гаусса (Бесселя) 2.. .6 порядков.

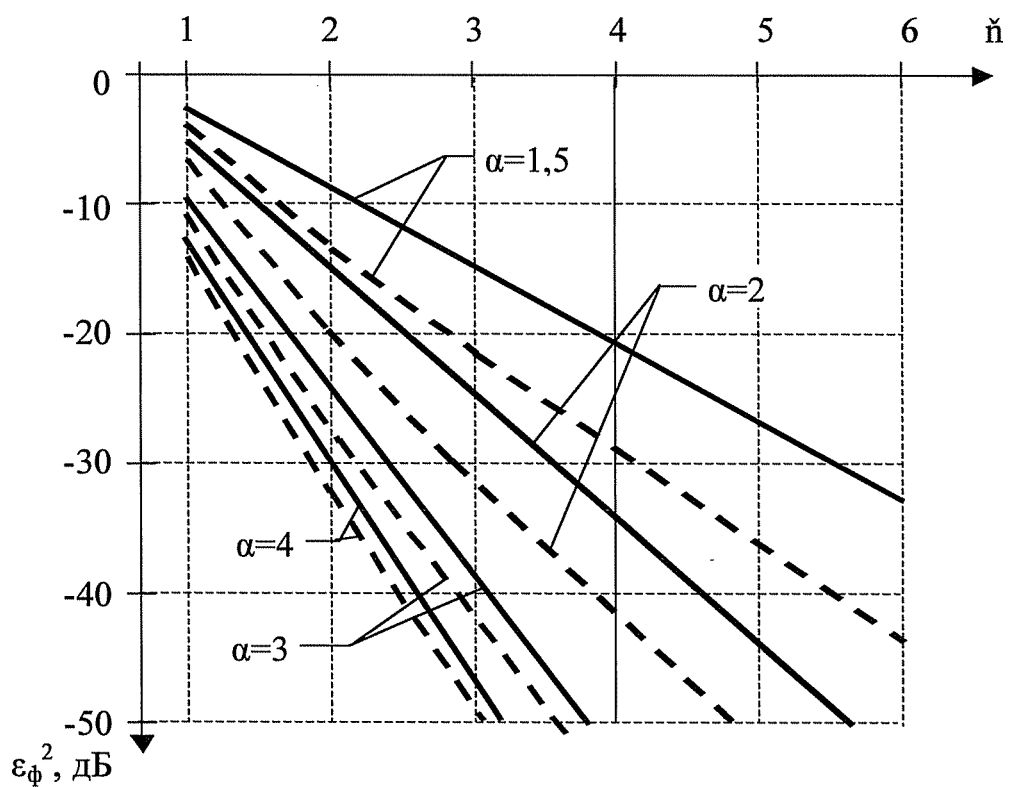


Рис. 2.5.4 Погрешность при восстановлении фильтром Баттерворта

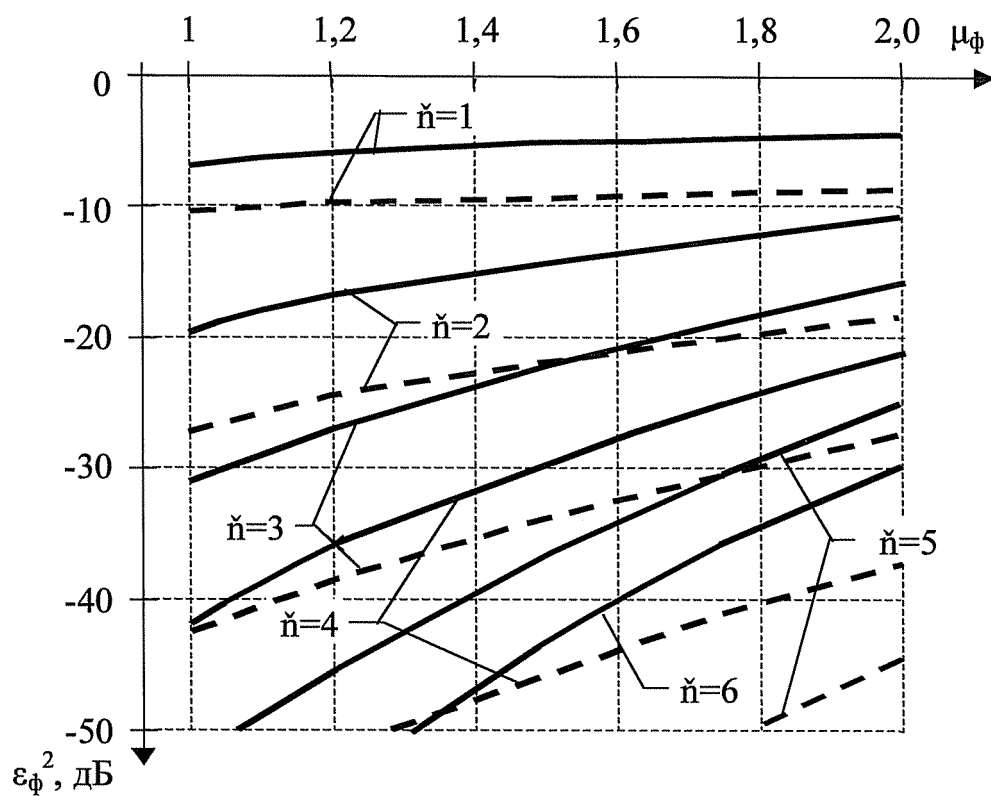


Рис. 2.5.5 Погрешность при восстановлении фильтром Баттерворта

В системах с высокими требованиями к линейности фазочастотной характеристики используются специальные фильтры с нормированным отклонением [113]. На рис. 2.5.7 приведена зависимость погрешности (2.5.17) для фильтров 2...6 порядков с линейной фазочастотной характеристикой и фазовой погрешностью менее $0,05^\circ$.

Для фильтров Чебышева 2...6 порядков зависимость погрешности $\epsilon_{\phi 0}$, дБ от относительной частоты дискретизации α приведена на рис. 2.5.8. Сплошные линии графиков соответствуют фильтрам с неравномерностью частотной характеристики в полосе пропускания $[-\omega^{\wedge}; \omega_{\text{гр}}]$ $\Delta A=0,011$ дБ, а пунктирные линии - $\Delta A=0,28$ дБ.

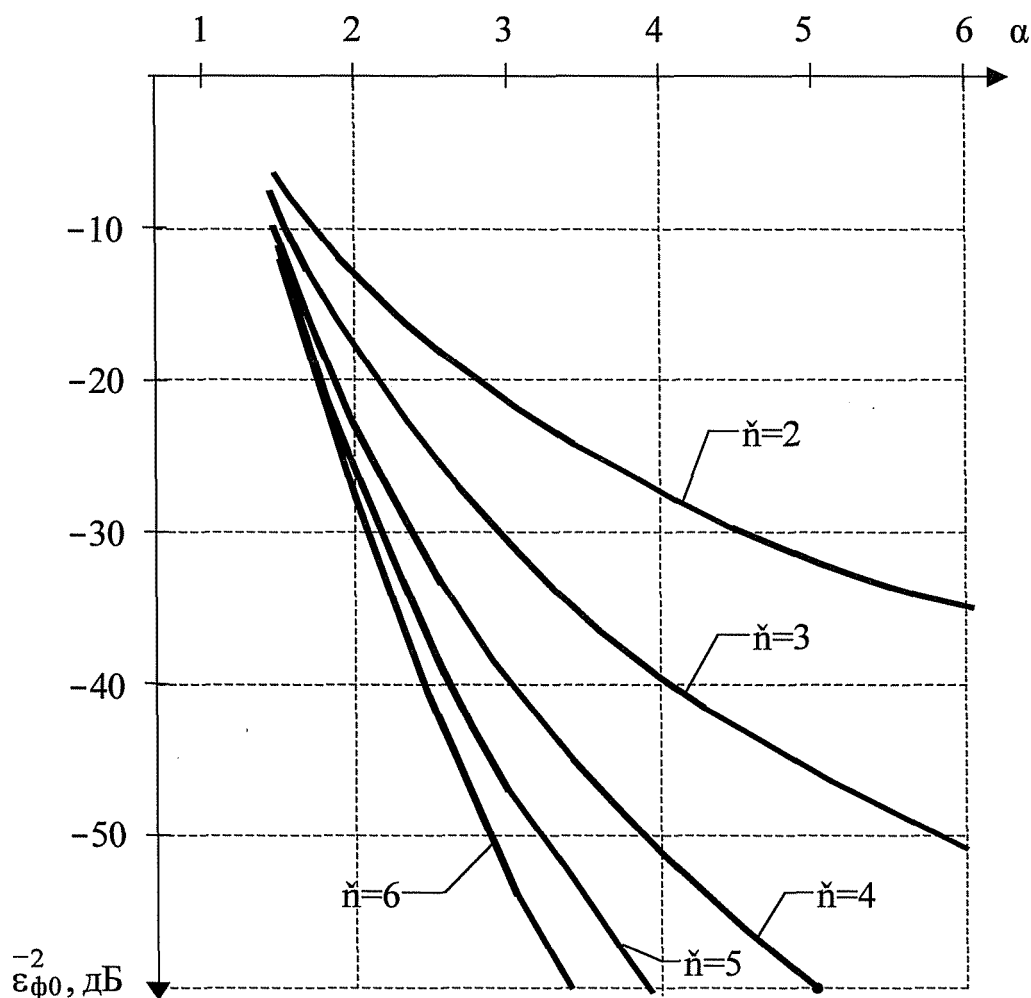


Рис. 2.5.6 Погрешность при восстановлении фильтром Гаусса

У эллиптических фильтров (Кауэра) в полосе задержания на парциальных участках $[\omega_{\text{сог}} - \omega_{\text{м}}; \omega_{\text{ог}} + \omega_{\text{м}}]$ затухание можно считать одинаковым (см. рис. 2.5.1,в) и не зависящим от параметра k : $A_{\text{sk}}=A_{\text{s}}=\text{const}$. Тогда, формально, из (2.5.9) следует,

что погрешность $\varepsilon_{\phi 0, \text{дБ}}^{-2}$ стремится к ∞ . Это следствие бесконечного числа спектральных составляющих функции $D_5(t)$ с одинаковыми амплитудами.

В реальных системах дискретизирующая функция $D(t)$ представляет собой периодическую последовательность импульсов со скважностью $Q \gg 1$ (см. раздел 2.7). Спектр такой последовательности будет убывающий, что ведет к убыванию и парциальных спектров (2.1.3). Это позволяет в сумме (2.5.9) ограничиться Q

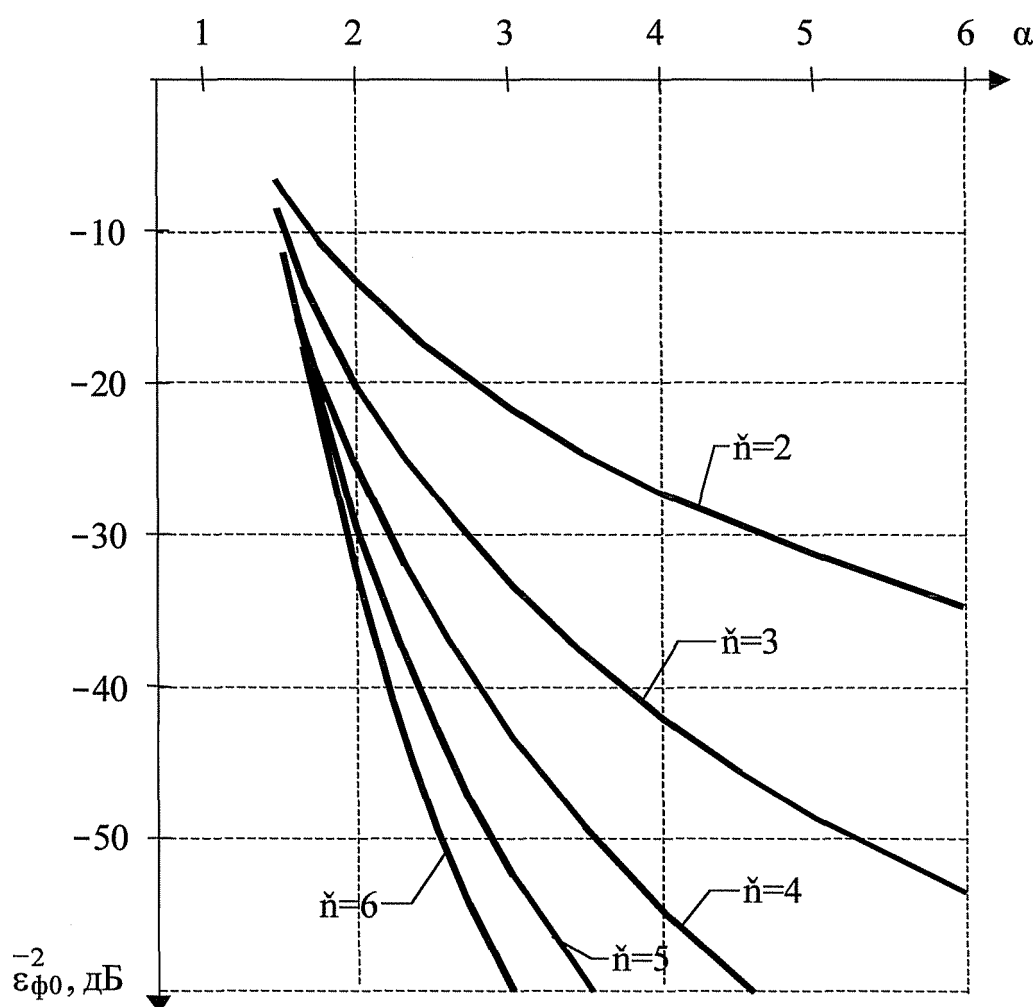


Рис. 2.5.7 Погрешность при восстановлении фильтром с линейной ФЧХ

$$\sum_{k=1}^Q X_k \quad (2.5.18)$$

На рис. 2.5.9 приведена зависимость (2.5.18) для фильтров с гарантированным затуханием $A_3=60\text{дБ}$ и порядком $n=3\dots 6$ при $\alpha_{\phi}=1$, $Q=10$ $A_A=0,011\text{дБ}$ - сплошные

линии и $LA=0,177\text{дБ}$ - пунктирные линии графиков. На рис. 2.5.10 приведены такие же зависимости при скважности $Q=50$. С ростом порядка фильтра n и частоты дискретизации a погрешность уменьшается, но не может стать меньше величины

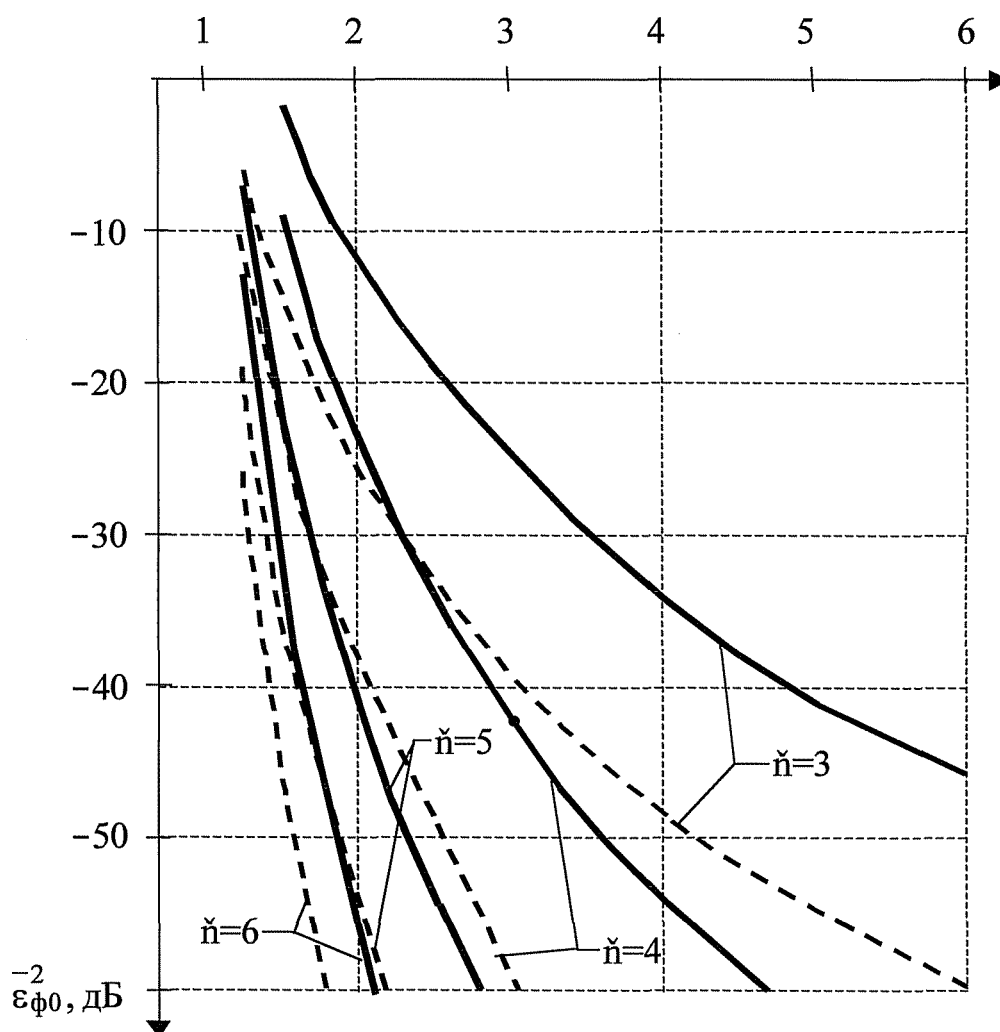


Рис. 2.5.8 Погрешность при восстановлении фильтром Чебышева

$$\epsilon_{\text{фтт}} = 101g[2Q10^{-0,1A_s}] = -A_s + 3 + 101g(Q). \quad (2.5.19)$$

На рис. 2.5.9 и 2.5.10 штриховкой показаны предельные уровни, следующие из выражения (2.5.19). Выбрав фильтр с частотой задерживания удовлетворяющей условию ($\omega_s < (\omega_g - \omega_m)$, можно обеспечить наименьший уровень помехи при данном порядке фильтра.

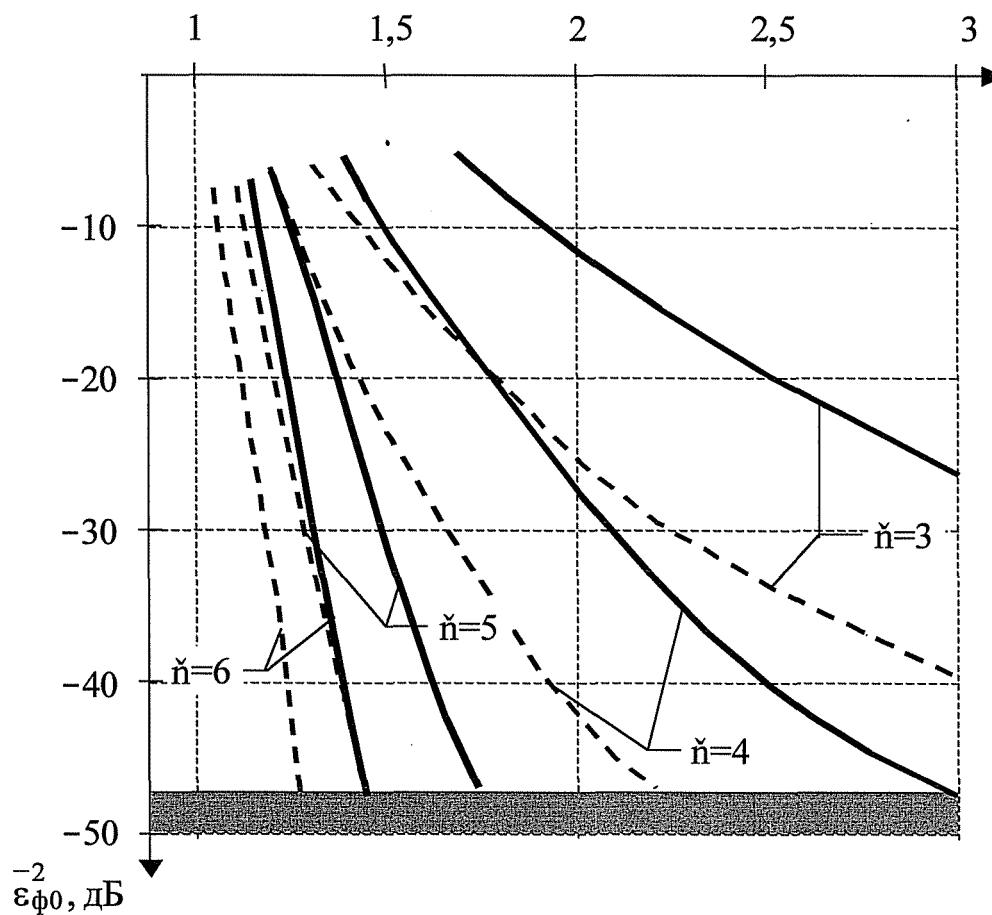


Рис. 2.5.9 Погрешность при восстановлении фильтром Кауэра при $Q=10$

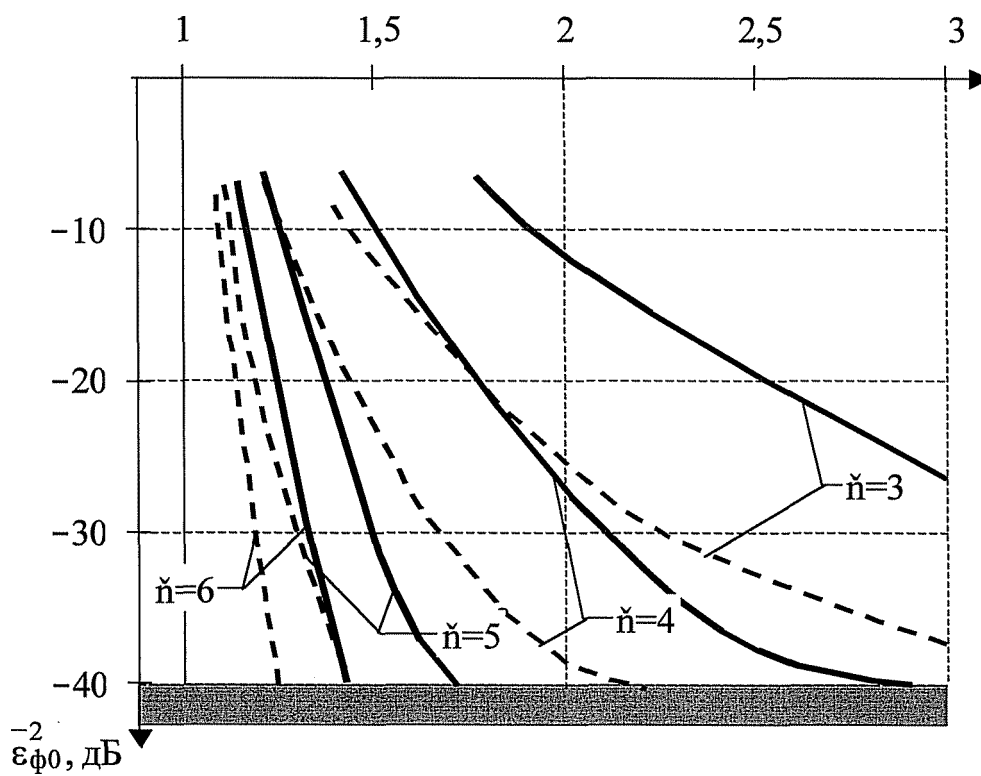


Рис. 2.5.10 Погрешность при восстановлении фильтром Кауэра при $Q=50$

2.6. Дискретизация сигналов на фоне шума

В теореме Котельникова предполагается, что дискретизации подвергается сигнал, не содержащий аддитивной помехи (шума). Такая ситуация имеет место в ограниченном числе случаев: при дискретном представлении аналоговых прототипов в цифровых генераторах сигналов, дискретном съеме информации с некоторых типов датчиков и т.п.. Однако в большинстве случаев дискретизации подвергается сумма $s(t)$ полезного сигнала $u(t)$ и шума $n(t)$

$$s(t) = u(t) + n(t). \quad (2.6.1)$$

Сигнал $u(t)$ имеет финитный спектр $U(j\omega)$ (1.4.19) с максимальной частотой $\omega_c = 2\pi F_c$.

Шум $n(t)$ представляет собой случайный процесс со спектральной плотностью мощности $N(\omega)$, не имеющей, как правило, четко выраженной верхней граничной частоты, либо имеющий $\omega_{ш} = 2\pi F_{ш} \gg 2\pi F_m$.

Важной характеристикой сигнала является отношение сигнал/шум $q_{вх}$. Если шум является стационарным случайным процессом, то

$$q_{вх} = \frac{\int_{-\omega_c}^{\omega_c} |U(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\omega_{ш}}^{\omega_{ш}} N(\omega) d\omega} \quad (2.6.2)$$

где \mathcal{E}_c - энергия сигнала,

$\sigma_{экв}^2 \sim$ дисперсия помехи в полосе $[-\omega_{ш}; \omega_{ш}]$.

Значение $q_{вх}$ в системах различного назначения может быть как существенно больше единицы (цифровые системы аудио- и видеозаписи, речевые сигналы в цифровой телефонии, телевизионные сигналы передающих трубок и т.п.), так и меньше единицы (принимаемые сигналы в гидро- и радиолокации, в системах связи со сложными сигналами, в радионавигации и т.п.).

Будем рассматривать случай, когда спектральная плотность мощности шума постоянна в некоторой полосе частот $[-\omega_{ш}; \omega_{ш}]$ -

$$N_B(\omega) \begin{cases} N_0/2, |\omega| < \omega_{ш}, \\ 0, |\omega| > \omega_{ш}. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Для такого шума, подставив (2.6.3) в (2.6.2), можно получить

$$q \frac{A}{4Bx} N F$$

Если $\omega_c > \omega_{ш}$, то сумма $s(t)$ не имеет составляющих с частотами выше ω_c , она удовлетворяет требованиям теоремы и при восстановлении по отсчетам отношение (2.6.2) не изменится.

Для флуктуационных шумов более характерно соотношение $\omega_{ш} > \omega_c$. Тогда при дискретизации $s(t)$ с частотой $\omega_g = 2a\omega_c$, когда $a > 1$, но $\omega_{ш} < \omega_{1П}$, произойдет наложение парциальных спектров шума на поднесущих частотах $k\omega_g$ в интервале $[-\omega_g/2; \omega_g/2]$ и спектральная плотность мощности шума после восстановления изменится.

В соответствии с (2.1.3) энергетический спектр шума после дискретизации можно представить в виде

$$N_g(\omega) = N(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma}{k} [N(\omega + k\omega_g) + N(\omega - k\omega_g)] \quad (2.6.4)$$

При восстановлении по отсчетам с помощью идеального ФНЧ с частотой среза $\omega_{гр} = \omega_c$ в полосу $[-\omega_g/2; \omega_g/2]$ будут преобразованы все спектральные составляющие $N(\omega)$ из полосы $[-\omega_{ш}; \omega_{ш}]$. При $\omega_{ш} \gg \omega_c$ произойдет выравнивание спектральной плотности мощности даже при наличии некоторой неравномерности $N(\omega)$. В первом приближении будет справедливо соотношение

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} N_g(\omega) d\omega = \sum_{k=-M_{ш}}^{M_{ш}} \int_{k(\omega_g - \omega_c)}^{k(\omega_g + \omega_c)} N(\omega) d\omega \approx 2a^2 M_{ш} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} N(\omega) d\omega \quad (2.6.5)$$

где $M_{ш} = i \text{Ш}(\omega_{ш}/\omega_{Д})$ - целая часть отношения $\omega_{ш}/\omega_{Д}$.

Сигнал $u(t)$ будет восстановлен без искажений и сохранит свою энергию, а дисперсия помехи увеличится примерно в $2M_{ш}$ раз. Тогда отношение сигнал/шум после дискретизации станет равным

$$\chi_{\text{ДИС}} = 2 \langle 4 \rangle M_{\text{ш}} = 2^N 0_{\text{ТМ}} m F_c \quad (2.6.6)$$

Ухудшение отношения сигнал/шум можно оценить величиной

$$\gamma_{\text{ДИС}} = 10 \lg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (2.6.7)$$

где $p = \omega_{\text{ш}} / \omega_c$.

Очевидно, что выражения (2.6.6) и (2.6.7) справедливы при $M_{\text{ш}} = \text{int}(p/2a) > 2$.

На рис. 2.6.1 приведена зависимость проигрыша (2.6.7) от относительной частоты дискретизации a для значений $p=5; 10; 50$ и 500 . Из рисунка следует, что уменьшать проигрыш $\gamma_{\text{ш}}$ за счет увеличения a целесообразно при небольших значениях $p < 5 \dots 10$.

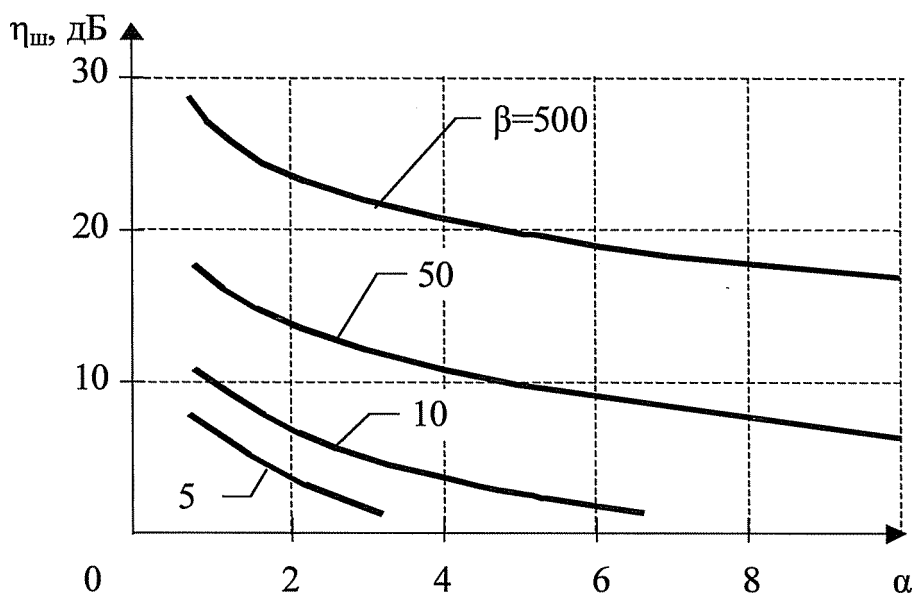


Рис. 2.6.1 Проигрыш в отношении сигнал/шум

При $p > 20 \dots 50$ потери $\chi_{\text{ш}}$ с ростом a снижаются медленно. В этой ситуации на входе дискретизатора следует включить аналоговый фильтр (см. рис. 2.6.2). Частота среза фильтра $\omega_{\text{ф}}$ выбирается из условий $\omega_c < \omega_{\text{ф}} < \omega_{\text{ш}}$. Теоретически, при идеальном ФНЧ и $\omega_{\text{ф}} = \omega_c$ также возможно сохранить отношение сигнал/шум.

Реальные аналоговые фильтры обеспечивают гарантированное затухание A_s в полосе задержания (см. раздел 2.5) при нормированной неравномерности ДА в полосе пропускания. Для получения верхней оценки проигрыша в отношении

сигнал/шум сделаем следующие допущения. Будем считать затухание в полосе задержания постоянным и равным A_s , а неравномерность в полосе пропускания $LA=0$. Граничную частоту фильтра обеспечим равной ω_c . Тогда выражение (2.6.5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{N_s} \frac{1}{(1 + 2H_s^2 M_{ш})} \quad (2.6.8)$$

где $H_s = 10^{0.05 A_s}$ - коэффициент передачи фильтра в полосе задерживания.

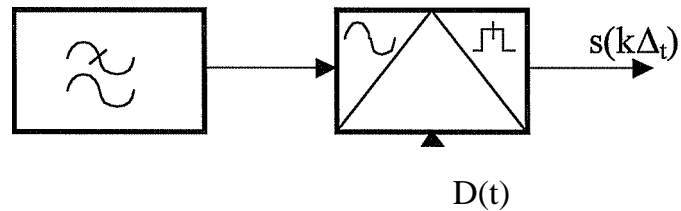


Рис. 2.6.2 Схема включения аналогового фильтра

Отношение сигнал/шум в этом случае не может быть меньше

$$Q_{диск} \geq \frac{\mathcal{E}_c}{N_0 F_c (1 + 2H_s^2 M_{ш})} \quad (2.6.9)$$

а потери в отношении сигнал/шум не превысят значения

$$T_{шф} < 101 g \left[1 + H_s^2 \right] \quad (2.6.10)$$

На рис. 2.6.3 приведены графики зависимости потерь (2.6.10) от относительной ширины спектра шума P при различных величинах затухания A_s . Кривая при $A_s=0$ соответствует дискретизации без фильтра. Из графиков видно, что даже несложные фильтры с $A_s=(20...30)$ дБ обеспечивают эффективное уменьшение потерь в отношении сигнал/шум.

Частотные характеристики простых фильтров (Баттерворта, Гаусса, Чебышева и др.) достаточно точно аппроксимируются зависимостью вида (2.5.10)

$$|H(\omega)| \approx \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (2.6.11)$$

где n - целое число > 1 , определяющее сложность (порядок) фильтра.

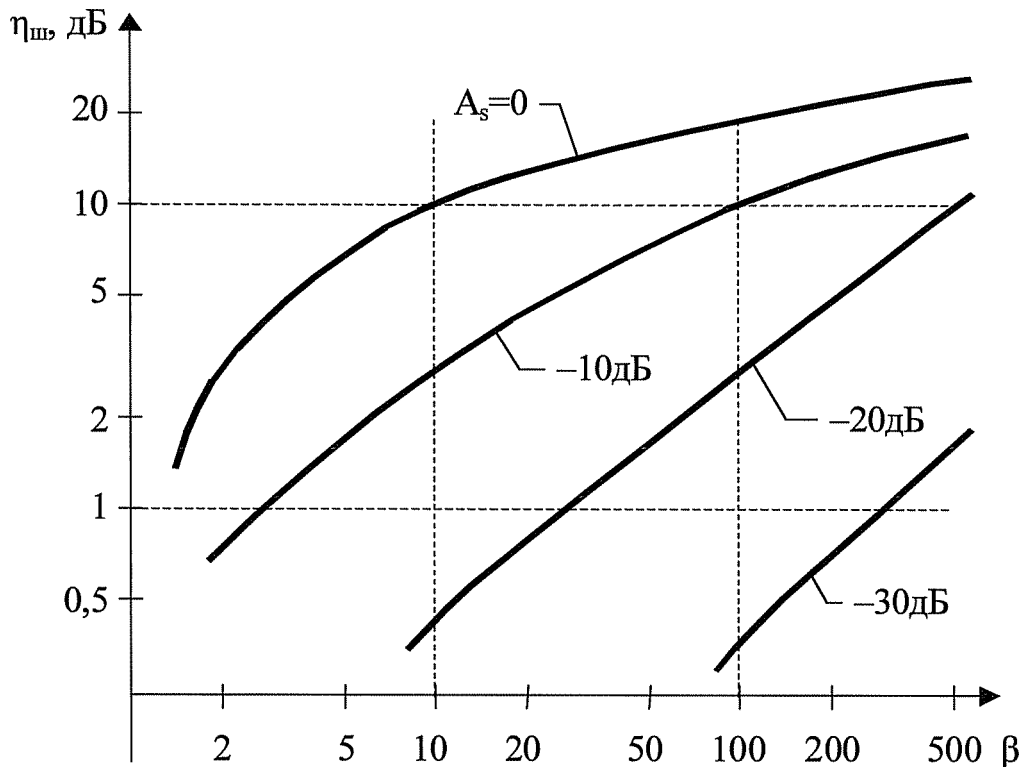


Рис. 2.6.3 Потери отношения сигнал/шум при включении аналогового фильтра

При $n=1$ из (2.6.11) получаем характеристику простейшего RC-фильтра.

Можно считать, что на выходе фильтра при $\omega > \omega_c$ спектр сигнала $u(t)$ остается неизменным, а спектр помехи $N_B(\omega)$ (2.6.3) преобразуется к виду

$$M \otimes M_B(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{F N_0}{2[1 + (\omega/\omega_c)^2]} \quad (2.6.12)$$

Подставив (2.6.12) в (2.6.5) и осуществив интегрирование, получим соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) d\omega = \frac{M N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2} d\omega = \frac{M N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2/\omega_c^2} d\omega = \frac{M N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega^2} d\omega = \frac{M N_0 \omega_c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{M N_0 \omega_c}{2\pi} \pi = \frac{M N_0 \omega_c}{2} \quad (2.6.13)$$

Для RC-фильтра ($n=1$) из (2.6.13) получим

$$\frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} N_g(\omega) d\omega = N_0 F_c (1 + \arctg \frac{v}{2k\alpha - 1}) \quad (2.6.14)$$

где $v = \omega_{гр}/a$, и отношение сигнал/шум будет равно

$$\frac{C_{дис}}{N_0 F_c} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{v}{2k\alpha - 1}}{1 + \arctg \left(\frac{2k\alpha - 1}{v} \right)} \quad (2.6.15)$$

Проигрыш в отношении сигнал/шум описывается соотношением

$$\left\{ \frac{2k\alpha - 1}{v} \right\}$$

На рис. 2.6.4 приведены графики зависимости (2.6.16) от относительной ширины спектра помехи β при $v=1$ и $a=1$ - кривая 1 и $a=2$ - кривая 2.

Простейший RC-фильтр обеспечивает достаточно эффективное подавление помехи, если $a > 2$. Увеличение ширины спектра помехи практически не увеличивает потери в отношении сигнал/шум $\Gamma_{ш}$, что обусловлено возрастанием затухания фильтра.

Следует отметить, что дополнительным фактором уменьшения $\Gamma_{ш}$ при больших значениях P является дискретизация импульсами конечной длительности. Это связано с тем, что в выражениях (2.6.4) и (2.6.13) у парциальных спектров с поднесущими частотами $k\omega_g$ появится дополнительный множитель, определяющий убывание амплитуд парциальных спектров с увеличением их номера k .

Полученные оценки отношения сигнал/шум (2.6.9) и потерь (2.6.10) ближе к реальным величинам в системах с фильтрами Кауэра [113] (см. раздел 2.5). В этих фильтрах затухание в полосе задерживания носит колебательный характер и может принимать в любой точке этой полосы значение, не более гарантированной величины A_s , что даёт, в среднем, меньшее отклонение.

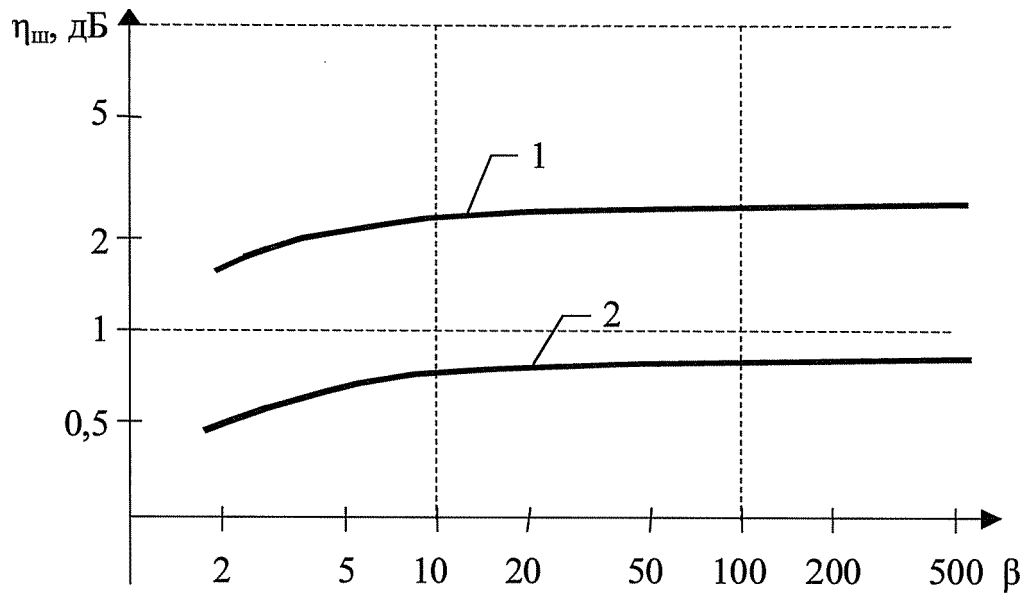


Рис. 2.6.4 Потери отношения сигнал/шум при аппроксимации спектра

2.7. Дискретизация импульсами конечной длительности

Представление дискретизирующей функции $D(t)$ (см. раздел 2.1) в виде периодической последовательности δ -функций является математической абстракцией. В реальных устройствах дискретизации в качестве функции $D(t)$ обычно используют периодическую последовательность импульсов по форме близких к прямоугольным, с длительностью t_g и со скважностью $Q = A_t/t_g \gg 1$. В результате спектр последовательности $D(t)$, в соответствии с (1.4.16), будет иметь вид:

$$W(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega k A_t) \text{sinc}(0,5\omega t_g).$$

Это приведет к тому, что спектр дискретизированного сигнала (2.1.3) также изменится и станет равным

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U[j(\omega - k\omega_g)] \text{sinc}(0,5\omega t_g)$$

Наличие множителя $\text{sinc}(0,5\omega t_g)$ приводит к уменьшению погрешности восстановления аналогового сигнала по отсчетам (см. раздел 2.5), особенно при использовании эллиптических фильтров. При этом желательно иметь большое значение t_g (малое Q) для более быстрого убывания парциальных спектров с номерами $k > 1$. Возможна также [128] оптимизация пары отсчетный импульс - восстанавливающий фильтр, обеспечивающая, при приемлемой сложности реализации, точное восстановление исходного сигнала.

В АЦП взятие отсчета обычно совмещается с процедурой его запоминания до взятия следующего отсчета. На рис. 1.2.2 показана структурная схема устройства выборки и хранения (СВХ) отсчета, а на рис. 2.7.1 - процессы, протекающие в схеме.

В течение отсчетного импульса запоминающая емкость C заряжается через эквивалентное внутреннее сопротивление Π источника сигнала и открытого ключа дискретизатора. В паузах между импульсами конденсатор разряжается через эквивалентное сопротивление утечки $R_{ут}$ закрытого ключа и считывающего устройства

(повторителя напряжения). Постоянная времени зарядки $\tau_3 = CR_i$ должна удовлетворять условию $\tau_3 \gg T_3$, а постоянная времени разрядки $\tau_p = CR_{yT}$ - условию $\tau_p \gg \Delta t$.

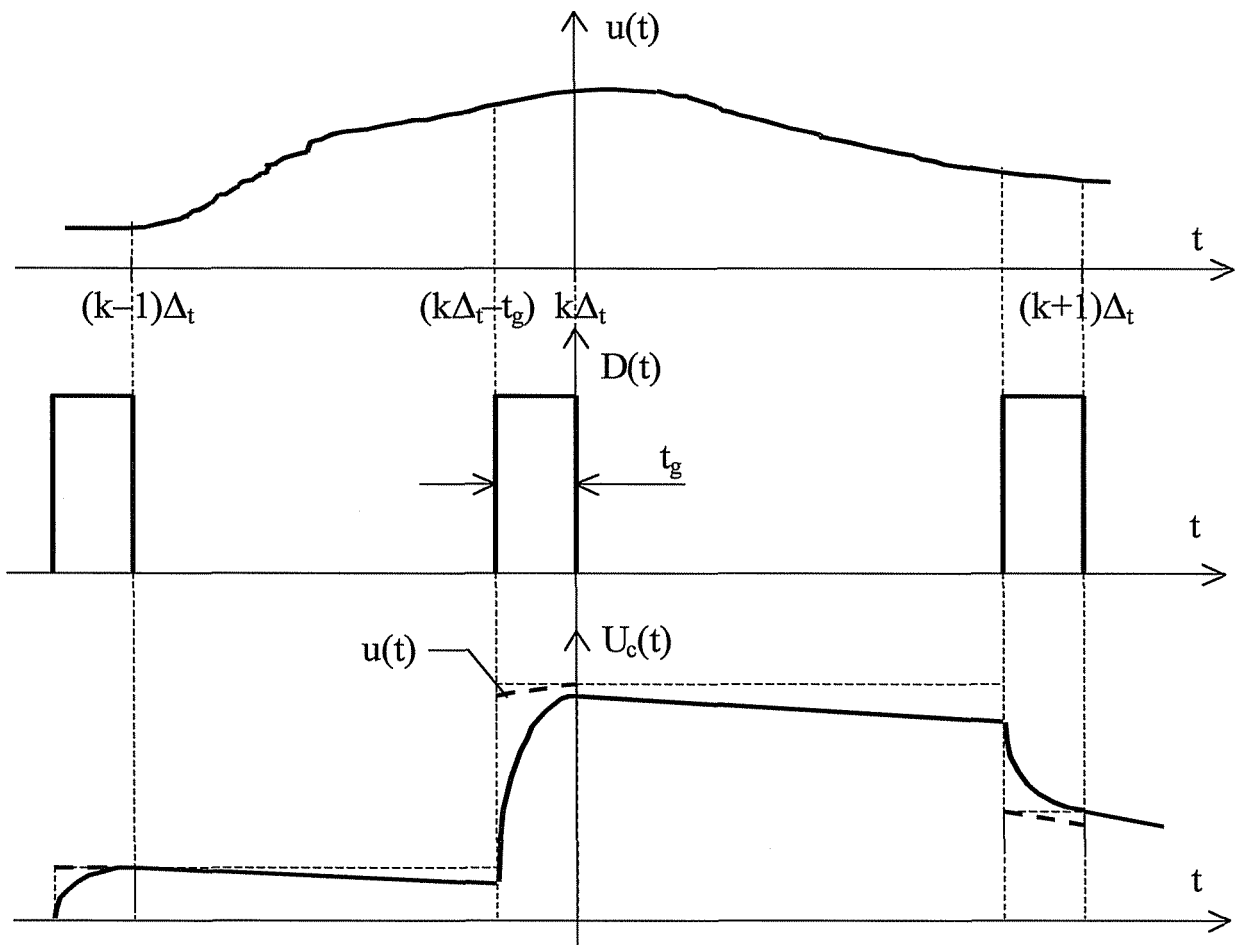


Рис. 2.7.1 Диаграммы работы схемы выборки и хранения

В момент $k\Delta t - t_g$ начала зарядки напряжение на емкости равно

$$U_{CH}(k\Delta t) = N^{(k-1)\Delta t - sK^k - 1)\Delta t} \exp[-(k\Delta t - t_g)/T_p], \quad (2.7.1)$$

где $s[(k-1)\Delta t]$ - погрешность зарядки емкости в момент времени $(k-1)\Delta t$.

На интервале импульса выборки $[k\Delta t - t_g; k\Delta t]$ напряжение на емкости будет определяться выражением

$$U_c(t) = \frac{1}{C} \int_{k\Delta t - t_g}^t i_c(t) dt,$$

где $i_c(t) = [u(t) - u_c(t)]/R_i$ - ток зарядки емкости.

Подставив в (2.7.2) выражение для тока $i_c(t)$, осуществив замену переменной $t=kA_t-0$ и продифференцировав по 0 , получим линейное дифференциальное уравнение, решение которого имеет [96] вид:

$$U_c(kA_t + 0) = \exp(-0/T_3) W + \int u(kA_t + 0) \exp(0/T_3) cЮ \quad (2.7.3)$$

где W - постоянная, определяемая граничным условием (2.7.1).

Для упрощения выражения (2.7.3) разложим сигнал $u(t)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки kA_t . В АЦП частота дискретизации $f_g > 2F_m$, а скважность дискретизирующих импульсов $Q=A_t/t_g \gg 1$, поэтому при разложении можно ограничиться первой производной и, тогда, $u(kA_t+0) \sim u(kA_t)+0u'(kA_t)$, где $u'(kA_t)$ - значение производной сигнала при $t = kA_t$.

Введем обозначения: $\alpha = t_g/T_3$ и $\gamma = A/T_p$, причем в АЦП выполняются условия $\alpha \gg 1$, $\gamma \ll 1$ и $Q \gg 1$. Тогда, считая $s[(k-1)A_t]$ пренебрежимо малой величиной, выражение (2.7.1) можно упростить и определить постоянную W , положив $0 = -t_g$,

$$W = (u[(k-1)A_t] \exp(-\gamma) - u(kA_t) + u'(kA_t)(t_g + T_3)) \exp(-\alpha).$$

В результате преобразований имеем

$$u_c(kA_t) = u[(k-1)A_t] \exp(-\alpha) + u(kA_t)[1 - \exp(-\alpha)] + u'(kA_t)T_3, \quad (2.7.4)$$

где $T_3 = t_g \exp(-\gamma) - T_3[1 - \exp(-\alpha)]$.

Погрешность отсчета в момент kA_t будет равна

$$s_3(kA_t) = u(kA_t) - u_c(kA_t) = \\ = \{u(kA_t) - u[(k-1)A_t] \exp(-\alpha) - u'(kA_t)T_3\}.$$

Определим среднеквадратическое значение погрешности (2.7.5). Для этого произведем усреднение квадрата $s_3(kA_t)$ по всем отсчетным значениям:

$$s_3^2 = A_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kA_t) =$$

$$\begin{aligned}
& u^2(kA_t) \exp(-2\alpha) - u(kA_t)u[(k-1)A_t] \exp(-2\alpha) - \\
= & A_t Z^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u(kA_t)u'(kA_t)T_3 \exp(-\alpha) + u^2[(k-1)A_t] \exp(-2\alpha) + >. \\
& + u[(k-1)A_t]u'(kA_t)T_3 \exp(-\alpha) + [u'(kA_t)]^2 T^2
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

В выражении (2.7.6) отдельные суммы представляют собой:

$$A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) = \mathcal{E}_c - \text{энергию сигнала [114];}$$

$$A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} [u'(kA_t)]^2 = \mathcal{E}' - \text{энергию производной сигнала;}$$

$$A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t)u[(k-1)A_t] = R(A_t) - \text{значение корреляционной функции } R(\tau) \text{ сигнала } u(t) \text{ при } \tau = A_t;$$

$$A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t)u'[(k-1)A_t] = \text{var}(0) \text{ и } A_t \int_{k=-\infty}^{\infty} u[(k-1)A_t]u'(kA_t) = \text{var}(A_t) - \text{значения}$$

взаимнокорреляционной функции $\text{var}(\tau)$ сигнала и производной при $\tau = 0$ и $\tau = A_t$.

Для сигнала и его производной справедливы (см. раздел 1.4 и [67])

соотношения $\text{var}(\tau) = R'(\tau)$, $\text{var}(0) = 0$. Тогда выражение (2.7.6) принимает вид

$$\tilde{\epsilon}_3^2 = [2\mathcal{E}_c - R(A_t)] \exp(-2\alpha) + \mathcal{E}'_c T_3^2 + R'(A_t) \exp(-\alpha) T_3.$$

Относительную среднеквадратичную погрешность можно определить как

$$C = \frac{\tilde{\epsilon}_3^2}{\mathcal{E}_c} = [2 - r(A_t)] \exp(-2\alpha) + A_t r'(A_t) \exp(-\alpha) + r^2 P^2, \tag{2.7.7}$$

где $P = \exp(-\alpha) / [1 - \exp(-\alpha)] / \alpha$;

$r(A_t) = R(A_t) / \mathcal{E}_c$ и $r'(A_t) = R'(A_t) / \mathcal{E}_c$ - нормированная корреляционная функция сигнала и её производная;

$T|_{\text{пс}} = A_t \mathcal{E}'_c / \mathcal{E}_c$ - коэффициент, характеризующий отношение энергий сигнала и его производной (см. разделы 1.4 и 2.4).

Получим выражения погрешности (2.7.7) для конкретных сигналов с целью количественной оценки её величины.

В качестве первого примера рассмотрим сигнал $u_s(t) = U_0 \sin(2\pi F_m t) / 27LF_m t$, у которого

$$\varepsilon_c = U_0 / 2F_m ; r_s(A_t) = a \sin(\pi c/a) / \pi t ;$$

$$r'(A_t) = [-\cos(\pi c/a) - a \sin(\pi c/a) / \pi t] / A_t ; T_{\text{пс}} = \pi^2 / 3a^2 , \quad (2.7.8)$$

где $a = (Dg/4\pi F_m)$.

Тогда, подставив (2.7.8) в (2.7.7), получим в логарифмических единицах

$$s_{30}^2, \text{дБ} = 10 \lg \left[\frac{a \cdot \text{sm} \left(\frac{\pi c}{a} \right)}{\pi c} \cdot \frac{1}{-\cos \left(\frac{\pi c}{a} \right)} \right] \quad (2.7.9)$$

На рис. 2.7.2 приведены графики зависимостей $s_{30}, \text{дБ}$ от коэффициента c для значений скважности $Q=10$ - график 1, $Q=20$ - график 4, $Q=50$ - график 7 и $Q=100$ - график 10 при $a = 1$ (сплошные линии).

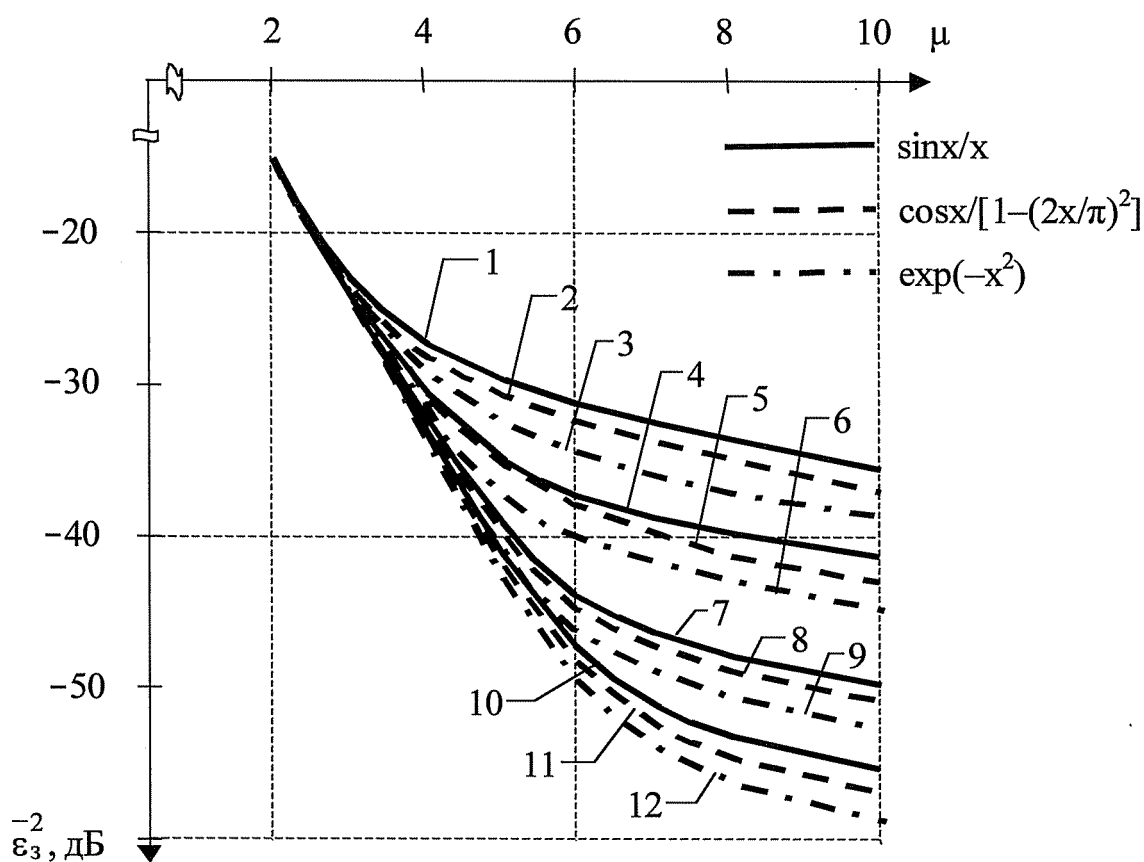


Рис. 2.7.2 Погрешность зарядки ёмкости СВХ

В качестве второго примера рассмотрим сигнал с ограниченным спектром

$$u_{K(O-UO)} = \frac{\cos(27cF_m t)}{1-(4F_m t)^2}$$

У этого сигнала $\mathcal{E}_c = \frac{Tc U_o}{16F_m}$, $\Gamma|_{nc} = (\pi/6-1) \cdot a^{-2}$ - из таблицы 2.4.1;

$$\frac{\sin(27iF_m T)}{2\pi F_m T} \sim (2F_m t)$$

$$r'_c(\tau) = \frac{\cos(2\pi F_m \tau)}{\tau[1-(2F_m \tau)^2]} \cdot \frac{\sin(2\pi F_m \tau)[1-3(2F_m \tau)^2]}{(27F_m T)^2[1-(2F_m \tau)^2]}$$

и после дискретизации получим

$$\Delta_t r'_c(\Delta_t) = \frac{\cos(\pi/a)}{a[1-(a^{-2}-1)\Gamma]} \cdot \frac{\sin(\pi/a)}{a[1-(a^{-2}-1)\Gamma]} \cdot \frac{\cos^2 \cos(\pi/a)}{a} \cdot \frac{\cos^3(a^2-3)\sin(\pi/a)}{a}$$

При $a = 1$ функции $r_c(A_t)$ и $\Delta_t r'_c(A_t)$ имеют неопределенность вида $0/0$ и $(\infty - \infty)$.

Применяя правило Лопиталья [95] легко показать, что

$$\lim_{(X \rightarrow 1)} r_c(A_t) = 0,5. \quad (2.7.10)$$

Функцию $\Delta_t r'_c(A_t)$ преобразуем к виду

$$\Delta_t r'_c(\Delta_t) = \frac{\alpha^2 \cos(\pi/\alpha)}{\alpha^2 - 1} - \frac{\alpha(\alpha^2 - 3)\alpha \sin(\pi/\alpha)}{\alpha^2 - 1 \pi(\alpha^2 - 1)}$$

Учитывая (2.7.10), можно утверждать, что

$$\lim_{a \rightarrow 1} \Delta_t r'_c(A_t) = 0.$$

Тогда из (2.7.7) при $a \rightarrow 1$ получим величину среднеквадратичной погрешности в виде

$$\epsilon^2_0 = 1,5 \exp(-2\alpha) + \frac{\alpha^2}{6}. \quad (2.7.11)$$

График зависимости (2.7.11) от относительной постоянной времени α при $a=1$ приведен на рис. 2.7.3 для значений скважности $Q=10$ - график 2; $Q=20$ - график 5; $Q=50$ - график 8; $Q=100$ - график 11 (пунктирные линии).

В качестве третьего примера возьмем сигнал с неограниченным спектром $U_r(t)=U_0 \exp(-t^2/2a^2)$.

У этого сигнала $\epsilon_c = \text{л/л } U_0^2 a$; $\Gamma_{\text{пс}} = 2/a^2$ (см. табл. 2.4.1); $\Gamma(\tau) = \exp(-\tau^2/4a^2)$; $\Gamma'(\tau) = -\tau \exp(-\tau^2/4a^2)/2a^2$. Будем считать, что $F_m=1/4a$, $A_t=2a/a$ и, тогда, справедливы соотношения

$$A_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \wedge u_r(kA_t) u_r[(k-1)A_t] = R(A_t); \quad A_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \wedge u_r(kA_t) u_r[(k+1)A_t] s R^z(A_t).$$

Допускаемая при этом ошибка будет тем меньше, чем выше частота дискретизации (см. раздел 2.2). Тогда имеем

$$\Gamma(A_t) = \exp(-1/a^2),$$

$$A_t \Gamma'(A_t) = -\wedge \exp(-1/a^2)$$

и из (2.7.7) получим

$$\delta z_0 = 101 g < \frac{2 \exp(-2\alpha)}{2^{\exp} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha P \right) + \exp(-2\alpha)} \quad (2.7.12)$$

Графики зависимостей (2.7.12) при $a=1$ приведены на рис. 2.7.2 для значений $Q=10$ - график 3; $Q=20$ - график 6; $Q=50$ - график 9; и $Q=100$ - график 12 (штрих пунктирные линии).

С ростом a погрешность (2.7.12) уменьшается, стремясь к величине

$$\delta z_0 a = 2 \exp(-2\alpha).$$

Из графиков рис. 2.7.2 следует, что целесообразно обеспечить постоянную времени зарядки t_3 в 5...7 раз меньше длительности импульса выборки t_g ($\rho > 5...7$).
—2

При значениях $\rho < 5$ погрешность резко возрастает, что наблюдается для любого сигнала.

Для удобства оценки влияния скважности Q на рис. 2.7.3 приведена зависимость (2.7.7) для сигнала $u_s(t)$ при частоте дискретизации $a=1$ - кривая 1; $a=5$ - кривая 2. Сплошные линии соответствуют $\rho=5$, а пунктирные - $\rho=10$. На рис. 2.7.4 приведена такая же зависимость от частоты дискретизации a для значений скважности $Q=10$ - график 1; $Q=20$ - график 2; $Q=50$ - график 3 и $Q=100$ - график 4.

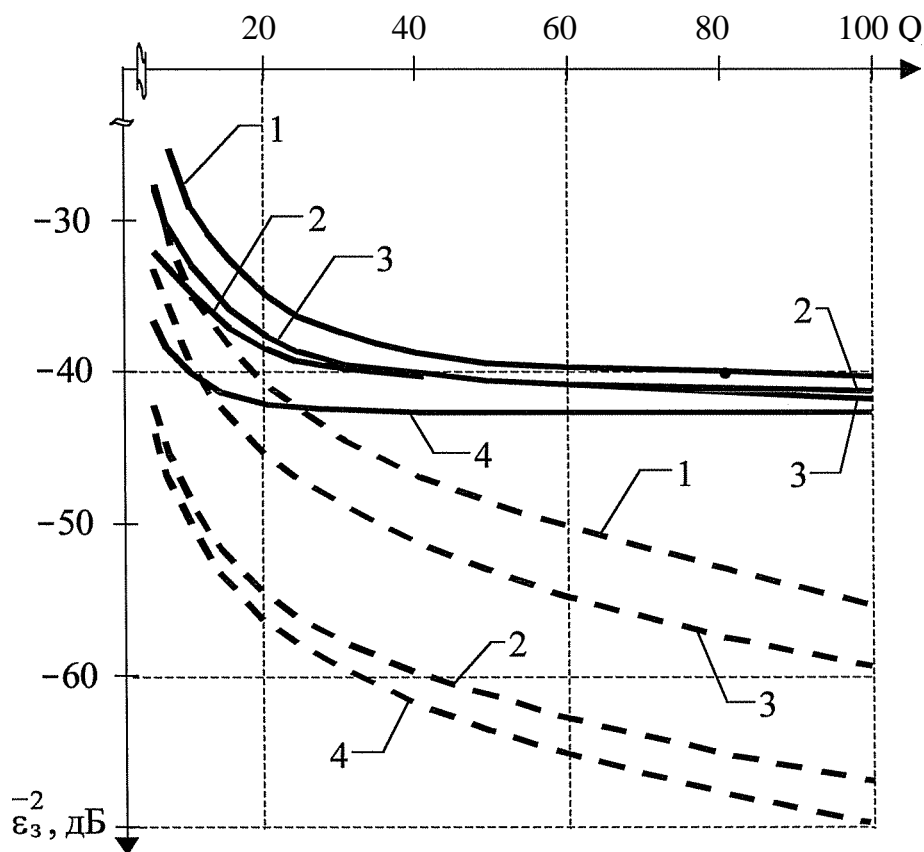


Рис. 2.7.3 Погрешность зарядки емкости СВХ

Для сигнала $u_r(t)$ на рис. 2.7.3 приведены зависимости ошибки (2.7.12) от скважности Q при относительной частоте дискретизации $a=1$ - кривая 3 и $a=2$ - кривая 4. Сплошные линии также соответствуют $\rho=5$, а пунктирные - $\rho=10$.

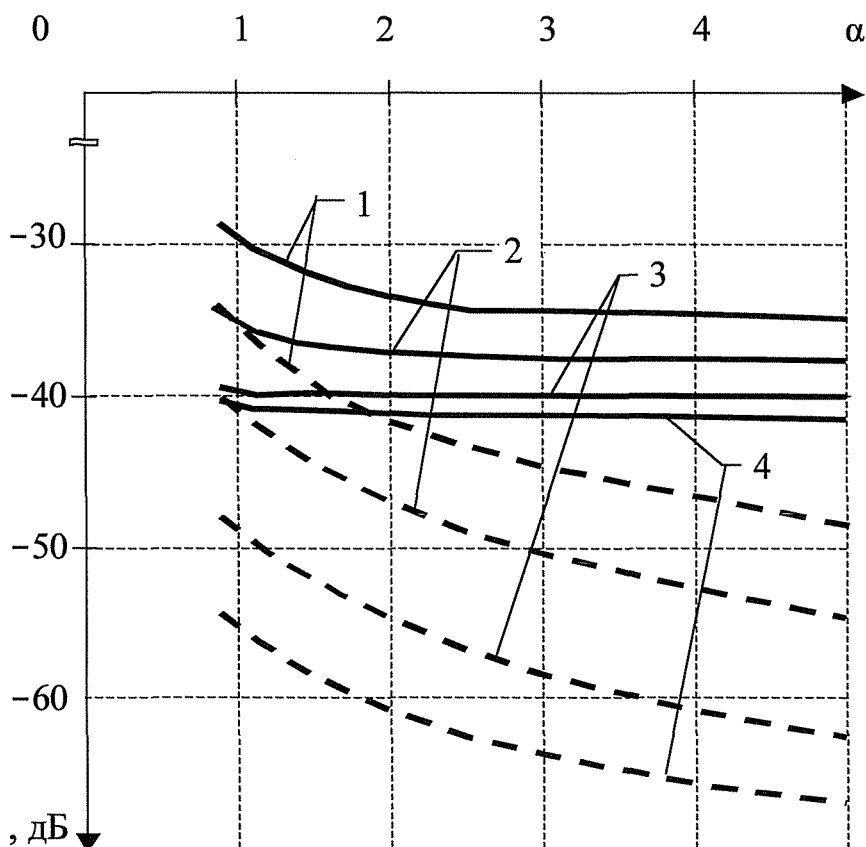


Рис. 2.7.4 Погрешность зарядки емкости СВХ

Из приведенных рис. 2.7.3 и 2.7.4 следует, что скважность необходимо выбирать из условия $Q > 20...60$, а частоту дискретизации $\alpha > 2...3$. Это позволит получить уровень погрешности $< -40...-50$ дБ.

Второй источник погрешности в СВХ - это разрядка запоминающей емкости C , которая происходит на временном интервале $[kA_t; (k+1)A_t]$ (см. рис. 2.7.1).

При малой ошибке (2.7.5) можно считать, что $u_c(kA_t) = u(kA_t)$ и напряжение на емкости убывает в соответствии с выражением

$$u_c(kA_t+0) = u(kA_t)\exp(-0/T_p) . \quad (2.7.13)$$

Погрешность за счет разрядки емкости будет наибольшей при $0=A_t-t_g$ и равной

$$S_{pm}^{(kA_t)} = u^{(kA_t)} \cdot u_c(kA_t+Q) |_{t=A_t-t} = u(kA_t)(1-P_2),$$

где $P_2 = \exp[-y(1-1/Q)]$.

Наибольшее значение среднеквадратичной погрешности будет равно

$$\bar{\epsilon}_{pm}^2 = 2L \cdot \epsilon_{pm}(kAt) \cdot \Delta_c(1 - P_2).$$

Наибольшую относительную среднеквадратичную погрешность можно определить как

$$\bar{\epsilon}_{po}^2 = 10 \lg \left(\frac{\bar{\epsilon}_{pm}^2}{\Delta_c} \right) = 10 \lg (1 - P_2)^2. \quad (2.7.14)$$

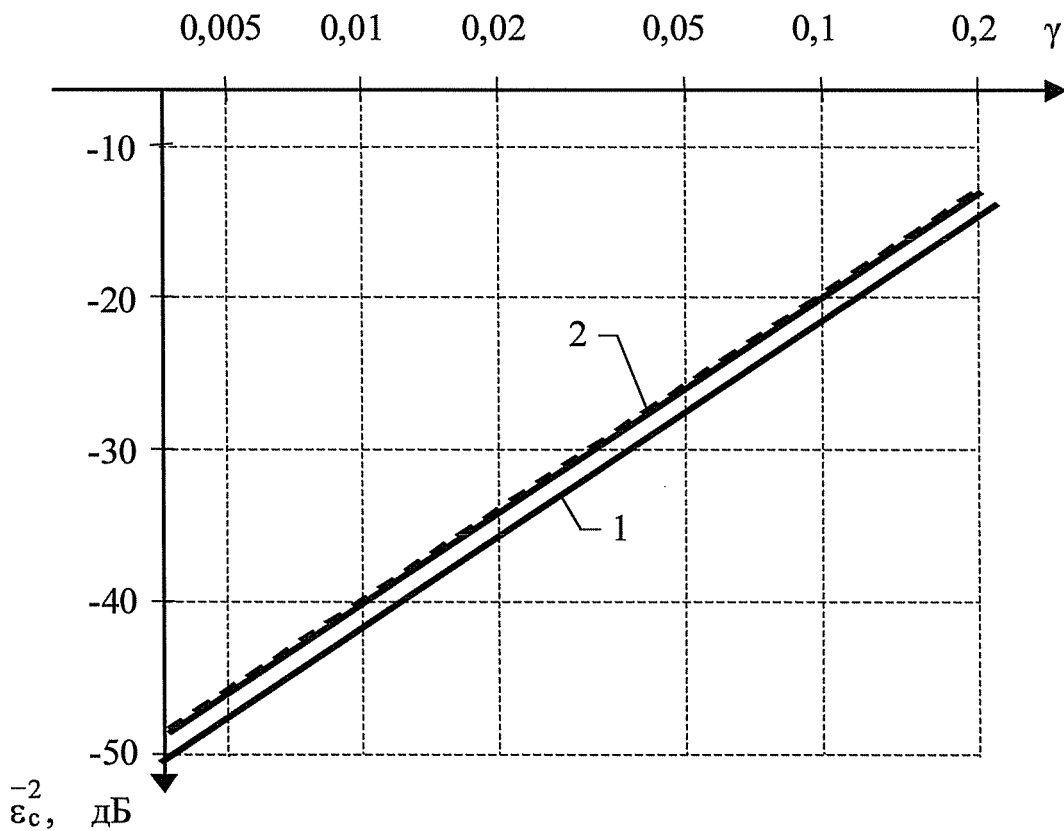


Рис. 2.7.5 Погрешность разрядки емкости СВХ

Графики зависимости (2.7.14) приведены на рис. 2.7.6, на котором линия 1 соответствует $Q=10$ и линия 2 - $Q=100$. Из формулы и рисунка следует, что влияние скважности отсчетных импульсов на погрешность незначительно и малый уровень погрешности обеспечивается выбором постоянной времени разрядки T_p из условия $\gamma < 0,01 \dots 0,005$. При $Q \gg 1$ можно считать, что

$$\left(1 - e^{-\gamma} \right)^2. \quad (2.7.15)$$

График зависимости (2.7.15) приведен на рис. 2.7.5 (пунктирная линия) и он практически совпадает с графиком 2 зависимости (2.7.14).

Погрешности $s_3(kA_t)$ и $s_p(kA_t)$ взаимосвязаны. В частности при $u(kA_t) > u[(k-1)A_t]$ погрешности суммируются, а при $u(kA_t) < u[(k-1)A_t]$ - вычитаются. В связи с этим целесообразно найти общую погрешность, обусловленную неточностью зарядки конденсатора на интервале $[kA_t - t_g; kA_t]$ и разрядкой на интервале $[kA_t; (k+1)A_t - t_g]$. Для этого подставим в (2.7.13) значение $u_c(kA_t)$ из (2.7.4), $0 = A_t - t_g$ и определим наибольшее значение суммарной погрешности

$$\begin{aligned} \delta_c(kA_t) &= u(kA_t) - u_c[kA_t + (A_t - t_g)] = & 71 \\ &= u[(k-1)A_t] \exp(-\rho) + u(kA_t) [1 - \exp(-\rho) - P_2] + u'(kA_t) P_2 T_3 \cdot \end{aligned}$$

Среднеквадратичное значение суммарной погрешности (2.7.16) можно получить, выполнив преобразования аналогичные преобразованиям выражения (2.7.6). Тогда, для суммарной погрешности получим

$$\begin{aligned} &= \Delta, \\ & \sim \sqrt{1 \exp(-2\rho) + [1 - P_2 - \exp(-\rho)]^2 + r(A_t) \exp(-\rho) * > \\ & \Gamma^* [1 - \exp(-\rho) - P_2] + r'(A_t) \Gamma_3 \exp(-\rho) + \Gamma_{лпс} P^2 P^2 \end{aligned}$$

Относительная среднеквадратичная погрешность будет равна

$$\begin{aligned} & \leq \frac{\epsilon^2}{\Delta} = \exp(-2\rho) + [1 - \exp(-\rho) - P_2]^2 + r(A_t) \exp(-\rho) * \\ & * [1 - \exp(-\rho) - P_2] + r'(A_t) A_t \exp(-\rho) \gg + \Gamma_{лпс} P^2 P^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя выражение для нормированной корреляционной функции $r(A_t)$, её производной $r'(A_t)$ и коэффициента $\Gamma_{лпс}$ можно рассчитать общую погрешность, вносимую СВХ, либо выбрать её параметры по допустимому уровню погрешности.

На рис. 2.7.6 приведена зависимость относительной среднеквадратичной погрешности (2.7.17) для рассматриваемого сигнала $u_s(t)$ от относительной постоянной времени цепи зарядки ρ при $a=1$. На этом рисунке графики 1 соответствуют $y=0,1$; графики 2 - $y=0,05$; графики 3 - $y=0,01$ и графики 4 - $y=0,001$.

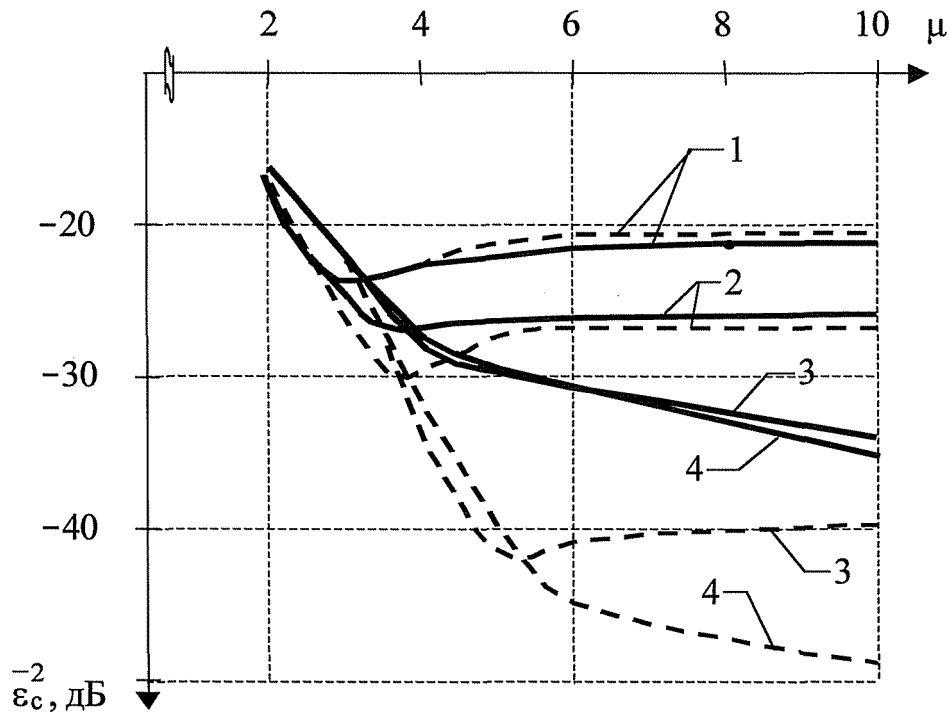


Рис. 2.7.6 Суммарная погрешность СВХ

На рис. 2.7.7 приведена та же зависимость от относительной постоянной цепи разрядки γ при $a=1$ и $\tau=5$ - графики 1; $\tau=7$ - графики 2; $\tau=10$ - графики 3; для этих значений сплошные линии соответствуют $Q=10$ и пунктирные линии - $Q=50$.

На рис. 2.7.8 приведена такая же зависимость от скважности Q для $a=1$ и $\tau=5$ - кривые 1; $\tau=7$ - кривые 2; $\tau=10$ - кривые 3 при $\gamma=0,01$ - пунктирные линии и $\gamma=0,001$ - сплошные линии.

На рис. 2.7.9 приведена ещё одна зависимость ϵ_c от относительной частоты дискретизации a для $\tau=5$ - кривые 1 и кривые 4; $\tau=7$ - кривые 2 и кривые 5; $\tau=10$ - кривые 3 и кривые 6. Сплошные линии графиков соответствуют $Q=10$, а пунктирные линии - $Q=50$, причем графики 1..3 - $\gamma=0,01$ и графики 4..6 - $\gamma=0,001$.

Из графиков рис. 2.7.6...2.7.9 наглядно видно влияние постоянных времени цепи зарядки τ и разрядки γ запоминающего конденсатора СВХ АЦП, скважности дискретизирующих импульсов Q и относительной частоты дискретизации a на

величину погрешности. Получение малых уровней ϵ_c возможно только при совместном соответствующем выборе всех параметров: τ , γ , Q и a . Недостаточное значение

невозможно получить $\varepsilon_c < -35$ дБ при любых u и Q . Аналогичный результат получается при $u > 0,02$ или $Q < 10$.

Несколько слабее влияние частоты дискретизации a . Однако желательно иметь $a > 2 \dots 3$, что дает выигрыш в 5... 10 дБ (см. рис. 2.7.9).

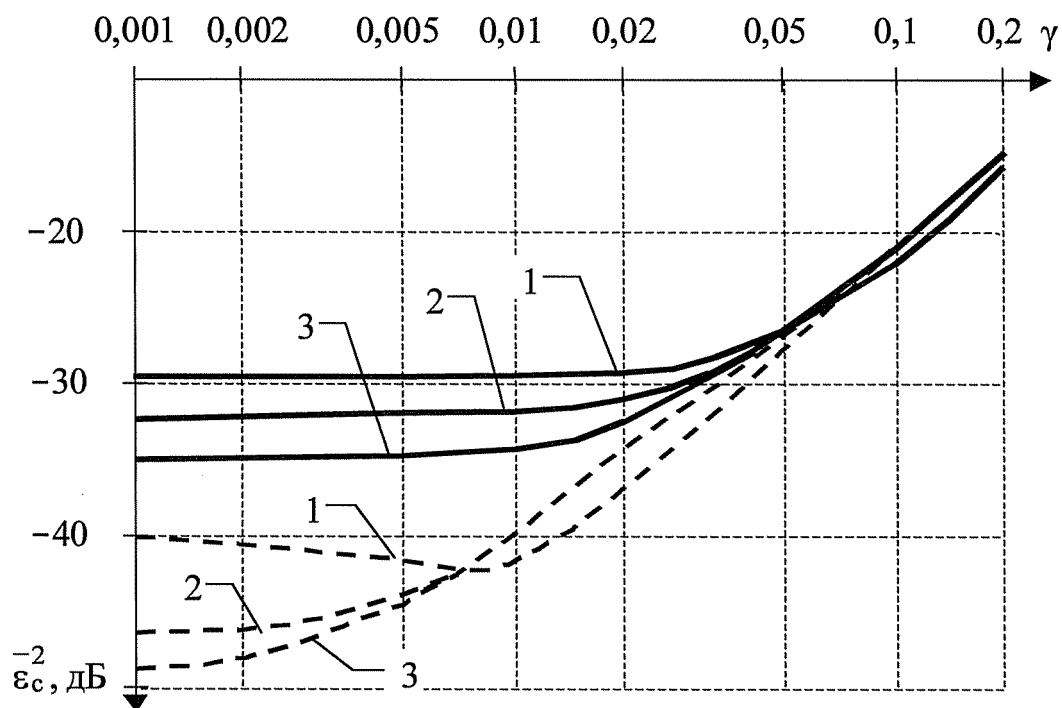


Рис. 2.7.7 Суммарная погрешность СВХ

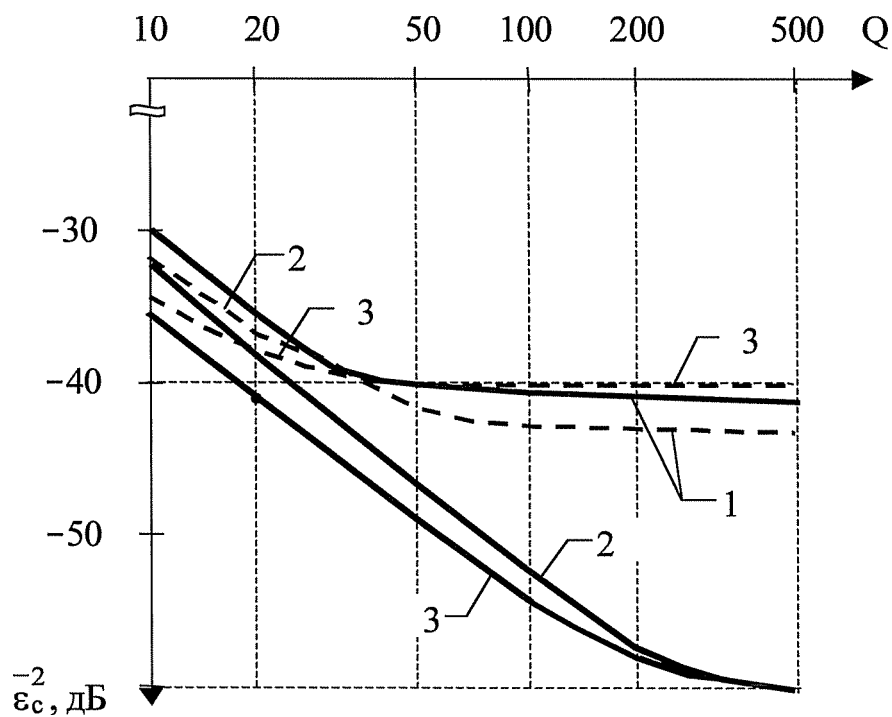


Рис. 2.7.8 Суммарная погрешность СВХ

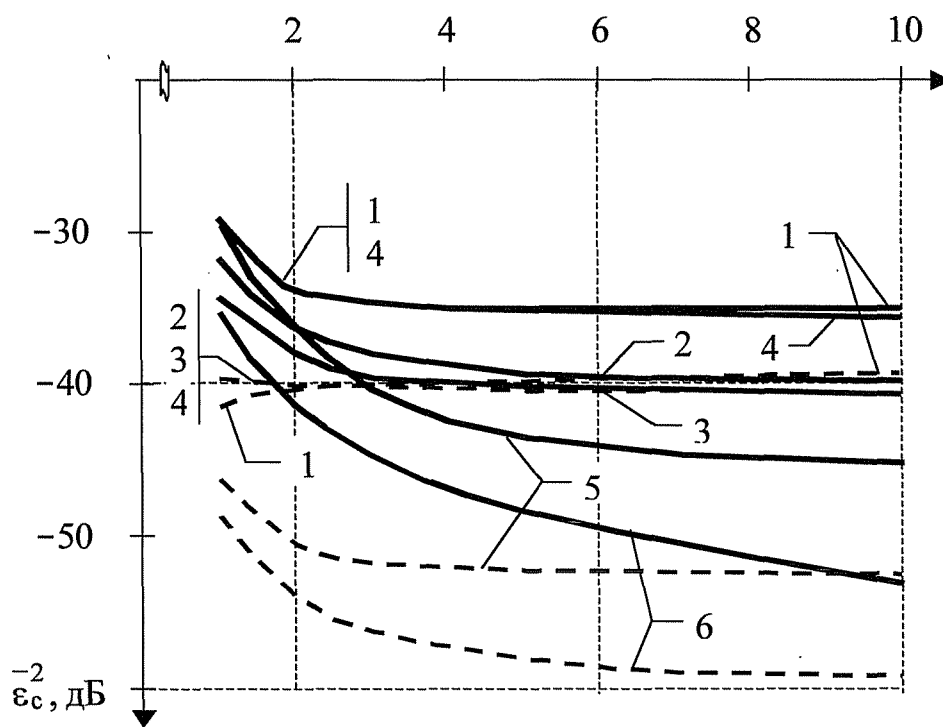


Рис. 2.7.9 Суммарная погрешность СВХ

2.8. Задержки при дискретизации

Любое физически реализуемое устройство обладает временной задержкой, определяемой интервалом времени между моментом подачи сигнала на вход и появлением отклика на выходе.

В некоторых случаях (например, при передаче речевых сигналов) наличие небольшой задержки не существенно. Однако в большинстве случаев на допустимое значение задержки может быть наложено жесткое ограничение (например, в системах управления быстропротекающими процессами).

Помимо смещения выходного сигнала во времени задержка может привести к его рассогласованию с системой обработки и к погрешности (ошибке) в оценке значений параметров. Всё это ведет к ухудшению показателей системы.

При дискретизации сигнала $u(t)$ с интервалом $A_t = 1/2aF_m$ отсчетное значение $u(kA_t)$ появится на выходе дискретизатора с задержкой T_k . Сигнал в этот момент имеет значение $u(kA_t + r_k)$, что приводит к появлению ошибки запаздывания

$$s_T(kA_t) = u(kA_t + r_k) - u(kA_t). \quad (2.8.1)$$

Значения T_k зависят от схемной реализации дискретизатора, преобразуемого сигнала и могут носить систематический или (и) случайный характер. В большинстве практически важных случаев выполняется условие $T_k \ll A_t$. Это позволяет, используя разложение функции $u(kA_t)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки kA_t (см. (2.4.2)), ограничиться только первой производной и, тогда, получим

$$u(kA_t + r_k) = u(kA_t) + u'(kA_t)r_k. \quad (2.8.2)$$

Подставив (2.8.2) в (2.8.1), получим

$$s^k(kA_t) = T_k u'(kA_t). \quad (2.8.3)$$

Среднеквадратическое значение погрешности (2.8.3) получим её усреднением по всем значениям k :

$$s_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_s^2(kA_t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u'(kA_t)]^2 T^2. \quad (2.8.4)$$

Чтобы получить верхнюю оценку погрешности (2.8.4) будем считать, что задержки t_k одинаковы при любом k и равны максимальному значению t_a , определяемому апертурным временем дискретизатора [73]. Тогда

$$\epsilon^2 < 4\pi^2 \int_{k=-\infty}^{\infty} f[u'(kA_t)]^2 dt \quad (2.8.5)$$

Используя коэффициент $\eta_{\text{пс}}$ (1.4.21), связывающий энергии сигнала и его производной, а также учитывая соотношение (2.1.14), получаем из (2.8.5)

$$\epsilon_{\text{тг}}^2 \sim \frac{2}{A_t} \eta_{\text{пс}}^{-2} \quad (2.8.6)$$

В дискретизаторах с импульсами конечной длительности t_g параметры выбираются так, чтобы выполнялось условие $t_a < t_g$. Это позволяет получить нормированную оценку (2.8.6) в виде

$$\epsilon^2 \frac{2}{\Delta_t} \leq \eta_{\text{пс}} \left(\frac{t_g}{\Delta_t} \right)^2 - \frac{\eta_{\text{пс}}}{2} \quad (2.8.7)$$

где Q - скважность дискретизирующих импульсов.

Для некоторых сигналов выражения (2.8.7) приведены в табл. 2.8.1. Графики этих зависимостей в логарифмической мере ($B_{\text{н,дБ}}^2 = 10 \lg(s^2_{\text{н}})$) приведены на рис. 2.8.1 как функция произведения aQ .

Зависимости, приведенные в табл. 2.8.1, и графики на рис. 2.8.1 характеризуют максимально возможные погрешности при задержках, равных длительности импульса дискретизации.

Если задержка носит случайный характер и можно считать, что она равномерна на интервале $[0, t_g]$, то среднее значение ошибки можно найти как математическое ожидание

$$s^2_{\text{м}} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Pr}(\tau) s^2(\tau) dt, \quad (2.8.8)$$

Сигнал	g^2	График на рис. 2.8.1
$U \sin(27rF_{mt})$	$7t/2(aQ)^2$	4
$U \operatorname{sinc}(27cF_{mt})$	$1 \quad 71 >^2$ $3 \wedge \text{oc} Q$	2
$\cos(27cF_{mt})$	$\circ V \quad 1 V$ $I^6 A \text{oc} Qj$	5
$U \operatorname{sinc}^2(27rF_{mt})$	$2 \Gamma \text{ mi} \text{ч} 2$ $5 \wedge a Q \text{ J}$	1
$U_0 \exp(-t^2/2\wedge^2)$	$2/(aQ)^2$	3

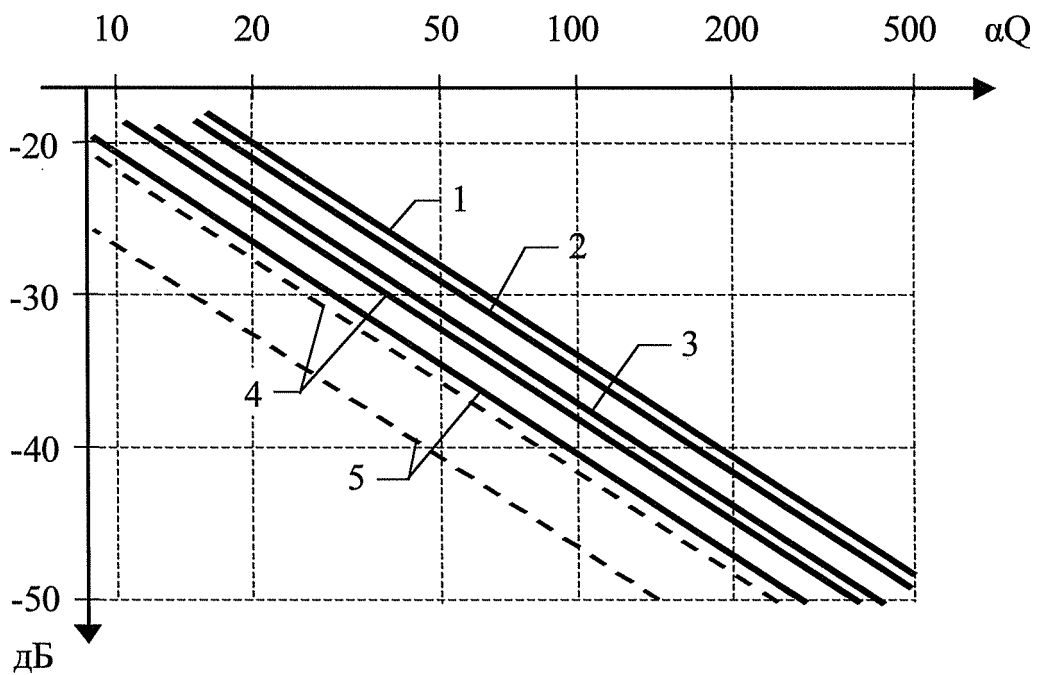


Рис. 2.8.1 Погрешности при задержках

где $p(\tau)$ - распределение плотности вероятности задержки τ , и в предположении равномерности $p(\tau) = 1/t_g$ с учетом (2.8.4) из (2.8.8) можно получить

$$5?_m = h^2 dx = 3af-. \quad (2.8.9)$$

$$t_g At 0 \quad 3Q^2$$

Средняя величина ошибки по (2.8.9) почти на 5дБ меньше ошибки (2.8.7). На рис. 2.8.1 пунктирные графики 4 и 5 показывают среднюю величину ошибки для соответствующих сигналов.

Задержка сигналов во временном дискретизаторе совместно с задержкой в амплитудном квантователе могут стать причиной его рассогласования с системой обработки и обусловить ухудшение параметров выходного отклика системы в целом.

Рассмотрим случай дискретной согласованной фильтрации сигнала $u(t)$ [47], удовлетворяющего требованиям теоремы Котельникова. После дискретизации с интервалом A_t (и, возможно, амплитудного квантования) будет получен сигнал

$$U_g(kA_t) = u(kA_t + t_3), \quad (2.8.10)$$

где t_3 - общее время задержки в АЦП.

Сигнал (2.8.10) поступает на дискретный (или цифровой) согласованный фильтр, импульсная характеристика которого является зеркальным отображением сигнала [24]:

$$h(kA_t) = u[(M-k)A_t]$$

где MA_t - задержка согласованного фильтра, равная длительности сигнала $u(t)$.

На выходе согласованного фильтра будет получен сигнал

$$s_3(mA_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t + t_3) h[(m-k)A_t] = \quad (2.8.11)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t + t_3) u[(M - k - m)A_t].$$

Если $t_3=0$, то на выходе согласованного фильтра будет получена автокорреляционная функция сигнала $u(t)$, задержанная на время MA_t

$$R[(M-m)A_t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t)u[(M-m+k)A_t]. \quad (2.8.12)$$

Сигнал (2.8.11) представляет собой смещенную автокорреляционную функцию, в которой задержку t_3 можно представить в виде суммы

$$t_3 = N_3 A_t + \Delta A_t,$$

где N_3 - целое число ($N_3 > 0$) и $|\Delta| < 0,5$.

Задержка на целое число интервалов дискретизации N_3 не влияет на отклик согласованного фильтра [24], а вызывает его смещение на такой же интервал $N_3 A_t$. Поэтому искажения выходного отклика (2.8.11) можно рассматривать как задержанную автокорреляционную функцию

$$R(t_3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t + \Delta A_t)u[(m+k)A_t] \quad m=0.$$

Уменьшение выходного отклика согласованного фильтра определяет отношение

$$(2.8.13)$$

где $R(0) = \mathcal{E}_c$ - значение автокорреляционной функции при $t=0$;

$\gamma(t)$ - нормированная автокорреляционная функция сигнала $u(t)$.

Определим величину потерь для некоторых сигналов. Дискретный аналог сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) может быть представлен в виде

$$u(kA_t) = \cos \frac{2\pi F_m k A_t}{T_H} \quad k \in 0, N_H,$$

где F_m - ширина спектра ЛЧМ-сигнала;

T_H - длительность ЛЧМ-сигнала;

$N_H = T_H / A_t$ - число отсчетов на длительности сигнала, $N_H \gg 1$.

Автокорреляционная функция такого сигнала равна

$$R(mA_t) = \frac{\sin(7iF_m mA_t)}{\sin(7rF_m mA_t / N_H)} \left\{ \cos \frac{T \bar{E} n_i n A_t}{T} L[m\Delta_t + (N_H - 1)\Delta_t] \right\}. \quad (2.8.14)$$

При $m=0$ получаем $R(0)=N_H$ и в окрестностях этой точки имеем

$$r_{te}^{A_t} = \frac{\sin(7l\xi/2\sigma c)}{N_H \sin(7r^{A_t}/2aN_H)} \quad (2.8.15)$$

Потери в выходном сигнале (2.8.3) будут максимальными при $\xi=0,5$. Тогда, учитывая выражение (2.8.15) и значение $N_H \gg 1$, получим из (2.8.13)

$$\epsilon_{\text{з макс}} = \frac{4a \cdot (\text{л} < 4aJ)}{7l} \cos \frac{(\text{л} < 4aJ)}{7l} \sin \frac{2a \cdot (\text{л} < 4aJ)}{7l} \sin \frac{(\text{л} < 4aJ)}{7l} < 2aJ \quad (2.8.16)$$

График зависимости $\epsilon_{\text{л макс}} \text{ дБ} = 10 \lg(\text{л макс})$ приведен на рис. 2.8.2, кривая 1

Для сигнала с нормированной корреляционной функцией вида

$$r(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_0, \quad |\tau| < \tau_0, \quad (2.8.17)$$

потери в выходном сигнале, согласно (2.8.3), будут равны

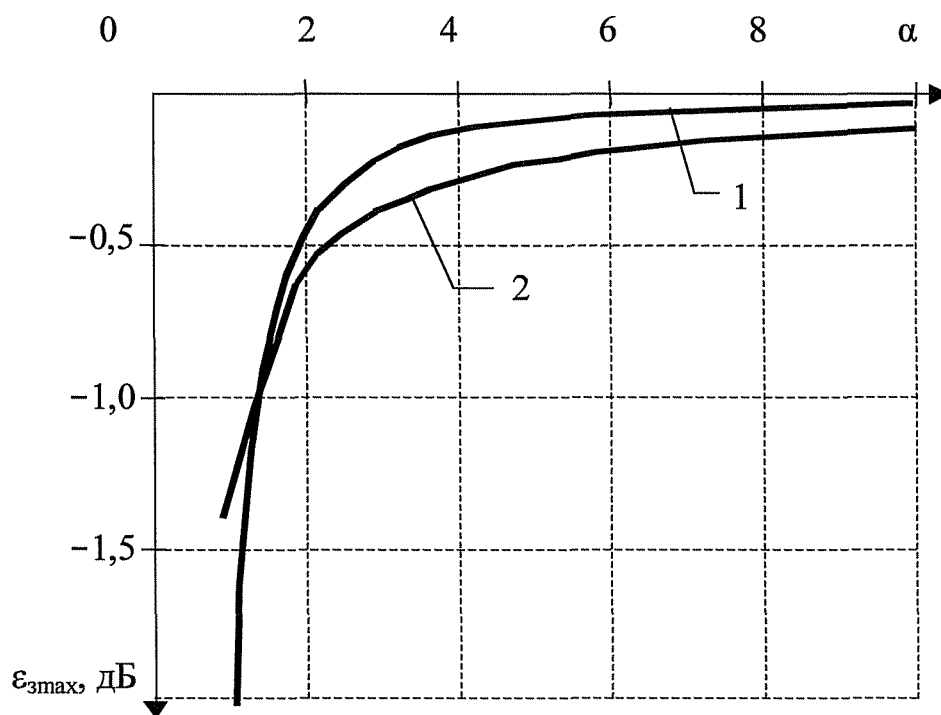


Рис. 2.8.2 Максимальная погрешность рассогласования сигнала и фильтра

$$\varepsilon_2(\Delta t) = (1 - |5|/2a), \quad (2.8.18)$$

где использовано соотношение $A_t = t_0/2a$.

Максимальная величина потерь будет при $|\xi| = 0,5$ и составит

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{1}{4a} \quad (2.8.19)$$

График зависимости $V_{\text{ЗМ, дБ}} = 10 \lg(s_{\text{Змакс}})$ приведен на рис. 2.8.2, кривая 2.

Для целого ряда АЦП задержка преобразования носит случайный характер [7]. Если она имеет на интервале $[-0,5A_t; 0,5A_t]$ распределение плотности вероятности $p(\Delta t)$, то средняя величина потерь будет равна

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \int_{-0,5\Delta_t}^{0,5\Delta_t} \varepsilon_2(\xi\Delta_t) p(\xi\Delta_t) d(\xi\Delta_t) = \int_{-0,5\Delta_t}^{0,5\Delta_t} (1 - |\xi\Delta_t|/2a) p(\xi\Delta_t) d(\xi\Delta_t) \quad (2.8.20)$$

При равномерной плотности вероятности $p(\Delta t) = 1/A_t$ из (2.8.20) получим

$$\varepsilon_{\text{ср}}^2 = \int_{-0,5A_t}^{0,5A_t} (1 - |\xi A_t|/2a)^2 d(\xi A_t). \quad (2.8.21)$$

Для сигнала с корреляционной функцией (2.8.17) при случайной задержке из (2.8.21) получим

$$\varepsilon_{\text{ср}}^2 = 2a \text{Si}(\pi/2a), \quad (2.8.22)$$

где $\text{Si}(\pi)$ - функция интегрального синуса [121].

График зависимости (2.8.22) приведен на рис. 2.8.3, кривая 1.

Для сигнала с корреляционной функцией (2.8.17) среднее значение ошибки из (2.8.21) будет равно

$$s^2 p = 2 \int_0^{0,5} (1 - \Delta/2a) d\Delta = 1 - \Delta/a. \quad (2.8.23)$$

График зависимости (2.8.23) приведен на рис. 2.8.3, кривая 2.

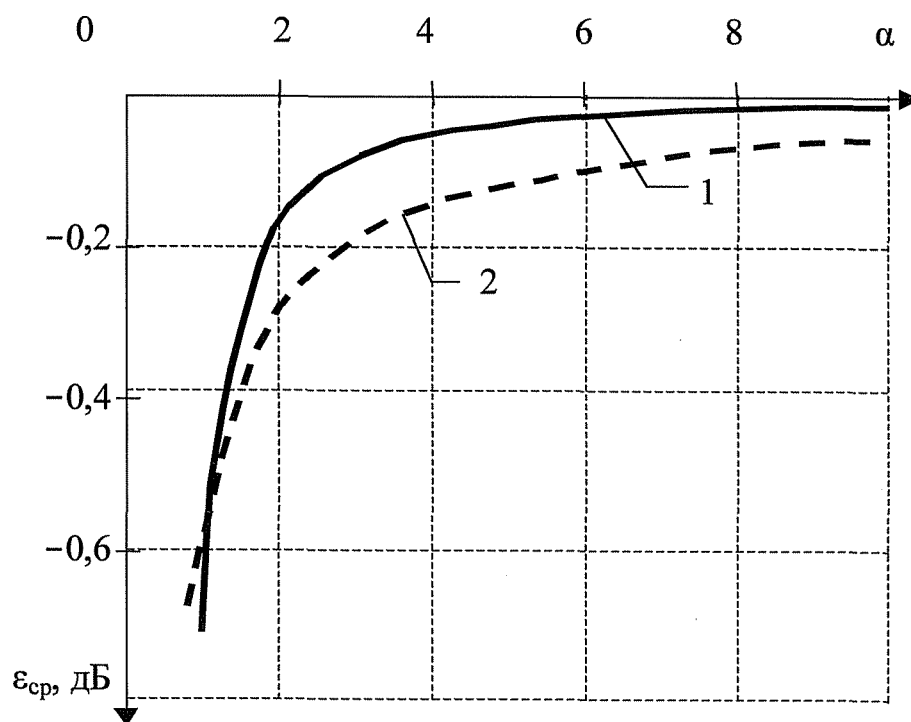


Рис. 2.8.3 Средняя погрешность рассогласования сигнала и фильтра

Выводы к разделу 2

Теория дискретизации непрерывных сигналов, базирующаяся на теореме Котельникова, привлекала внимание многих авторов и является хорошо проработанной. Опубликованы монографии, целиком посвященные проблемам временной дискретизации [27, 33] или в комплексе с амплитудным квантованием [7, 19, 126]. Имеются работы по обобщению теоремы Котельникова. [105, 106] и сводному анализу возникающих погрешностей [125, 128]. Однако при изложении теоремы Котельникова в учебной [26, 100] и научной (см. выше) литературе отсутствует систематизированное изложение всех требований идеальной дискретизации, определяющее область справедливости теоремы.

Проведенный анализ процесса временной дискретизации и литературных источников позволил обобщить и сформулировать совокупность требований идеальной дискретизации и источники возникающих ошибок при переходе к реальным устройствам.

Были установлены требования к фазовым соотношениям между сигналом и дискретизирующей последовательностью при $f_g=2F_m$. Необходимость фазирования сигнала и дискретизирующей последовательности косвенно следует из анализа, проведенного в монографии [33]. Полученные результаты опубликованы в работах автора [43, 59].

Проблема дискретизации сигналов с неограниченным спектром рассматривалась многими авторами [33, 66, 105, 106, 114, 125, 128, 131]. В работах [125, 128, 131] получены оценки погрешности дискретизации по минимаксному критерию. Эти оценки Малопригодны для систем с энергетическими информационными параметрами, к которым относятся, в частности, системы передачи речевых сообщений. Оценки погрешности по среднеквадратичному критерию, полученные в работах [66, 105, 106], базируются на отношении энергии сигнала на частотах выше $(B_g/2$ к полной энергии сигнала. Определение этого отношения, как правило, встречает затруднения для конкретных сигналов. Такие же выводы следуют и в отношении оценки погрешности дискретизации и восстановлении сигналов при

ограниченном числе отсчетов, полученных рядом авторов для минимаксного [33, 114, 115, 124, 125, 128] и среднеквадратичного [27, 33] критериев.

Анализ процесса дискретизации сигналов с неограниченным спектром показал, что величина погрешности зависит от скорости убывания спектра, что, в свою очередь, определяется видом функции сигнала $u(t)$ и наличием разрывов у сигнала или его производных. При наличии разрывов одинакового порядка форма сигналов слабо влияет на величину погрешности. Это позволило аппроксимировать спектры степенной функцией и получить оценки, справедливые для широкого класса сигналов. Результаты исследований опубликованы в работе автора [54].

Анализ процесса дискретизации и восстановления сигналов при конечном числе ненулевых отсчетов показал необходимость обеспечения строгого фазового соотношения между сигналом и дискретизирующей последовательностью при $f_g = 2F_m$. Получена зависимость погрешности восстановления от величины смещения отсчетов. Величина погрешности при ограничении числа используемых отсчетов определяется видом спектра сигнала $U(j\omega)$ и наличием разрывов у спектра или его производных. При наличии разрывов одинакового порядка форма спектра $U(j\omega)$ слабо влияет на величину погрешности. Это позволило аппроксимировать сигнал во временной области степенной функцией и получить оценки погрешности, применимые для широкого класса сигналов. Результаты исследований опубликованы в работе автора [53].

Ошибки, вызванные смещением отсчетных импульсов, рассматривались исследователями [73, 125, 128] без учета смещения отклика фильтра, без привязки к нестабильности частоты задающего генератора и в совокупности с влиянием ряда других факторов. Это затрудняет определение требований к стабильности частоты генератора отсчетных импульсов.

Анализ влияния нестабильности частоты дискретизирующих импульсов позволил установить, что независимо от характеристик сигнала при нестабильности частоты $3f < 10^{7.5}$ погрешность не превысит -70 дБ. Результаты проведенного анализа опубликованы в работе автора [40].

Исследование процесса дискретизации сигнала на фоне широкополосного шума, проведенное в работе [91], не учитывает характеристик предшествующего аналогового фильтра.

Проведенный анализ позволил оценить ухудшение отношения сигнал/шум без предварительной аналоговой фильтрации и с фильтрами различной сложности. Показано, что увеличение частоты дискретизации эффективно уменьшает проигрыш в отношении сигнал/шум если полоса шума шире спектра сигнала не более чем в 5... 10 раз. Применение простейших фильтров с гарантированным затуханием (20...30)дБ обеспечивает проигрыш в отношении сигнал/шум менее 1дБ при полосе шума в 20... 100 раз превышающую полосу сигнала.

Общие особенности дискретизации импульсами конечной длительности рассмотрены в работах [33, 128], а влияние СВХ - в работе [79]. Однако полученные результаты не позволяют определить требования к отдельным элементам СВХ.

В данной работе получены зависимости отдельных погрешностей и суммарной ошибки от параметров схемы при дискретизации импульсами конечной длительности и использовании СВХ. Эти погрешности носят характер близкий к пороговому, поэтому обеспечить требуемую точность можно только при определенных значениях постоянных времени зарядки - t_3 , разрядки - t_p и скважности дискретизирующих импульсов Q . Практически должны выполняться условия: t_3 в 4...6 раз меньше длительности дискретизирующих импульсов t_g , t_p в 50... 100 раз больше интервала дискретизации A_t и скважность Q должна быть более 20...50. Это позволит получить погрешность менее (-30...-40)дБ. Результаты проведенного анализа опубликованы в работах автора [38, 55].

Оценка влияния задержки отсчетов на восстановление сигнала проводилась в работах [73, 101, 118]. Однако в них не учтена погрешность, которая может возникнуть при корреляционной обработке сигнала.

Увеличение скважности дискретизирующих импульсов позволит уменьшить ошибку задержки, если апертурное время дискретизатора меньше длительности импульса t_g . Показано также, что задержка отсчетов может привести к рассогласованию дискретного сигнала с импульсной характеристикой цифровой схемы

обработки и ухудшить выходное отношение сигнал/шум. Получены значения потерь согласованной фильтрации для некоторых сигналов, из которых следует, что величина потерь быстро убывает с ростом частоты дискретизации. Результаты проведенного анализа опубликованы в работе автора [47].

При восстановлении непрерывного сигнала по отсчетам чаще всего используют фильтры нижних частот. Были получены оценки погрешностей восстановления для фильтров различных типов: Баттерворта, Чебышева, Гаусса, Кауэра и др. и различного порядка (сложности). Это позволяет провести сопоставительный анализ и выбрать тип и порядок фильтра. Результаты исследований опубликованы в работе автора [52].

Таким образом, в результате исследований временной дискретизации

- Определены требования к фазовому соотношению сигнала и дискретизирующей последовательности импульсов,
- Обобщена совокупность требований идеальной дискретизации (теоремы Котельникова),
- Уточнены величины и получены оценки погрешностей, возникающих при невыполнении требований идеальной дискретизации.

РАЗДЕЛ 3

ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

3.1. Идеальная дискретизация

Теорема Котельникова обобщена [67, 82, 100, 112, 125] на случайные сигналы. Для идеальной дискретизации, при которой сохраняются все параметры и характеристики случайного процесса, также необходимо выполнить условия, рассмотренные в разделе 2.1. Естественно, что у случайного процесса ограниченным должен быть энергетический спектр с максимальным значением спектральной составляющей F_m . Кроме того исходный случайный процесс должен быть непрерывным (что вытекает из ограниченности энергетического спектра) и стационарным в широком смысле.

Для случайного процесса $\hat{x}(t)$, удовлетворяющего всем перечисленным требованиям, энергетический спектр которого $S(\omega)$ ограничен максимальной частотой F_m , можно записать

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nA_t) \text{sinc} \frac{t-nA_t}{A_t}, \quad (3.1.1)$$

где $A_t < 1/2F_m$ - интервал дискретизации;

$x(nA_t)$ - отсчеты случайного процесса $x(t)$ в моменты $t = nA_t$.

Равенство (3.1.1) для случайного процесса справедливо в среднеквадратическом смысле. Это означает равенство корреляционных функций сигналов в правой и левой частях выражения (3.1.1).

Корреляционную функцию $R(T)$ сигнала $S(t)$ согласно теореме Винера-Хинчина [67] можно представить в виде

$$R(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) s^*(\omega + \Omega) e^{i\Omega T} d\omega d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega + \Omega) e^{i\Omega T} d\Omega$$

Функция $R(T)$ является детерминированной с ограниченным спектром и в силу этого она удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова. Поэтому для неё справедливо соотношение

$$R(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k\Delta_t) \text{sinc} \left[\frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t} \right] \quad (3.1.2)$$

Для сигнала в правой части (3.1.1) корреляционную функцию $K_d(\tau)$ можно определить усреднением по ансамблю реализаций произведения значений $\xi(k\Delta_t)$ в два момента времени, разделенных интервалом τ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \text{Шр} \left\{ \xi(r\Delta_t) \xi(r\Delta_t + \tau) \right\} \text{sinc} \left[\frac{\tau - \ell\Delta_t}{\Delta_t} \right] \text{sinc} \left[\frac{\tau + \tau - r\Delta_t}{\Delta_t} \right] \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \text{Шр} \left\{ \xi(r\Delta_t) \xi(r\Delta_t + \tau) \right\} \text{sinc} \left[\frac{\tau - \ell\Delta_t}{\Delta_t} \right] \text{sinc} \left[\frac{\tau + \tau - r\Delta_t}{\Delta_t} \right] \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где $\text{Шр}\{\cdot\}$ - первый смешанный момент случайной величины.

У стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит только от разности моментов времени, поэтому в (3.1.3) можно заменить $(\ell - r) = \tau$ и двойную сумму - однократной по τ . Тогда из (3.1.3) имеем

$$R_{AW} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E \left\{ \xi(n\Delta_t) \xi(n\Delta_t + \tau) \right\} \text{sinc} \left[\frac{\tau - n\Delta_t}{\Delta_t} \right],$$

что совпадает с корреляционной функцией (3.1.2).

Учитывая свойства корреляционной функции [67] $R(0) = \sigma^2 + a^2$ и $R(\infty) = a^2$, где a - среднее значение и σ^2 - дисперсия случайного процесса $\xi(t)$, можно утверждать, что при дискретизации сохраняется среднее значение и дисперсия: $a_g = a$ и $\sigma_g^2 = \sigma^2$, где a_g и σ_g^2 - среднее значение и дисперсия дискретизированного случайного процесса.

Воспользуемся представлением корреляционной функции (1.4.27), которое для стационарного процесса имеет вид

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \xi(y) \cos(\omega\tau) dx dy, \quad (3.1.4)$$

и подставим его в (3.1.2). В результате преобразований получим

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy W_2(x, y, k\Delta_t) dx dy \operatorname{sinc} \frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t} \quad (3.1.5)$$

Меняя местами порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(x, y, k\Delta_t) \operatorname{sinc} \left[\frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t} \right] dk \quad (3.1.6)$$

Из равенств (3.1.4) и (3.1.5) следует, что

$$W_2(x, y, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_2(x, y, k\Delta_t) \operatorname{sinc} \frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t} \quad (3.1.7)$$

Учитывая также соотношение (1.4.24), которое для стационарных сигналов принимает вид

$$W_2(x, y, \tau) = W_x(x) W_{y|y/x}(y/x, \tau) = W_y(y) W_{y|x}(x/y, \tau),$$

из (3.1.7) можно получить:

$$W_{y|y/x}(y/x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{y|y/x}(y/x, k\Delta_t) \operatorname{sinc} \frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t}, \quad (3.1.8, a)$$

$$W_{y|x}(x/y, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{y|x}(x/y, k\Delta_t) \operatorname{sinc} \frac{\tau - k\Delta_t}{\Delta_t} \quad (3.1.8, b)$$

Разложения (3.1.8) справедливы при ограниченном (финитном) спектре $S(\omega)$, что влечет за собой ограниченность условных спектральных функций $S_p(x, y, \tau)$ (1.4.30). Это очевидно из выражения (1.4.31).

Из свойств преобразования Фурье [26, 31] следует, что идеальную дискретизацию можно осуществить при функциях $R(\tau)$, $W_2(x, y, \tau)$, $W_{y|y/x}(y/x, \tau)$ и $W_{y|x}(x/y, \tau)$ принимающих нулевые значения на оси $\tau \in (-\infty; \infty)$ не более чем в счетном множестве точек.

Процесс дискретизации некоторой k -ой реализации $s^k(t)$ случайного процесса $S(t)$ можно рассматривать (аналогично разделу 2.1) как умножение на дискретизирующую последовательность $D\delta(t)$ δ -функций, следующих с периодом Δ_t .

Спектр $G_g(\omega)$ дискретизированной реализации определяется как результат предельного перехода усредненного преобразования Фурье

$$G_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.9)$$

где $g(t)$ - k -ая реализация случайного процесса, рассматриваемая на интервале $[-T/2; T/2]$;

$\overline{g(t)}$ - первый момент, полученный усреднением по ансамблю реализаций.

Периодическая последовательность $D_s(t)$ имеет дискретный спектр $Z(j\omega)$ (см. раздел 2.1) и, тогда, выражение (3.1.9) можно преобразовать к виду

$$G_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_m(\omega) G(g) e^{-j\omega k T} \quad (3.1.10)$$

где $Z_m(\omega) = |Z(j\omega)|^2$ - энергетический спектр последовательности $D_s(t)$.

Из (3.1.10), учитывая дискретность спектра $Z(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_m(\omega) e^{-j\omega k T}$, можно получить

$$G_g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_m(\omega) G(g) e^{-j\omega k T} \quad (3.1.11)$$

Если $G(g)$ не имеет спектральных составляющих с частотами выше $\omega_T = 2\pi/T$, а интервал дискретизации $A_t = 1/f_g$ отвечает условию $f_g > 2F_m$, то, пропуская сигнал со спектром (3.1.11) через идеальный ФНЧ с характеристикой (2.1.6), можно получить исходный случайный процесс $x(t)$.

Нестационарные случайные процессы имеют моменты, зависящие от времени. В частности корреляционная функция $R(t, t+\tau)$ зависит от двух моментов времени: t и $t+\tau$. Если у такого сигнала существует усредненная по времени корреляционная функция, определяемая как

$$R_{cp}(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} R(t, t-T) dt, \quad (3.1.12)$$

то можно определить усредненный энергетический спектр нестационарного случайного процесса

$$F_H(\omega) = 2 \int_0^T R_{cp}(T) \cos(\omega T) dT. \quad (3.1.13)$$

Если такой спектр существует и является финитной функцией с максимальным значением частоты спектральной составляющей F_m , то для него справедлива теорема Котельникова. При дискретизации нестационарного случайного процесса с интервалом $A_t < 1/2F_m$ и последующим восстановлением идеальным ФНЧ будет получен исходный непрерывный сигнал.

В отличие от детерминированных на дискретизацию и восстановление стационарных случайных сигналов не влияют начальная фаза дискретизирующей последовательности $D_5(t)$, а также постоянная задержка t_3 в схеме дискретизатора или устройства восстановления [67]. Это обусловлено тем, что фазовые сдвиги и временные задержки не влияют на энергетический спектр сигнала.

Несоблюдение остальных требований (см. раздел 2.1) приводит к появлению ошибок (погрешностей), величину которых можно уменьшить до допустимых пределов выбором интервала дискретизации A_t и параметров устройства дискретизации и восстановления.

3.2. Дискретизация сигналов с неограниченным спектром

Будем рассматривать стационарный случайный процесс $\hat{x}(t)$, имеющий среднее значение a_0 , дисперсию σ_0^2 и корреляционную функцию $R(\tau)$. Энергетический спектр такого процесса $G(\omega)$ в соответствии с (1.4.36) может быть бесконечным, если $R(\tau)$ финитна во времени, не дифференцируема или в силу иных её свойств. Дисперсия случайного процесса при бесконечном спектре может быть конечной:

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) G(\omega) d\omega = R(0) < \infty. \tag{3.2.1}$$

Дискретизация такого сигнала будет сопровождаться искажениями при восстановлении идеальным ФНЧ. Величину искажений оценим по разности корреляционных функций исходного сигнала $R(\tau)$ и восстановленного по отсчетам $R_g(x)$:

$$s(\tau) = R(\tau) - R_g(\tau). \tag{3.2.2}$$

Корреляционную функцию $R_g(x)$ можно найти по энергетическому спектру восстановленного сигнала, который, в свою очередь, определяется как произведение спектра (3.1.11) и частотной характеристики ФНЧ (2.1.6). Тогда можно записать

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega + k\omega_0) G(\omega) e^{j(\omega + k\omega_0)\tau} d\omega. \tag{3.2.3}$$

Подставляя в (3.2.2) выражения (1.4.37) и (3.2.3), учитывая симметричность $G(\omega)$, получим

$$s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [G(\omega + k\omega_0) + G(\omega - k\omega_0)] e^{j(\omega + k\omega_0)\tau} d\omega. \tag{3.2.4}$$

откуда следует, что погрешность имеет две некоррелированные (т.к. спектры не перекрываются) составляющие.

Первое слагаемое в правой части (3.2.4) определяет "высокочастотную" погрешность, дисперсия которой равна

$$\sigma_{вч}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |G(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.2.5)$$

На эту величину уменьшается дисперсия исходного сигнала при дискретизации.

Второе слагаемое в правой части (3.2.4) определяет "низкочастотную" погрешность, дисперсия которой равна

$$\sigma_{нч}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} [G(\omega) + k\omega] G(\omega) d\omega. \quad (3.2.6)$$

На эту величину увеличивается дисперсия исходного сигнала при восстановлении.

Из выражений (3.2.5) и (3.2.6) нетрудно видеть, что

$$\sigma_{нч}^2 \sim \omega_0^2 \quad (3.2.7)$$

и, поэтому, восстановленный сигнал имеет такую же дисперсию $\sigma_{д}^2$, что и исходный

$$\sigma_{д}^2 = \sigma_{нч}^2. \quad (3.2.8)$$

При $T \rightarrow \infty$ $\epsilon(T) \rightarrow 0$, а это означает, что среднее значение случайного процесса в результате дискретизации не изменяется.

Дисперсия (3.2.5) является частью дисперсии σ_0^2 и определяется высокочастотными составляющими спектра с частотами $|\omega| > \omega_0/2$. Аналогично коэффициенту $T|s(cDg)$ для детерминированных сигналов (см. раздел 2.2), введем для случайных сигналов коэффициент $r|s(\omega_g)$, показывающий долю общей энергии случайного процесса, приходящуюся на полосу $[-\omega_g/2; \omega_g/2]$:

$$\eta_s(\omega_g) \quad (3.2.9)$$

Тогда

$$\sigma_{т4}^2 = [1 - r|s(\omega_g)] \sigma_0^2 \quad (3.2.10)$$

и выбором ω_g можно обеспечить допустимый уровень дисперсий $\sigma_{вч}^2$ и $\sigma_{нч}^2$ (в соответствии с (3.2.7)). Для ряда спектров в литературе (см., например, [26, 28]) приводятся выражения для коэффициента (3.2.9).

Погрешность с дисперсией (3.2.6) обусловлена "сворачиванием" части спектра $G(\omega)$ из полубесконечных интервалов $[-\infty; -\omega_g/2]$ и $[\omega_g/2; \infty]$ в интервал частот $[-(\omega_g/2; \omega_g/2]$. При этом многократное наложение отрезков двух компонент приводит к выравниванию спектральной плотности мощности на частотном интервале $[-\omega_g/2; (\omega_g/2]$. В первом приближении её можно считать равномерной и равной

$$\frac{2L(\tau_{нч})}{\omega_g} \frac{2\pi\sigma_0^2}{\omega_g} [1 - n_s(\langle \rangle g)] L \quad (3.2.11)$$

где использованы соотношения (3.2.7) и (3.2.10).

Корреляционную функцию погрешности со спектральной плотностью мощности (3.2.11) можно получить, подставив её в выражение (1.4.29). Тогда получим

$$\hat{\Gamma}_{нч}(\tau) \sim n_s \int_{-\omega_g/2}^{\omega_g/2} \text{sinc}(0,5a) g T \quad (3.2.12)$$

Интервал корреляции этого процесса $\tau_{нч}$ определяется функцией $\text{sinc}(\tau c f_g T)$ и его можно оценить величиной

$$\Gamma_{нч} \sim A_i \cdot$$

"Высокочастотную" погрешность с дисперсией (3.2.5) можно рассматривать как полосовой случайный сигнал. Для него можно определить среднюю (несущую) частоту $\omega_{оп}$ и эффективную полосу $A(\text{впЭФФ})$ (см. (1.4.10)). Корреляционную функцию такого сигнала можно представить в виде

$$R_{в4}(x) = A_0(\tau) \cos[\omega_{оп} T - \psi(\tau)], \quad (3.2.13)$$

где $A_0(\tau) = \int_{-\omega_g/2}^{\omega_g/2} fG(\omega_{оп} - \omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ — огибающая корреляционной функции,

$$\psi(\tau) = \arg \left[\frac{1}{\tau} \int_{-\omega_g/2}^{\omega_g/2} G(\omega_{оп} - \omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right] \quad \text{фазовый множитель.}$$

Из выражений (3.2.13) следует, что корреляционная функция $R_{B4}(T)$ будет иметь колебательный характер с периодом $T_{КОГ} = \frac{2\pi T}{\dots} < A_t$ (т.к. $\text{сооп} > \text{Р}_g/2$) и Интервалом корреляции (по огибающей) $T_{ОВч} \sim 2\pi/A_{\text{сопЭФФ}}$.

Рассмотрим величины возникающих искажений для конкретных типов случайных процессов.

Если корреляционная функция процесса имеет вид $R(x) = \sigma_0^2 \text{Iпс}(2\pi P_T T)$, то энергетический спектр $G(\omega) = \sigma_0^2 / 2F_m$ равномерен в полосе $[-2\pi P_T; 2\pi E_T]$ и равен нулю вне этой полосы частот. Дискретизация с интервалом $A_t < 1/2F_m$ и последующее восстановление идеальным ФНЧ не приводит к появлению ошибок, т.к. у этого сигнала $T|_s(\omega_g) = 1$.

Процесс, имеющий корреляционную функцию $R(T) = \sigma_0^2 \exp(-a|T|)$, не дифференцируем в точке $t=0$. Энергетический спектр такого процесса бесконечен:

$$\frac{2\sigma_0^2 a}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

Можно показать (см. раздел 2.2), что у этого спектра при $\omega_g = 2\pi a$ ($a > 1$ - относительная частота дискретизации)

$$r|_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2} \arctg \frac{\omega_0}{2\pi J} = \frac{1}{\pi} \arctg(\lambda a). \quad (3.2.14)$$

Тогда из (3.2.7) и (3.2.10) следует, что относительные величины дисперсий погрешностей (3.2.5) и (3.2.6) будут равны

$$\frac{\sigma_{\text{нч}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma_{\text{вч}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{2\pi J}{\omega_0} \quad (3.2.15)$$

У случайного процесса с корреляционной функцией $R(T) = \sigma_0^2 \exp(-T^2/2a^2)$ энергетический спектр имеет вид

$$G_T(\omega) = \pi/2 \sigma_0^2 a \exp(-0,5 \omega^2 a^2).$$

Он также бесконечен и коэффициент $r|_s(\omega_g)$ для него при $\omega_g = \lambda a$ будет равен

$$r]_s(\text{co}_g) = \mathbb{R}(\text{aco}_g/2\pi/2) = \phi(\text{ла}/2\pi/2),$$

где $\Phi(\diamond)$ - интеграл вероятности [121].

Относительные величины дисперсий погрешностей будут равны

$$U_02^{(a)} = [1 - \phi(\text{ла}/2\pi/2)] = 1 - \phi(\text{ла}/2\pi/2). \tag{3.2.16}$$

Если случайный процесс имеет корреляционную функцию

ограниченную во времени, то его энергетический спектр бесконечен

$$G_T(\text{co}) = \frac{T_0 \theta_{\text{днр}}^2 \ll \theta_g^* \gg}{2 \ll \theta_g \gg} \quad \left| a \right.$$

а коэффициент (3.2.9) при $\ll \theta_g \gg = 4\text{ла}/T_0$ равен

$$T_{UG}(\theta_g) = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\theta_g) + \frac{\cos(\theta_g)}{\theta_g} - \frac{1}{\theta_g} \right],$$

где $\text{Si}(\ast)$ - функция интегрального синуса [121], $\theta_g = \theta_g T_0/4 = \text{ла}$.

При такой корреляционной функции относительные дисперсии погрешностей будут равны

$$U_{03}^{(a)} = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\theta_g) + \frac{\cos(\theta_g)}{\theta_g} - \frac{1}{\theta_g} \right] = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\text{ла}) + \frac{\cos(\text{ла}) - 1}{\text{ла}} \right] \tag{3.2.17}$$

Графики зависимостей относительных дисперсий погрешностей

$$\hat{\sigma}_{\text{отн,дБ}} = 101 \text{г} \frac{2 \text{ Л}}{2 \frac{\text{аНЧ}}{\text{сО J}}} \quad \begin{matrix} 2 \text{ А} \\ \text{лВч} = 101 \text{г}[y_0(a)] \\ \text{ао,} \end{matrix}$$

от относительной частоты дискретизации для рассмотренных корреляционных функций приведены на рис. 3.2.1. Для дисперсий (3.2.15) и (3.2.17) графики практи-

чески совпали (расхождение < 1 дБ) и соответствуют кривой 1, а для дисперсии (3.2.16) - кривой 2.

Уровень погрешности (3.2.5) и (3.2.6) зависит от скорости убывания спектральных составляющих $G(\omega)$ с частотами $|\omega| > \omega_{\text{ап}}/2$. Во многих случаях энергетический спектр можно аппроксимировать степенной зависимостью

$$G_{\text{ап}}(\omega) = \begin{cases} N_{\text{ап}}, & |\omega| < \omega_{\text{ап}} \\ N_{\text{ап}} \left(\frac{\omega_{\text{ап}}}{\omega} \right)^{2n}, & |\omega| > \omega_{\text{ап}} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

где $N_{\text{ап}}$ - спектральная ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ, определяемая ИЗ условия $N_{\text{ап}} = G(\omega) |_{\omega \rightarrow 0}$;

n - показатель степени ($n > 1$), определяемый скоростью убывания спектра $G(\omega)$;

$\omega_{\text{ап}}$ - граничная частота аппроксимации, определяемая из равенства дисперсий сигналов с исходным и аппроксимирующим спектрами.

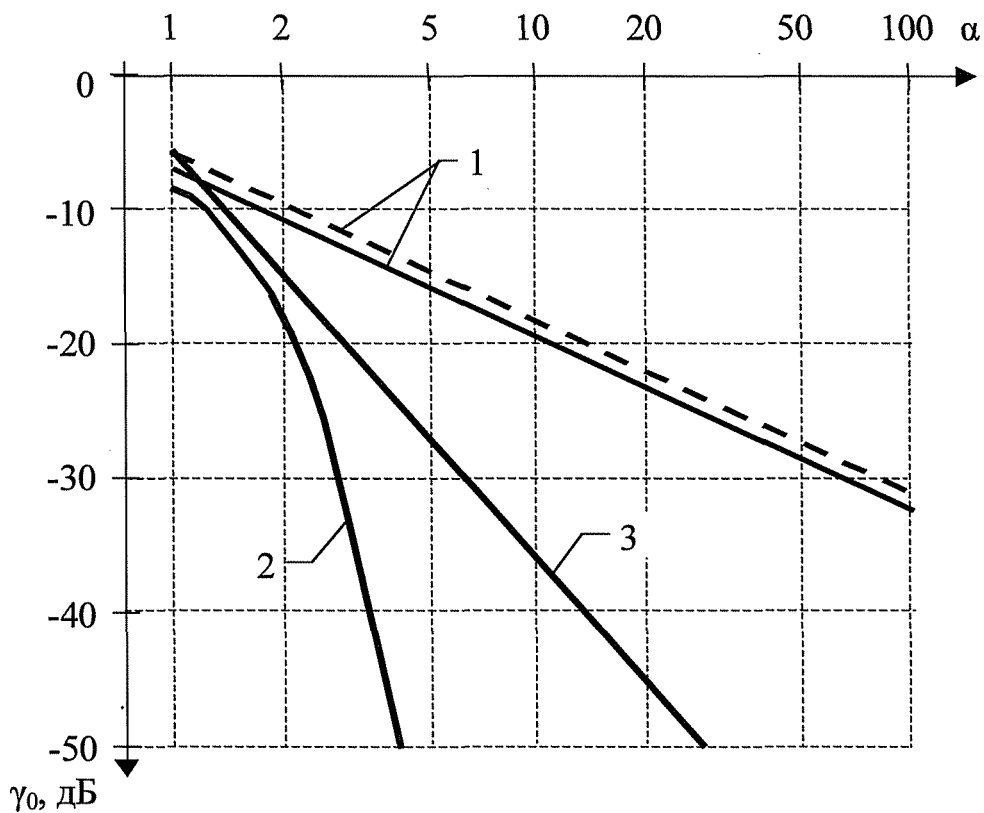


Рис. 3.2.1 Дисперсия погрешностей из-за наложения спектра

Дисперсия сигнала со спектром (3.2.18) равна

$$\sigma^2 = \frac{2\pi \Delta f G''}{\Gamma(2n-1)}$$

откуда

$$\sigma_{ап}^2 \sim \frac{itgg(2n-1)}{2^n N_{ан}}$$

Для обеспечения малого уровня помех необходимо выполнить условие $a > g > 2\sigma_{ап}$. Тогда дисперсия помехи, определяемая выражением (3.2.5), равна

$$\sigma_{ап}^2 = \frac{1}{2} \frac{J_{N_{ан}}}{(G) \sqrt{2}} \left| \frac{g_{ап}}{g} \right|^{2n} \approx \frac{Q^2 U - I_{ХТ} \Gamma(2n)}{2 N_{ад} \sigma_{о}} \frac{1}{\Gamma(2n-1) (2n-1)}$$

Используя значение $\sigma_{ап}$ можно получить относительную величину дисперсии помехи

$$\dot{Y}_{Оап} = \frac{\Gamma(2n)}{2\pi} \frac{1}{(gN_{ан})^n} \cdot \dots^{2n-1}$$

При медленном убывании спектральных составляющих ($n=1$) имеем

$$\dot{Y}_{Оап} = \frac{2}{2N_{ан}G} \frac{1 - \text{лст} \sigma}{g}$$

Для сигнала со спектром $G_T(\sigma) = \tau_0 \sigma^2 / 2$, ($\sigma_{ап} = \text{л} / \tau_0$ и при $a = 47ca / \tau_0$, имеем $\dot{Y}_{Оап}^{[1]} = 1/4a$. График этой зависимости на рис. 3.2.1 изображен пунктиром и практически совпадает с графиком 1 (расхождение составляет величину ~ 1 дБ).

При убывании спектральных составляющих с большей скоростью ($n=2$)

Если у такого сигнала выбрать σ_g так, чтобы $(37i\sigma_0^2) / (2N_{ан}cOg) = 1/a$, то тогда получим $\dot{Y}_{Оап}^{[2]} = 1/4a^3$. Эта зависимость приведена на рис. 3.2.1 (график 3).

Дискретизация нестационарного случайного процесса с бесконечным усредненным энергетическим спектром $F(\omega)$ (или ширина которого $\gg (\Omega g/2)$) также будет сопровождаться искажениями корреляционной функции. Используя понятие мгновенного энергетического спектра нестационарного случайного процесса [67]

$$\Phi(1, \omega) = \int_0^{\infty} R(t, t + T) \cos(\omega T) dt, \quad (3.2.18)$$

можно показать, что в результате дискретизации будет получен спектр

$$O_g(t, G) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(1, \omega + k\Omega_g). \quad (3.2.19)$$

Усреднением по времени спектра (3.2.19) можно получить

$$F_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega + k\Omega_g) dk. \quad (3.2.20)$$

Корреляционная функция нестационарного случайного процесса, полученная усреднением по времени,

$$R_{cp}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_{mi}^{(k)}(t) [W(t-T)] dt \quad (3.2.21)$$

связана преобразованием Фурье со спектром $F(\omega)$ [67].

При восстановлении непрерывного сигнала идеальным ФНЧ с частотой среза $(\Omega_{cp} = \Omega_g/2)$ будет получен сигнал с усредненной корреляционной функцией

$$R_{cp} W = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega + k\Omega_g) e^{j\omega T} d\omega. \quad (3.2.22)$$

Сопоставляя (3.2.19) и (3.2.3) можно прийти к выводу, что полученные для стационарных случайных процессов выражения (3.2.2)...(3.2.18) будут справедливы и для нестационарных процессов, если в них использовать усредненный спектр (3.2.20) и корреляционную функцию (3.2.22).

3.3. Дискретизация сигналов на фоне шума

Дискретизация информационных сигналов, представляющих собой случайные процессы, нередко осуществляется на фоне шума, также являющегося случайным процессом с иными параметрами и характеристиками.

В работе [91] рассмотрен случай дискретизации сигнала на фоне шума с ограниченной дисперсией. Качественно показано, что если спектр шума шире спектра сигнала, то после дискретизации уровень шума возрастает. Для снижения уровня шумов необходимо увеличивать частоту дискретизации, либо ставить до дискретизатора фильтр, ограничивающий спектр шума.

В работе [22] рассмотрена равномерная дискретизация с интервалом $A_t=1/f_g$ сигнала $s(t)=u(t)+n(t)$, представляющего собой сумму двух независимых стационарных нормальных случайных процессов с нулевым средним значением, где $u(t)$ - полезный сигнал со спектральной плотностью мощности $S_c(f)$ и $n(t)$ - шум (помеха) со спектральной плотностью мощности $S_n(f)$. По критерию максимума информации в $s(t)$ о сигнале $u(t)$, приходящейся на один отсчет, показано, что частота дискретизации f_g должна выбираться из условия

$$f_g = 2 \int_0^{\infty} \log \left[1 + \frac{S_c(f)}{S_n(f)} \right] df \Bigg/ \log \left[1 + \frac{\int_0^{\infty} S_c(f) df}{\int_0^{\infty} S_n(f) df} \right]$$

Пусть сигнал $u(t)$ соответствует требованиям теоремы Котельникова и его энергетический спектр не содержит составляющих с частотами выше F_c :

$$S_c(f) = \begin{cases} S(f), & |f| \leq F_c, \\ 0, & |f| > F_c. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Шум полагаем "белым" с равномерной спектральной плотностью мощности N_0 в полосе частот много больше F_c . В этом случае, во избежание резкого ухудшения отношения сигнал/шум после дискретизации, перед дискретизатором необходимо включить аналоговый фильтр. Частотная характеристика фильтра должна иметь минимальные отклонения в полосе $[-F_c; F_c]$, что обуславливает выбор частоты

среза $P_{\phi} > F_c$. В зависимости от типа фильтра и его сложности (порядка) скорость убывания спектральных составляющих на частотах $|f| > P_{\phi}$ будет различной.

Для получения оценок аппроксимируем частотную характеристику фильтра такой зависимостью, чтобы спектральная плотность мощности "белого" шума преобразовалась на его выходе в зависимость вида

$$\begin{aligned} |f| &\leq F_{\phi} \\ |f| &> F_{\phi} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где n - порядок фильтра, определяемый его сложностью.

Если обозначить $A_{\Gamma} = P_{\phi}/P_c$ и считать спектральную плотность мощности сигнала $u(t)$ в (3.3.2) $S(f) = P_0$, то из (3.3.1)..(3.3.3) можно получить

$$(3.3.4)$$

Величина $q_{\text{вх}} = P_0/N_0$ - входное отношение сигнал/шум. Если $q_{\text{вх}} \rightarrow \infty$, то отношение логарифмов в (3.3.4) стремится к единице и получаем $f_g = 2F_c$, что соответствует теореме Котельникова.

При конечном значении $q_{\text{вх}}$ получим

$$f \frac{2P_c \gamma^{1+2n}}{\log[1 + 2nq_{\text{вх}}/(2n-1)A_f]} \quad (3.3.5)$$

На рис. 3.3.1 приведены графики зависимости (3.3.5) от $q_{\text{вх}} = 10 \log(P_0/N_0)$ при $n=1$ и различных соотношениях частот A_f . При простейшем фильтре ($n=1$) частота f_g будет наибольшей, а при идеальном ФНЧ с полосой P_{ϕ} ($n \rightarrow \infty$) из (3.3.5) получим

$$f \frac{2F_c \log(1 + q_{\text{вх}})}{\gamma^{1+2n/A_f}} \quad (3.3.6)$$

что совпадает с результатами работы [22].

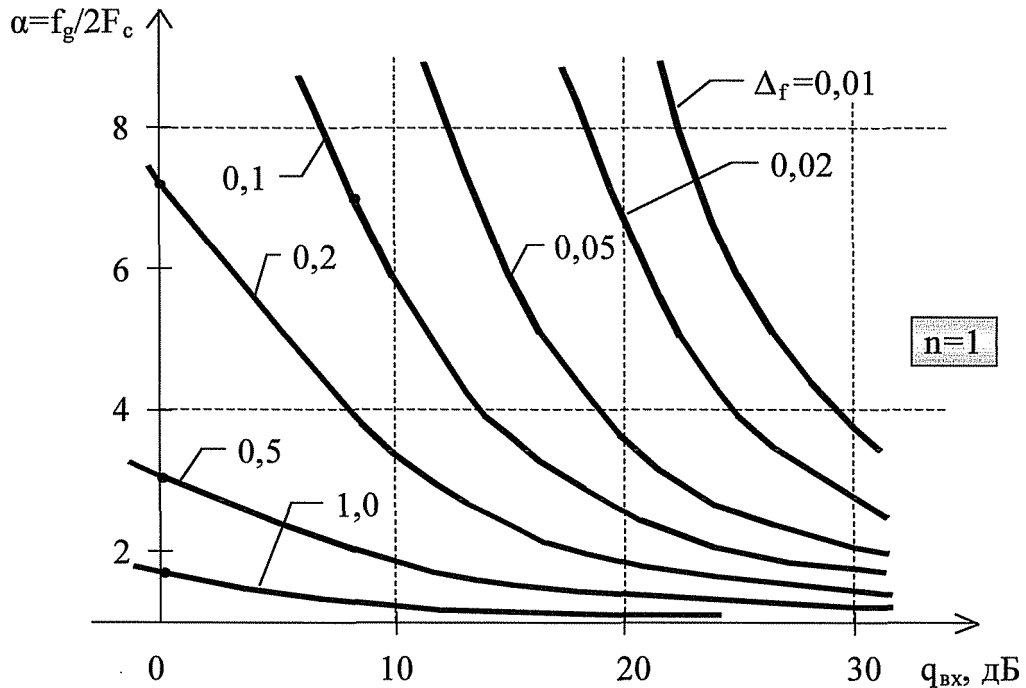


Рис. 3.3.1 Зависимость частоты дискретизации α при различных частотах среза A_f фильтра порядка $n=1$

На рис. 3.3.2 приведены графики зависимости (3.3.6), аналогичные предыдущим. Анализ зависимостей (3.3.5), (3.3.6) и их графиков позволяет сделать следующие выводы.

Жесткие требования по величине допустимых амплитудных и фазовых искажений сигнала могут повлечь необходимость увеличения частоты среза фильтра и уменьшения его затухания на частотах $f > P_\Phi$ (снижения показателя n), что, в свою очередь, потребует увеличения частоты дискретизации. При фиксированных значениях $q_{вх}$ и A_f усложнением фильтра (повышением n) можно добиться уменьшения f_g . На рис. 3.3.3 показаны зоны возможных значений частоты дискретизации и отношения частот A_f для значений $q_{вх} = 0; 10; 20$ dB при использовании фильтров от простейшего с $n=1$ (верхняя граница) до идеального ФНЧ (нижняя граница). Полученные графики позволяют производить предварительную оценку возможных значений параметров с последующим уточнением по выражению (3.3.5).

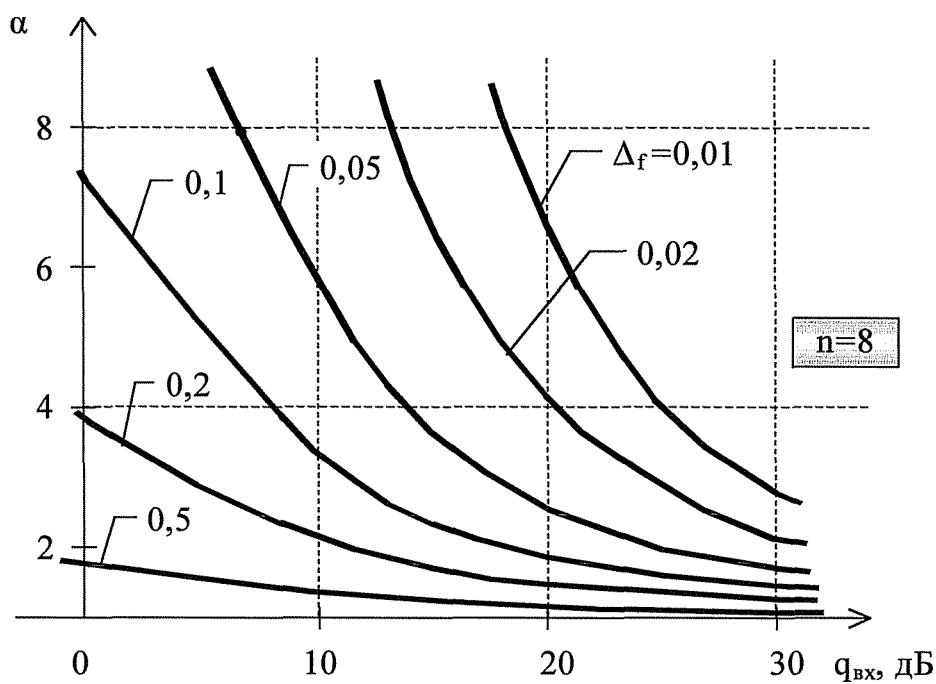


Рис. 3.3.2 Зависимость частоты дискретизации α при различных частотах среза Δ_f фильтра порядка $n=8$

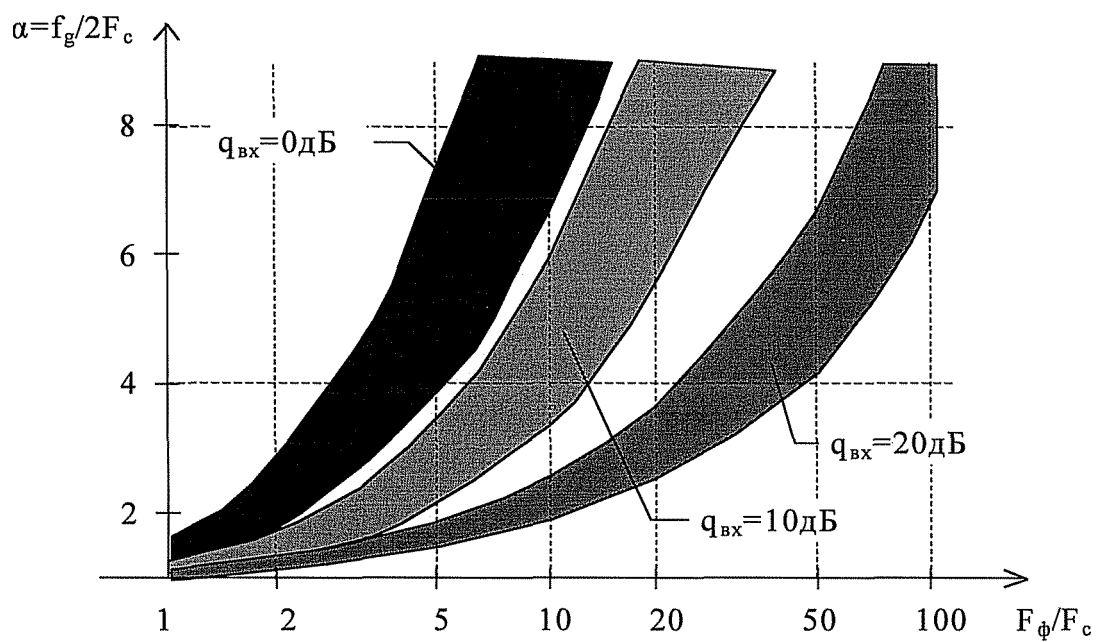


Рис. 3.3.3 Зоны возможных значений частоты дискретизации

3.4. Дискретизация импульсами конечной длительности

Дискретизация случайных сигналов в системах дискретной и цифровой обработки осуществляется импульсами конечной длительности t_g с периодом A_t . В этих системах скважность дискретизирующих импульсов $Q = t_g/A_t \gg 1$. В паузах между импульсами значение отсчета сохраняется в аналоговом запоминающем устройстве. Параметры устройства взятия и хранения отсчета рассмотрены в разделе 2.7. Для случайных сигналов используют такие же схемы выборки и хранения (СВХ) с постоянными времени зарядки $T_3=CR_i$ и разрядки $T_p=CR_{yT}$, где C - величина запоминающей ёмкости, R_i - внутреннее сопротивление источника сигнала и открытого ключа и R_{yT} - сопротивление утечки схемы считывания и закрытого ключа.

Конечные значения t_3 и t_p обуславливают (см. раздел 2.7) различия между отсчетным значением дискретизируемого сигнала $u(t)$ в момент kA_t - $u(kA_t)$ и напряжением на емкости $u_c(kA_t+\%)$, где $|\kappa| \in \{0,1, 2, \dots\}$ - время задержки момента считывания, $0 < \kappa < A_t - t_g$.

Ошибка k -го отсчета $s(kA_t) = u(kA_t) - u_c(kA_t+\%)$ максимальна при $\kappa = A_t - t_g$ и, как показано в разделе 2.7, она будет равна

$$s(kA_t) = u[(k-1)A_t]e^{-\kappa} P_7 + u(kA_t)[1 - P_Y(1 + e^{-\kappa})] + A_t u'(kA_t) P_Y P_p, \quad (3.4.1)$$

где $P_p = [\exp(-\kappa) - (1 - \exp(-\kappa))/\kappa] / Q$,

$$P_T = \exp(-\kappa / Q),$$

$\kappa = t_g/T_3$ и $Y = A_t/x_p$ - величины, определяемые параметрами СВХ;

$u'(kA_t)$ - значение производной сигнала $u(t)$ при $t = kA_t$.

Если дискретизации подвергается некоторый случайный процесс $\hat{u}(t)$, в общем случае нестационарный, с моментами $\{D\} = a_0(t)$; $M_2\{D\} = a_0^2(t)$, $M_2\{\hat{u}(t_1)\hat{u}(t_2)\} = B(t_1; t_2) = R(t_1; t_2) a_0(t_1) a_0(t_2)$ и $u(t)$ - одна из его реализаций, то ошибка $s(kA_t)$ будет случайной величиной.

Ошибку $s(kA_t)$ можно представить как сумму трех случайных слагаемых:

$$s(kA_t) = \tau |i| [(k-1)A_t] + q_2(kA_t) + T|_3(kA_t), \quad (3.4.2)$$

где $\tau |i| [(k-1)A_t]$ - значение реализации случайной величины $\exp(-\kappa) P_{DD}$ при $t = kA_t$;

$r|_2(kA_t)$ - величины $[1 - P_Y(1 + e^{-p})]^i(t)$ при $t = kA_t$;

$r|_3(kA_t)$ - величины $A_t P_Y P_g^i(t)$ при $t = kA_t$.

Усредняя (3.4.2) или квадрат этой величины по ансамблю реализаций можно получить среднюю величину ошибки $s(kA_t)$ или её дисперсию.

Определим среднее значение ошибки. Для этого воспользуемся определением среднего значения суммы случайных величин [67] и учитывая, что средние значения величин $r|_1(t)$, $r|_2(t)$ и ЦЗСО соответственно равны: $a_1(t) = \exp(-[i]P_Y a_0(t))$, $a_2(t) = [1 - P_Y(1 + e^{-p})] a_0(t)$ и $a_3(t) = A_t P_Y P_g a_0'(t)$, где $a_0'(t)$ - производная от среднего значения $a_0(t)$, получим

$$\begin{aligned} a_e(kA_t) &= m_1\{e(kA_t)\} = a^{k-1} A_t + a_2(kA_t) + a_3(kA_t) = \\ &= a_0[(k-1)A_t] \exp(-p) P_Y + a_0(kA_t) [1 - P_Y(1 + e^{-p})] + a_0'(kA_t) A_t P_Y P_g. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Изменения $a_0(t)$ на интервале A_t незначительны, поэтому $|a_0'(t)|$ не может иметь больших значений и можно воспользоваться приближенным соотношением $a_0[(k-1)A_t] = a_0(kA_t) - a_0'(kA_t) A_t$. Тогда выражение (3.4.3) преобразуется к виду

$$a_E(kA_t) = a_0(kA_t) (1 - P_Y) + a_0'(kA_t) A_t P_Y [P_g - \exp(-p)]. \quad (3.4.4)$$

В реальных системах $y \ll 1$, $\mu \gg 1$, $Q \gg 1$ и можно принять равными $P_Y = 1 - y(1 - 1/Q)$; $1 - P_Y = y(1 - 1/Q)$; $P_Y = -1/p \cdot Q$. В связи с малостью $|a_0'(t)|$ вторым слагаемым в (3.4.4) в первом приближении можно пренебречь. Тогда среднюю величину ошибки можно считать равной

$$a_e(kA_t) = a_0(kA_t) y (1 - 1/Q). \quad (3.4.5)$$

При скважности $Q > 10$ её влиянием на ошибку также можно пренебречь и в этом случае

$$a_e(kA_t) = a_0(kA_t) y. \quad (3.4.6)$$

У стационарного случайного процесса $a_0(t) = a_0$, $a_0'(t) = 0$ и для него имеем

$$a_e(kA_t) = a_0(1 - P_Y) = a_0 y (1 - 1/Q) = a_0 y. \quad (3.4.7)$$

Если случайный процесс центрирован ($a_0 = 0$), то и у ошибки среднее значение равно нулю ($a_E = 0$).

Как показывают выражения (3.4.3)...(3.4.7) наличие постоянной составляющей у дискретизируемого сигнала приводит к появлению систематической составляющей в ошибке $s(t)$, величина которой зависит от параметров СВХ. Для стационарного процесса на рис. 3.4.1, график 1, показана зависимость относительного значения систематической ошибки $20\lg[a_E(kAt)/a_0]$ от относительной постоянной времени разрядки γ при $Q=10$ - сплошная линия и $Q^{-\infty}$ - пунктирная линия.

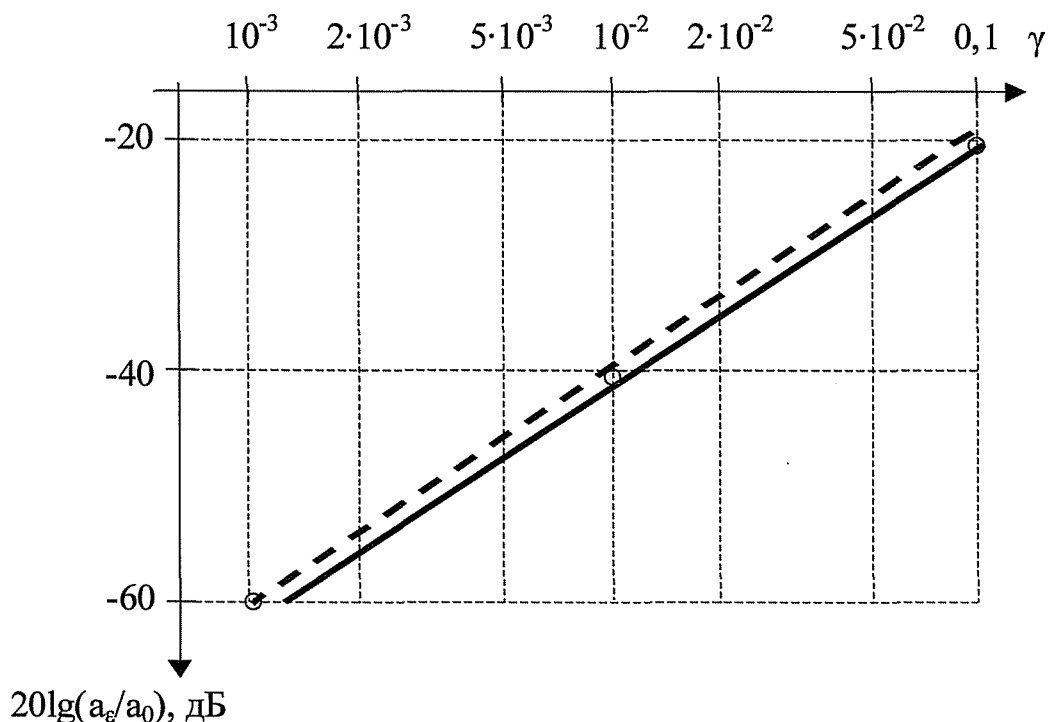


Рис. 3.4.1 Среднее значение ошибки СВХ

Из графиков и выражений (3.4.6) и (3.4.7) следует, что малые значения ошибки a_E/a_0 возможны при больших постоянных времени разрядки СВХ ($\gamma < 0,01$).

Для определения дисперсии ошибки (3.4.2) воспользуемся [67] выражением для дисперсии суммы случайных величин. При этом учтем, что дисперсии случайных величин $T[i](t)$, $PzCO$ и $t]z(O$ соответственно равны:

$$\sigma_f^2 = \exp(-2|i|)P^2 G_Q(t), \quad \sigma_2^2(t) = [1 - P_y(1 + \exp(-\psi))]^2 \rho(t) >$$

$$\sigma_3(t) = L^2 P^2 P^2 < RИ(t, t) \sigma^2(t) + R(t, t) [\sigma_0(t)^2],$$

ГДЕ $RМ(t,t)=d!g212)$

$O_0'(t)$ - производная функции $o_0(t)$.

Тогда дисперсия ошибки (3.4.2) будет равна

$$M_2 \{s(kA_t)\} = \sigma^2(kA_t) = \sigma^2[(k-1)A_t] + \sigma^2(kA_t) + \sigma^2(kA_t) + \\ + 2B_{12}[(k-1)A_t, kA_t] + 2B_{23}(kA_t, kA_t) + 2B_{13}[(k-1)A_t, kA_t],$$

где $B_{12}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) \text{CTo}(t_1) \text{ao}(t_2) \exp(-p) P_Y [1 - P_Y (1 + \exp(-p))]; R^{[1]}(t_1, t_2) = dR(t_1, t_2)/dt_2;$

$$B_{23}(t_1, t_2) = [R^{[1]}(t_1, t_2) c_7 o(t_1) \text{CTo}(t_2) + R(t_1, t_2) c_8 o'(t_1, t_2)] [1 - P_Y (1 + \exp(-p))];$$

$$B_{13}(t_1, t_2) = [R^{[1]}(t_1, t_2) o_0(t_1) o_0(t_2) + R(t_1, t_2) o_0(t_1) o_0'(t_1, t_2)] A_t P_Y^2 P_g \exp(-p) - \text{взаимно-}$$

ковариационные функции случайных величин $T_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Подставляя в (3.4.8) выражения для дисперсий σ^2 , $i \in \{1, 2, 3\}$, получим

$$a_{ДкА.} = P^2 \exp(-2p) a_{Д(к-1)Л, 1 + [1 - P/1 + \exp(-p)]^2 a_0^2(кЛ01 \\ + |T^{[2]}(кД_1, кЛ_1) a_0^2(кЛ_1) + 1 <(кА_1, кД_1) (-a_0'(кЛ1))>^2] (Д_1 P, P_1)^2 \text{н-} \\ + 2R[(k-1)A_t, kA_t] a_0 [(k-1)A_j G_0(kA_t) \exp(-p) P_Y [1 + \exp(-p)] + \\ + 2B_{23}(кД_1, кД_1) + 2B_{13}[(к-1)Д_1, кД_1] - \tag{3.4.9}$$

Выражение (3.4.9) можно упростить, если учесть, что на интервале A_t функция $o_0(t)$ изменяется медленно. Тогда, $\epsilon \gg \sigma^2[(k-1)A_t] = o_0^2(kA_t) - A_t O_0(kA_t) a_0 X k A_t$ и $[o_0'(kA_t) A_t]^2 = 0$ и, в результате, имеем

$$o_s^2(kA_t) = o_0^2(kA_t) \{ P_Y^2 \exp(-2p) [1 - O_0'(kA_t)/o_0(kA_t)] + \\ + [1 - P_Y (1 + \exp(-p))]^2 + R^{[2]}(kA_t, kA_t) (A_t P_Y P^2)^2 + \\ + R[(k-1)A_t, kA_t] [1 - \\ + 2[R^{[1]}(kA_t, kA_t) + R(kA_t, kA_t) o_0'(kA_t)/o_0(kA_t)] A_t P_Y P [1 - P_Y (1 + \exp(-p))] + \\ + 2[R^{[1]}[(k-1)A_t, kA_t] [1 - o_0'(kA_t)/o_0(kA_t)] + \\ + R[(k-1)A_t, kA_t] o_0'(kA_t)/o_0(kA_t)] A_t P_Y P_g^2 \exp(-p) \}. \tag{3.4.10}$$

Для стационарного процесса справедливы соотношения $o_0(t) = O_0$, $O_0'(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = R(r)$, $R^{[1]}(t_1, t_2) = R'(T)$, $R'(0) = 0$ и $R^{P1}(t_1, t_2) = -R''(T)$, где $T = t_2 - t_1$. Тогда из выражения (3.4.10) получим

$$a_s^2(кД_1) = a_s^2 = G_s^2 \{ P^2 \exp(2p) + [1 - P/1 + \exp(-p)]^2 - R''(0) (AW^2 + \\ + 2R(A_t) \exp(-p) P_Y [1 - P/1 + \exp(-p))] + 2R'(A_t) A_t P_Y P_g^2 \exp(-p) \}. \tag{3.4.11}$$

Если выборки случайного процесса некоррелированные, то $R(t_1, t_2) = R^{[1]}(t_1, t_2) = R^{[2]}(t_1, t_2) = 0$, при $t_1 \neq t_2$. В этом случае дисперсия ошибки дискретизации будет равна: для нестационарного процесса

$$\sigma_E^2(kA_t) = \sigma_0^2(kA_t) \{ P_Y^2 \exp(-2j) [I^{\wedge} \sigma'(kA_t) / \sigma_0(kA_t)] + [1 - P_Y(1 + \exp(-p))]^2 \}, \quad (3.4.12)$$

и для стационарного процесса

$$\sigma_E^2(kA_t) = \sigma_0^2(kA_t) \{ P_T^2 \exp(-2\alpha) + [1 - P_T(1 + \exp(-\alpha))]^2 \}. \quad (3.4.13)$$

В качестве примера рассмотрим дискретизацию стационарного процесса с равномерным энергетическим спектром, ограниченным частотой F_m , и автокорреляционной функцией вида $R(T) = \text{sinc}(2\pi F_m T)$. У этого сигнала $R'(T) = \text{sinc}(2\pi F_m T) - \text{sinc}(27\pi F_m T)$ и $R''(T) = (27\pi F_m)^2 [3\text{sinc}(27\pi F_m T) - 2\text{cosec}(27\pi F_m T)]$, где $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ и $\text{cosec}(x) = \cos(x)/x$. Интервал дискретизации A_t выбирается равным $A_t = 1/2aF_m$, где $a > 1$ - постоянный множитель. Тогда $R(A_t) = \text{sinc}(7\pi/a)$, $R'(A_t) = \text{cosec}(7\pi/a)/A_t - \text{sinc}(7\pi/a)/A_t$, $R''(A_t) = [3\text{sinc}(7\pi/a) - 2\text{cosec}(7\pi/a)]/A_t^2$, $R''(0) = -(u/aA_t)^2$.

Дисперсия ошибки этого сигнала, полученная из выражения (3.4.11), будет равна

$$\sigma_E^2 = \sigma_0^2 \{ P_Y^2 \exp(-2\alpha) + [1 - P_T(1 + \exp(-\alpha))]^2 + (P_Y P_T T / a)^2 + 2\text{sinc}(7\pi/a) \exp(-p) P_Y [1 - P_Y(1 + \exp(-p))] + 2[\text{cosec}(7\pi/a) - \text{sinc}(7\pi/a)] P_Y^2 P_T \exp(-p) \}. \quad (3.4.14)$$

На рис. 3.4.2.. 3.4.4 приведены зависимости относительной дисперсии ошибки $10 \lg(\sigma_E^2 / \sigma_0^2)$ от относительных постоянных времени разрядки u , зарядки α и скважности Q при $a=1$. На рис. 3.4.2 графики 1 соответствуют $\alpha=5$ и графики 2 - $\alpha=50$, причем сплошные линии соответствуют $Q=10$, а пунктирные - $Q=50$. На этом же рисунке (график 3) приведена дисперсия ошибки для некоррелированного сигнала при $\alpha=5$ и $Q=10$. На рис. 3.4.3 графики 1 соответствуют $u=0,1$; графики 2 - $u=0,01$; графики 3 - $u=0,001$; причем сплошные линии соответствуют $Q=10$ и пунктирные - $Q=50$. График 4 соответствует некоррелированному сигналу при $u=0,001$ и $Q=10$.

На рис. 3.4.4 графики 1 также соответствуют $\gamma=0,1$; графики 2 - $\gamma=0,01$; графики 3 - $\gamma=0,001$. Сплошные линии соответствуют $\sigma=5$, а пунктирные - $\sigma=50$.

Из графиков наглядно видно, что у параметров σ , γ и Q существуют предельные значения. Для систем с невысокой точностью необходимо обеспечить $\sigma > 5...6$, $\gamma < 0,05...0,01$ и $Q > 10...20$. В прецизионных системах требования к параметрам СВХ более высокие: $\sigma > 50$, $\gamma < 0,01$ и $Q > 50$. Невыполнение этих условий приводит к резкому росту погрешности.

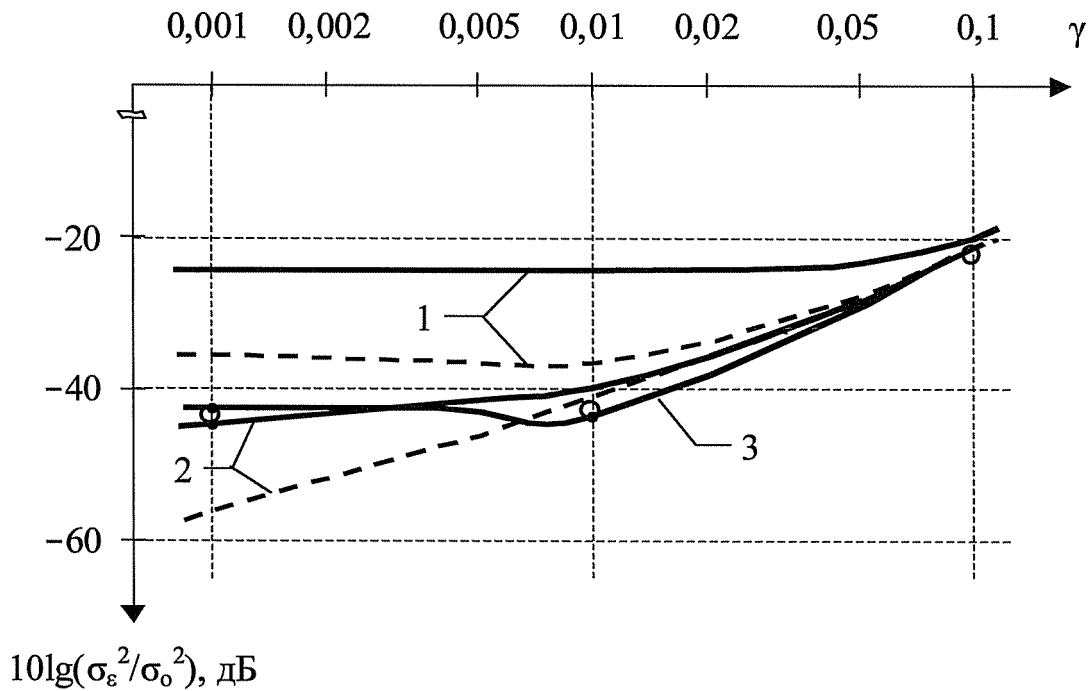


Рис. 3.4.2 Дисперсия ошибки СВХ

Для оценки степени влияния частоты дискретизации ($2aF_m$) на дисперсию ошибки на рис. 3.4.5 приведены соответствующие зависимости при $\sigma=5$, $Q=10$ и $\gamma=0,1$ - график 1, $\sigma=10$ и $\gamma=0,01$ - график 2, $\sigma=10$, $Q=50$ и $\gamma=0,001$ - график 3. Как и следовало ожидать, увеличение частоты дискретизации при сохранении значений σ , γ и Q уменьшают дисперсию ошибки.

Для проверки полученных соотношений было осуществлено моделирование процесса дискретизации некоррелированного случайного сигнала с равномерной плотностью вероятности. На рис. 3.4.1...3.4.3 кружками отмечены результаты моделирования, отличающиеся от теоретических менее чем на 1дБ.

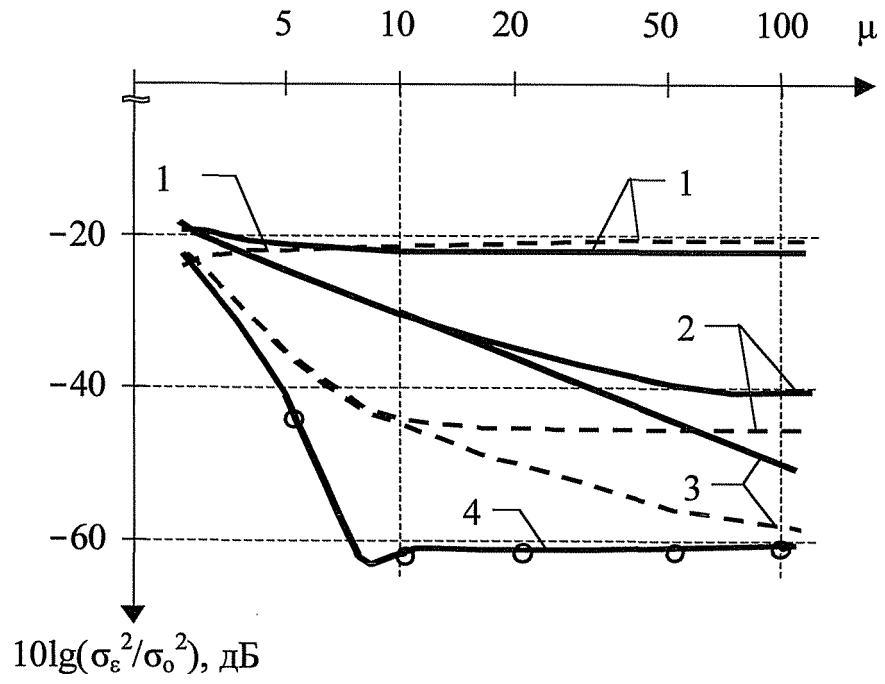


Рис. 3.4.3 Дисперсия ошибки СВХ

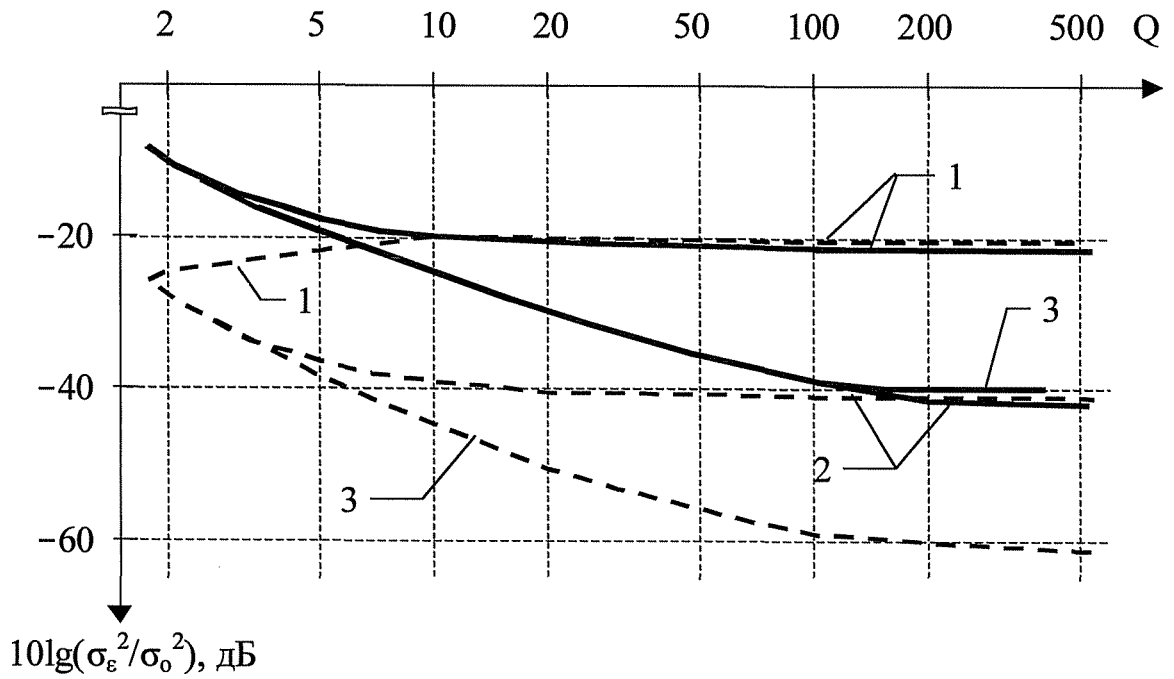


Рис. 3.4.4 Дисперсия ошибки СВХ

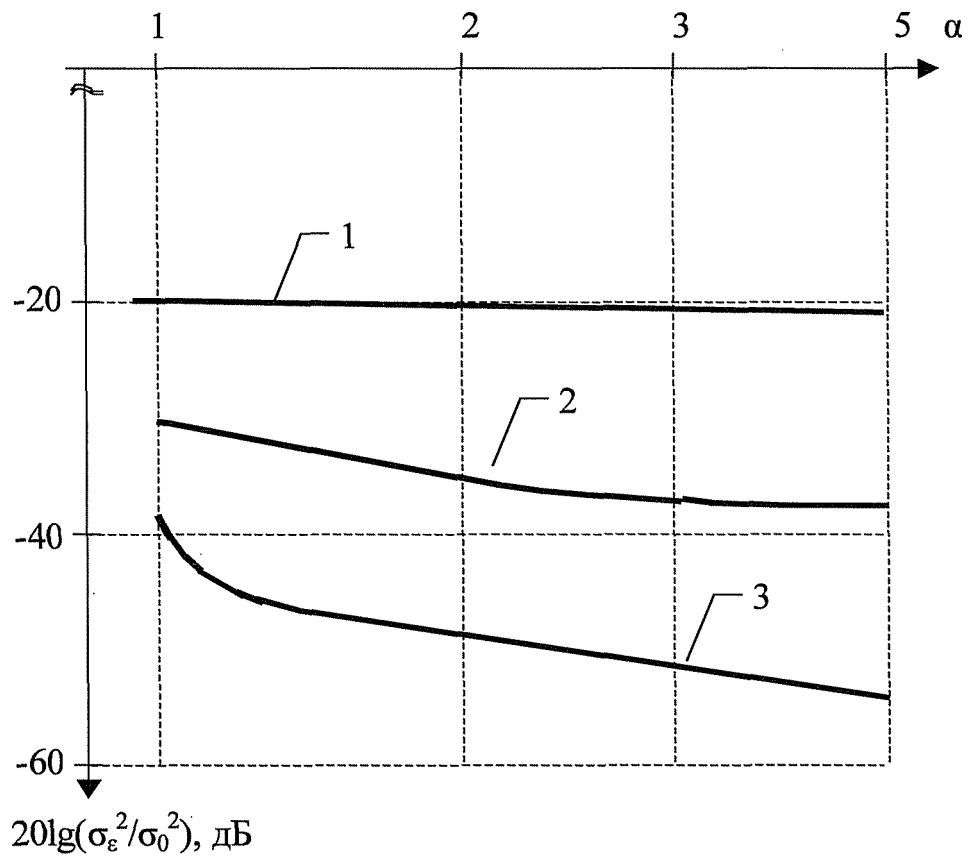


Рис. 3.4.5 Зависимость погрешности СВХ от частоты дискретизации

Выводы к разделу 3

Общие вопросы применимости теоремы Котельникова к случайным сигналам (процессам) и возникающие погрешности рассматривались многими авторами [7, 30, 78, 82, 88, 117, 125]. При этом доказывалась справедливость представления рядом (3.1.4) как отдельных реализаций случайного процесса, так и его корреляционной функции.

В диссертационной работе показано, что разложение в ряд Котельникова справедливо также для двумерной и условной функций распределения случайного процесса, имеющего ограниченный энергетический спектр.

Дискретизация случайного процесса с неограниченным спектром приводит к появлению погрешности. В работе [30] получены выражения, связывающие величину погрешности с корреляционной функцией и шагом дискретизации. Однако в ней нет вероятностных характеристик погрешности, что затрудняет анализ системы.

Проведенный анализ показал, что погрешность имеет две составляющие: «низкочастотную» и «высокочастотную». Получены корреляционные функции этих составляющих, величины дисперсии и интервалы корреляции. Для ряда случайных процессов с характерными корреляционными функциями получены значения дисперсии погрешности, а также предложена оценка погрешности на основе степенной аппроксимации энергетического спектра. У рассмотренных процессов расхождение погрешностей и оценок не превышает 1дБ. Результаты проведенного анализа опубликованы в работе автора [42].

Достаточно типичной является дискретизация информационного случайного процесса на фоне широкополосного шума. Эта проблема рассматривалась рядом авторов [22, 91] и показано, что частоту дискретизации необходимо выбирать с учетом характеристик шума (его энергетического спектра), а на входе целесообразно включать аналоговый фильтр, уменьшающий ширину спектра шума. Однако в работах не оценено влияние характеристик фильтра на выбор частоты дискретизации.

В данной работе, используя степенную аппроксимацию характеристик затухания аналогового фильтра, получена зависимость частоты дискретизации от отношения сигнал/шум, порядка (сложности) фильтра и соотношения полосы пропускания фильтра и ширины спектра сигнала. Это позволяет осуществлять предварительный выбор параметров фильтра с последующим уточнением частоты дискретизации. Результаты исследований опубликованы в работе автора [41].

В работе [79] получены выражения динамических ошибок АЦП, связанных с процессами зарядки-разрядки СВХ. При этом ограничивались только эргодическими случайными процессами с нулевым средним значением.

Анализ влияния конечной длительности импульсов дискретизации и параметров СВХ при дискретизации нестационарных случайных процессов позволил получить вероятностные характеристики (среднее значение и дисперсию) ошибок, возникающих при зарядке и разрядке запоминающей емкости. Показано, что у центрированного случайного процесса ошибка несмещенная. Дисперсия суммарной ошибки дискретизации носит характер близкий к пороговому (аналогично детерминированным сигналам). Это требует тщательного анализа при выборе параметров СВХ для конкретных сигналов. Результаты данных исследований опубликованы в работе автора [51].

РАЗДЕЛ 4

ТЕОРИЯ КВАНТОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

4.1. Идеализированное квантование

Амплитудное квантование осуществляется, как правило, после временной дискретизации исходного непрерывного сигнала $u(t)$. Процедуре квантования подвергаются отсчеты $u(t_k)$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, по значению которых и в соответствии с амплитудной характеристикой АЦП (см. раздел 1.3) формируются v -разрядные кодовые комбинации $a_v(k)$.

Это преобразование относится к типу "много в одно" [112] и является необратимым, т.е. абсолютно точное восстановление детерминированного сигнала по отсчетам невозможно [26, 87, 114 и др.]. Рассмотренное в разд.5.1 приложение теоремы Котельникова к амплитудному квантованию случайных сигналов, определяющее условия идеального амплитудного квантования и восстановления случайного процесса по квантованным отсчетам, не применимо к детерминированным сигналам. Это связано с тем, что функции распределения (1.4.7) не зависят от фазового сдвига сигнала и точное восстановление этой функции не означает восстановление сигнала.

Однако на практике широкое распространение получил подход к системе АЦП-ЦАП как к линейному устройству, вносящему дополнительный шум квантования

$$e_a(t_k) = u(t_k) - \text{ПквСЦ}. \quad (4.1.1)$$

Если сделать допущение о том, что АЦП имеет бесконечную симметричную амплитудную характеристику (см. рис. 1.3.1) с постоянным шагом A_n по входной и выходной величинам, то значения ошибки (4.1.1) лежат в пределах

$$A_n/2 \leq e_a(t_k) \leq A_n/2.$$

Второе идеализирующее допущение состоит в том, что совокупность значений $s_a(t_k)$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$, рассматривается как некоторая реализация некоррели-

рованного случайного процесса с равномерной плотностью вероятности на интервале $[-A_u/2; A_u/2]$

$$W_E(x) = \begin{cases} f/A_u, & |x| < A_u/2, \\ 0, & |x| > A_u/2. \end{cases} \quad (4-1.2)$$

Допущение о некоррелированности ошибки будет справедливо, если разность $|u(t_{k+1}) - u(t_k)| > A_u$ при любом k . Мерой взаимосвязи значений сигнала, разделенных интервалом $\tau = t_{k+1} - t_k$, является нормированная автокорреляционная функция $\gamma(\tau) = K(\tau)/\Delta_c$ (см. (1.4.1) и (1.4.12)). При известных значениях средней мощности P_{cp}

сигнала на анализируемом интервале $[-T/2; T/2]$ $P_{cp} = \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt$ и функции $\gamma(\tau)$ можно определить среднее изменение сигнала δ_u за интервал τ :

$$\delta_u = \sqrt{P_{cp} [1 - \gamma^2(\tau)]}$$

При равномерной временной дискретизации с шагом A_t имеем $t_k = kA_t$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$. Тогда условие некоррелированности отсчетов $s_a(t_k)$ примет вид

$$A_u < \sqrt{P_{cp} [1 - \gamma^2(A_t)]} \quad (4.1.3)$$

Учитывая, что интервал A_t определяется шириной спектра сигнала и допустимыми погрешностями временной дискретизации (см. раздел 2), можно считать, что выражение (4.1.3) определяет верхнюю границу интервала амплитудного квантования. Из него также следует взаимосвязь интервалов временного и амплитудного квантования.

Корреляционная функция зависит от энергетического спектра сигнала (см. (1.4.22)) и имеет интервал корреляции, который может быть определен как эффективная длительность (1.4.3) функции $\gamma(\tau)$ или как

$$\tau_{кор} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(\tau) d\tau \quad (4.1.4)$$

Для энергетического спектра $G(\omega) = |U(j\omega)|^2$ можно также определить по (1.4.18) эффективную ширину $A_{\text{эф}}$, которая будет связана с эффективной шириной спектра $U(j\omega)$ - $A_{\text{эф}}$. У сигналов с финитным спектром (1.4.19) энергетический спектр также будет ограничен максимальной частотной составляющей $2\pi F_m$. Тогда интервал корреляции такого сигнала будет пропорционален $T_{\text{кор}} = 1/A_{\text{эф}}$, причем величина A не может быть значительно больше единицы в силу справедливости принципа неопределенности [13, 26, 65, 92].

Это означает, что при высоких требованиях к погрешности дискретизации будет справедливо соотношение

$$T_{\text{кор}} \geq \frac{1}{2A_{\text{эф}}} \quad (4.1.5)$$

Это соотношение будет справедливо и для сигналов, рассмотренных в разделе 2.2.

Чем сильнее выполняется неравенство (4.1.5), тем меньше $r(A_{\text{эф}})$ отличается от единицы и тем меньше требуемый шаг амплитудного квантования $A_{\text{к}}$. Из соотношения (4.1.3) также следует, что большую величину $A_{\text{к}}$ можно допустить у сигналов с быстро убывающими корреляционными функциями (например, экспоненциального типа $r(\tau) = \exp(-|\tau|/a)$).

В качестве примера рассмотрим корреляционные функции, интервалы корреляции и условие (4.1.3) для некоторых сигналов.

Сигнал вида $u_3(t) = U_0 \text{sinc}(2\pi F_m t)$. Его спектр $U(j\omega)$ и энергетический спектр $G(\omega)$ равномерны и ограничены частотой F_m . Корреляционная функция этого сигнала имеет вид:

$$r_3(\tau) = \frac{\text{sinc}^2(\pi F_m \tau)}{2\pi F_m \tau}$$

При дискретизации сигнала $u_3(t)$ с шагом $A_{\text{к}} = 1/2\pi F_m$ из (4.1.3) получим

$$\leq \sqrt{P_{\text{ср}} \left[1 - \frac{\text{sin}^2(\pi/\alpha)}{(\pi/\alpha)^2} \right]}$$

Интервал корреляции, определяемый выражением (4.1.4), будет равен $T_{кор} = 1/2F_m$. При $a=1$ (некоррелированные отсчеты) интервал L_n определяется только требуемой точностью амплитудного квантования, зависящей от средней мощности сигнала P_{cp} . Если задана допустимая мощность шума квантования σ^2 или выходное отношение сигнал/шум $q_{вых} = P_{cp}/\sigma^2$, то интервал квантования необходимо выбирать из условия $A_n < \sigma^2 / 12q_{вых}$.

Результаты аналогичных преобразований для экспоненциального, прямоугольного и гауссова сигнала приведены в табл. 4.1.1.

Из таблицы следует, что для детерминированных сигналов усреднено интервалы D_n и A_t связаны соотношением $1/a$ или $71/a$ в зависимости от характера убывания автокорреляционной функции.

Корреляционные параметры и характеристики сигналов

Таблица 4.1.1

Сигнал $u(t)$	$\sin(2\pi F_m t)$	$U_0 \exp\left\{ \frac{f-A}{T} \right\}$	$[U_0, t < t_0/2, 0, t > t_0/2]$	$U_0 e^{-a t }, t > 0, 0, t < 0$
Энергетический спектр	$\frac{U_p}{4F^2}$	$2la^2 \exp(-a^2 t^2)$	$\frac{U_p}{a + c_0}$	$\frac{U_p}{2}$
$\gamma(t)$	$\frac{\sin(2\pi F_m T)}{2\pi F_m T}$	$\exp\left\{ -\frac{T}{4a^2} \right\}$	$ T , \dots$	$\exp(-a T)$
$T_{кор}$	$\frac{1}{2F}$	$77a$	$\frac{tp}{2}$	a
A_t	$\frac{1}{2\pi c F_m}$	a	$\frac{tp}{4a}$	$\frac{1}{2aa}$
$P_V(t)$	$\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$	$\exp\left\{ -\frac{T}{16a} \right\}$	$\frac{1}{16a^2}$	$\exp\left\{ -\frac{T}{4a} \right\}$
Аппроксимация при $\epsilon X \gg 1$	$\frac{7\Gamma}{5a^2}$	$\frac{LLL}{7Sa \sqrt{16a^2}}$	—	$\frac{J_1}{V^a 2a^2}$

Физически реализуемые сигналы являются достаточно плавными функциями, поэтому в окрестностях точек kA_t их можно разложить в ряд Тейлора с удержанием трех членов. Тогда приращение функции на интервале A_t можно оценить величиной $\delta_{иср} = u^{[1]}(kA_t)A_t + u^{[2]}(kA_t)(A_t)^2/2$. Наименьшие значения приращения характерны для точек экстремумов, в которых значение первой производной $u^{[1]}(kA_t)$ равно нулю. Тогда минимальное приращение функции за время A_t будет равно $\delta_{мин} = u^{[2]}(kA_t)(A_t)^2/2$. В этих точках у рассматриваемых функций вторая производная близка к максимальному значению. Воспользовавшись оценкой максимального значения второй производной (1.4.23) (см. раздел 1.4), можно получить оценку приращения в виде

$$\delta_{мин} \approx \frac{M_{\max}^{(2)} - M_{\min}^{(2)}}{2a^2}$$

Если сигнал имеет конечный динамический диапазон

$$D_c = M_{\max}^{(0)} - M_{\min}^{(0)} < 2M_{\max}^{(0)}$$

где $M_{\max}^{(0)}$ и $M_{\min}^{(0)}$ - соответственно наибольшее и наименьшее значения сигнала,

$M_{\max}^{(0)} \sim \max \{ M_{\max}^{(0)}, M_{\min}^{(0)} \}$, а АЦП имеет конечное число уровней N_v (см. раздел

1.3), то интервал амплитудного квантования будет равен

$$\Delta U = \frac{M_{\max}^{(0)} - M_{\min}^{(0)}}{N_v} \approx \frac{2M_{\max}^{(0)}}{N_v} \quad (4.1.6)$$

Тогда, условие некоррелированности шумов квантования принимает вид:

$$\frac{M_{\max}^{(0)} - M_{\min}^{(0)}}{4a^2 N_v} > 1 \quad (4-1.7)$$

Полученная зависимость числа уровней квантования N_v и относительной частоты дискретизации a носит квадратичный характер, что существенно отличает её от усредненной оценки (4.1.3).

Характеристики шума квантования (4.1.1) можно найти [26, 67] из функции плотности вероятности $W_{\varepsilon}(x)$ (4.1.2). Среднее значение и дисперсия шума квантования будут соответственно равны

$$m_1\{\varepsilon_a\} = 0; m_2\{\varepsilon_a\} = m_1\{s_a^2\} = \sigma_g^2 = D_n^2/12. \quad (4.1.8,а)$$

В АЦП возможно несимметричное расположение входных ψ и выходных ν , уровней [71, 87], при котором $\psi = V_{j+i}$. Тогда случайная величина принимает значения на интервале $[0; L_n]$, сохраняя равномерную функцию $W_{\varepsilon}(x)$ на этом интервале. Среднее значение, второй начальный момент и дисперсия случайного процесса $a_a(t_k)$ в этом случае будут равны

$$\begin{aligned} m_1\{b_a\} &= A_u/2; m_2\{s_a\} = A_u^2/3; \\ \sigma_{\varepsilon}^2 &= m_2\{s_a\} - m_1^2\{E_1\} = D_{,,}^2/12. \end{aligned} \quad (4.1.8,б)$$

Идеализированный АЦП может иметь конечное число уровней сравнения и разрядность, если квантуемые сигналы имеют ограниченное максимальное значение $|u(t)| < M^{(0)}_{\text{макс}}, |t| < \infty$. В этом случае разрядность АЦП будет равна

$$N_{\text{ид}} = \text{ext}[\log_p \quad / A_{\text{и}})], \quad (4.1.9)$$

где p - основание кода (обычно $p=2$).

На практике, в некритичных ситуациях, стремятся свести АЦП к идеализированной линейной модели выбором параметров в соответствии с (4.1.3) и (4.1.9), а также по допустимому значению σ_{ε}^2 в (4.1.8).

При квантовании сигналов с большим значением $M^{(0)}$ и (или) при высоких требованиях к уровню шума квантования ε_a , может потребоваться чрезмерно большая разрядность АЦП. В таком случае целесообразно перейти к неравномерному расположению уровней сравнения, дающих меньший уровень шумов квантования [10].

На выбор параметров амплитудного квантования могут влиять дополнительные требования конкретных систем. Так, в цифровых генераторах сигналов налагается дополнительное требование подавления паразитных составляющих в

спектре сигнала до допустимого уровня. Это может потребовать увеличения разрядности АЦП и представления отсчетов.

Особая ситуация возникает при квантовании детерминированных сигналов на фоне шумов.

Все эти случаи требуют дополнительного анализа и оценки возникающих погрешностей.

4.2. Квантование сигналов большого уровня

Необходимость амплитудного квантования детерминированных сигналов большого уровня возникает, как правило, при разработке цифровых генераторов сигналов различной формы [2, 107, 129], в функциональных преобразователях, фильтрах и т.п.

Характерной особенностью физически реализуемого детерминированного сигнала $u(t)$ является ограниченность диапазона его значений

$$M^{[0]_-} < u(t) < M^{[0]_+},$$

где $M^{[0]_-}$ и $M^{[0]_+}$ - минимальное и максимальное значения сигнала.

В этих условиях квантование целесообразно осуществлять на всем интервале $[M^{[0]_-}; M^{[0]_+}]$, т.к. уменьшение динамического диапазона АЦП Пдцп $< M^{[0]_+} - M^{[0]_-}$ приводит к быстрому росту шумов квантования. Для уменьшения разрядности АЦП или уровня шумов более целесообразным представляется использование неэквидистантного (неравномерного) квантования.

Рассмотрим процедуру выбора уровней сравнения (см. раздел 1.3) и определения шумов квантования. Положим, что квантование осуществляется v -разрядным АЦП с числом выходных уровней состояния $N_v + 1$. Требуется определить положение уровней ψ_i , $i \in \overline{0, N_v + 1}$, обеспечивающее минимальное значение мощности шумов квантования. Если допустить, что условие (4.1.3) выполняется на любом интервале $[\psi_i; \psi_{i+1}]$, $i \in \overline{1, N_v}$, то шум квантования (4.1.1) будет некоррелированным для различных t_k .

На рис. 4.2.1 рассмотрен пример неравномерного квантования сигнала $u(t)$. При таком квантовании ошибку $s(t)$ следует рассматривать как нестационарный случайный процесс, т.к. дисперсия на отдельных временных интервалах $[t_k; t_{k+1}]$ зависит от того, в какой интервал $[\psi_i; \psi_{i+1}]$ попадет значение сигнала $u(t)$.

Разобьем анализируемый временной интервал $[-T_{ан}/2; T_{ан}/2]$ на подинтервалы $0i_T$, $i \in \overline{1, N_v}$, $\psi_i \in [1, K_j]$, в которых значения сигнала $u(t)$ попадают в соответствующие подинтервалы уровней $[\psi_i; \psi_{i+1}]$, а выходное значение АЦП равно V_i и не изменяется

при любом ш. Здесь K_i - это число отрезков сигнала $u(t)$, когда его значения попадают в интервал $[u_i; u_{i+1}]$.

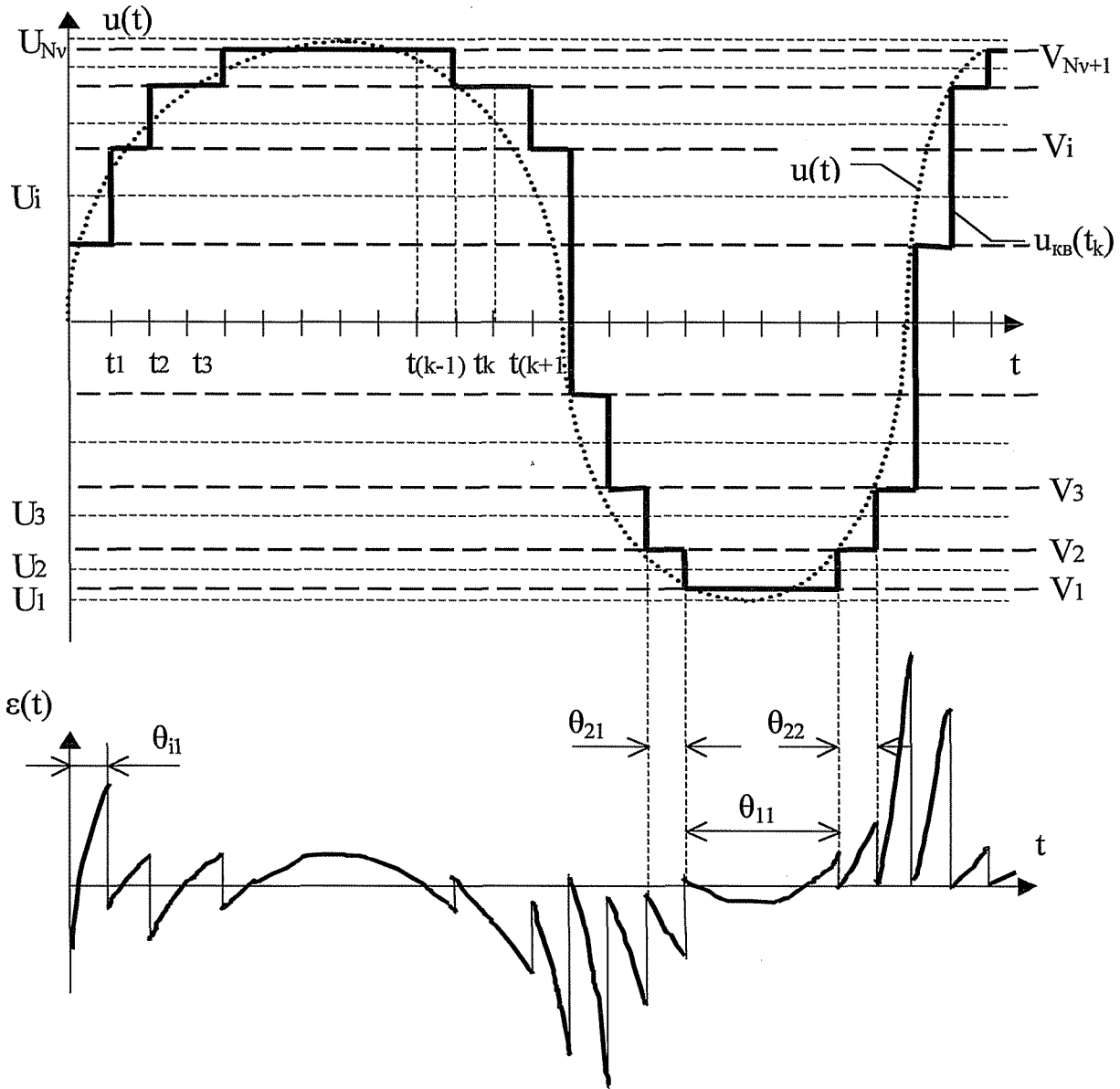


Рис. 4.2.1 Квантование детерминированного сигнала

Частная ошибка $S_i(t) = u(t) - V_i$ представляет собой разность исходного сигнала $u(t)$ и результата квантования V_i для совокупности значений $m \in 1, K_j$. Это позволяет рассматривать общую ошибку $s(t)$ как сумму $N_v + 1$ частных ошибок $S_j(t)$, $i \in 0, N_v$:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N_v} S_i(t) \tag{4-2.1}$$

Дисперсия частной i -ой ошибки постоянна при различных m и, при

некоррелированных отсчетах $u(t_k)$, определяется соотношением (4.1.7):

$$\sigma^2 = \frac{A \Delta t}{12} \sum_{i=1}^N (u_{i+1} - u_i)^2 \quad \blacksquare$$

Тогда, дисперсию σ^2 общей ошибки $s(t)$ можно найти как сумму частных дисперсий σ_i^2 с весами, определяемыми интегральной или дифференциальной функциями распределения сигнала по уровням (см. раздел 1.4):

$$\sigma_{\text{КВ}}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} S^2 H^2(u_{i+1} - u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} (u_i - u)^2 f_W(u) du. \quad (4.2.2)$$

При равномерной дискретизации с шагом $A_{ui} = U_{i+1} - U_i = A_u$, $i \in \{1, N_v\}$, из выражения (4.2.2) получим

$$\sigma^2 = \frac{A_u^2}{12} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_W(u) du = \frac{A_u^2}{12} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_W(u) du, \quad (4.2.3)$$

что совпадает с (4.1.7). Очевидно, что не все слагаемые в (4.2.3) вносят равный вклад в общую сумму. Другая особая ситуация будет при выборе уровней u_i , $i \in \{1, N_v + 1\}$, отвечающих условию "равновероятности" (равной частоты) появления выходных значений V_i АЦП:

$$F_d(u_{i+1}) - F_d(u_i) = \frac{1}{N_v} \int_{-\infty}^{\infty} W(u) du = \frac{1}{N_v}. \quad (4.2.4)$$

Здесь просматривается аналогия со статистическим кодированием, и это условие достигается при выборе уровней сравнения соответствующих значениям: $u_i = M^{[0]}_{-}$ и $u_{i+1} = U_i + D_c F_d^{-1}(i/N_v)$, $i \in \{2, N_v\}$, где $D_c = M^{[0]}_{+} - M^{[0]}_{-}$ и $F_d^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная $F_d(\cdot)$. Тогда, из (4.2.2) следует

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} (u_{i+1} - u_i)^2. \quad (4.2.4)$$

Суммы (4.2.3) и (4.2.4) не являются минимумами функционала (4.2.2), т.к. отдельные слагаемые вносят различный вклад в конечный результат. В соответствии

с общими принципами отыскания минимумов [9, 61, 95], для функционала (4.2.2) следует найти такие значения уровней u_i , $i \in \overline{1, N_v+1}$, при которых становятся равными нулю его частные производные по u_i . Для детерминированного сигнала значения двух крайних уровней сравнения определяют максимальное и минимальное значения сигнала: $u_1 = M^{[0]}_-$ и $u_{N_v+1} = M^{[0]}_+$. Тогда из функционала (4.2.2) можно найти N_v-1 частные производные и приравнять их нулю. Учитывая, что каждый уровень входит в верхний и нижний пределы интегрирования, уравнения для частных производных можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &= (u_i^2 - u_{i+1}^2 - 2u_{i+1}u_i) \omega_d(u_i) - \\ &- 2u_{i-1}[F_d(u_i) - F_d(u_{i-1})] + 2u_j[F_d(u_{i+1}) - F_d(u_i)] - \\ &- 2u_{i+1}[F_d(u_{i+1}) - F_d(u_i)], \quad i \in \overline{1, N_v}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Приравняв нулю частные производные (4.2.5), получаем систему из N_v-1 нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &(u_{i+1} - u_{i-1}) \omega_d(u_i) + 2F_d(u_i) - \\ &- 2(u_{i-1} - u_i)F_d(u_{i-1}) - 2(u_{i+1} - u_i)F_d(u_{i+1}) = 0, \quad i \in \overline{2, N_v}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(u_{i+1} - u_{i-1})F_d(u_i) + u_i[F_d(u_{i+1}) - F_d(u_{i-1}) + (u_{i+1} - u_{i-1})\omega_d(u_i)] - \\ &- u_{i+1}F_d(u_{i+1}) + u_{i-1}F_d(u_{i-1}) - 0,5(u_{i+1} - u_{i-1})\omega_d(u_i) = 0. \end{aligned}$$

Используя хорошо проработанный математический аппарат [9, 61] и широкодоступное программное обеспечение [29] решения систем нелинейных уравнений можно определить оптимальный вектор уровней сравнения U_{opt} для конкретных сигналов. В Приложении В приведены результаты расчетов оптимальных векторов уровней сравнения для ряда сигналов: гармонического, вида $\arcsin(x)$, гауссова.

Выбором значений элементов вектора выходных уровней состояния V можно обеспечить несмещенность ошибки $s(t)$. Для этого необходимо, чтобы выходной уровень V_i совпадал со средним значением сигнала на интервале $[u_i; u_{i+1}]$. Выполнение этого условия обеспечивается, если элементы вектора V находятся из условия

$$V_j = \frac{1}{P_i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} f(x) W d(x) dx, \quad i \in 1, N_v,$$

где $p_i = \int_{u_{i-1}}^{u_i} W d(x) dx$ - суммарное относительное время пребывания сигнала на интервале [иц; u_{i+1}].

Для ряда сигналов, рассмотренных в разд. 1.4, выражения для уровней V_i приведены в табл. 4.2.1.

Для сигналов, рассмотренных в табл. 4.2.1, были рассчитаны величины среднеквадратических ошибок $\epsilon^2 = 10 \int_{x_{ан}'}^{T/2} g(t) dt$ при нескольких значениях разрядности АЦП.

Результаты расчетов в виде диаграмм ошибок $\epsilon^2_{пт}$ и разностей ошибок равномерного и оптимального АЦП $\Delta s^2 = \epsilon^2_{ав} - \epsilon^2_{пт}$ для гармонического сигнала и сигнала вида $\arcsin(x)$ приведены на рис. 4.2.2. На нем штриховкой выделены результаты для АЦП с четным и нечетным числом выходных уровней состояния.

Результаты оптимизации АЦП для непериодических сигналов (например, гауссова, экспоненциального) зависят от выбора области анализа (формирования) $T_{ан}$ и минимального уровня U_i . Область $T_{ан}$ определяется требуемой точностью формирования сигнала x_0 или может быть задана из иных соображений. При заданной разрядности АЦП v и единичной нормированной амплитуде сигнала существует оптимальный интервал анализа (формирования), обеспечивающий минимум погрешности $\epsilon^2_{опт}$ при максимуме выигрыша неравномерного квантования. Этот интервал соответствует точности $x_0 = 1/N_v$. На рис. 4.2.3 приведена зависимость погрешности $v^2_{опт}$ и выигрыша Δv^2 по сравнению с равномерным квантованием от значения минимального уровня u_i для гауссова сигнала при точности $x_0 = 1/N_v$ и разрядности АЦП $v=3$.

Результаты расчетов для гауссова и экспоненциального сигналов в виде диаграмм ошибок s и разностей $\Delta s^2 = 8 \epsilon^2_{ав} - \epsilon^2_{пт}$ при точности $x_0 = 1/N_v$ приведены на рис. 4.2.4.

Сигнал	$Wd(x)$	v_i	
Гармонический $u(t)=U_0\sin(\omega t)$, $x=u/U_0$	$\frac{1}{7C_{л/1}-X^2}$	$\frac{\ln(i-a_i/U_0)^2 - Y_i - (\Pi_{i+1}/U_0)^2}{\arcsin(u_{i+1}/U_0) - \arcsin(u_j/U_0)}$	
$u(t) = \frac{1}{\cos(\omega t)}$ $ t < t_{\text{г}}, x=u/U_0$ $\omega t = 7iU_i/2U_0$	$\frac{71}{4U} (7tX^{\wedge})$	$\frac{2U_0}{71}$	$\frac{\sim \cos(\omega_{i+1}) - \cos(\omega_i)}{8T(\omega_{i+1}) - 8T(\omega_i)} + \frac{u_{i+1}\sin(\omega_{i+1}) - u_i\sin(\omega_i)}{U_0[\sin(\omega_{i+1}) - \sin(\omega_i)]}$
Гауссов $u(t)=U_0\exp(-t^2/2a^2)$, $x=u/U_0, x_0 \ll 1$	$\frac{1}{2XД/ПХПХ0}$	$\frac{\text{Лио } \phi[7 - \ln(u_{i+1}/U_0)] - \phi[7 - \ln(u_i/U_0)]}{7 - \ln(u_{i+1}/U_0) - 7 - \ln(u_i/U_0)}$	
Экспоненциальный $u(t)=U_0\exp(-t/a)$, $x=u/U_0, X_0 \ll 1$	-1 $x \ln x_0$	$\frac{u_{i+1}^{u_i}}{\ln(u_{i+1}/U_0) - \ln(u_i/U_0)}$	

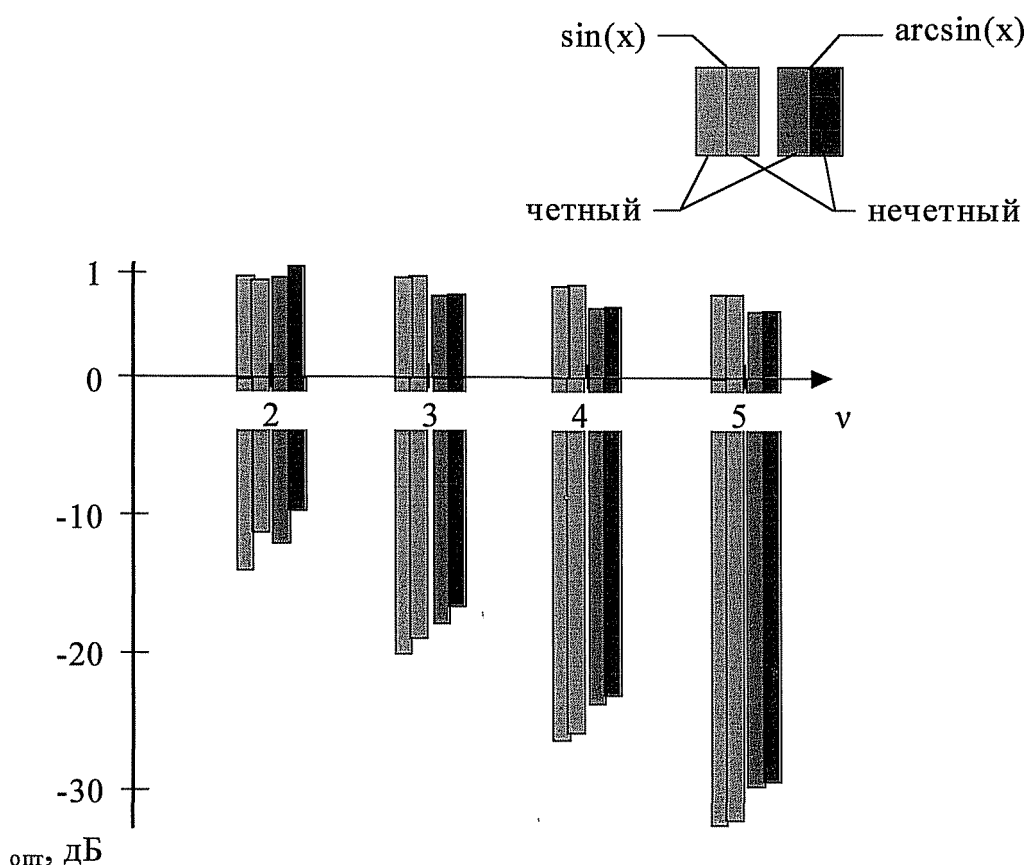


Рис. 4.2.2 Выигрыш в величине погрешности оптимального АЦП

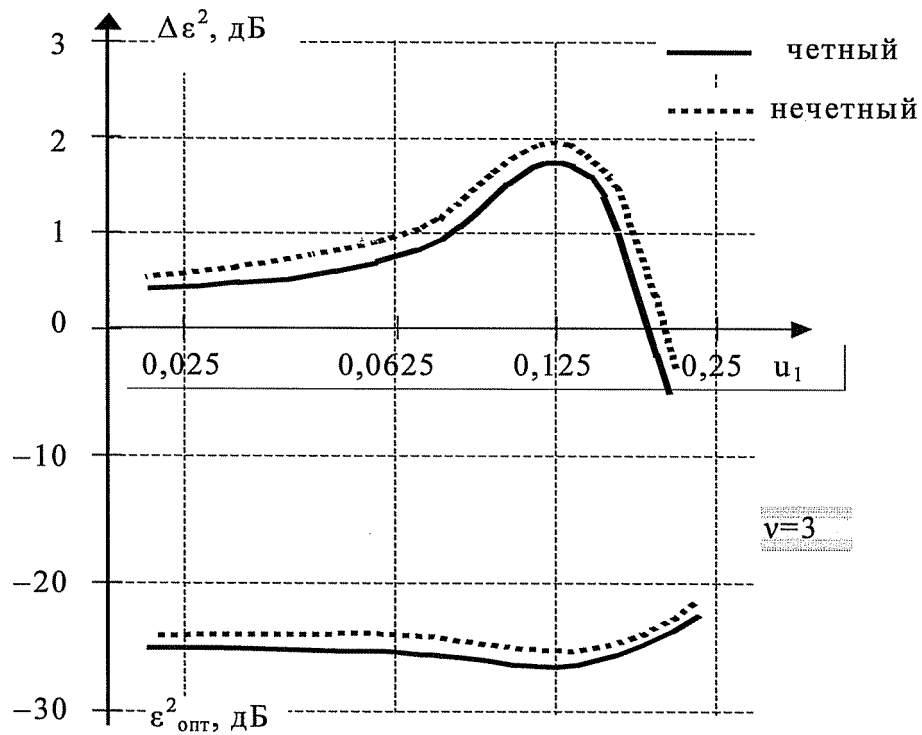


Рис. 4.2.3 Величина погрешности и выигрыша оптимального АЦП при $\nu=3$

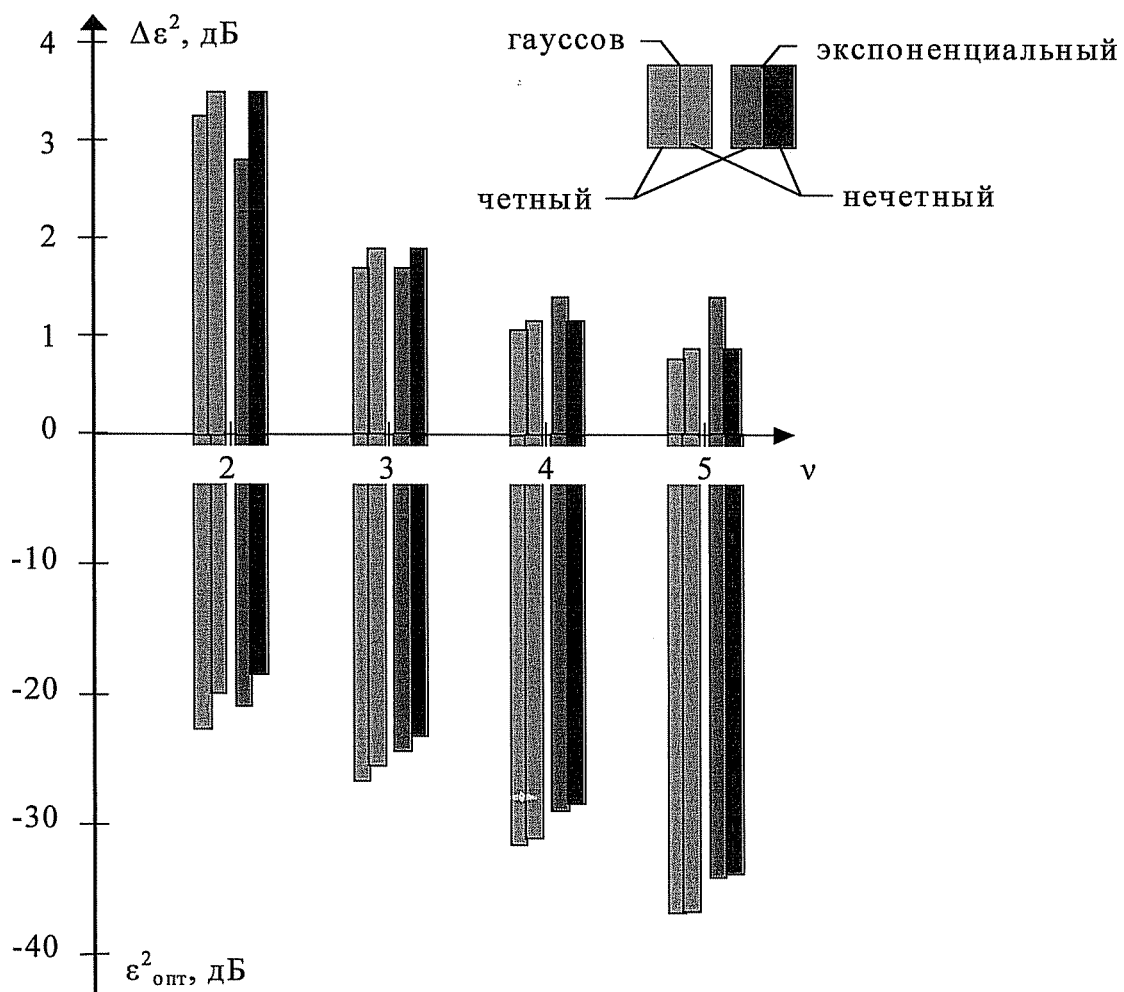


Рис. 4.2.4 Выигрыш в величине погрешности оптимального АЦП

4.3. Квантование детерминированных сигналов на фоне шума

Для систем гидро- и радиолокации, навигации, телевидения и ряда других достаточно характерной является ситуация, когда амплитудному квантованию подвергается аддитивная смесь детерминированного (или квазидетерминированного) полезного сигнала с шумом. При этом отношение мощности сигнала P_c к дисперсии шума $\sigma_{\text{ш}}$

$$\chi = P_c A_{\text{ш}} \quad (4-3.1)$$

может изменяться в широких пределах, включая значения $\chi < 1$. В последнем случае, при квантовании в АЦП смеси сигнала $u(t)$ и шума $\hat{u}(t)$ - $y(t) = u(t) + \hat{u}(t)$, может оказаться, что отсчеты сигнала $u(kA_t)$, $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$ принимают значения меньше интервала квантования A_u .

Рассмотрим процесс квантования [3, 45] смеси $y(t)$ в равномерном АЦП с динамическим диапазоном $U_{N_V} - U_i = \Delta u_{\text{ш}} = (N_V - 1)A_u$. В некоторый момент времени kA_t сигнал принимает значение $u(kA_t) = u_c$, которое можно представить в виде

$$u_c = \text{sgn}[u(kA_t)] Z_k A_u + O_{\text{ск}}, \quad (4.3.2)$$

где $Z_k = \text{int}[|u_c| / A_u]$ - целое число, $|O_{\text{ск}}| < A_u$ и $\text{sgn}(\diamond)$ - функция знака.

Шум $\hat{u}(kA_t)$ описывается функцией распределения плотности вероятности

2

$W_m(x)$ и полагаем, что среднее значение шума равно нулю, а дисперсия равна .

Для некоторой реализации шума значение $\hat{u}(kA_t) = i_{\text{ш}}$ и его также можно представить в виде

$$i_{\text{ш}} = \text{sgn}[\hat{u}(kA_t)] m_k A_u + O_{\text{шк}}, \quad (4.3.3)$$

где $m_k = \text{int}[|\hat{u}(kA_t)| / A_u]$ - случайное целое число, $|O_{\text{шк}}| < A_u$.

Результат квантования суммы $y(kA_t) = u_c + i_{\text{ш}}$ сигнала и помехи зависит от суммы двух остатков $O_{\text{ск}}$ и $O_{\text{шк}}$:

$$y(kA_t) = \text{sgn}[u(kA_t)] Z_k A_u + \text{sgn}[\hat{u}(kA_t)] m_k A_u + O_{\text{ск}} + O_{\text{шк}}. \quad (4.3.4)$$

В случае гипотетического АЦП с бесконечно большими значениями числа уровней сравнения и динамического диапазона (см. рис. 1.3.2) квантованный сигнал

будет принимать только два значения, равные по модулю $Z_k A_u$, если $|O_{ck} + O_{mk}| < A_u$, и $(Z_k + 1)A_u$, если $|O_{ck} + O_{mk}| > A_u$.

В общем случае, при ограниченном динамическом диапазоне АЦП квантованный сигнал равен

$$u_{KB}(kA_t) = j_k A_u,$$

где $|j_k| \in \{0; 1; 2; \dots, Z_k + 1\}$ и $\text{sgn}(j_k) = \text{sgn}[u(kA_t)]$.

Появление значений сигнала при $j_k < Z_k$ обусловлено эффектом ограничения на краях динамического диапазона АЦП.

Распределение вероятности квантованного сигнала можно определить как

$$P_{cj}(kA_u) = T \int_{u_{Hi+j}}^{u_{Hi+j} + \Delta} H(x) dx, \quad \Delta \in \text{ОЛ} + i, \quad (4.3.5)$$

где интервал интегрирования определяется как пересечение двух интервалов

$$[u_{Hi+j}; u_{Vi+j}] = [u_M; \Delta] \cap [u_{i+i} - u(kA_t); u_{j+i} - u(kA_t)].$$

Зная распределение (4.3.5), можно определить параметры квантованного сигнала: среднее значение и дисперсию:

$$\hat{u}_{KBcp}(\Delta) = E \sum_{|j|=1}^{Z_k + 1} u^j P_{cj}(k - \Delta), \quad (4.3.6)$$

$$\hat{\sigma}_0(kA_t) = E \sum_{|j|=1}^{Z_k + 1} u^j P_{cj}(\Delta) \quad (4.3.7)$$

а также вероятность прохождения сигнала через АЦП

$$P_{cAЦП} = \sum_{j=1}^{Z_k + 1} P_{cj}(kA_t) \quad (4.3.8)$$

Если $q \gg 1$, то $Z_k > m_k$ и сигнал всегда присутствует на выходе АЦП ($P_{cAЦП} = 1$). Если $q < 1$ и $u < A_u$, то сигнал присутствует на выходе АЦП только при

выполнении условия

$$|O_{PA} \sim i_c| > A_u. \quad (4.3.9)$$

Такая же ситуация складывается при $q > 1$ и не усеченном распределении шума в случае, когда его значение превышает динамический диапазон АЦП.

На рис. 4.3.1 показано квантование шума и смеси сигнал+шум при $u_c > 0$ и $A_u > u_c$. При этом в момент kA_t условие (4.3.9) выполняется, а в моменты $(k-1)A_t$ и $(k+1)A_t$ - нет. Из рисунка следует, что вероятность прохождения сигнала через АЦП определяется вероятностью попадания значений шума в интервалы $[Ц - |u_c|; Ц]$ $i \in \{1; 2; \dots, N_v\}$, выделенные на рисунке серым цветом. Для значений сигнала $u_c < 0$ вероятность прохождения сигнала через АЦП определяется вероятностью попадания значений шума в интервалы $[Ц; Ц + |u_c|]$ $i \in \{1; 2; \dots, N_v\}$.

При $|u_c| > A_u$ заштрихованные зоны перекрываются и сумму интегралов в (4.3.8) можно заменить одним

$$(k\Delta_t) = \int_{u_i}^{u_{N_v} + u_c} W_m(x) dx, \quad u_c < 0, \quad (4.3.10)$$

Из полученного выражения следует, что в общем случае $P_{сАЦП} < 1$ - Равенство $P_{сАЦП} = 1$ возможно только при усеченном распределении $W_m(x)$, располагающемся внутри интервала $[Ц; u_{N_v}]$.

Если вектор входных уровней сравнения АЦП равен

$$U = \langle Ц = ц_0 \quad \left. \begin{matrix} i-1 \\ N_v - 1 \end{matrix} \right\rangle \quad i \in \{1, N_v\} \quad (4.3.11)$$

то условие (4.3.9) можно представить в виде

$$v > \log_2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{q}} + 2 \right) \quad (4.3.12)$$

При выполнении этого условия и при нормальном шуме, имеющем распределение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)$$

из (4.3.10) получим

$$P_{сАЦП}(k\Delta_t) = \Phi\left(\frac{\mu}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{2} + \frac{u_c(k\Delta_t)}{\sigma_{ш}}\right) \tag{4.3.13}$$

где $\Phi(*)$ - интеграл ошибок [121].

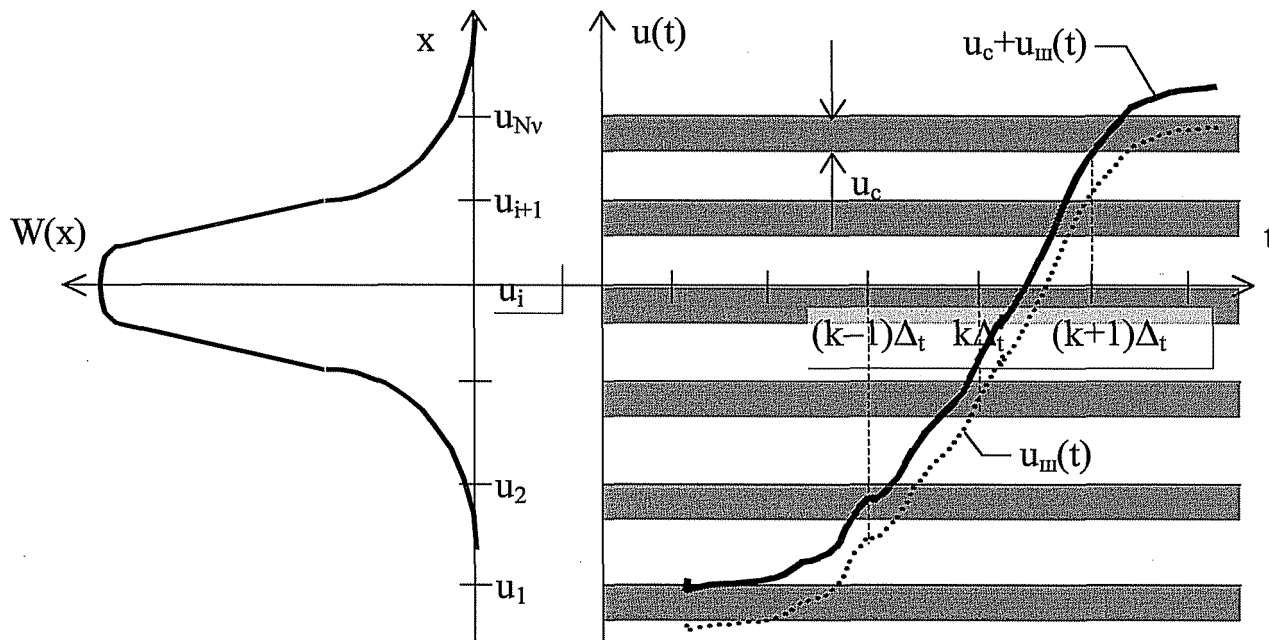


Рис. 4.3.1 Дискретизация детерминированного сигнала на фоне шума

На рис. 4.3.2 приведены графики зависимости (4.3.13) при

$q_m = 201g$ $u(kA_t) = -10дБ$ (кривая 1) и $q_m = -30дБ$ (кривая 2) в функции от относи-

тельного динамического диапазона АЦП. Получить высокие значения $P_{сАЦП}$ можно и при $q_m < 0$, если выполнить условие (4.3.12) и иметь относительный динамический диапазон АЦП $\mu > 4..5$.

Характер изменения шумов квантования (4.3.7) рассмотрим вначале для идеализированного АЦП (см. рис. 1.3.1), не обладающего эффектом ограничения при больших значениях модуля квантуемого сигнала. В таком АЦП квантованный сигнал имеет отдельные слагаемые в вероятности (4.3.5) отличающиеся от нуля только при $j = /_k$ и $j = /_{k+1}$, причем $P_{сj_k}(kA_t) + P_{сj_{k+1}}(kA_t) = 1$. Тогда из (4.3.6) и (4.3.7) получим

$$\Psi_{свср}(kA_i) A_u [7_{k+1} P_{сj_k}(kA_t)], \tag{4.3.14}$$

$$(kA_t) = A_u^2 P_{cik}(kA_t) [1 - P_{cik}(kA_t)]. \quad (4.3.15)$$

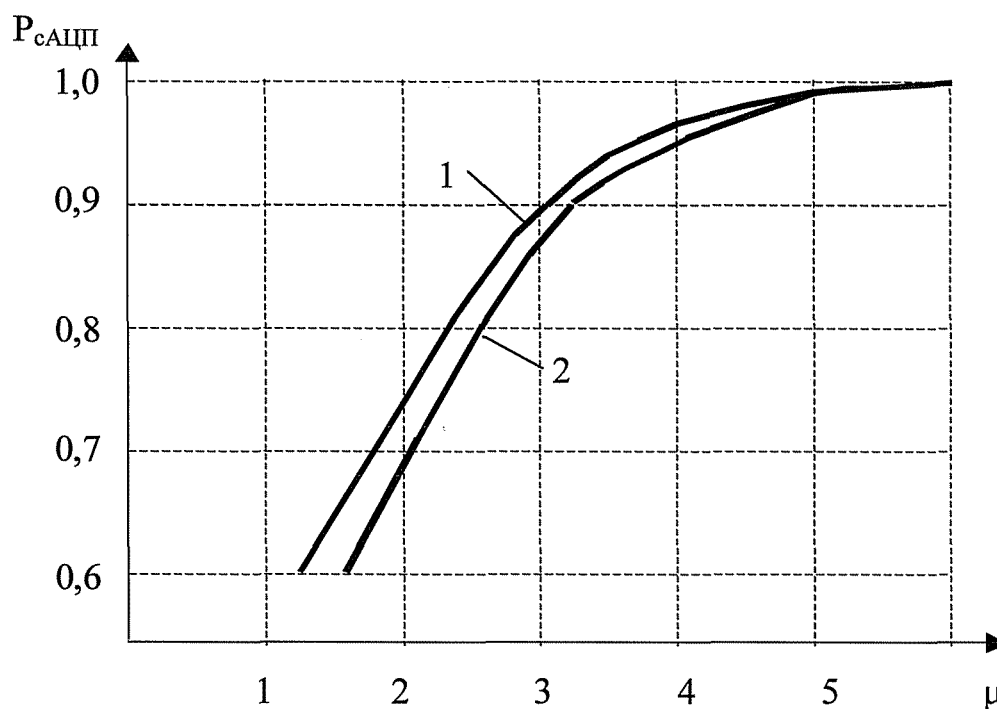


Рис. 4.3.2 Вероятность прохождения сигнала через АЦП

Изменение значения сигнала $u_c(kA_t)$ приводит к изменению вероятности $P_{cik}(kA_t)$ от единицы (при $|u_c(kA_t)| = Z_k A_u$) до величины близкой к нулю (при $|u_c(kA_t)| < (Z_k + 1) A_u$). Дисперсия (4.3.14) при этом изменяется от нуля до $A_n^2/4$ и вновь до нуля. Усреднение дисперсии (4.3.15) по вероятности дает величину

$$a_{,,} = \int_0^1 4(kA_t) dP_{cik}(kA_t) = a_{,,} \quad \text{Л}^2 / \quad (4.3.16)$$

Выполнение условий (4.3.9) или (4.3.12) приводит к выполнению неравенства $Z_k > 1$ в представлении сигнала (4.3.2). Не усеченный характер распределения шума $W_m(x)$ приводит к тому, что в АЦП с конечным динамическим диапазоном в сумме (4.3.5) отличающимися от нуля будут все вероятности, у которых $|j| < Z_k + 1$. На рис. 4.3.3 приведен пример распределения вероятностей квантованного сигнала при $q_m = -10$ дБ, нормальном шуме и параметрах АЦП: $v=5$ и $\mu=3$ ($\mu_c/A_n \sim 3,3$).

Таким образом, при квантовании на фоне помехи в АЦП детерминированный сигнал преобразуется в дискретный нестационарный случайный процесс с распределением (4.3.5). Вид распределения и его параметры (4.3.6) и (4.3.7) зависят от вида

распределения помехи, мгновенного значения сигнала и характеристики АЦП. При симметричной характеристике АЦП полярность сигнала на полученные параметры не влияет, а определяет только знак среднего значения.

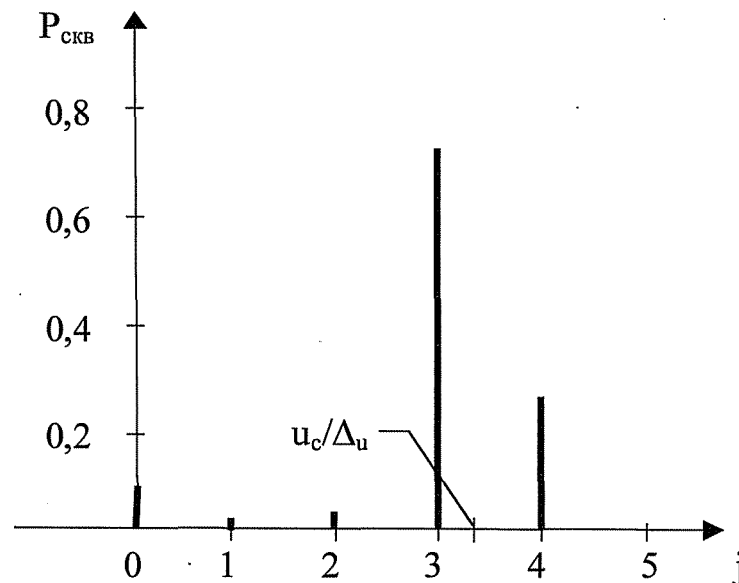


Рис. 4.3.3 Распределение вероятности дискретизированного сигнала

При больших значениях отношений сигнал/шум (4.3.1) и динамического диапазона μ в распределении (4.3.5) существенно отличаться от нуля будут только две вероятности: при $j = Z_k$ и $j = Z_k+1$. Это приближает среднее значение (4.3.6) и дисперсию (4.3.7) к значениям (4.3.14) и (4.3.15) соответственно.

Корреляционная функция шумов квантования зависит от корреляционных функций помехи, сигнала и интервалов A_t и A_n . Выразить ее в общем виде затруднительно, но можно найти условие, при котором шумы квантования некоррелированы. Очевидно; что в соседних отсчетах шум квантования будет некоррелирован, если за время A_t приращение суммы сигнал+помеха превысит A_n .

Для аналогового сигнала $u(t)$ с мощностью P_c усреднением на интервале его существования (или обработки) определим среднее приращение на интервале A_t :

$$a_c(A_t) = 72P_c[1-g_c(A_t)]J, \quad (4.3.17)$$

где $g_c(\tau)$ - нормированная автокорреляционная функция сигнала.

Стандартное приращение шума с нормированной автокорреляционной

функцией $\gamma_{ш}(t)$ на интервале A_t [67] можно определить как

$$\hat{\gamma}_{шп}(A_t) = \gamma_{шп}^2 [1 - \gamma_{ш}(A_t)] \cdot \quad (4.3.18)$$

В случае взаимной некоррелированности сигнала и шума их приращения суммируются по мощности и общее приращение можно определить из выражения $\gamma_{шп}^2 + \gamma_c$. Условие некоррелированности помехи квантования в этом случае примет вид

$$\hat{2}a^2 [1 - \gamma_{ш}(D_t)] + P_c [1 - \gamma_c(D_t)] > D_{ш}. \quad (4.3.19)$$

Для АЦП с входными уровнями сравнения (4.3.11) это условие имеет вид

$$1 - \gamma_{ш}(A_t) + q[1 - \gamma_c(A_t)] > \frac{\pi^2}{2(N_V - 1)^2} \gamma_{ш} \cdot \quad (4.3.20)$$

Если интервал дискретизации A_t выбран так, что отсчеты сигнала некоррелированы, то из (4.3.20) получим

$$LL^2$$

Неравенства (4.3.20) и (4.3.21) показывают, что в системах с большим отношением сигнал/шум ($q \gg 1$) корреляционные свойства помехи слабо влияют на требуемую разрядность АЦП. В случае сигнала сильно коррелированного на интервале A_t , когда $q[1 - \gamma_c(A_t)] \ll 1$, наличие слабо коррелированного шума позволяет снизить требования к разрядности АЦП. Эта особенность и использована в работах [21, 109, 122].

В случае слабого сигнала, при $|u_c| < A_{ш}$, в распределении (4.3.5) отличающиеся от нуля будут только две вероятности: при $j=0$ и $j=1$. Тогда из выражений (4.3.6)...(4.3.8) можно получить

$$UKB_{CP}(kA_t) - A_u P_{CA1} j n(kA_t) = u_c, \quad (4.3.22)$$

$$\langle *KB^2(kA_t) = A_{ш}^2 P_{CAЦП}(kA_t) [1 - P_{CAЦП}(kA_t)] = u_c A_{ш} [1 - P_{CA} j n(kA_t)] \quad (4.3.23)$$

$$P_{\text{слщп}}(k\Delta_t) = \frac{N_v + \sum_{i=1}^M U_{Bj}}{Z} \int W_m(x) dx, \quad (4.3.24)$$

где

$$u_{i,j} > 0, \quad \text{if } U_{i,j} > 0, \\ \text{и } U_{Bj} = < \\ u_{i,j} < 0 \text{ if } U_{i,j} < 0.$$

Особенностью квантования слабых сигналов является зависимость дисперсии (4.3.23) от значения сигнала u_c , что не имеет места (см. (4.3.15)) при сильных сигналах ($u_c > A_{и}$).

С уменьшением значения сигнала $u_c(k\Delta_t)$ при постоянном шаге квантования $A_{и}$ уменьшается среднее значение $u_{\text{квср}}(k\Delta_t)$ сигнала, вероятность его прохождения через АЦП $P_{\text{сАЦП}}(k\Delta_t)$ и дисперсия шумов квантования $\sigma_{\text{кв}}^2(k\Delta_t)$. На рис. 4.2.4 приведена зависимость $P_{\text{сАЦП}}(k\Delta_t)$ (4.3.24) для случая нормального шума и при разрядности АЦП $v = 4$ и $q = (u_c/\sigma_{\text{ш}})^2 = -10\text{дБ}$ - кривые 1, $v = 8$ и $q = -30\text{дБ}$ - кривые 2, $v=6$ и $q = -30\text{дБ}$ - кривые 3 при разных значениях сигнала. Сплошные кривые соответствуют нечетным, а пунктирные - четным значениям N_v , причем для кривой 2 в пределах рисунка пунктирная и сплошная линии совпали. Область уменьшения вероятности с ростом $|1|$ соответствует значениям $|u_c| < A_{и}$. Выбор значения динамического диапазона μ , соответствующего максимуму $P_{\text{сАЦП}}$, не обеспечивает минимума потерь в выходном отношении сигнал/помеха. Причиной тому служит рост дисперсии (4.3.23), а также уменьшение среднего значения (4.3.22) по сравнению с входным сигналом:

$$\gamma(k\Delta_t) = \frac{u_{\text{квср}}(k\Delta_t)}{u(k\Delta_t)} < \quad (4.3.25)$$

Величина $u(k\Delta_t)$ зависит, главным образом, от динамического диапазона АЦП - μ . На рис. 4.3.5 для нормального шума приведена зависимость (4.3.25), в которой использованы соотношения (4.3.6) и (4.3.8). Кривая 1 соответствует $v = 4$, кривая 2 - $v = 8$ при тех же значениях $q = (u_c/\sigma_{\text{ш}})^2$, что и на рис. 4.3.4. Величина $u(k\Delta_t)$ практически не зависит от четности или нечетности характеристики АЦП.

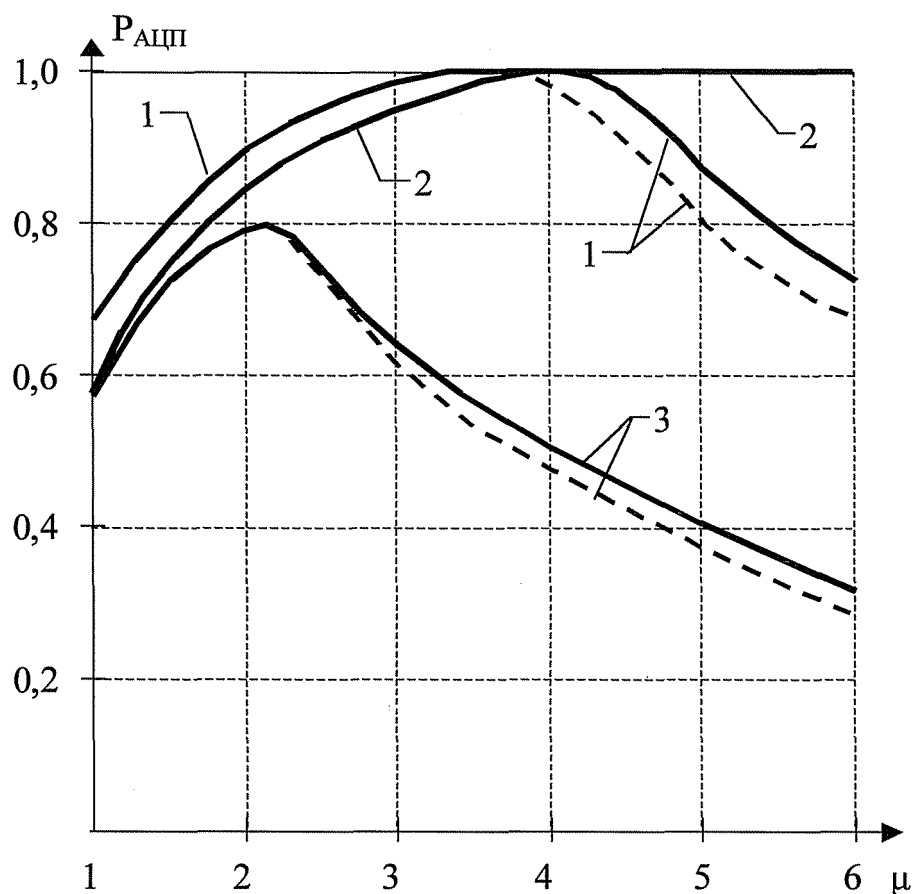


Рис. 4.3.4 Вероятность прохождения слабого сигнала через АЦП

Таким образом, выбор трех основных параметров АЦП - интервала временной дискретизации Δ_t , разрядности v или числа уровней сравнения N_v и динамического диапазона μ , должен проводиться при одновременном учете всех эффектов, сопутствующих квантованию. Обобщенным параметром может служить выходное отношение сигнал/шум АЦП:

$$\eta_{AЦП} = \frac{u_{\text{квср}}^2(k\Delta_t)}{\sigma_{\text{шкв}}^2 + \sigma_{\text{кв}}^2(k\Delta_t)}$$

или потери в этом отношении

$$\eta_{AЦП}(k\Delta_t) = \frac{q_{AЦП}}{q} = \frac{\gamma^2(k\Delta_t)\sigma_{\text{ш}}^2}{\sigma_{\text{шкв}}^2 + \sigma_{\text{кв}}^2(k\Delta_t)}, \quad (4.3.26)$$

где $\sigma_{\text{шкв}}^2 \sim$ дисперсия квантованного шума, определяемая выражением (5.2.5).

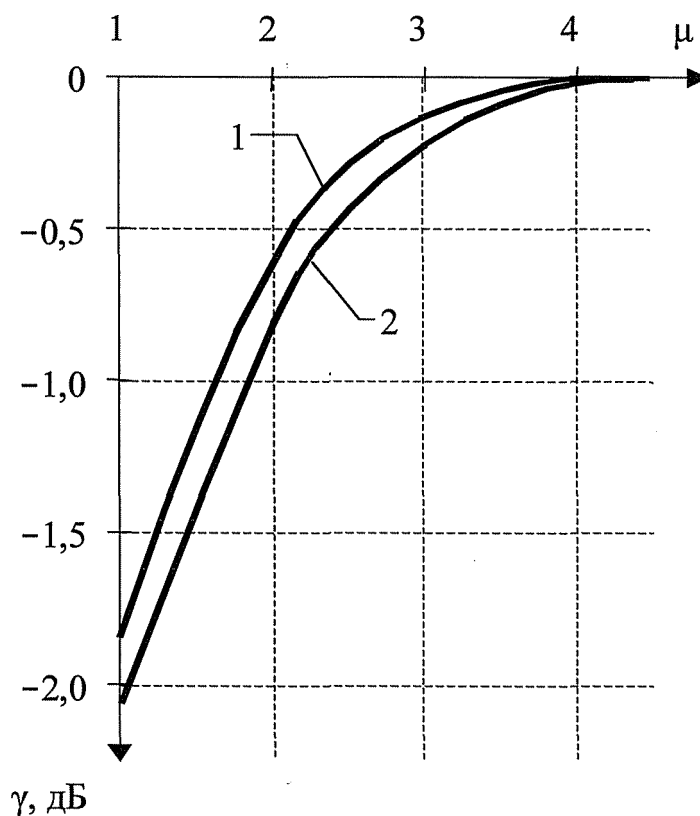


Рис. 4.3.5 Потери в среднем значении сигнала

Величины $y(kA_t)$ и $\sigma_{\text{КВ}}^2(kA_t)$, входящие в (4.3.26), определяются соотношениями (4.3.25) и (4.3.23), а их значения зависят от мгновенного значения сигнала. В общем случае, при изменяющемся модуле сигнала в выражении (4.3.26) должны использоваться усредненные значения $y(kA_t)$ и $\langle \sigma_{\text{КВ}}^2(kA_t) \rangle$:

$$Y = \prod_{k=1}^{N_0} \frac{Y(kA_t)}{\sigma_{\text{КВ}}^2(kA_t)}$$

где N_0 - количество отсчетов на длительности сигнала.

Для некоторых сигналов (пачки прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой, сигналы с угловой модуляцией и т.п.) выражения (4.3.25) и (4.3.26) справедливы для сигнала в целом. На рис. 4.3.6 приведена зависимость величины потерь γ для таких сигналов от разрядности АЦП ν при нормальном шуме и значениях: $\nu = 3$ и $q = -30\text{дБ}$ - кривые 1; $\nu = 3$ и $q = -10\text{дБ}$ - кривые 2; $\nu = 6$ и $q = -30\text{дБ}$ - кривые 3; $\nu = 6$ и $q = -10\text{дБ}$ - кривые 4. Сплошные кривые соответствуют нечетным АЦП, а пунктирные - четным. Из рисунка наглядно видно, что при малом числе разрядов ($\nu < 5..7$) нечетные АЦП вносят меньшие потери в квантуемый сигнал.

На рис. 4.3.7 приведена зависимость потерь (4.3.26) от величины динамического диапазона ρ нечетного АЦП при $\nu = 6$ - кривые 1; $\nu = 3$ - кривые 2; $\nu = 2$ - кривые 3. Кривые 4 на этом рисунке соответствуют четному АЦП при $\nu = 4$. На этом же рисунке сплошными линиями изображен случай $q = -30$ дБ, а пунктирными - $q = -90$ дБ. Из рисунка видно, что существует оптимальная величина динамического диапазона $\rho_{\text{опт}}$, обеспечивающая минимум потерь в отношении сигнал/шум на выходе АЦП. Положение минимума и его рельефность зависят, главным образом, от разрядности АЦП и, в меньшей степени, от отношения сигнал/помеха на входе.

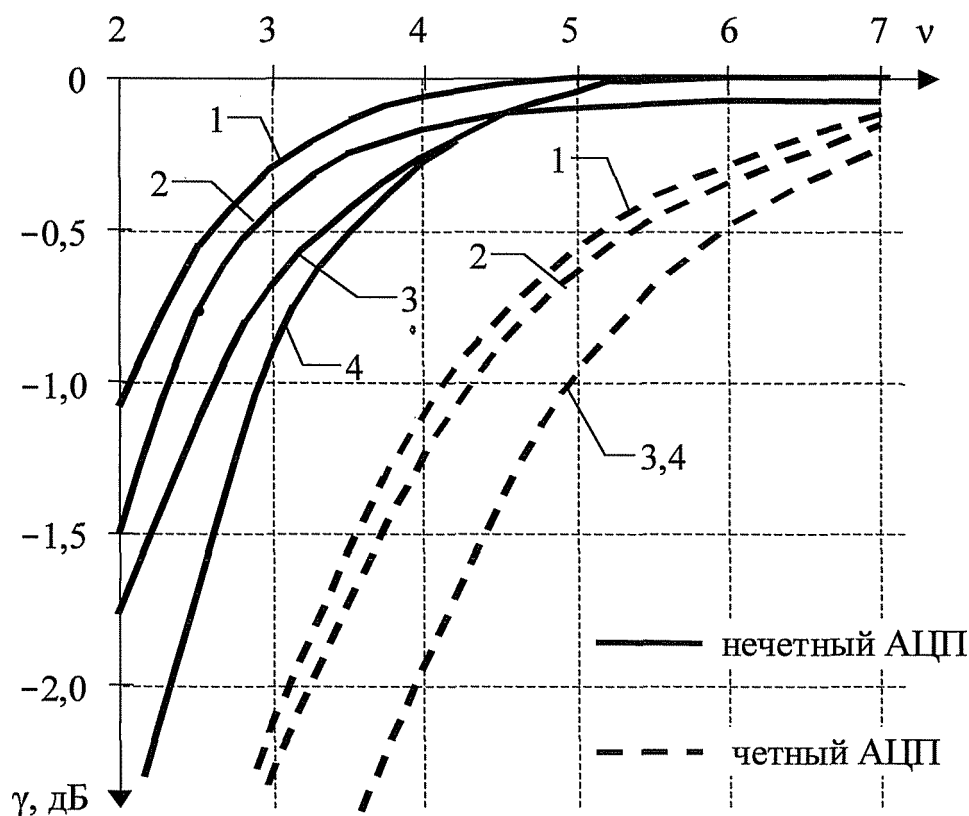


Рис. 4.3.6 Потери в среднем значении сигнала

Вероятностный анализ аналого-цифрового преобразования детерминированных сигналов на фоне шума позволил получить мгновенные характеристики цифрового сигнала: вид распределения, среднее значение, дисперсию, а также их интегральные значения на интервале существования сигнала. Полученные выражения учитывают влияние на цифровой сигнал характеристик входного шума, параметров АЦП и эффекта ограничения в АЦП. Шум квантования, представляющий центрированную случайную составляющую в цифровом сигнале, также зависит от

перечисленных параметров. Условие некоррелированности шума (4.3.20) показывает взаимосвязь основных характеристик АЦП (интервалов A_t , A_u и динамического диапазона μ). Соблюдение условия некоррелированности упрощает анализ цифровых систем, уменьшает величину дисперсии шума квантования на выходе системы. Полученные выражения позволяют проводить строгий анализ линейных цифровых систем, определять возможные ограничения и допущения при анализе и пределы их справедливости.

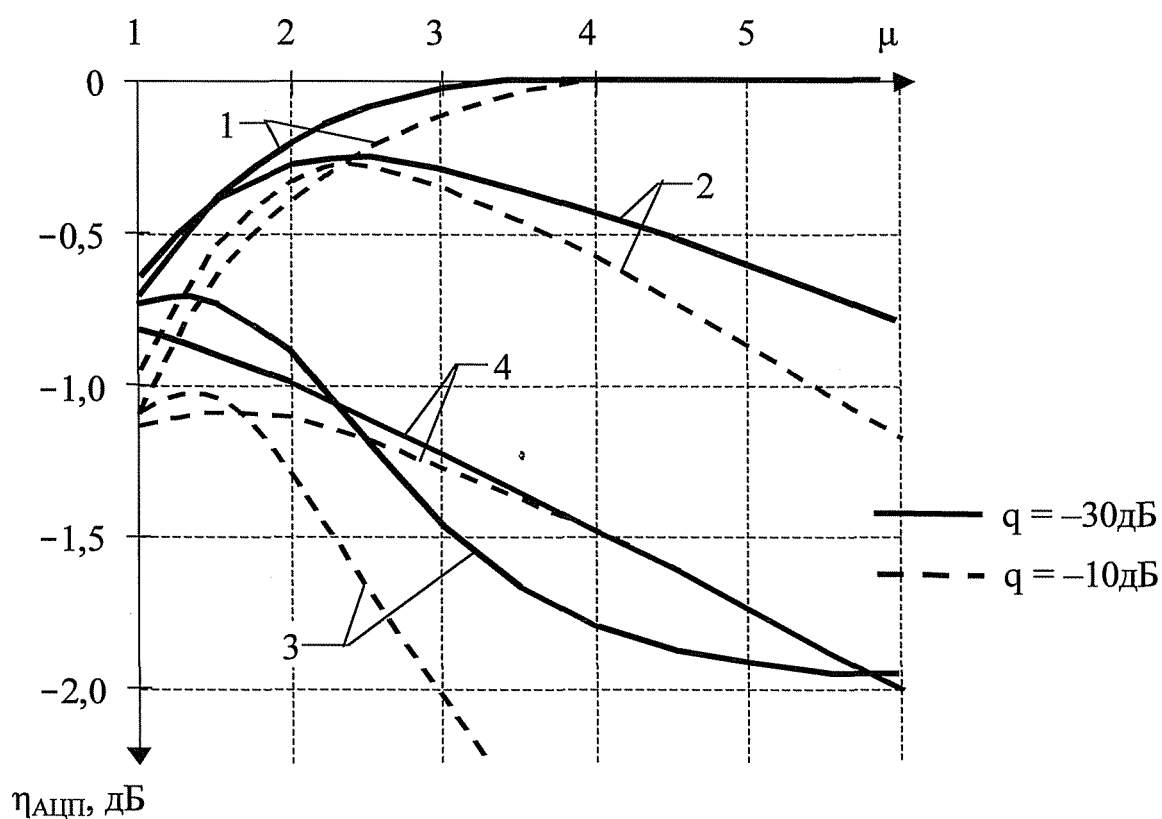


Рис. 4.3.7 Потери в отношении сигнал/шум

4.4. Квантование аналитических сигналов

Если некоторый действительный сигнал $x(t)$ дополнить сопряженной по Гильберту [26, 112] (квадратурной) составляющей

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [x(t) + j\hat{x}(t)] \quad (4.4.1)$$

то получим аналитический сигнал

$$y(t) = x(t) + j\hat{x}(t). \quad (4.4.2)$$

Пользуясь аналитическим сигналом можно строго и непротиворечиво определить понятия несущей частоты сигнала, его огибающей, фазы, предложить методы формирования сигналов с одной боковой полосой [112] и др.. В связи с этим цифровые генераторы сигналов имеют, как правило, два канала [2, 93, 107], в которых формируется действительная и квадратурная составляющие аналитического сигнала $y(t)$. Наличие двух сопряженных составляющих дает, в частности, возможность [112] относительно простыми техническими средствами получить на несущей частоте ω_0 сигнал с одной верхней (или нижней) боковой полосой

$$s(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - \hat{x}(t)\sin(\omega_0 t). \quad (4.4.3)$$

При описании однополосного сигнала (4.4.3) используют понятие комплексной огибающей и записывают в виде:

$$s(t) = y(t)\exp(j\omega_0 t),$$

где $y(t) = W(t)\exp[j\psi(t)]$ - комплексная огибающая, являющаяся аналитическим сигналом (4.4.2);

$$W(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} - \text{огибающая и } \psi(t) = \arctg[\hat{x}(t)/x(t)] - \text{фаза сигнала.}$$

При цифровом формировании детерминированных сигналов переход от аналогового сигнала-прототипа $x(t)$ к цифровому $x_{ra}(kA_T)$ осуществляется на этапе проектирования генератора (формирователя). При этом временная дискретизация осуществляется выбором интервала A_t , а амплитудное квантование - выбором

разрядности формирователя. Таким образом, в отдельные моменты времени kA_t , $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$ формируются (вычисляются) значения функций

$$x(kA_t) = W(kA_t)\cos[y(kA_t)], \quad x(kA_t) = W(kA_t)\sin[v(kA_t)], \quad (4.4.4)$$

где интервал временной дискретизации A_t выбирается в соответствии с теоремой Котельникова.

Интервал квантования A_t может определяться в соответствии с (4.1.3) или как результат решения системы уравнений (4.2.6). При необходимости величины ошибок (шума квантования)

$$s_1(kA_t) = x(kA_t) - x_{\text{КВ}}(kA_t) \quad \text{и} \quad s_2(kA_t) = x(kA_t) - x_{\text{КВ}}(kA_t)$$

могут уточняться прямыми расчетами по выражению (4.1.1).

Помимо обеспечения заданных требований по уровню погрешности (4.1.1) в соответствии с каким-либо критерием (раздел 1.5), в системе могут налагаться и дополнительные требования. Так, в модуляторах однополосных сигналов требуется обеспечить заданный уровень подавления нерабочей боковой полосы. При высоких требованиях к подавлению это может определить разрядность амплитудного квантования (вычислителя).

Формирование составляющих (4.4.4) аналитического сигнала $y(t)$ требует вычисления огибающей $W(kA_t)$ и фазы $\varphi(kA_t)$. Если в системе есть возможность выбора, то огибающую $W(kA_t)$ стремятся сделать равномерной, т.к. это позволяет полнее использовать мощность выходного каскада передающей системы (передатчика). В этом случае соответствующей нормировкой можно получить $W(t) = 1$. В остальных случаях нормировкой обеспечивается $\max[W(t)] = 1$.

Будем считать, что ошибки квантования $x(kA_t)$ и $x(kA_t)$ связаны с неточностями определения огибающей $W(kA_t)$ и фаз $y(kA_t)$ и вместо точного значения (4.4.4) будут получены

$$x_{\text{КВ}}(kA_t) = [W(kA_t) + r|ok]\cos[y(kA_t) + T|k],$$

$$x_{\text{КВ}}(kA_t) = [W(kA_t) + r|ok]\sin[y(kA_t) + T|k], \quad (4.4.5)$$

где $r|_{0k}$ - ошибка определения огибающей, а ψ_k и $p_{2k} \sim \sim$ ошибки определения фаз, обусловленные конечной разрядностью представления отсчета в момент kA_t .

Формирование однополосного сигнала (4.4.3) с использованием составляющих (4.4.5) даст сигнал

$$\begin{aligned} s_{KB}(t) &= [W(kA_t) + T|_{0k}] \cos[\psi/(kA_t) + T|i_k] \cos(\otimes_{0t}) - \\ &- [W(kA_t) + p_{0k}] \sin[v(kA_t) + r|_{2k}] \sin(\otimes_{0t}) = \\ &= [W(kA_t) + p_{0k}] \{ \cos[v(kA_t)] \cos(r|i_k) - \sin[v(kA_t)] \sin(\wedge_k) \} \cos(\otimes_{0t}) - \\ &- [W(kA_t) + r|_{0k}] \{ \sin[v(kA_t)] \cos(r|_{2k}) + \cos[v(lcA_t)] \sin(r|_{2k}) \} \sin(\otimes_{0t}). \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} s_{KB}(t) &= [W(kA_t) + r|_{0k}] \{ \cos[v(kA_t)] \cos(r|i_k) \cos(\otimes_{0t}) - \sin[\psi/(kA_t)] \cos(r|_{2k}) \sin(\otimes_{0t}) \} - \\ & \quad (4.4.6) \\ & \quad - [W(kA_t) + T|_{0k}] \{ \cos[Y(kA_t)] \sin(r|_{2k}) \sin(\otimes_{0t}) + \sin[Y(kA_t)] \sin(T|i_k) \cos(\otimes_{0t}) \}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (4.4.6) представляет собой полезную боковую полосу, вычисленную с некоторой погрешностью за счет ограниченной разрядности. Второе слагаемое - не полностью подавленную нерабочую боковую полосу. Степень подавления нерабочей боковой полосы, как это следует из (4.4.6), очень слабо зависит от точности формирования $W(kA_t)$, т.к. одно и то же значение используется в $x(kA_t)$ и $x(kA_t)$. Главным образом степень подавления нерабочей боковой полосы определяется точностью формирования $y(kA_t)$.

При числе разрядов $v > 3 \dots 5$, когда возможные значения τ_r и $\tau|_2$ будут много меньше $\tau_c/2$, функции $\sin(T|)$ и $\cos(T|)$ можно разложить в ряд с удержанием 1-2 членов. Тогда из (4.4.6) получим:

$$\begin{aligned} s_{ra}(t) &= W(kA_t) \{ \cos[\psi/(kA_t)] \cos(\otimes_{0t}) - \sin[\psi/(kA_t)] \sin(\otimes_{0t}) \} - \\ &- W(kA_t) \{ T|_{2k} \cos[v(kA_t)] \sin(\otimes_{0t}) + T|_{1k} \sin[v(kA_t)] \cos(\otimes_{0t}) \} \cdot \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Определим энергии полезной \mathcal{E}_c и мешающей \mathcal{E}_b боковых полос в сигнале (4.4.7). В силу ортогональности тригонометрических функций получим:

$$\mathcal{E}_c = T^{-1} \int_{k=-N/2}^{k=N/2} W^2(kA_t) \cos^2[v(kA_t)] + \sin^2[v(kA_t)] \int_{k=-N/2}^{k=N/2} W^2(kA_t),$$

$$\mathcal{E}_B \approx \sum_{k=-N/2}^{N/2} E W^2(kA_t) \{ \cos^2 [v(kA_t)] r|f_k + \sin^2 [vHt] \} L \{ \},$$

где $N+1$ - число отсчетов сигнала $y(t)$ на интервале формирования.

Используя неравенство Шварца-Буняковского $S_k^x Y_k - S_k^x 2L y_k$ и учитывая,

что ошибки tr_k и $\text{r}|_{2k}$, в силу функциональной связи $\sin[y(kA_t)]$ и $\cos[\|/(kA_t)]$, являются реализациями одного и того же случайного процесса и потому

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} L_{ik}^2 = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{2}_k = \hat{2}_k, \quad (4.4.8)$$

можно получить оценку энергии нерабочей боковой полосы в виде

$$\mathcal{E}_B \approx \sum_{k=-N/2}^{N/2} W^2(kA_t) \hat{r}|_{ik} \sum_{k=-N/2}^{N/2}$$

Степень подавления определяется отношением энергий нерабочей и полезной боковых полос:

$$\text{ЯБП} \quad \frac{\mathcal{E}_B}{\mathcal{E}_\Sigma} \leq \sum_{k=-N/2}^{N/2} \eta_k^2 \quad (4.4.9)$$

Для определения величины (4.4.9) рассмотрим ошибки

$$s_1(kA_t) = \cos[\|/(kA_t)] - \cos[\|/(kA_t) + r|i_k] = 2 \sin[\|/(kA_t) + r|i_k/2] \sin(r|i_k/2), \quad (4.4.10)$$

$$s_2(kA_t) = \sin[y(kA_t)] - \sin[Y(kA_t) + r|_{2k}] = 2 \cos[v(kA_t) + r|_{2k}/2] \sin(r|_{2k}/2).$$

Среднеквадратические значения ошибок (4.4.10) можно определить как

$$\begin{aligned} \sigma_{s_1}^2 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sin^2 [v(kA_t) + T]_{ik}/2 \quad \sigma_{s_2}^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \cos^2 [v(kA_t) + r|_{2k}/2] \sum_{k=-N/2}^{N/2} \\ \sigma_{s_1}^2 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sin^2 [v(kA_t) + T]_{ik}/2 \quad \sigma_{s_2}^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \cos^2 [v(kA_t) + r|_{2k}/2] \sum_{k=-N/2}^{N/2} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

где использовано неравенство Шварца-Буняковского и разложение функции $\sin(r|i_k/2)$ в ряд с удержанием первого члена ввиду малости $T|_k$.

Если интервал квантования A_n выбран в соответствии с неравенством (4.1.3), то можно считать, что ошибки (4.4.10) имеют равномерную плотность вероятности на интервале $[-A_n/2; A_n/2]$, нулевое среднее значение и дисперсию

$$\sigma_{\Gamma}^2 = A^2/12.$$

Осуществим нормировку сигнала $y(t)$ таким образом, чтобы на всем интервале формирования выполнялось условие $W(kA_t) < 1$. Тогда при равномерном v -разрядном квантовании диапазон возможных значений сигнала $y(t)e[-1; +1]$ разбивается на $N_v=2^v$ уровней и $A_n=2^{-(v+1)}$. Дисперсии ошибок (4.4.10) будут одинаковы и равны

$$(4.4.12)$$

При достаточно больших N и N_v ($\gg 1$) можно считать, что выражения (4.4.11) определяют дисперсии случайных величин $\delta_i(kA_t)$ и $S_2(kA_t)$. Тогда из (4.4.11) и (4.4.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N/2}^{N/2} \sin^2 [v(kA_t) + \pi|k|/2] \frac{1}{k} = \frac{1}{3N_v} \\ & \sum_{k=-N/2}^{N/2} \cos^2 [v(kA_t) + \pi|k|/2] \times \frac{1}{k^2} \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Если учесть, что

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} \sin^2 [v(kA_t) + \pi|k|/2] < 1, \quad \sum_{k=-N/2}^{N/2} \cos^2 [v(kA_t) + \pi|k|/2] > \frac{1}{2}$$

то из (4.4.13) и (4.4.8) получим

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{1}{k^2} \approx \frac{2^{2v}}{3N_v^3}$$

Тогда, из выражения (4.4.9) можно получить неравенство

$$\text{ТБП} - y \cdot 2^{-2v} \quad (4-4.14)$$

На рис. 4.4.1 приведена зависимость $10\lg(q_{\text{вп}})$ от разрядности ν формирователя аналитического сигнала $y(t)$. В системах связи с однополосной модуляцией требования к подавлению нерабочей боковой полосы обычно составляют 60дБ и более. Это означает, что АЦП и (или) формирователь (модулятор) должны быть 10... 12 - разрядными и более.

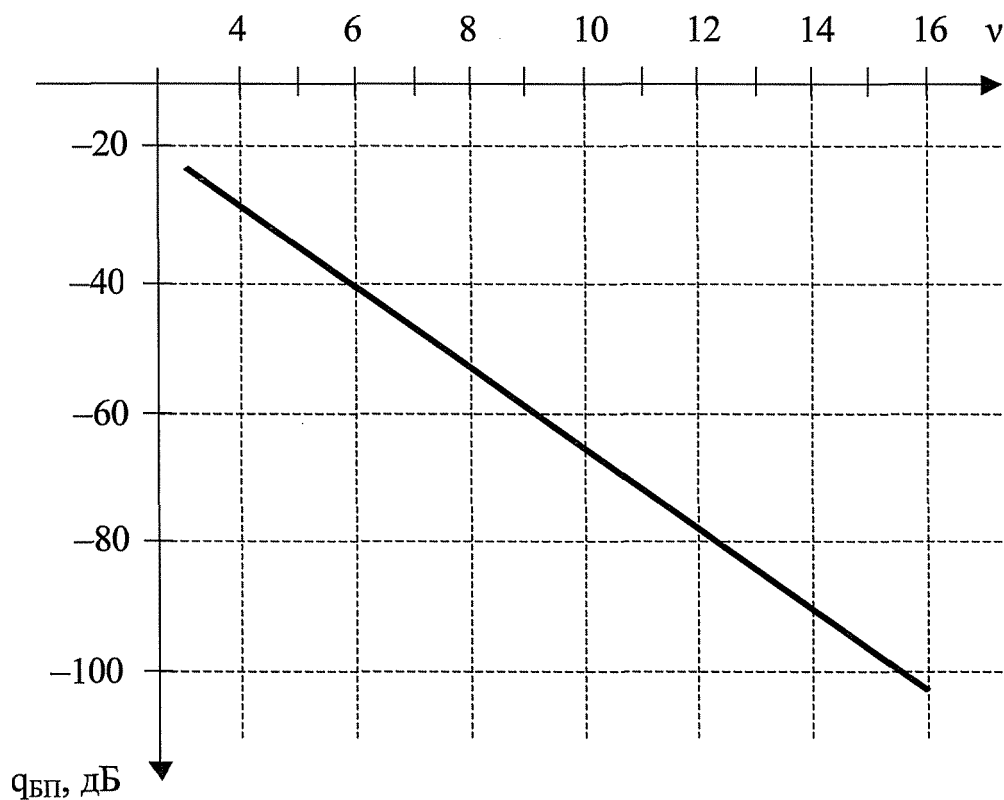


Рис. 4.4.1 Подавление нерабочей боковой полосы

Выводы к разделу 4

Практически все авторы [7, 19, 23-25, 74, 77, 92], исследующие процедуру амплитудного квантования детерминированных сигналов, при анализе используют один подход: считают квантователь линейным устройством, вносящим ошибку (шум) квантования. При этом полагается, что шум квантования некоррелирован. Выполнение этого условия требует определённого соотношения между интервалами временной дискретизации A_t и амплитудного квантования A_n , но в публикациях оно не уточняется.

В диссертационной работе получены соотношения между интервалами A_t и A_n , обеспечивающие некоррелированность шумов квантования. При этом показано, что условие некоррелированности зависит от максимальных значений первой и второй производных квантуемого сигнала. В свою очередь, максимальные значения зависят от ширины спектра и характера его убывания.

Переход от равномерного квантования к неравномерному позволит дополнительно уменьшить уровень шумов квантования путем оптимального выбора уровней амплитудной характеристики квантователя.

Разработана методика оптимизации АЦП, основанная на характеристиках распределения сигнала по уровням, введённых и рассмотренных в разд. 1.4 и Приложении А. Показано, что несмещенность ошибки квантования достигается соответствующим выбором выходных уровней состояния АЦП. Моделирование АЦП для ряда сигналов показало, что выигрыш оптимальных АЦП по сравнению с равномерным может составлять 1...3 дБ и более. Методика и результаты оптимизации опубликованы в работе автора [49].

Квантование детерминированных сигналов на фоне шума приводит к их преобразованию в нестационарный случайный процесс. Получены характеристики этого процесса: среднее значение, дисперсия и вероятность прохождения через АЦП, зависящие от значения сигнала. Получено условие некоррелированности шума квантования, связывающее интервал дискретизации, разрядность и динамический диапазон с корреляционными функциями сигнала и шума. Как следствие показано, что наличие некоррелированного шума при отношении сигнал/шум $\gg 1$

позволяет снизить требования к разрядности АЦП. Такой подход эвристически использован авторами работ [21, 108, 109]. Полученные условия позволяют обеспечить оптимальное соотношение между параметрами АЦП с гарантированным уровнем шумов квантования. Результаты исследований опубликованы в работе автора [45].

Особенностью квантования детерминированных сигналов является необходимость обеспечения не только допустимого уровня шумов квантования, но и всего комплекса требований к сигналу. Одним из таких требований может быть совместная точность действительной и сопряженной по Гильберту составляющих аналитического сигнала. В работе показано, что составляющие аналитического сигнала для систем с однополосной модуляцией должны квантоваться в 10—12-разрядном АЦП для подавления нерабочей боковой полосы на 60...70 дБ. Результаты этих исследований опубликованы в работах автора [44, 58].

Таким образом, квантование детерминированных сигналов неизбежно приводит к появлению ошибок (шума), которые можно сделать меньше любой допустимой величины. Для этого необходимо выбрать динамический диапазон и интервал квантования (разрядность) АЦП в соответствии с полученными соотношениями (4.1.3), (4.1.7). Оптимальным выбором расположения уровней в соответствии с разработанной методикой можно обеспечить минимум шума квантования.

РАЗДЕЛ 5

ТЕОРИЯ КВАНТОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

5.1. Идеальное квантование

Амплитудному квантованию подвергаются, как правило, отсчеты $\hat{x}_k = \xi(kA_t)$ некоторого случайного процесса $\hat{x}(t)$, получаемые из его выборок в моменты kA_t , $|k| \in \{0; 1; 2; \dots\}$. При этом полагается, что квантуемый процесс удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова и интервал временной дискретизации A_t выбран в соответствии с её требованиями (См. раздел 3.1).

Исходный процесс $\xi(t)$ описывается функцией распределения плотности вероятности $W^{\wedge}(x)$ и характеристической функцией [67, 86, 110]

$$O_{jj}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_w(x) e^{jux} dx.$$

В результате дискретизации и квантования в v -разрядном АЦП с характеристикой типа (1.3.7) (или другой из разд. 1.3), получаем случайный процесс $q(kA_t)$, значения которого определяются множеством $V \in \{V^{\wedge}, \wedge \in \{1, N_v + 1\}$ выходных уровней состояния. Распределение вероятности процесса $g(kA_t)$ по элементам множества V могут быть найдены как вектор

$$P_{\zeta} \in \left\{ p_{\ell} = \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} W_{\xi}(x) dx, \quad \ell \in \overline{1, N_v + 1} \right\} \quad (5.1.1)$$

где u_{ℓ} - входные уровни сравнения АЦП.

Рассмотрим случай использования гипотетического АЦП с бесконечно большим числом входных уровней сравнения $N_v \rightarrow \infty$ и равномерным шагом $u_{\ell} - u_{\ell-1} = v_{\ell} - v_{\ell-1} = A_u$, $|\ell| \in \{0; 1; 2; \dots\}$ (см. рис. 1.3.1). Пусть уровни состояния соответствуют $-\ell A_u$, $|\ell| \in \{0; 1; 2; \dots\}$. Тогда, при достаточно малом A_u , вектор (5.1.1) можно представить в виде «непрерывной» функции

$$P_{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} X A_u W_{\xi}(x) \delta(x - M_u), \quad (5.1.2)$$

где $\delta(x - \xi A_n)$ - дельта-функция в точке $x = \xi A_n$.

Характеристическую функцию случайного процесса с распределением (5.1.2) - $O_\gamma(jX)$ можно найти как свертку (см. аналогично в разд. 2.1) характеристических функций исходного процесса $O^\wedge(jA_n)$ и периодической последовательности δ -функций с периодом A_n - $O_5(jX)$:

$$O_\gamma = O^\wedge X * O_5(X), \quad (5.1.3)$$

где $O_5(A) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - 2\xi/A_n)$.

При дискретном характере $O_5(X)$ свертка (5.1.3) примет вид:

$$O_\gamma(A) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} O^\wedge B(\xi + 2\xi/A_n). \quad (5.1.4)$$

Если характеристическая функция $O_5(jX)$ не содержит составляющих со значениями выше L_T :

$$\theta_\xi(j\lambda) = \begin{cases} \theta_{\xi 0}(j\lambda), & |\lambda| \leq \Lambda_m, \\ 0, & |\lambda| \geq \Lambda_m, \end{cases} \quad (5.1.5)$$

а интервал A_n выбран из условия

$$A_n < L/L_T, \quad (5.1.6)$$

то парциальные составляющие в сумме (5.1.6) не перекрываются и характеристическая функция (5.1.4) представляет собой бесконечную последовательность характеристических функций $O^\wedge(jX)$, смещенных по оси X на величину $2\xi A_n/A_n$.

На рис. 5.1.1,а для исходного случайного процесса с распределением

$W(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(\xi x)}{x^2}$ - где ξ - параметр распределения [110], показана характеристическая функция

$O_\gamma(A) > O^\wedge$ на рис. 5.1,б преобразов.

вание Фурье периодической последовательности δ -функций с периодом $A_n < L/\xi$ и на рис. 5.1.1, в - результат их свертки.

Характеристическая функция суммы двух независимых случайных процессов равна произведению характеристических функций слагаемых [67, 86,

110]. Поэтому можно восстановить исходный непрерывный случайный процесс $2, (kA_t)$, если квантованный процесс $g(kA_t)$ просуммировать с независимым случайным процессом $r|_B(t)$, имеющим характеристическую функцию вида

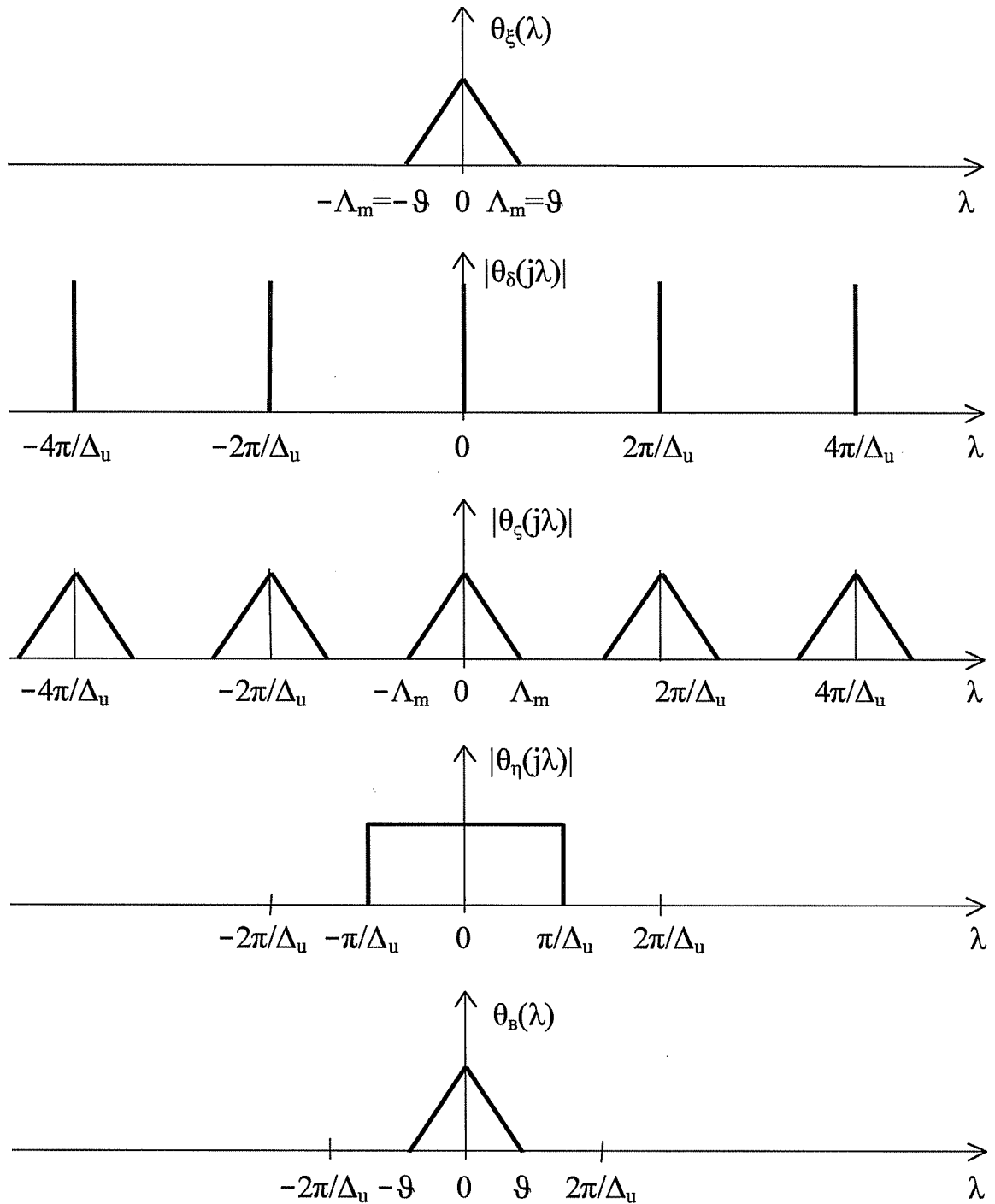


Рис. 5.1.1 Преобразование характеристических функций

$$\theta_{\eta}(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < \pi/\Delta_u, \\ 0, & |\lambda| > \pi/\Delta_u. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

После суммирования $g(kAt)h](kAt) = \hat{W}(kA_t)$ получаем характеристическую функцию $O_B(jX) =$ которой соответствует функция распределения плотности вероятности $W_B(x) = W^\wedge(x)$.

На рис. 5.1.1,г изображена характеристическая функция вида (5.1.7) и на рис. 5.1.1,д - характеристическая функция восстановленного сигнала.

Таким образом, теорема Котельникова может быть обобщена на процедуру амплитудного квантования случайных процессов в следующей формулировке.

Если характеристическая функция $O(jX)$ случайного процесса не имеет составляющих выше L_m , то его функция распределения плотности вероятности полностью определяется своими значениями $W(U_i)$, $i \in \{0; 1; 2; \dots\}$ полученными с интервалом L^\wedge / L_m . Для восстановления исходного распределения необходимо просуммировать квантованный случайный процесс и независимый случайный процесс с характеристической функцией вида (5.1.7).

Теорема будет справедлива при выполнении ряда условий, аналогичных условиям раздела 2.1.

- Характеристическая функция $O(jX)$ должна быть равно нулю вне интервала $[-L_T]$.
- При ограниченной характеристической функции функция распределения плотности вероятности будет не усеченной и, поэтому, число значений (отсчетов) должно быть бесконечно большим. Это означает, что квантователь должен иметь бесконечно большое число уровней сравнения (бесконечно большую разрядность).
- Отсчеты функции $W(\wedge A_U)$ должны быть получены для бесконечно малых окрестностей точек $\wedge A_n$, $\wedge \in \{0; 1; 2; \dots\}$ (в виде δ -функций).
- Интервалы квантования $A^\wedge = \Delta - \Delta_{15} - \Delta \in \{0; 1; 2; \dots\}$, должны быть одинаковыми и равными $A_n < L / L_T$.

- Восстанавливающий случайный процесс должен быть независимым с характеристической функцией вида (5.1.7).

Все эти условия физически нереализуемы, поэтому амплитудное квантование в реальных системах также сопровождается ошибками (погрешностями) восстановления. Суммарная ошибка будет складываться из ошибки конечного числа уровней квантования (ошибка ограничения), ошибки из-за бесконечности характеристической функции квантуемого сигнала, ошибки из-за не идеальности характеристической функции восстанавливающего процесса. Выбором параметров квантователя и восстанавливающего процесса величину суммарной ошибки можно сделать сколь угодно малой, приближаясь к требованиям идеального квантования. Возможность такого подхода к амплитудному квантованию отмечается в работе [64].

Нестационарный случайный процесс имеет функцию распределения плотности вероятности $W(x, t)$ и характеристическую функцию $O(jX, t)$ зависящие от времени. После временной дискретизации и амплитудного квантования получим случайный процесс с распределением вероятности

$$P_{gk} \in P_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (x, t) dx, I \in 1, N_U + 1 > \quad (5.1.8)$$

также зависящим от времени (номера временного отсчета k).

При финитной характеристической функции $O(jX, kA_t)$ предельное значение $X=A_m(kA_t)$ также будет, в общем случае, зависеть от времени. Однако, в силу ограниченности $O(jX, kA_t)$ область значений $A_m(kA_t)$ должна иметь конечное значение точной верхней грани - $\sup\{A_m\}$.

Для такого сигнала амплитудное квантование должно быть либо адаптивным, с изменением интервала A_n в соответствии с изменением $A_m(kA_t)$, либо этот интервал должен удовлетворять неравенству

$$\Delta < \sup\{A_m\}$$

5.2. Погрешности амплитудного квантования

Рассмотрим ошибки (погрешности), возникающие при квантовании непрерывного случайного процесса в равномерном АЦП с характеристикой (1.3.7), симметричной относительно нуля. Выразим уровни сравнения через стандартное отклонение квантуемого сигнала σ_n :

$$(5.2.1)$$

где $\Delta u_n = u_{N_v} - u_i$ - динамический диапазон АЦП, связанный с интервалом Δu_n соотношением

$$\frac{\Delta u_{N_v} - u_i}{\Delta u_n} = \frac{\sigma_{\Delta u_n}}{\sigma_n} \quad (5.2.2)$$

При этом полагается, что в АЦП теоретически существуют два бесконечных уровня сравнения: $U_0 = -\infty$ и $U_{N_v+1} = +\infty$.

Выходные уровни состояния в таком АЦП можно представить в виде

$$L \cdot 2^{i-1} \cdot \Delta u_n \quad i=1, N_v+1 \quad (5.2.3)$$

При квантовании ансамбля реализаций случайного процесса распределение вероятности на выходе АЦП будет определяться вектором $P_{\text{кв}}$, представленном в виде (5.1.1). По нему можно определить числовые характеристики: среднее значение

$$x_{\text{ср}} = (V, P_{\text{кв}}) = \sum_{i=1}^{N_v+1} 2^{i-1} \Delta u_n P_i \quad (5.2.4)$$

и дисперсию

$$D_{\text{кв}} = (V_2, P_{\text{кв}}) = \sum_{i=1}^{N_v+1} 2^{2(i-1)} (\Delta u_n)^2 P_i - x_{\text{ср}}^2 \quad (5.2.5)$$

где $V_2 = \sum_{i=1}^{N_v+1} 2^{2(i-1)} (\Delta u_n)^2 P_i$ и (V, P) - скалярное произведение векторов V и P .

Для получения среднего значения квантованного сигнала равного среднему значению (матожиданию) исходного процесса $x_{\text{кв}} = x_0$, достаточно выбрать значения

выходных уровней V из условия

$$Y = \langle y \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx} \quad (5.2.6)$$

где $W(x)$ - распределение плотности вероятности квантуемого процесса;

p_ℓ - вероятность, определяемая вектором (5.1.1).

Условие (5.2.6) обеспечивает несмещенность значения x_{cp} при любом виде распределения $W(x)$ и любой разрядности АЦП.

Используя выражения (5.2.2), (5.2.5) и считая, что квантуемый процесс обладает нулевым средним значением, получим

$$\sigma_{кв}^2 = \frac{\mu^2 \sigma_n^2}{(N_v - 1)^2} \sum_{\ell=1}^{N_v+1} \left(\ell - 1 - \frac{N_v}{2} \right)^2 p_\ell.$$

На рис. 5.2.1 приведены графики зависимости относительной дисперсии квантованного гауссова процесса от динамического диапазона АЦП при разрядности $v=2$ (кривые 1), $v=3$ (кривые 2) и $v=4$ (кривые 3). Сплошные линии соответствуют нечетному, а пунктирные четному типу характеристики АЦП (см. раздел 1.3).

Из рис. 5.2.1 следует, что для получения параметров квантованного нормального процесса достаточно близких к исходному непрерывному, необходимо иметь АЦП с разрядностью $v > 3$ и динамическим диапазоном более 60 ($\mu > 6$).

Нормированная корреляционная функция квантованного процесса $\gamma_{кв}(kA_t)$ связана сложной зависимостью с корреляционной функцией $\gamma_n(t)$ исходного сигнала и интервалом A_t , однако если приращение помехи на интервале A_t превышает величину A_n , а процесс удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова, то $\gamma_{кв}(kA_t) = \gamma_n(t) |T = kA_t|$.

Воспользовавшись известным [67] выражением, определяющим приращение случайного процесса за некоторый интервал времени A_t , получим условие

$$\sqrt{2\sigma_n^2 [1 - r_n(\Delta_t)]} > \Delta_u, \quad (5.2.8)$$

обеспечивающее сохранение корреляционной функции и связывающее величины интервалов временного и амплитудного квантования. Подставив в неравенство

(5.2.8) выражение (5.2.2), получим

$$1 - \gamma \frac{(A_t)^2}{2(N_v - 1)^2} > \dots \dots \dots \quad (5.2.9)$$

Данное выражение связывает три параметра АЦП: динамический диапазон σ , интервал временной дискретизации A_t и количество уровней сравнения N_v (разрядность v).

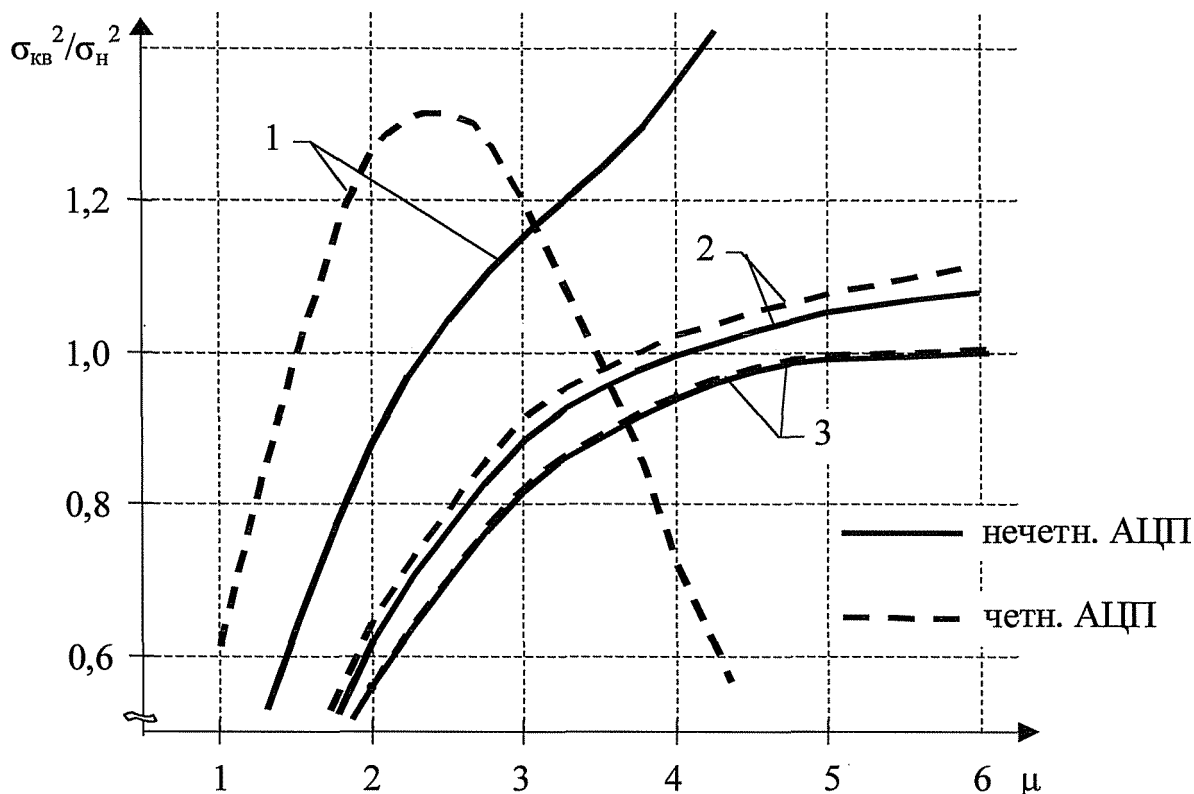


Рис. 5.2.1 Дисперсия квантованного процесса

Проведенный выше укрупненный анализ позволил установить общие соотношения между параметрами АЦП и квантуемого сигнала. Более детальный анализ должен дать величину погрешности (ошибки), возникающей при квантовании. При этом необходимо воспользоваться одним или несколькими критериями, рассмотренными в разделе 1.5.

Наиболее часто используется среднеквадратичный критерий, по которому ошибку амплитудного квантования можно представить [19, 127] в виде

$$S^2_{ки} = \sum_{k=0}^{N_v+1} j(x-vj)w(x)dx. \quad (5.2.10)$$

При получении величины ошибки (5.2.10) сделано допущение о некоррелированности отсчетов. Обеспечить некоррелированность не всегда возможно и целесообразно, так как интервал временной дискретизации A_t , определяемый на основе теоремы Котельникова, дает коррелированные отсчеты и, как следует из (5.2.8), разрядность АЦП должна быть достаточно большой. Игнорирование временных связей приводит к тому, что использование среднеквадратичного критерия не исключает появления заметных искажений даже в таком простейшем случае, как квантование речевых сигналов [18].

При коррелированных отсчетах следует использовать корреляционный критерий (см. разд. 1.5), имеющий для стационарных сигналов вид

$$R_R = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_0^V [R_W - R_{\infty}]^2 dt. \quad (5.2.11)$$

Рассмотрим величины возникающих ошибок при использовании корреляционного и среднеквадратичного критериев.

Пусть на АЦП поступает стационарный сигнал с нулевым средним значением, дисперсией σ_n^2 и двумерной плотностью вероятности $W_2(x, y, T)$ для двух значений сигнала x и y , разделенных временным интервалом T .

Двумерная плотность вероятности может быть представлена в виде произведения одномерной $W(x)$ и условной $W_y(y/x, x)$ плотностей вероятности $W_2(x, y, x) = W(x)W_y(y/x, x)$. В этом случае автокорреляционную функцию можно представить в виде

$$R_{\cdot}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^x y W_2(x, y, T) dy dx = \int_{I=I}^{N_v+1} W(x) \int_{j=1}^{N_v+1} W_y(y/x, T) dy dx. \quad (5.2.12)$$

Квантованный процесс будет иметь корреляционную функцию

$$*_{кв}(k, T) = \sum_{j=1}^{N_v+1} \sum_{p=j}^{N_v+1} (k A_t)^{j-p}, \quad (5.2.13)$$

где v_c, V_j - квантованные значения, разделенные интервалом kA_t ;

$$p^{(kA_t)} = \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} \int_{u_{j-1}}^{u_j} W_2(x, y, kA_t) dy dx = \int_{u_w} W(x) \int_{u_{j-1}}^{u_j} W_y(y/x, kA_t) dy dx$$

-совместная

вероятность значений v_t и V_j .

Подставляя выражения (5.2.12), (5.2.13) в (5.2.11) и заменяя разность интегралов в одинаковых пределах интегралом разности подынтегральных выражении, получаем

$$\begin{aligned} \delta_R^2 &= \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} (x - v_{\ell}) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (y - v_j) W_2(x, y, kA_t) dy dx \right]^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} (x - v_{\ell}) W(x) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (y - v_j) W_y(y/x, kA_t) dy dx \right]^2} \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

При $k=0$ условная плотность вероятности вырождается в δ -функцию: $W(y/x, 0) = \delta(y-x)$ и, тогда,

$$\sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} f(y - V_j) \delta(y - u) dy = x - v_j.$$

Учитывая это соотношение и симметрию автокорреляционной функции, выражение (5.2.14) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N_v+1} \int_{u_{i-1}}^{u_i} f(x - v_i) W(x) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} f(y - v_j) W_y(y/x, kA_t) dy dx \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u_M}^{e=1} \sum_{u_H} \int_{u_{j-1}}^{u_j} f(x - v_i) W(x) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} f(y - v_j) W_y(y/x, kA_t) dy dx \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Первое слагаемое в подкоренном выражении (5.2.15) представляет собой квадрат мощности погрешности квантования $\delta_{кп}^2$, минимизируемой по среднему квадратичному критерию (5.2.10). Вектор V должен при этом удовлетворять условию несмещенности среднего значения (5.2.6).

Во втором слагаемом подкоренного выражения (5.2.15) для значений $k >$

$1/2F_m A_t$ можно считать $W_y(y/x, kA_t) = W(y)$, так как для больших временных сдвигов kA_t отсчеты практически некоррелированы. Тогда, при выполнении условия (5.2.6), значения интегралов в суммах по $-E$ и j будут равны нулю. Это позволит при суммировании по Π ограничиться конечным числом слагаемых $M = \text{int}(1 + 1/2F_m A_t)$, где $\text{int}(z)$ - целая часть числа z . Из выражения (5.2.15) следует

$$\begin{aligned} \delta_R^2 &= \sqrt{\delta_{KB}^2 + 2 \sum_{k=1}^M \left[\sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_\ell} (x - v_\ell) W(x) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (y - v_j) W_y(y/x, kA_t) dy dx \right]^2} \\ &= \sqrt{\delta_{KB}^2 + 2 \sum_{k=1}^M \left[\sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_\ell} (x - v_\ell) \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (y - v_j) W_2(x, y, kA_t) dy dx \right]^2}. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом подкоренного выражения (5.2.16) сумма

$$Y(x, kA_t) = 2 \sum_{j=1}^{N_v+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (y - v_j) W_y(y/x, kA_t) dy = y_{cp}(x, kA_t) - y_{cpil}(x, kA_t) \quad (5.2.17)$$

представляет собой разность условных средних значений аналогового $y_{cp}(x, kA_t)$ и цифрового $y_{cpil}(x, kA_t)$ сигналов для данного значения отсчета x и временного интервала kA_t . На рис. 5.2.2 показана одномерная плотность вероятности $W(x)$, условная плотность вероятности $W_y(y/x, kA_t)$ для некоторого отсчета $x_{отс}$, а также условные вероятности p_{cj} значения V_j при данном отсчете. Для аналогового сигнала, используя линейную регрессию y на x [12], можно записать $y_{cp}(x, kA_t) = xr(kA_t)$, где $r(kA_t) = R(kA_t)/\sigma_H^2$ - нормированная автокорреляционная функция. В случае сильной корреляции отсчетов квантованного сигнала ($kA_t \ll 1/2F_m A_t$), когда условное стандартное отклонение $\sigma_{усл}$ распределения $W_y(y/x, kA_t)$ существенно меньше интервала [щ-ь щ], справедливо неравенство (рис. 5.2.2) $y_{cp}(x, kA_t) - y_{cpil}(x, kA_t) < (x - v^\wedge)r(kA_t)$. Это позволяет определять верхнюю границу погрешности (5.2.16) в виде

$$\delta_R^2 \leq \sqrt{\delta_{KB}^4 + 2 \sum_{k=1}^M \int_{u_{\ell-1}}^{u_\ell} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (x - v_j)^2 W(x) dx} \quad \frac{I M n}{L1 + 2fr(kA_t) - (5-2.18)} \quad \forall k=1$$

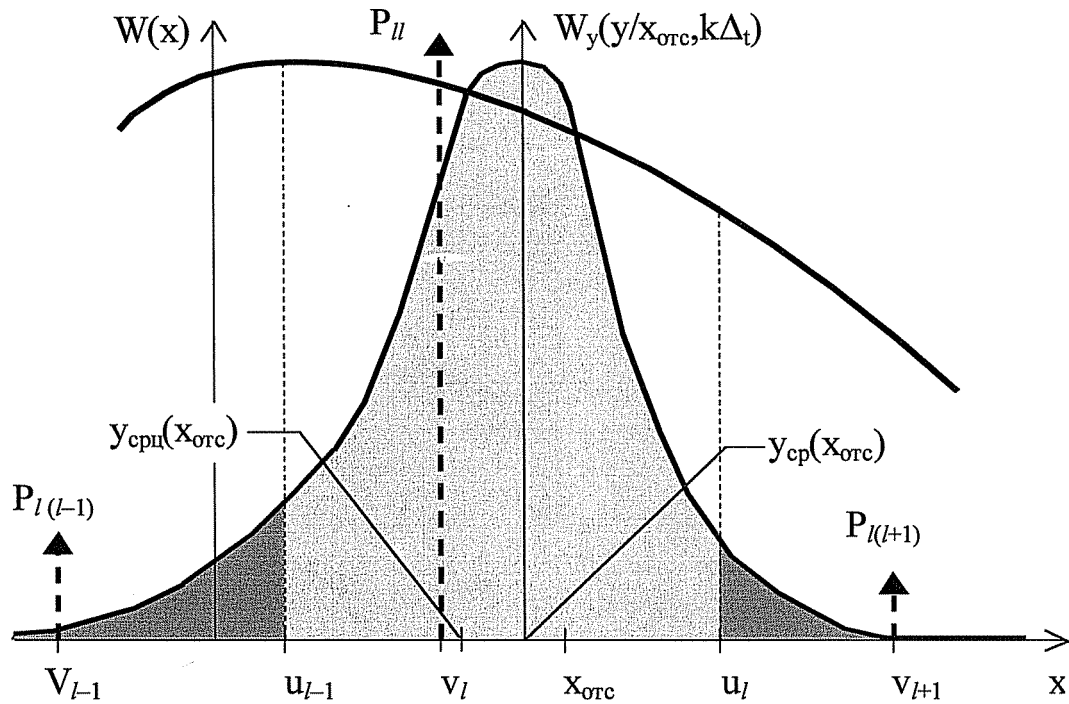


Рис. 5.2.2 Функции распределения вероятности исходного и квантованного процессов

На рис. 5.2.3 приведена зависимость верхней границы погрешности (5.2.18), отнесенной к среднквадратичной мощности шумов квантования, от величины $a=1/2F_m A_t$ для корреляционной функции вида $\sin(z)/z$ (кривая 1) и треугольной формы (кривая 2).

Соотношения (5.2.16) или (5.2.18) и рис. 5.2.3 позволяют оценивать рост искажений сигнала с увеличением степени коррелированности отсчетов при неизменной мощности шумов квантования $\sigma_{кв}^2$.

Для снижения искажений необходимо уменьшить разность условных средних (5.2.17), а это возможно путем уменьшения интервалов $A^{\wedge} = \psi_{+1} - \psi_{-1}$ при увеличении разрядности АЦП. Чем меньше интервал A^{\wedge} по отношению к условному стандартному отклонению $a_{усл}$, тем меньше разность (5.2.17). Учитывая, что при линейной регрессии $\sigma_{усл} \approx a_n \sqrt{1-r^2(A_t)}$, где a_n - стандартное отклонение исходного сигнала, соотношение между ними можно записать в виде

$$A_{\text{ф}} < a_{\text{нА}} / \sqrt{1-r^2(A_t)}, \quad \wedge \text{el}, N_v - 1. \quad (5.2.19)$$

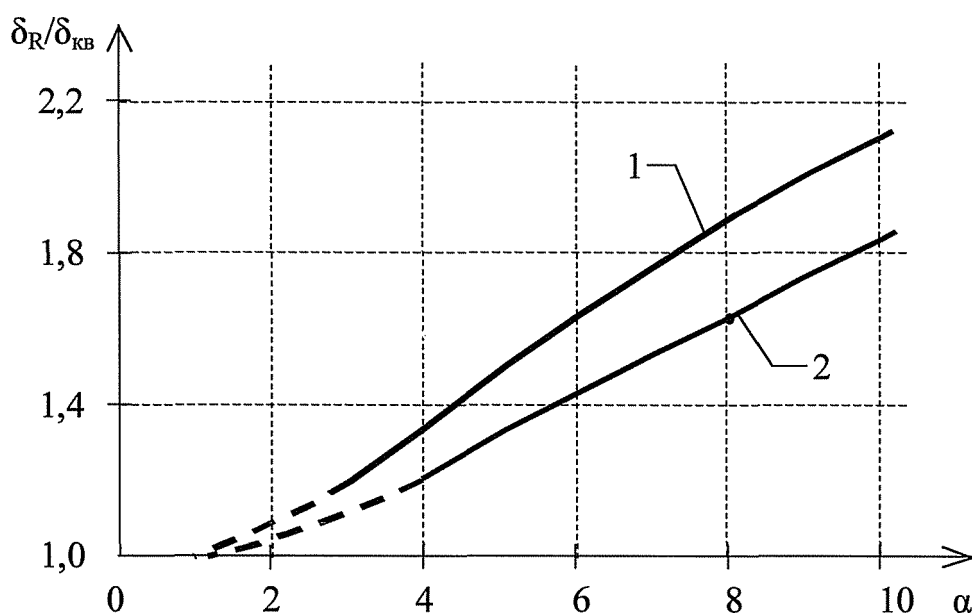


Рис. 5.2.3 Погрешность квантования по корреляционному критерию

Для равномерного АЦП с характеристикой (5.2.1) условие (5.2.19) совпадает с условием (5.2.7).

Таким образом, предложенный корреляционный критерий 3_R^2 , включающий мощность шумов квантования, учитывает временные связи в сигнале и обеспечивает более точный анализ при преобразовании сигнала. Выражение (5.2.16), определяющее величину погрешности, справедливо при любой степени корреляции, однако в АЦП целесообразно обеспечить выполнение условия (5.2.19). Это позволит уменьшить величину искажений в сигнале до уровня $5_{Ю}^2$. Следует также отметить, что условие (5.2.6) оптимальности вектора V , полученное для среднеквадратичного критерия, остается справедливым и для корреляционного критерия.

5.3. Оптимизация аналого-цифрового преобразователя

Оптимизация АЦП, как и любого устройства, проводится на основе какого-либо критерия. Вид критерия, лежащего в основе оптимизации, определяется задачей, решаемой системой. В работах, посвященных выбору и оптимизации параметров АЦП (см., например, [19, 22, 74, 84, 127]), практически всегда используется один критерий - мощность шумов квантования. В ряде случаев это может привести к завышению требований к системе и неоптимальному выбору параметров. Рассмотрим методы оптимизации по важнейшим критериям, рассмотренным в разд. 1.5.

В системах, информационным параметром которых является среднее значение случайного сигнала (процесса), в качестве критерия может быть использован минимум отличия средних значений сигналов: исходного аналогового - x_0 и квантованного - x_{cp} . Погрешность квантования в этом случае можно записать в виде

$$\delta_{cp} = |x_0 - x_{cp}|. \quad (5.3.1)$$

Среднее значение квантованного сигнала (5.2.4) можно определить через вектор-строку выходных уровней АЦП - V и вектор-строку (5.1.1) распределения вероятностей выходного сигнала P по элементам вектора V .

Используя выражение, определяющее среднее значение непрерывной случайной величины [67, 127], и (5.2.4), погрешность (5.3.1) можно представить в виде

$$\delta_{cp} = E \int_{v_{гч}}^{v_{гч}+1} W(x) dx \quad (5.3.2)$$

Проведем замену переменной интегрирования на интервале $[v_{гч}; v_{гч}+1]$:

$$x = v_{гч} + \Delta. \quad (5.3.3)$$

При этом получим

$$\delta_{cp} = \int_{v_{гч}}^{v_{гч}+1} W(v_{гч} + \Delta) d\Delta \quad (5.3.4)$$

На рис. 5.3.1 изображено некоторое исходное распределение $W(x)$ и преобразование (5.3.3), означающее, что на интервале $[v_l, v_{l+1}]$ начало координат перенесено в точку v_l , а значение интеграла, входящего в сумму (5.3.4), определяет среднее значение распределения $W(v_l + \xi)$ на этом интервале

$$e_{p_l} = \int_{v_l}^{v_{l+1}} W(x) dx.$$

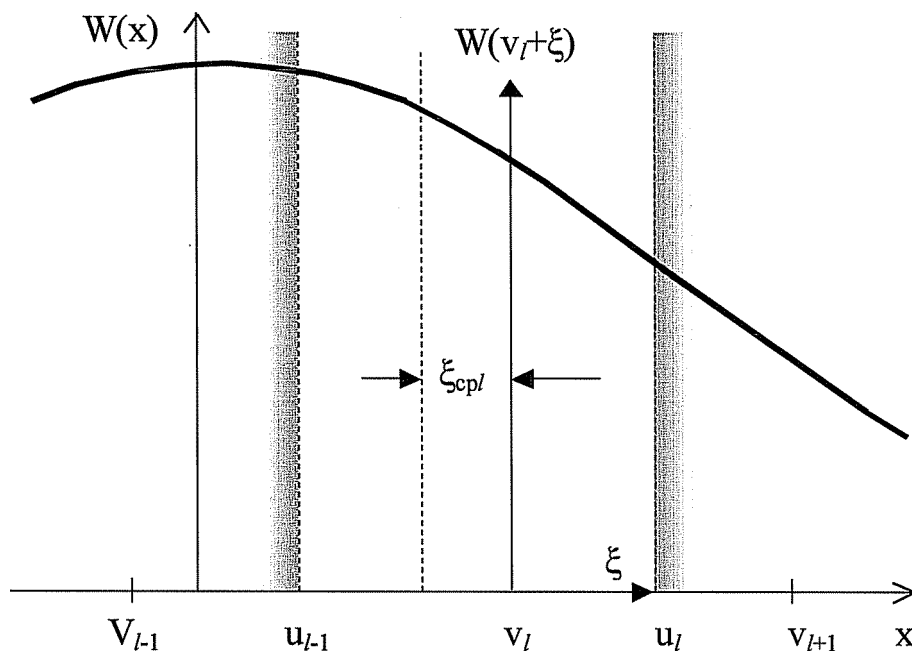


Рис. 5.3.1 Соотношение переменных x и ξ

Если выбрать из условия

$$i \quad \text{---}$$

$$v_{\xi} = \int_{v_l}^{v_{l+1}} W(x) dx, \quad l=1, N_v+1, \quad (5.3.5)$$

где p_l - l -й элемент вектора P (см. (5.1.1)), то значение интеграла будет равно нулю ($\xi_{срl} = 0$) и, таким образом, будет достигнут абсолютный минимум погрешности (5.3.4). Разрядность АЦП в этом случае не влияет на качество оптимизации, так как условие (5.3.5) может быть выполнено при любом значении ξ и произвольном векторе входных уровней сравнения АЦП - U . Однако желательно располагать элементы вектора U в зоне наибольших значений $W(x)$ с тем, чтобы вектор P не имел элементов, близких к нулю. Иначе, согласно (5.3.5), в векторе V будут элементы с

большим абсолютным значением, и система будет чувствительна к их точности.

В системах с энергетическим информационным параметром может быть использовано несколько вариантов среднеквадратичного критерия. Это критерий минимума степени отличия вторых начальных моментов распределений аналогового и квантованного сигналов, который можно записать в виде

$$\delta_m^2 = |m_2 - m_{2KB}| = \left| \sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} (x^2 - v_{\ell}^2) W(x) dx \right|, \quad (5.3.6)$$

где m_2 - второй начальный момент аналогового сигнала;

$$m_{2KB} = \sum_{\ell=1}^{N_v+1} v_{\ell}^2 p_{\ell} \quad \text{- второй начальный момент квантованного сигнала (см.(5.2.5)).}$$

Это критерий минимума степени отличия дисперсий исходного процесса σ_0^2 и квантованного $\langle J_{KB}^2 \rangle$:

$$\delta_a^2 = |\sigma_0^2 - \langle J_{KB}^2 \rangle| = \sigma_0^2 - \langle J_{KB}^2 \rangle \quad (5.3.7)$$

$$\text{Где } \sigma_0^2 = \sigma_{KB}^2 - \sigma_{cp}^2, \quad (5.3.8)$$

а также широко используемый критерий минимума мощности шумов квантования [3, 19, 21, 84, 127]

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - v_j) w(x) dx. \quad (5.3.9)$$

Для центрированных случайных процессов условия (5.3.6) и (5.3.7) эквивалентны, поэтому рассмотрим соотношение погрешностей (5.3.6) и (5.3.9).

Проведем в выражении (5.3.9) замену переменной в соответствии с (5.3.3) и получим

$$\sigma^2 = \sum_{\ell=1}^{N_v+1} \int_{u_{\ell-1}}^{u_{\ell}} h^2 W(v_{\ell} + x) dx \quad (5.3.10)$$

Выражение (5.3.10) представляет собой сумму всегда положительных вторых начальных моментов распределения $W(x)$ на отрезках относительно точек V_{ℓ}

(см. рис. 5.3.1). Второй начальный момент можно представить в виде суммы дисперсии и квадрата среднего значения:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} J^2 W(v) dv = \sigma^2 + \mu^2 \tag{5.3.10}$$

Величина дисперсии σ^2 не зависит от вектора V и не может быть равной нулю при конечной величине N_v . Однако погрешность квантования (5.3.10) может быть минимизирована, если вектор V выбрать из условия (5.3.5), обращая σ^2 в нуль, а вектор U - из условия минимума суммы $a_j, j \in 1, N_v + 1$.

Замена переменной по правилу (5.3.3) и учет соотношений (5.3.8) в выражении (5.3.6) приводят к соотношению

$$\sum_{i=1}^{N_v+1} \int_{-\infty}^{\infty} J^2 W(v_i + 5X + 2V) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \xi W(v_\ell + \xi) d\xi \tag{5.3.11}$$

Первое слагаемое в выражении (5.3.11) эквивалентно интегралу в (5.3.10), а интеграл во втором слагаемом - интегралу в выражении (5.3.4). Если вектор V выбрать в соответствии с условием (5.3.5), то выражения (5.3.10) и (5.3.11) становятся эквивалентными. Различие соотношений (5.3.11) и (5.3.10) заключается в том, что соответствующим выбором вектора V первое может быть обращено в нуль. Искомый вектор-строка V_m определяется как

$$V_m = V_0 + V_d, \tag{5.3.12}$$

где

$$V_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx, \tag{5.3.13}$$

а элементы корректирующего вектора-строки V_d находятся из условия равенства нулю суммы интегралов в выражении (5.3.11):

$$V_d = \dots \tag{5.3.14}$$

где

$$a? \quad U^{\wedge} - Vtu = J(\xi - f_{cp} n^2 W(v_{,,}, + \xi) dE. - \\ u^{\wedge} - v_0 \xi$$

Таким образом, процедура оптимизации по любому энергетическому критерию сводится к нахождению вектора-строки U , минимизирующего целевую функцию

$$J(U) = \int_{\xi=1}^{N_v+1} u^{\wedge} - v_0 \xi \wedge^2 W(v_0 < + \wedge \\ U_w - v_0 \xi \quad (5.3.14)$$

при условии, что вектор-строка V_0 определяется соотношением (5.3.13). При необходимости значение оптимального вектора может быть уточнено в соответствии с (5.3.12).

Задача оптимизации АЦП по целевой функции (5.3.14) может быть решена методом нахождения экстремума функции N_v+1 переменных [14]. Решить эту задачу в общем виде или для конкретных видов распределений затруднительно. Более перспективным, в практическом плане, является применение численных методов [9, 29]. В работе [127] с помощью ЭВМ определен вектор-строка V , минимизирующий целевую функцию (5.3.14) при условии

$$\wedge e_1, N_v+1, \quad (5.3.15)$$

для распределения Лапласа, а в [19] приведены результаты численной оптимизации для нормального распределения. Однако, условие (5.3.15) является довольно жестким ограничением, и полученные результаты не позволяют сделать общих выводов.

Для получения оценок возможных результатов оптимизации можно осуществить аппроксимацию распределения $W(x)$ тем или иным методом.

Наиболее простой (но и грубой) является ступенчатая аппроксимация. Заменяем распределение $W(x)$ на интервалах $[\psi_{-}; \psi]$, $t \in 2, N_v$, ступенчатым

$$W_{ст}(x) = 0,5[W(u,_{-1}) + W(u,)].$$

Два полу бесконечных интервала $(-\infty; V_0$ и $(u_{N_V}; \infty)$ заменим на конечные с площадью под распределением $W_{CT}(x)$, равной исходной. Это определяет два уровня в вектор-строке U

$$U = \left\{ u_1, \dots, u_{N_V} \right\} \quad (5.3.16)$$

где $F(x)$ - интегральная функция распределения квантуемого сигнала. Оптимальный вектор-строка V_0 в этом случае определяется как

$$V_{0CT} = \{ V_{0CT} = 0,5(u^{\wedge} + u^{\wedge}_{-1}), \wedge \in \{1, N_V + 1\},$$

а целевая функция принимает вид

$$J_{CT}(U) = \frac{F^3(U)}{3W^2(u)} \quad (5.3.17)$$

Нахождение экстремума функции N_V переменных представляет достаточно сложную задачу, а получаемые нелинейные АЦП сложны в реализации. Поэтому представляет интерес определить оптимальный вектор U на множестве векторов с линейной функцией $f_u(*)$ (см. разд. 1.3):

$$U = \{ u^{\wedge} = u_n + (-1)J_n, \wedge \in \{1, N_V, u_0; u_{N_V+1} \}, \quad (5.3.17)$$

где u_n - некоторый начальный уровень.

Элементы u_0 и u_{N_V+1} могут принимать значения в соответствии с (5.2.1), либо, при аппроксимации, в соответствии с (5.3.16). При этом целевая функция зависит только от двух параметров: начального уровня $u_n = u$ и интервала между уровнями $A_U = A_V = A$:

$$J_{CT}(U) = \frac{F^3(U)}{3W^2(u)} \quad (5.3.18)$$

Для симметричных законов распределения с нулевым средним значением справедливо соотношение

и, тогда, параметры ψ и A можно выразить через динамический диапазон АЦП $u_{N_v} - U_i = p_{00}$:

$$A = p_{00}/(N_v-1), U_i = -u_{N_v+i} = -0,5p_{00}. \quad (5.3.19)$$

Для таких законов целевая функция зависит только от относительного динамического диапазона АЦП - ψ .

В этом случае можно попытаться аналитически определить оптимальную величину динамического диапазона ψ_{opt} , при котором $dJ_{CT}/d\psi = 0$. Однако для большинства распределений выражения получаются слишком сложными и определение ψ_{opt} возможно лишь численными методами.

В связи с этим был произведен расчет целевой функции (5.3.18) для сигналов с распределением Лапласа (рис.5.3.2) и нормальным распределением (рис. 5.3.3). На рисунках приведены графики зависимости погрешности J_{CT} от динамического диапазона ψ для некоторых значений разрядности АЦП. Сплошные линии соответствуют нечётным, а пунктирные - чётным типам характеристик (см. разд. 1.3). По результатам расчётов можно определить оптимальное значение ψ_{opt} , величину погрешности (J_{CT}) в этой точке и оценить чувствительность J_{CT} к точности поддержания ψ_{opt} .

Обобщенные результаты расчетов приведены в виде зависимостей оптимального значения динамического диапазона ψ_{opt} от разрядности нечетного АЦП для распределения Лапласа (рис. 5.3.4, кривая 1) и нормального распределения (рис. 5.3.5, кривая 1), а также погрешности преобразования при оптимальном значении ψ для нормального распределения (рис. 5.3.6, кривая 1).

Приведенные на рисунках результаты соответствуют равномерному АЦП, являющемуся оптимальным для сигналов со ступенчатым распределением плотности вероятности. Для иных распределений эти результаты оказались слишком приближенными. Это видно из рис. 5.3.4 - 5.3.6, на которых кривые 3 соответствуют результатам, полученным в [19, 127] при оптимизации АЦП. Улучшить результаты можно при использовании аппроксимации $W(x)$ более высокого порядка.

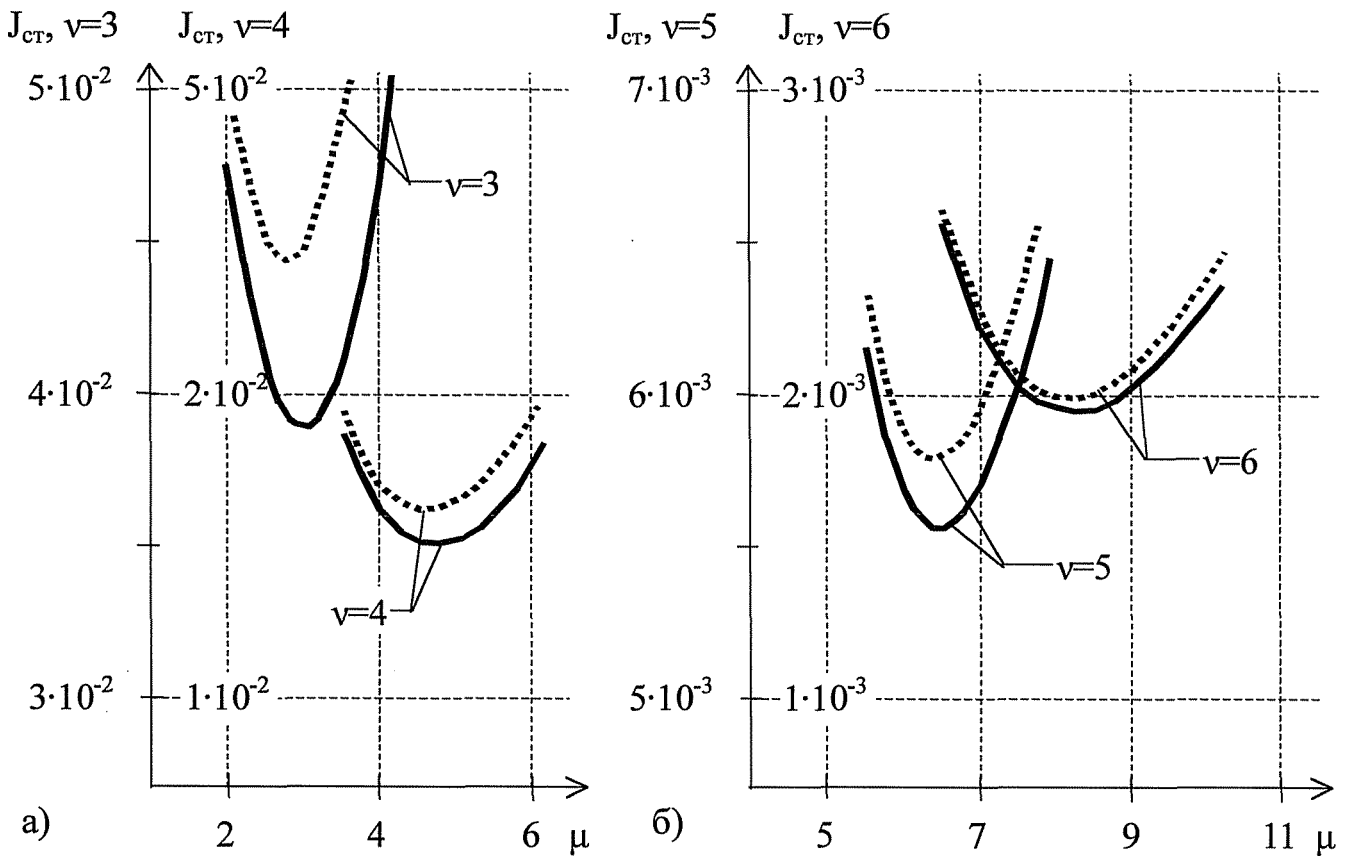


Рис. 5.3.2 Ошибка квантования сигнала с распределением Лапласа (ступенчатая аппроксимация)

При линейной аппроксимации исходное распределение $W(x)$ на отрезке $[u_{i-1}; u_i]$ заменяется распределением

$$W_{\text{лн}}(x) = W(u_{i-1}) + \frac{W(u_i) - W(u_{i-1})}{u_i - u_{i-1}} (x - u_{i-1}), \quad i \in 1, N_v + 1,$$

причем два уровня u_0 и u_{N_v+1} определяются выражениями (5.3.16). Оптимальный вектор V_0 из выражения (5.3.13) можно определить как

$$V_{\text{лн}0} = \left\{ v_{\ell 0} \quad \frac{u_{i+1} - u_i - 1}{3}, \quad \frac{W(u_{i+1}) + W(u_i)}{2} \quad \text{и } i \in 1, N_v + 1 \right\}.$$

Составляющие вектора $V_{\text{лн}0}$ теперь уже расположены несимметрично относительно соседних элементов u_i и им вектора U . Целевая функция (5.3.14) в этом случае может быть записана в следующем виде:

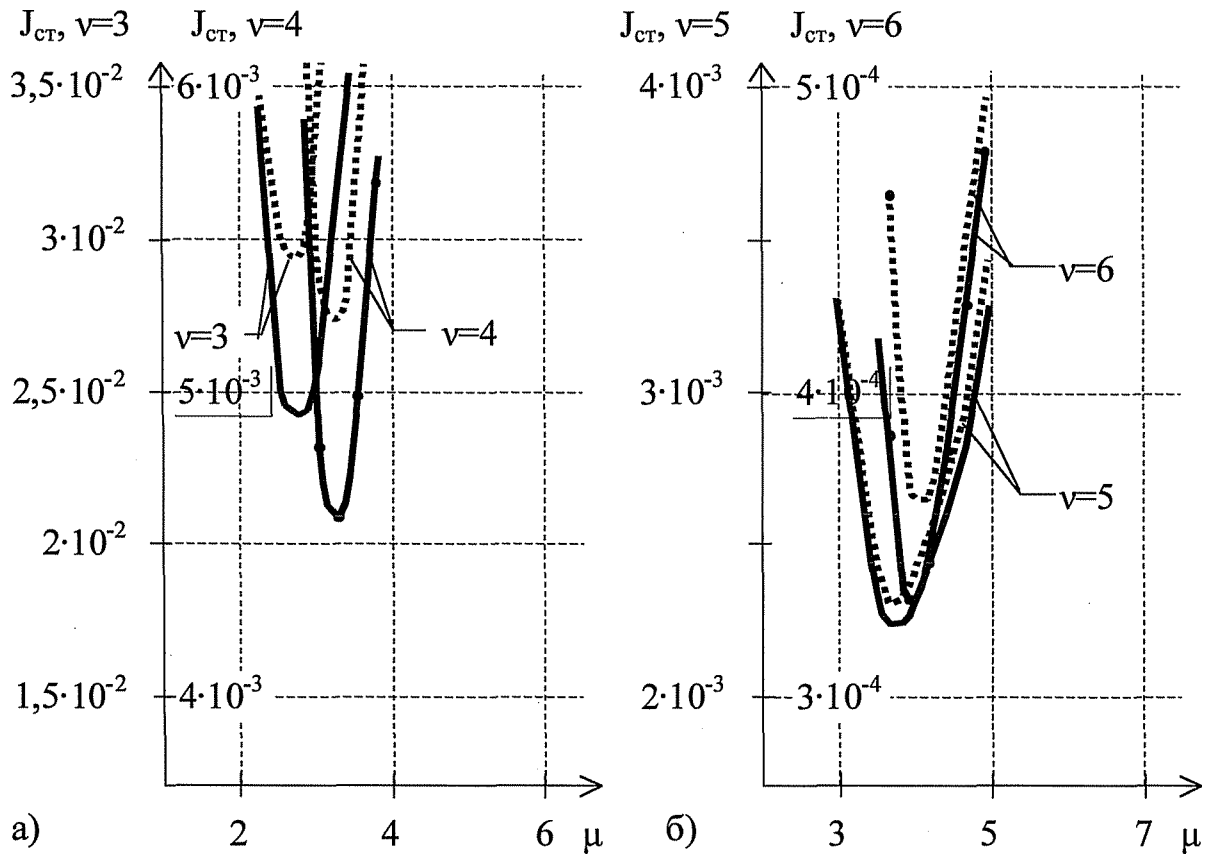


Рис. 5.3.3 Ошибка квантования сигнала с нормальным распределением (ступенчатая аппроксимация)

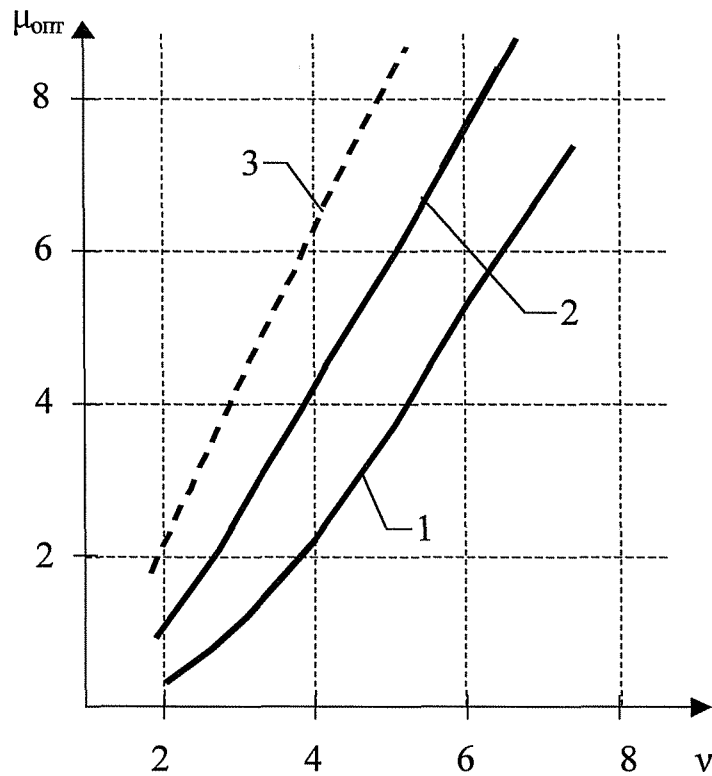


Рис. 5.3.4 Оптимальный динамический диапазон АЦП сигнала с распределением Лапласа

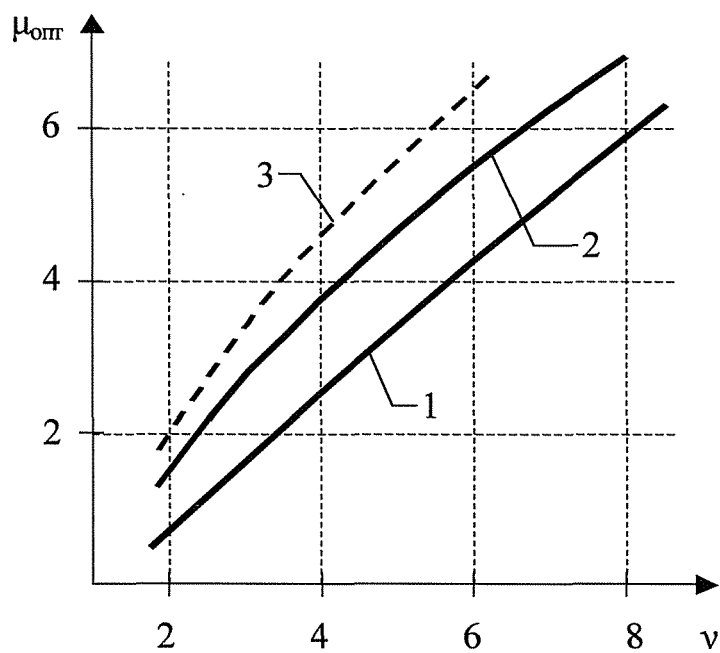


Рис. 5.3.5 Оптимальный динамический диапазон АЦП сигнала с нормальным распределением

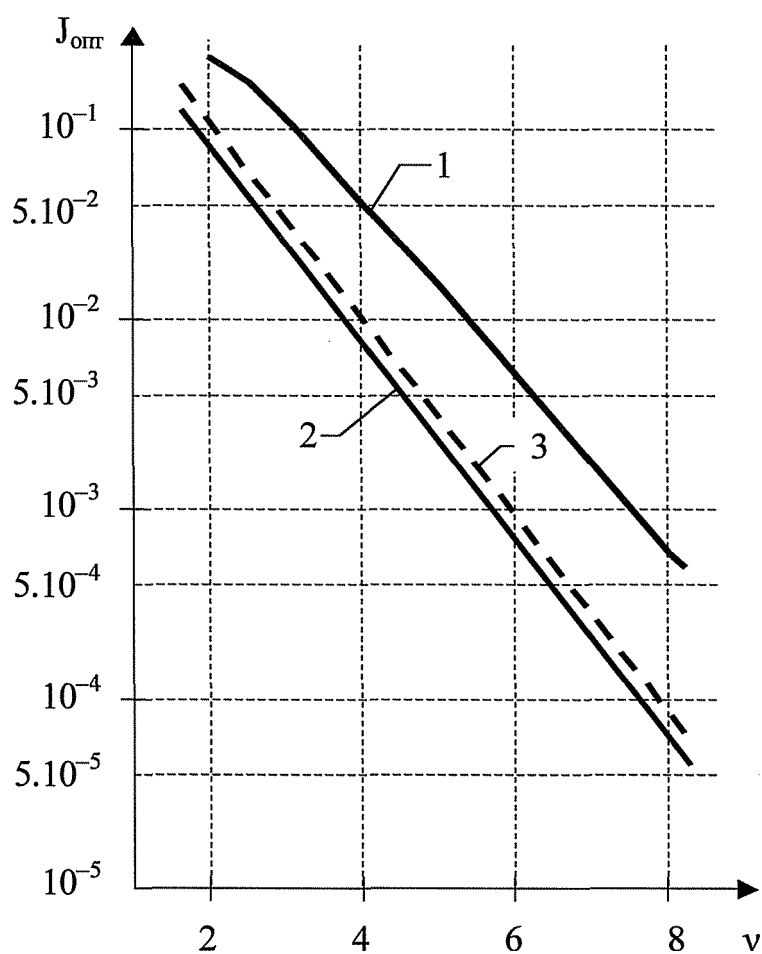


Рис. 5.3.6 Погрешность амплитудного квантования сигнала с нормальным распределением

$$R_H^{\wedge} = \frac{F^3(U_1) \cdot [1-F(4NV)]^3}{9W^2(U_1) \cdot 9W^2(U_{NV})} \cdot \Gamma(\underline{u_i - v_j}^3 p, (\underline{u_i - 1 - v_j})^3 p) \quad (5.3.20)$$

где $R_H^{\wedge} = W(u^{\wedge})(3u_r - 4u^{\wedge}_i + v^{\wedge}) + W(u^{\wedge}_i)(u^{\wedge}_i - v^{\wedge})$,

$$R_B^{\wedge} = W(u^{\wedge})(u^{\wedge}_i - v^{\wedge}) + W(Lk_i)(4u_r - 3u^{\wedge}_i - v^{\wedge}).$$

Полученная функция позволяет проводить численную оптимизацию, однако в этом случае область определения вектора U целесообразно ограничить условием (5.3.17). Это сводит задачу оптимизации к двухпараметрической, а в случае симметричных распределений - к однопараметрической. Аналитически определить C_{opt} при линейной аппроксимации еще труднее, чем в случае ступенчатой аппроксимации.

Результаты численных расчетов функции (5.3.20) приведены для распределения Лапласа на рис. 5.3.7 и нормального распределения на рис. 5.3.8 при нескольких значениях разрядности (пунктирные кривые - четный и сплошные кривые - нечетный АЦП). При линейной аппроксимации получены иные, более точные, значения оптимального динамического диапазона и величины погрешности. Обобщенные результаты расчетов приведены для распределения Лапласа на рис. 5.3.4 (кривая 2) и для нормального распределения на рис. 5.3.5 и 5.3.6 (кривые 2). В этом случае результаты ближе к значениям из работ [19, 127] (рис. 5.3.4-5.3.6, кривые 3).

Полученные выражения целевых функций для оптимальных и квазиоптимальных АЦП позволяют проводить оптимизацию с различной степенью точности и получить АЦП различной сложности. В подавляющем большинстве случаев равномерный АЦП при соответствующем выборе параметров является лишь первым приближением к оптимальному. Переход к квазиоптимальному АЦП, имеющему неравномерное распределение только выходных уровней, позволяет достичь лучших результатов по сравнению с равномерным. Моделирование квазиоптимального АЦП, проведенное для нормального случайного процесса, дало результаты, совпадающие в пределах точности моделирования с данными работы [19].

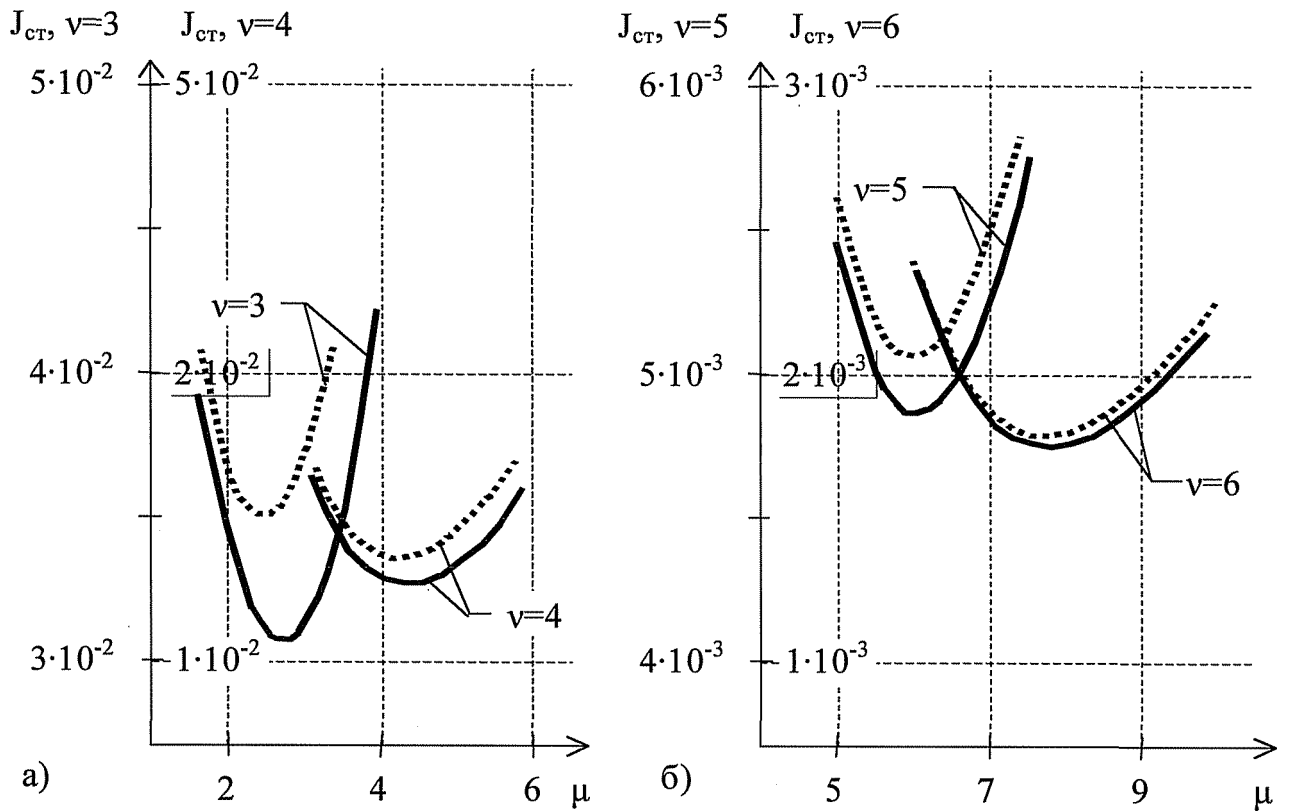


Рис. 5.3.7 Ошибка квантования сигнала с распределением Лапласа (линейная аппроксимация)

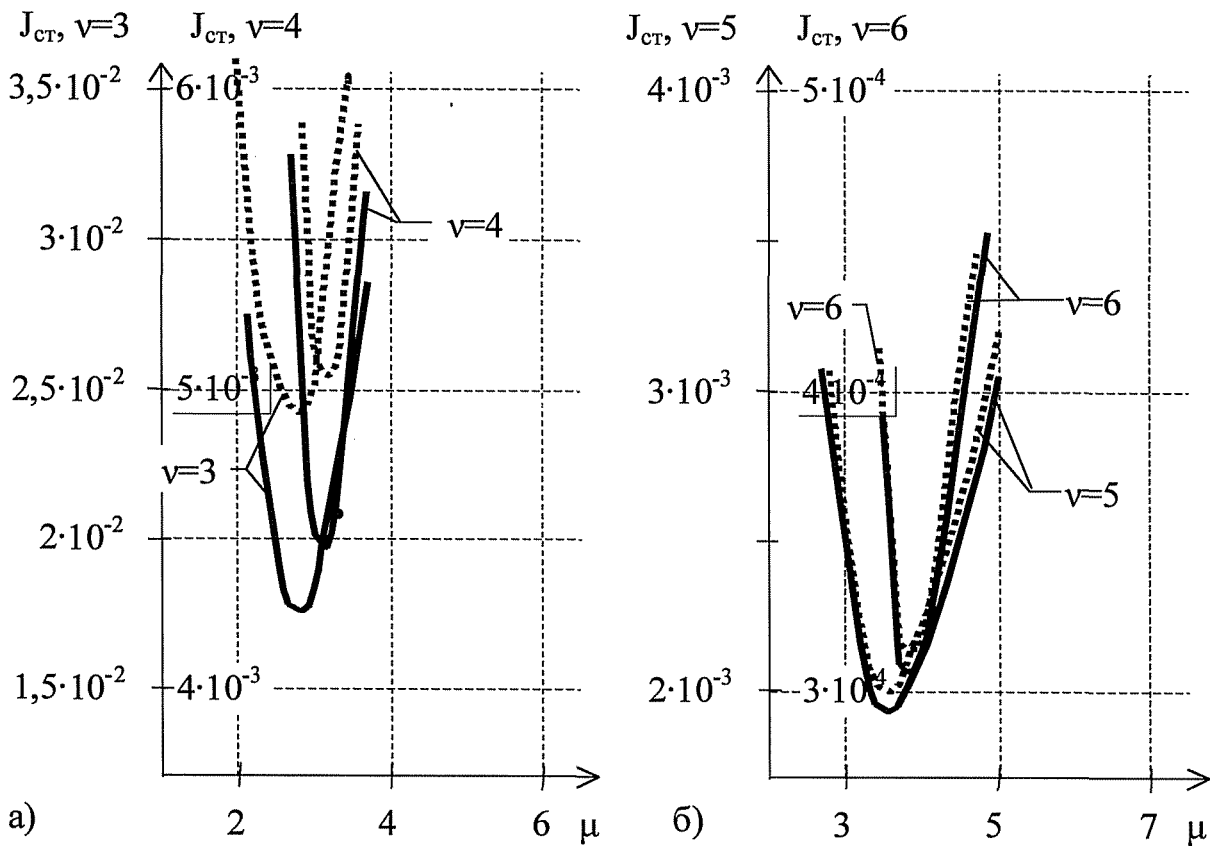


Рис. 5.3.8 Ошибка квантования сигнала с нормальным распределением (линейная аппроксимация)

5.4. Квантование марковских сигналов

Распространенным классом случайных сигналов являются марковские сигналы [20, 51, 67, 71, 102,110]. Теория марковских цепей используется как для описания сигналов в системах, так и процесса функционирования самого АЦП [6]. При аналого-цифровом преобразовании осуществляется переход от непрерывных процессов к дискретным по времени и квантованным по амплитуде.

Если исходный случайный аналоговый сигнал удовлетворяет требованиям марковости, то выходной сигнал может представлять собой марковскую цепь. Определим условия такого преобразования и характеристики получаемой цепи.

Будем полагать, что преобразование осуществляется в v -разрядном АЦП, описываемом (см. раздел 1.3) векторами-столбцами входных уровней сравнения $U = \{u_{i5} \ i \in 0, N_v + 1\}$ и выходных уровней состояния $V = \{v_{i5} \ i \in 1, N_v + 1\}$, где N_v - число физически осуществимых уровней сравнения.

Преобразуемый сигнал удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова и, следовательно, его энергетический спектр ограничен максимальной частотой $\omega_m = 2\pi f_m$. Временная дискретизация в таком случае осуществляется равномерно с интервалом $A_t < 1/2f_m$. Как показано в [103], при произвольном спектре переход к дискретному времени с некоторым шагом A_t приводит к появлению погрешности со среднеквадратичным значением $\sigma_{\text{ош}} = O(\sqrt{A_t})$.

Аналоговый сигнал $u(t)$, удовлетворяющий требованиям марковости, полностью определяется одномерной начальной плотностью вероятности $W(u, t_0)$ и плотностью вероятности переходов $W_y(v/u, t_0, t_i)$ двух значений u и v случайного процесса $u(t)$ в моменты времени t_0 и t_i соответственно.

Так как амплитудное квантование не является взаимно однозначным преобразованием, то, в общем случае, на выходе АЦП может быть получена бесконечно усложняющаяся марковская цепь [71]. Однако для случайных процессов, обладающих корреляционными функциями $R(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ со (вполне регулярные процессы), выбором интервала дискретизации A_t и шага квантования A_n можно обеспечить постоянную и невысокую связность ($i = 0; 1; 2; \dots$). К таким

процессам относятся эргодические марковские процессы, стационарные гауссовы процессы и др., представляющие наибольший практический интерес.

Марковская цепь, формирующаяся на выходе АЦП, принимает значения элементов вектора V в фиксированные моменты времени $t_n = t_0 + nA_t$, $n \in \{0; 1; 2; \dots\}$, кратные интервалу A_t . В начальный момент времени t_0 вероятность появления одного из значений V_i определяется вектором-столбцом начальных вероятностей

$$P_0(t_0) = S P_i = \int_{\Gamma^i} J W(u, t_0) du, \quad i \in \{1, \dots, N_v + 1\}. \quad (5.4.1)$$

Если элементы вектора U соответствуют квантилям порядка $1/(N_v + 1)$ распределения $W(u, t_0)$, то вектор (5.4.1) может быть выражен через единичный J :

$$= \frac{1}{N_v + 1} J.$$

Такой АЦП может быть назван равновероятным и здесь просматривается аналогия со статистическим кодированием.

Выходная величина переходит из одного V_i в другое V_j состояние, соответствующие моментам времени $t_1 = t_0 + nA_t$ и $t_2 = t_0 + (n+m)A_t$, с вероятностью, определяемой стохастической матрицей переходных вероятностей

$$P(t_2 = t_j + mA_t) = \left\langle \begin{matrix} u_j \\ v_j \end{matrix} \right\rangle \frac{\int_{\Gamma^j} J W_2(u, v, t_1, t_1 + mA_t) dv du}{\int_{\Gamma^i} J W^i(u) du} \quad (5.4.2)$$

Эта матрица является неразложимой, т.к. АЦП представляет собой один класс сообщающихся состояний. При $t=0$ матрица (5.4.2) вырождается в единичную матрицу.

При стационарном входном сигнале, когда одномерная плотность вероятности не зависит от времени, а двумерная и условная зависят только от разности $t = t_2 - t_1 = mA_t$, на выходе АЦП будет формироваться однородная марковская цепь. Тогда вектор (5.4.1) не будет зависеть от времени, а матрица

(5.4.2) будет зависеть только от интервала $m\Delta_t$. Умножая i -ю строку матрицы (5.4.2) на начальную вероятность появления i -го состояния, получим матрицу безусловных переходных вероятностей

$$P_v(m\Delta_t) = \int_{I^U M^U M} \prod_{j=1}^{N_v+1} \int_{I^U M^U M} W_2(u, v, m\Delta_t) du dv; i, j \in I, N_v+1 >$$

В отличие от матрицы (5.4.2), здесь сумма всех элементов матрицы равна единице

$$\sum_{i=1}^{N_v+1} \sum_{j=1}^{N_v+1} P_{ij} = 1$$

Свойства однородной марковской цепи определяются параметрами АЦП (\mathbf{U} , \mathbf{V} , A_t) и характеристиками сигнала $u(t)$: $W_2(u, v, \tau)$, корреляционной функцией $R(\tau)$. Зная интервал корреляции τ_0 преобразуемого сигнала $u(t)$ можно определить условия получения конечной связности цепи 0 и оценить особенности матрицы (5.4.2). Из определения интервала корреляции и теоремы Хинчина-Винера [67] следует

$$\tau_0 \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi S(\omega)}} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau$$

где σ^2 - дисперсия и $S(\omega)$ - энергетический спектр сигнала $u(t)$.

Если корреляционная функция неотрицательна ($R(\tau) > 0$), то интегрирование по τ можно осуществлять без взятия модуля. Меняя порядок интегрирования, получим

$$\tau_0 \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\omega)}{S(\omega)} d\omega$$

где $S(\omega)$ - δ -функция в частотной области.

Учитывая, что $F_{3KB} = \sigma^2/S(0)$ - эквивалентная ширина спектра сигнала $u(t)$, получим $\tau_0 \approx 1/2F_{3KB}$. Для получения нуль-связной цепи ($v = 0$) необходимо иметь некоррелированные отсчеты и, следовательно, интервал дискретизации $\Delta_t > \tau_0$. ■ На практике, для получения малых погрешностей временной дискретизации

обеспечивают малую величину интервала $A_t = 1/2aF_{3KB}$ ($a > 1$ - постоянная) и $A_t < T_0$.
 Результаты амплитудного квантования любых соседних отсчетов $u(nA_t)$ и $u[(n+1)A_t]$ сохраняют все свойства исходного сигнала, если эффективное приращение за время A_t будет отвечать условию

$$\Delta \{u[(m+1)A_t] - u(mA_t)\}^2 = -J_2 R(0) - 2R(A_t) > A_t. \quad (5.4.3)$$

Полученное условие (5.4.3) отражает взаимозависимость интервалов временной дискретизации и амплитудного квантования.

Можно ввести оценку связности цепи

$$\sigma = \text{int}(T_0/A_t + 0,5),$$

где $\text{int}(z)$ - целая часть числа z .

Если интервал временной дискретизации отвечает условию $T_0/2 < A_t < T_0$, то на выходе АЦП получим марковскую цепь, у которой в каждой строке матрицы (5.4.2) существенно отличающимися от нуля будут лишь три элемента: $P_1(I-1)$, p_i , p_{i+1} .

Используя параметры АЦП и марковской цепи можно определить параметры цифрового случайного процесса: среднее значение $X_{срц} = (V, P_0)$; дисперсию $\sigma_c^2 = (V_2, P_0) = X_{срц}^2$; корреляционную функцию

$$R(mA_t) = VP/mAOX$$

где $U_2 = \{y^2, i \in 1, N_v + 1\}$;

V^i - транспонированный вектор V .

Выводы к разделу 5

Анализ процесса амплитудного квантования при аналого-цифровом преобразовании сигналов всегда сводился исследователями [3, 8, 19, 63, 72, 74, 116, 126, 127] к представлению АЦП в виде линейного устройства, вносящего шум квантования. При этом не определялись предельные возможности (идеальное квантование), требования к квантуемому сигналу и квантователю, источники ошибок и методы их уменьшения.

В данной диссертационной работе рассматривается идеальное амплитудное квантование, позволяющее восстановить исходный непрерывный сигнал. Теоретическую основу амплитудного квантования составляет обобщение теоремы Котельникова на область значений сигнала. Согласно этого обобщения возможно восстановление функции распределения плотности вероятности случайного процесса по значениям (уровням), получаемым в результате амплитудного квантования. При этом число уровней должно быть бесконечно большим, характеристические функции квантуемого и восстанавливающего процессов должны быть ограниченными, а интервал квантования должен отвечать условию (5.1.6). Перечисленные условия, которым должны удовлетворять квантуемый процесс, квантователь и восстанавливающее устройство, физически не реализуемы. Это приводит к появлению ошибок, составляющие и величины которых могут быть определены с использованием одного из критериев.

Применение корреляционного критерия, предложенного и рассмотренного в разд. 1.5, позволило получить выражение (5.2.16), связывающее ошибку квантования с коррелированностью отсчетов, а также её оценку (5.2.18). Результаты исследований опубликованы в работе автора [37].

Для обеспечения минимального уровня шумов квантования необходимо выполнить условие (5.2.19), обеспечивающее его некоррелированность.

Вторым условием минимальности шума квантования является оптимальный выбор уровней характеристики АЦП. Получены выражения

целевой функции, минимизирующей среднеквадратичное значение шума, и её ступенчатая и линейная аппроксимации. При этом возможна оптимизация как равномерного (оптимальный по динамическому диапазону), так и нелинейного АЦП (оптимальный по расположению уровней). Моделирование оптимального АЦП, проведенное для нормального случайного процесса и с распределением Лапласа, позволили определить оптимальные параметры и величины возникающих погрешностей. Результаты исследований опубликованы в работах автора [45, 48].

Для марковских сигналов получены вектор начальных и матрица переходных вероятностей, условие некоррелированности шума квантования и оценка связности формируемой при квантовании цепи Маркова. Для получения односвязной цепи необходимо осуществлять дискретизацию с шагом, меньше интервала корреляции исходного процесса, а условие некоррелированности шума квантования обеспечить выбором разрядности АЦП. Результаты исследований опубликованы в работе автора [39].

Таким образом, обобщением теоремы Котельникова на амплитудное квантование получена единая теория аналого-цифрового преобразования случайных сигналов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема оптимизации параметров АЦП требует комплексного, базирующегося на единых теоретических позициях, рассмотрения процедур временной дискретизации и амплитудного квантования. Необходимо знать предельные соотношения параметров сигналов и устройств (идеальное преобразование), все источники ошибок, иметь оценки возникающих погрешностей. Для этого необходим единый теоретический аппарат анализа процедур дискретизации и квантования преобразуемых сигналов. Обзор литературных источников показывает, что временная дискретизация и амплитудное квантование рассматриваются практически независимо и с различных позиций. Для амплитудного квантования нет теоретического обоснования, подобного теореме Котельникова. Это определяет разнородность методик анализа процедур преобразования, оценок величин возникающих погрешностей и процедур оптимизации.

Также существенно отличаются подходы к анализу и оптимизации АЦП для детерминированных и случайных сигналов.

В целом, проблема аналого-цифрового преобразования сигналов требует обобщения и формирования единой теоретической базы.

Для создания единой теории анализа и оптимизации АЦП была осуществлена систематизация и уточнение требований теоремы Котельникова для временной дискретизации (определено, в частности, влияние начальных фаз сигнала и дискретизирующей последовательности) и её обобщение для случая амплитудного квантования. При этом были впервые сформулированы требования к квантуемому сигналу, квантователю и восстанавливающему устройству, подобные требованиям при временной дискретизации. Тем самым было введено понятие идеального амплитудного квантователя. При переходе от идеальных процедур к реальным были выявлены источники ошибок квантования и пути их уменьшения.

Таким образом, была разработана теоретическая база идеального АЦП, содержащего идеальный временной дискретизатор (определяемый

классической теоремой Котельникова) и идеальный амплитудный квантователь (определяемый обобщением теоремы Котельникова на процедуру квантования).

Для учета временных связей в преобразуемом сигнале в качестве основы анализа и оптимизации был предложен и использован корреляционный критерий, представляющий среднеквадратическую разность корреляционных функций исходного и преобразованного сигналов. Предложенный критерий является развитием среднеквадратичного критерия, учитывающим корреляционные связи в сигнале, поэтому была рассмотрена их взаимосвязь и отличия.

Проведенный анализ с использованием корреляционного критерия позволил установить взаимосвязь шага временной дискретизации A_t и интервала амплитудного квантования A_n , которая определяется корреляционной функцией сигнала, наличием шума и его свойствами.

Полученные теоретические предпосылки позволили провести оптимизацию АЦП по минимуму среднеквадратической погрешности (ошибки) хорошо разработанными классическими методами. При этом показано, что выходные уровни АЦП должны выбираться из условия несмещенности оценки сигнала. Это, одновременно, является одним из условий минимума среднеквадратичной ошибки. Из другого условия вытекает неравномерность расположения входных уровней сравнения АЦП.

Для случайных и детерминированных сигналов может быть использована единая методика оптимизации, если на детерминированные сигналы распространить вероятностные методы анализа. Для этого введены интегральная $F_d(x)$ и дифференциальная $W_d(x)$ функции распределения детерминированного сигнала по уровням. Определены свойства и взаимосвязь этих функций, получены их выражения для ряда сигналов.

Целевые функции, на основе которых осуществляется оптимизация АЦП классическими методами, были получены по единой методике для

детерминированных и случайных сигналов с использованием функций распределения.

Используя ступенчатую и линейную интерполяцию функций распределения, были получены целевые функции для квазиоптимальных АЦП, упрощающие процедуру оптимизации. При этом допускаемое ухудшение ошибки квантования не превышает 3...6 дБ для ступенчатой и 1.. .2 дБ для линейной аппроксимации при нормальном случайном процессе.

В работе показано, что квантование детерминированных сигналов на фоне шума приводит к их преобразованию в нестационарный случайный процесс, среднее значение которого определяется исходным сигналом. Дисперсия нестационарного процесса (шум квантования) зависит от параметров АЦП и значения квантуемого сигнала.

В работе также показано, что в процессе временной дискретизации возможно выполнение операции преобразования спектра или детектирования полосового сигнала.

Для ошибок, возникающих в реальных устройствах временной дискретизации, получены среднеквадратичные значения и их оценки (при степенной аппроксимации), являющиеся дальнейшим развитием и обобщением существовавших оценок. Анализ полученных зависимостей показывает, что:

- при конечном числе ненулевых отсчетов сигнала ошибка зависит от фазового соотношения сигнала и дискретизирующей последовательности;
- ошибка, вносимая СВХ, имеет пороговую зависимость от параметров схемы;
- при нестабильности частоты дискретизирующих импульсов менее $1(\Gamma^5)$ величина ошибки нестабильности не превысит -70дБ;
- при дискретизации сигнала на фоне шума устройству дискретизации должен предшествовать аналоговый фильтр, значительно (на 5... 10 и более дБ) снижающий проигрыш в отношении сигнал/шум даже при простейшем типе.

Для случая амплитудного квантования получены среднеквадратические ошибки, возникающие при преобразовании детерминированного сигнала, аналитического сигнала, рассмотрены особенности преобразования марковских случайных процессов.

Достоверность полученных результатов базируется на использовании при анализе классических методов теории сигналов, математического анализа и теории случайных процессов. Важнейшие полученные результаты являются логическими и непротиворечивым развитием существующих теорий и представлений сигналов и процессов их преобразования. Это относится к распространению теоремы Котельникова на амплитудное квантование, вероятностных методов анализа на детерминированные сигналы, среднеквадратичного критерия на коррелированные сигналы (корреляционный критерий). При аппроксимации сигналов и их спектров использовалось приближение степенными функциями, широко используемое при анализе сигналов [114, 128].

В необходимых случаях теоретические результаты проверялись моделированием на ЭВМ. Так, влияние начальных фаз сигнала и дискретизирующей последовательности импульсов на ошибку восстановления подтверждены прямыми расчетами и моделированием на ЭВМ при случайной величине фазового сдвига. Статистическим моделированием проверялись также теоретические результаты определения погрешности, вносимой схемой выборки и хранения (отличия менее 1дБ), результатов оптимизации АЦП при ступенчатой и линейной аппроксимации функций распределения.

Подтверждением достоверности полученных результатов по установлению зависимости между интервалами временной дискретизации и амплитудного квантования является вытекающее из них теоретическое обоснование метода уменьшения разрядности АЦП при введении дополнительного случайного сигнала, рассмотренного рядом авторов [21, 108, 109].

Полученные результаты представляют собой дальнейшее развитие теории сигналов и могут быть использованы при выборе параметров и оптимизации АЦП для систем обработки сигналов в информационно-измерительных системах различного назначения. Прежде всего, это относится к системам с высокими требованиями по весогабаритным параметрам и энергопотреблению, где особенно остро стоит проблема минимизации разрядности цифровых устройств. К ним относятся также системы с высокими точностными требованиями, где необходимо учитывать все составляющие ошибок и обеспечить их малый уровень.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ источников

- 1 Алипов Н.В., Тимченко А.И. Применение избыточных представлений двоичных чисел в технике аналого-цифрового преобразования информации. // Управляющие системы и машины. -1985. -№ 5. -С. 31-34.
- 2 Андреев С.С., Маринов С.А., Платонов В.Д. Цифровой генератор ЛЧМ-сигналов. И Вопросы применения полупроводниковых приборов в радиотехнических и гидроакустических устройствах. -Рязань: РРТИ. -1976. -Вып. 2. -С. 121-124.
- 3 Афанасьев Е.Е., Лутченко А.Е., Скороходов Е.М. Влияние квантования по уровню на отношение сигнала к помехе на выходе устройства квантования. // Вопросы радиоэлектроники, сер. Общетеchnическая. -1976. -Вып. 10.-С. 142-146.
- 4 Багацкий В.А. Методика оценки обобщенного качества аналого-цифровых преобразователей. // Управляющие системы и машины. -1985. -№ 6. -С. 43-49.
- 5 Баева И.Н. Многоканальная электросвязь. -М.: Радио и связь, 1988. -312с.
- 6 Балтрашевич В.Э. Использование цепей Маркова для вероятностного анализа аналого-цифровых преобразователей. // Изв. вузов СССР. Электромеханика. -1977. -№ 11. -С. 1195-1199.
- 7 Баранов Л.А. Квантование по уровню и временная дискретизация в цифровых системах управления. -М.: Энергоатомиздат, 1990. -304с.
- 8 Баранов Л.А. Математические модели аналого-цифрового преобразования с восстанавливающими операторами при случайных входных сигналах. // Автоматика и телемеханика. -1976. -№ 11. -С. 130-135.
- 9 Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). -М.: Наука, 1975. -631с.

- 10 Белоносов Ю.И., Ямный В.Е. Использование логарифмических АЦП для повышения точности измерения и скорости обработки сложных сигналов. *И Теория и техника сложных сигналов. Тезисы докладов.* -М. -Минск: НТОРЭС им. Попова. -1979. -С. 105.
- 11 Ваванов Ю.В., Вериго А.М. Основные направления развития железнодорожной технологической радиосвязи *И Автоматика, связь + информатика.* -1998.-№6.-С.7-11.
- 12 Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: Пер. с англ.: В 3т./-М.: Сов. радио, 1972. -Т.1. -744 с.
- 13 Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. -М.: Сов. радио, 1970. -375с.
- 14 Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1981.-400с.
- 15 Васюк Г.И., Чайковский В.И. К вопросу о применении теоремы Котельникова при аппаратурном анализе полосовых сигналов. *И Изв. вузов СССР. Радиотехника.* -1966. -Т. IX. -№ 6. -С. 785-788.
- 16 Вдовин С.Е., Волынчук В.Н., Ковальчук В.Г. и др. Методика определения частоты дискретизации в устройствах с цифровой обработкой сигналов. *И Радиотехника.* -1990. -№ 4. -С. 57-60.
- 17 Вдовин С.Е., Волынчук В.Н., Ковальчук В.Г. и др. Дополнение к статье «Методика определения частоты дискретизации в устройствах с цифровой обработкой сигналов». *И Радиотехника.* -1991. -№ 4. -С. 51-57.
- 18 Величкин А.И. Корреляционная функция и спектральная плотность квантованной речи. // *Акустический журнал.* -1963. -Т. 9 -Выл. 1. -С. 13-18.
- 19 Величкин А.И. Передача аналоговых сообщений по цифровым каналам связи. -М.: Радио и связь, 1983.
- 20 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. -М.: Наука, 1991. -384с.
- 21 Веселова Г.П. Об амплитудном квантовании с наложением интерполирующих сигналов. *И Автоматика и телемеханика.* -1975. -№ 5. -С. 52-59.

- 22 Виленчик Л.С. Выбор частоты дискретизации и связь её с шагом квантования. // Радиотехника и электроника. -1974.-Т. XIX. -№ 6. -С.1305-1307.
- 23 Гитис Э.И., Пискунов Е.А. Аналого-цифровые преобразователи. -М.: Энергоиздат, 1981.-360с.
- 24 Гольденберг Л.М., Левчук Ю.П., Поляк М.Н. Цифровые фильтры. -М.: Связь, 1974. -160с.
- 25 Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. -М.: Радио и связь, 1985. -312с.
- 26 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд. 2-е, перераб. и доп. -М.: Сов. радио, 1971. -672с.
- 27 Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. -М.: Радио и связь, 1982. -256с.
- 28 Гуревич М.С. Полоса частот, занимаемая при передаче импульсов. // Радиотехника и электроника. -1957.-Т.II. -№1. -С.38-43.
- 29 Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Matcad 7 в математике, физике и в Internet. -М.: Нолидж, 1999. -345с.
- 30 Железнов Н.А. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений. // Радиотехника и электроника. -1958.-Т. III. -№ 1. -С. 3-18.
- 31 Залманзон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. -М.: Наука, 1989. -496с.
- 32 Злочевский Е.М., Николаев В.М., Самойленко В.И. Оценка влияния вида выходной характеристики аналого-цифрового преобразователя на характеристики шума квантования. // Автоматика и телемеханика. -1974. -№ 11.-С. 169-172.
- 33 Игнатъев Н.К. Дискретизация и её приложения. -М.: Связь, 1980. -264с.
- 34 Игнатъев Н.К. Дискретизация со случайно изменяющимся интервалом. // Радиотехника. -1985. -№ 10. -С. 38-40.

- 35 Из «Концепции создания сети связи МПС РФ с интеграцией услуг» // Железнодорожный транспорт. -1998. -№ 6. -С. 1-30.
- 36 Казаков В.А., Беляев М.М. Восстановление реализаций нестационарных случайных процессов по совокупности дискретных отсчетов. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1997. -Т. 40. -№ 9. -С. 43-49.
- 37 Кнышев И.П. Автокорреляционный критерий анализа и оптимизации аналого-цифрового преобразователя. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1988. -Т. 31. -№ 12. -С. 43-49.
- 38 Кнышев И.П. Анализ погрешности схемы выборки и хранения АЦП. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1997. -Т. 40. -№ 4. -С. 23-28.
- 39 Кнышев И.П. Аналого-цифровое преобразование марковских сигналов. // Системи обробки інформації. -Харьков. -НАНУ, ПАНИ, ХВУ. -1999. - Вып. 1(5).-С. 154-157.
- 40 Кнышев И.П. Вимоги до стабільності частоти дискретизації сигналів. // Мережі і системи телекомунікації на залізничному транспорті. -Харків. -ХарДАЗТ. -1999. -Вип. 35. -С. 110-116.
- 41 Кнышев И.П. Дискретизация сигналов на фоне шума. // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -1999. -№ 1. -С. 40-41.
- 42 Кнышев И.П. Дискретизация случайных сигналов с неограниченным спектром // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -2000. -№ 5. -С. 24-27.
- 43 Кнышев И.П. Ідеальна дискретизація сигналів і фазові співвідношення в теоремі Котельнікова. // Мережі і системи телекомунікації на залізничному транспорті. -Харків. -ХарДАЗТ. -1999. -Вип. 35. -С. 106-110.
- 44 Кнышев И.П. Квантование аналитических сигналов. // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -2000. -№ 2. - С.80-82.

- 45 Кнышев И.П. Квантование сигналов на фоне помех // Радиотехника и электроника. -1982. -Т. XXVII. -№ И. -С. 2172-2178.
- 46 Кнышев И.П. Корреляционный критерий в информационных системах. // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -1999. -№ 2. -С. 60-61.
- 47 Кнышев И.П. Обработка сигнала со случайной задержкой цифровым согласованным фильтром. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1978. -Т. XXI. -№ 11. -С. 123-124.
- 48 Кнышев И.П. Оптимизация аналого-цифрового преобразователя по параметрам одномерного распределения. // Радиотехника и электроника. -1987. -Т. XXXII. -№ 5. -С. 971-979.
- 49 Кнышев И.П. Оптимизация АЦП детерминированных сигналов // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -2000. -№ 6. -С.59-62.
- 50 Кнышев И.П. Особенности дискретизации узкополосных сигналов. И Компьютеризованные системы контроля и управления на железнодорожном транспорте. -Харьков. -ХарГАЖТ. -1997. -Вып. 28. -С. 49-52.
- 51 Кнышев И.П. Ошибка, вносимая схемой выборки и хранения в случайный сигнал. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1998. -Т.41. -№2. -С.67-73.
- 52 Кнышев И.П. Погрешность восстановления дискретизированных сигналов реальными фильтрами. // Компьютеризованные системы контроля и управления на железнодорожном транспорте. -Харьков. -ХарГАЖТ. -1997. -Вып. 28. -С. 36-39.
- 53 Кнышев И.П. Погрешность дискретизации сигналов при ограниченном числе отсчетов. И Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1999. -Т. 42. -№ 2. -С.3-9.

- 54 Кнышев И.П. Погрешность дискретизации сигналов с неограниченным спектром. // Применение микропроцессоров в системах железнодорожной автоматики. -Харьков. -ХарГАЖТ. -1995. -Вып. 27. -4.1. -С. 24-28.
- 55 Кнышев И.П. Погрешности схемы выборки и хранения АЦП. // Применение микропроцессоров в системах железнодорожной автоматики. - Харьков. -ХарГАЖТ. -1997. -Вып. 27. -Ч. 1. -С. 29-33.
- 56 Книшев І.П. Розширення теореми Котельникова на амплітудне квантування. // 36. наукових праць. -Харків. -ХарДАЗТ. -2000. -Вип. 44. -С. 17-22.
- 57 Кнышев И.П. Теорема отсчетов в амплитудном квантовании. // Системи обробки інформації. -Харків. -НАНУ, ПАЛІМ, ХВУ. -2000. -Вип. 3(9). -С. 32-36.
- 58 Кнышев И.П. Точность цифрового формирования однополосных сигналов. // Помехозащищенность и разрешающая способность радиотехнических систем. -Рязань. -РРТИ. -1979. -Вып. 1. -С. 84-87.
- 59 Кнышев И.П. Фазовые соотношения в теореме Котельникова. // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. -1999.-№3.-С. 21-23.
- 60 Кнышев И.П. Функции распределения детерминированных сигналов. // Системи обробки інформації. -Харків. -НАНУ, ПАНМ, ХВУ. -1999. -Вип. 2(6).-С. 176-180.
- 61 Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976. -544с.
- 62 КондалевА.И., Багацкий В.А. О статистическом подходе к оценке критериев качества АЦП. // Управляющие системы и машины. -1976. -№ 2. -С. 62-65.
- 63 Косякин А.А. Статистическая теория квантования по уровню. // Автоматика и телемеханика. -1961. -Т. 22. -№ 6. -С. 722-729.

- 64 Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. -М.: Сов. радио, 1974. -432с.
- 65 Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. -М.: Сов. радио, 1971.-567с.
- 66 Лебедев В.В. О дискретном представлении сигнала, ограниченного во времени. // Радиотехника. -1961. -Т. 16. -№ 1. -С. 75-80.
- 67 Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники: В 3т. / -М.: Сов. радио, 1974. -Т. 1 -552с.
- 68 Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники: В 3т. /- М.: Сов. радио, 1975. -Т. 2. -392с.
- 69 Левин Л.С., Плоткин М.А. Цифровые системы передачи информации. - М.: Радио и связь, 1982. -216 с.
- 70 Леман Э. Проверка статистических гипотез: Пер. с англ. -М.: Наука, 1979. -408с.
- 71 Лихарев В.А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. -М.: Сов. радио, 1973. -456с.
- 72 Лукьянов А.П. Синтез и анализ асимптотически оптимального квантователя некоррелированных сигнальных выборок. // Радиотехника и электроника. -1987. -Т. XXXI. -Вып. 5. -С. 954-961.
- 73 Маковий В.А. Динамический диапазон дискретизатора. // Радиотехника. -1991. -Т. 46. -№ 7. -С. 40-42.
- 74 Маркюс Ж. Дискретизация и квантование: Пер. с франц. -М.: Энергия, 1969. -144с.
- 75 Моисеев В.С. Об одном классе системных критериев эффективности АЦП. // Изв. вузов СССР. Приборостроение. -1977. -Т. 20. -№ 6. -С. 62-65.
- 76 Найденов А.И., Челноков Б.А. Дискретизация полосовых сигналов. И Вопросы радиоэлектроники, сер. РТ. -1973. -Вып. 4. -С. 103-107.

- 77 Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. -К.: Вища школа, 1983. -455с.
- 78 Осетров А.И. Влияние частоты дискретизации на характеристики точности одномерного оценивания. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1987. -Т. 30. -№ 4. -С. 86-89.
- 79 Островерхов В.В. Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. -Л.: Энергия, 1975.-173 с.
- 80 Пилипчук Н.И., Яковлев В.П. Адаптивная импульсно-кодовая модуляция. / Статистическая теория связи. Вып.25. -М.: Радио и связь, 1986. -296 с.
- 81 Пилипчук Н.И., Яковлев В.П. Оптимизация параметров при равномерном квантовании. // Отбор и передача информации. -1978. -Вып. 53. -С. 19-26.
- 82 Пиранашвили З.А. К вопросу об интерполяции случайных процессов. // Теория вероятности и её приложения. -1967. -Т. XII. -№ 4. -С. 708-717.
- 83 Побережский Е.С. Цифровые радиоприемные устройства. -М.: Радио и связь, 1987. -184с.
- 84 Пономаренко В.К., Мирошниченко В.С. О возможности повышения точности вычисления моментов случайных процессов. // Вестник Киевского политехи, ин-та, сер. Радиотехника и электроника. -1973. -Вып. 10.-С. 136-137.
- 85 Продеус А.Н. Зависимость дисперсии оценки момента 4-го порядка полосового сигнала от выбора частоты дискретизации. // Радиотехника. -1991.-№ 10.-С. 34-38.
- 86 Пугачев В.С. Теория вероятности и математическая статистика. -М.: Наука, 1979. -496с.
- 87 Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. -М.: Мир, 1978. -848с.

- 88 Робиташвили А.Г., Пиранашвили З.А., Харатишвили Н.Г. К вопросу дискретизации сигналов во времени. //Радиотехника и электроника. -1973. -Т.XVIII. -№7. -С.1384-1388.
- 89 Ручьев М.К. Экспоненциальная дискретизация сигналов с произвольным сжатием. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1986. -Т.29. -№9. -С. 74-78.
- 90 Садовский Г.А. Погрешность ступенчатой аппроксимации при равномерной дискретизации. // Изв. вузов СССР. Приборостроение. -1983. -Т.26. -№ 3 -С. 3-7.
- 91 Самойленко В.И., Золочевский Е.Н. Преобразование спектра сигнала при дискретизации. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1974. -Т. 17. -№2.-С. 108-110.
- 92 Свистов В.М. Радиолокационные сигналы и их обработка. -М.: Сов. радио, 1977. -448с.
- 93 Серебряков В.И., Пономарев А.С., Сычев В.В. Цифровое формирование квадратурных составляющих сигнала. // Радиотехника и электроника. -1991. -Т. XXXVI. -№ 1. -С. 70-79.
- 94 Системы передачи сообщений. Пер. с англ. -М.: Связь, 1976. -520с.
- 95 Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 4т. / -М.: Наука, 1974. -Т. I. —480с.
- 96 Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 4т. /-М.: Наука, 1974. -Т. II. -656с.
- 97 Современная теория фильтров и их проектирование: Пер. с англ.: Под ред. Темина Г. и Митра С. -М.: Мир, 1977. -560с.
- 98 Суслонов С.А., Кнышев И.П. Спектры сложных сигналов при последовательной обработке. //Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1981. -Т. XXIV. -№ 1. -С. 85-86.
- 99 Темников Ф.Е., Афонин В.А., Дмитриев В.И. Теоретические основы информационной техники. -М.: Энергия, 1979. -512с.

- 100 Теория передачи сигналов. / Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. -М.: Связь, 1980. -228с.
- 101 Терентьев С.Н., Кондрашов С.И., Константинова Л.В. Учет запаздывания при оценке погрешности АЦП с запоминанием. // Измерительная техника. -1982. -№ 12. -С. 59-61.
- 102 Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. -М.: Сов. радио, -1977. -488с.
- 103 Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. -М.: Радио и связь, 1991. -608с.
- 104 Толстых Г.Д., Павлов С.Е. Спектральный метод оценки погрешности аналого-цифрового преобразователя. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. -1982. -Т. 25. -№ 8. -С. 63-68.
- 105 Турбович И.Т. Аналитическое представление функций времени с неограниченным спектром. // Радиотехника. -1959. -Т. 14. -№ 3. -С. 22-27.
- 106 Турбович И.Т. Некоторые обобщения теоремы Котельникова. // Радиотехника. -1956. -Т. 11. -№ 4. -С. 5-14.
- 107 Тяжев А. И. Цифровое формирование фазоманипулированных сигналов с суженным спектром.// Радиотехника. -1993. -№ 1. -С. 31-37.
- 108 Фарбер В.Е. Моменты распределения процессов на выходе недетерминированных преобразователей аналог-код.// Радиотехника. -1993.-№ 5-6. -С. 18-21.
- 109 Фарбер В.Е. О моментах распределения амплитудно-квантованных процессов при округлении с использованием дополнительных сигналов. // Автоматика и телемеханика. -1984. -№ 4. -С. 95-103.
- ПО Феллер В. Введение в теорию вероятности и её приложения: Пер. с англ.: В 2т./-М.: Мир, 1984. -Т.2: -751с.
- 111 Фотоэлектрические преобразователи информации / Под ред. Л.Н. Преснухина. -М.: Машиностроение, 1974. -376с.
- 112 Френке Л. Теория сигналов. -М.: Сов. радио, 1974. -344с.

- 113 Ханзел Г. Справочник по расчету фильтров: Пер. с англ. -М.: Сов. радио, 1974. -288с.
- 114 Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. -М.: Наука, 1971. -408с.
- 115 Цыбаков Б.С., Яковлев В.П. О точности восстановления функции с помощью конечного числа членов ряда Котельникова. // Радиотехника и электроника. -1959. -Т. IV. -№ 3. -С. 542-543.
- 116 Цыпкин Я.З. Оценка влияния квантования по уровню на процессы в цифровых автоматических системах. // Автоматика и телемеханика. -1960.-Т. 21.-№ 3.
- 117 Шарадкин А.М., Молчанов А.А., Меркотун Н.П. Дискретизация стохастических сигналов. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1986. -Т. 29. -№ 1.-С. 71-73.
- 118 Шарадкин А.М. Погрешности при равномерной дискретизации. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. -1988. -Т. 31. -№ II. -С. 81-83.
- 119 Шишков Б.Б. Оптимальные квантователи-обнаружители детерминированных сигналов на фоне m -связного марковского шума. // Радиотехника и электроника. -1993. -Т. 38. -№ 11. -С. 2047-2064.
- 120 Шюша А.-А.С. Дискретная модель аналого-цифрового преобразователя. // Методы и средства преобразования сигналов. Тезисы докладов 1^{ой} Всесоюзной конференции. -Т.П. -Рига. -Зинатне. -1978. -С. 148-151.
- 121 Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Пер. с нем.-М.: Наука, 1977. -344с.
- 122 Cahn С.Н. // IEEE Trans. -1971. -Dec. -Vol. COM-19. -№ 6. -P. 163-1172.
Кан. Характеристики цифрового согласованного фильтра при неизвестной помехе. // Зарубежная радиоэлектроника. -1972. -№ 11. -С. 22-38.

- 123 Clark B.G. // Proc. IEEE. -1973. -Vol. 61. -№ 11. -P. 1654-1655.
Кларк Б. Влияние ошибок квантования на обнаружение слабых сигналов в шумах. // ТИИЭР. -1973. -Т. 61. -№ 11. -С. 176-179
- 124 Helms M.D., Thomas J.B.
Хелмс, Томас. Ошибка за счет усечения разложений, полученных на основе теоремы отсчетов. // ТИРИ. -1962. -Т. 50. -№ 2. -С. 213-218.
- 125 Jerri A.J. // Proc. IEEE. -1977. -Vol. 65. -№ 11. -P. 1565-1596.
Джерри А. Теорема отсчетов Шеннона, её различные обобщения и приложения. // ТИИЭР. -1977. -Т. 65. -№ 11. -С. 53-89.
- 126 Lorifeme B. Analog-digital and digital-analog conversion. -London etc., Heyden cop., 1982. -196p.
- 127 Paez M.D., Glisson T.H. Minimum Mean Squared - Error Quantisation in Speech. // IEEE Trans. -1972. -Vol. COM-20. -№ 4. -P. 225-230.
- 128 Papoulis A. // Proc. IEEE. -1966. -Vol. 54. -№ 7. -P. 947-955.
Папоулис. Анализ ошибок в теории выборок. // ТИИЭР. -1966. -Т. 54. —Хй 6. —С. 34-43.
- 129 Rob Roy, O. Lowenschuss. Chirp Waveform generation using digital samples. // IEEE Trans. -1974. -vol. AES-10. -№ 1. -P. 10-16.
- 130 Stephenson A.G // Electronics. -1972. -Vol. 45. -№ 7. -P. 106-109.
Стивенсон. Многоканальный цифровой коротковолновый приемник. // Электроника. -1972. -Т. 45. -№ 7. -С. 35-41.
- 131 Stickler D.C. // Proc. IEEE. -1967. -Vol. 55. -№ 3. -P. 418-419.
Стиклер. Верхняя граница ошибки за счет ложных составляющих, обусловленных выборкой. // ТИИЭР. -1967. -№ 3. -С. 195-196.
- 132 Wunsch G. Zur Theorie der Signalabtastung. // Nachrichtentechnik. -1969. -№ 10. -S. 363-366.
Вунш. К теории разложения сигналов. // Зарубежная радиоэлектроника. -1972. -№ 1. -С.39-41.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функции распределения детерминированных сигналов

Гармоническое колебание с периодом $T_r = 1/F_r$

$$u_{rp}(t) = U_0 \cos(2\pi F_r t)$$

имеет на периоде T_r (см. рис. А.1)

$$\text{dir}[x; u(t)/U_0] = \begin{cases} 1, & T_r \arccos(x) < t < T_r \arccos(x) + T_r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $x = u/U_0$.

Тогда, из (1.4.6,а) можно получить:

$$F_{drp}(x) = \frac{1}{T_r} \int_{T_r \arccos(x)}^{T_r \arccos(x) + T_r} dt = 1 - \arccos(x), \quad -1 < x < 1. \quad (\text{A.1})$$

Из свойства функции и выражения (А.1) следует, что начальная фаза гармонического колебания не влияет на $F_{drp}(x)$.

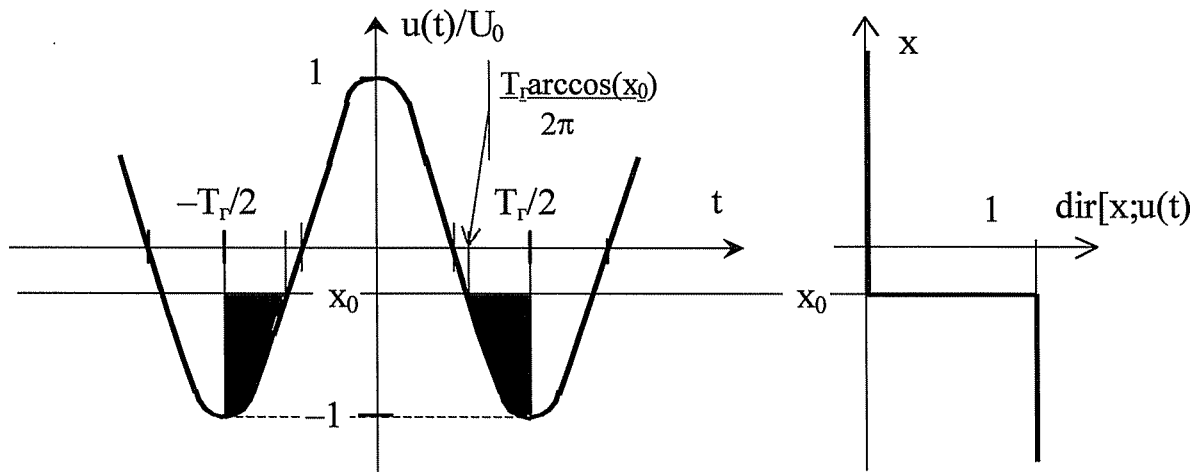


Рис. А.1 Определение функции $F_{drp}(x)$

Воспользовавшись соотношением (1.4.7) из (А.1) получим:

$$W_{drp}(x) = -J = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1. \quad (\text{A.2})$$

На рис. А.2 приведены график функции (А.1) - (кривая 1) и график функции (А.2) - (кривая 2).

Периодическая последовательность треугольных импульсов с периодом $T_T = t_H$

$$u_T(t) = U_0 \begin{cases} 4-1-1 \\ t, \end{cases} \quad 2 \quad T$$

имеет на периоде T_T функцию

$$\text{dir}[x; u_T(t)/U_0] = \begin{cases} 0, & \frac{ilk}{2} \\ \frac{H)t.}{2} \end{cases}$$

где $x = u/U_0$.

Используя соотношения (1.4.6,a) и (1.4.7), можно получить:

$$Fd_T(x) = \int_{-i}^{i} \frac{e^{-i(x+1)/4}}{i} dt = -i, \quad (A.3)$$

$$Wd_T(x) = |, \quad -1 < x < 1. \quad (A.4)$$

Графики функций приведены на рис. А.2: $Fd(x)$ - кривая 3 и $Wdr(x)$ - линия 4.

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

длительностью

$$\begin{cases} U_0, & |t| < t_n/2, |t + kT_n| < T_n/2, \\ 0, & |t| > t_n/2, |t + kT_n| < T_n/2, \end{cases}$$

имеет на интервале периода

$$Wd_n(x) = -\frac{1}{2} \text{E}(x) + 1 - I_8(x-1), \quad x \in [0; 1],$$

где $x = u/U_0$, $Q = T_n/t_n$, $I_8(*)$ - функция Хевисайда, $\text{E}(\diamond)$ - 5-функция.

Гауссов сигнал $u_r(t) = U_0 \exp(-t^2/2a^2)$ имеет на некотором временном интервале $T_0 \gg a$ функцию

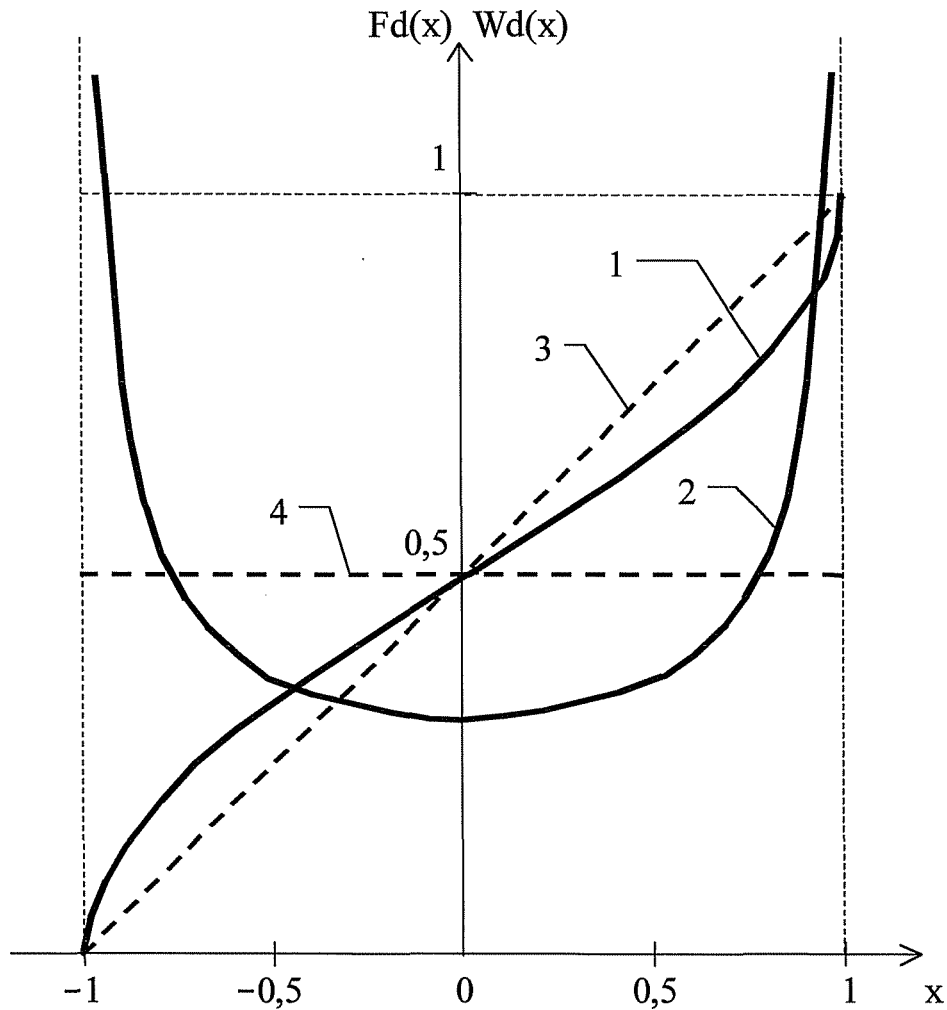


Рис. А.2 Графики функций $F_d(x)$ и $W_d(x)$ периодических сигналов

$$\text{dir}[x; u_r(t)/U_0] = \begin{cases} 1 & \text{if } -d/2 - 2a^2 \ln(x) < t < -d/2 + 2a^2 \ln(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

где $x = u/U_0$.

Задавшись интервалом T_0 или минимальным значением (точностью определения) сигнала x_0 , причем $Tg = 2a^2 \ln(xg)$, введем переменную y с областью определения $y \in [0; 1]$ такую, что $x = x_0^{(1-y)}$. Тогда из (1.4.6) можно получить

$$F_{d1}(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt = 1 - \ln(x) = 1 - \ln(x_0) \quad (A.5)$$

$$W_{d1}(x) = \frac{1}{x} \ln(x) \quad W_{d1}(y) = 1 - y \quad (A.6)$$

На рис. А.3 приведены графики зависимости (А.5) - кривая 1 и зависимости (А.6) - кривая 2.

Экспоненциальный импульс

$$u_3(t) = \begin{cases} u_0 e^{-\lambda t} & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

также имеет функции

$$F_{d3}(x) = \int_{x_0}^x \lambda t dt = 1 - \ln(x) \quad F_{d3}(y) = y, \quad (A.7)$$

$$W_{d3}(x) = \frac{1}{x \ln(x_0)}, \quad W_{d3}(y) = 1, \quad 0 < y < 1, \quad (A.8)$$

где $x = u/U_0$. Как и в случае гауссова сигнала, задаемся временным интервалом T_0 или точностью определения x_0 , связанных соотношением $T_0 = -\ln(x_0)/g$, и используем замену переменной $x = x_0^{(1-y)}$ с областью определения $y \in [0; 1]$. На рис. А.3 приведены графики зависимости (А.7) - кривая 3 и (А.8) - кривая 4.

Сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) во временной области описывается выражением [13, 65]

$$f_{\text{ЛЧМ}}(t) = f_0 \exp(j\pi \alpha t^2), \quad 0 < t < T_B, \\ f_{\text{ЛЧМ}}(t) = 0, \quad t > T_B, \quad t < 0,$$

где $\alpha = 2\Delta f/T_B$ - крутизна частотной модуляции;

Δf - девиация частоты;

T_B - длительность сигнала.

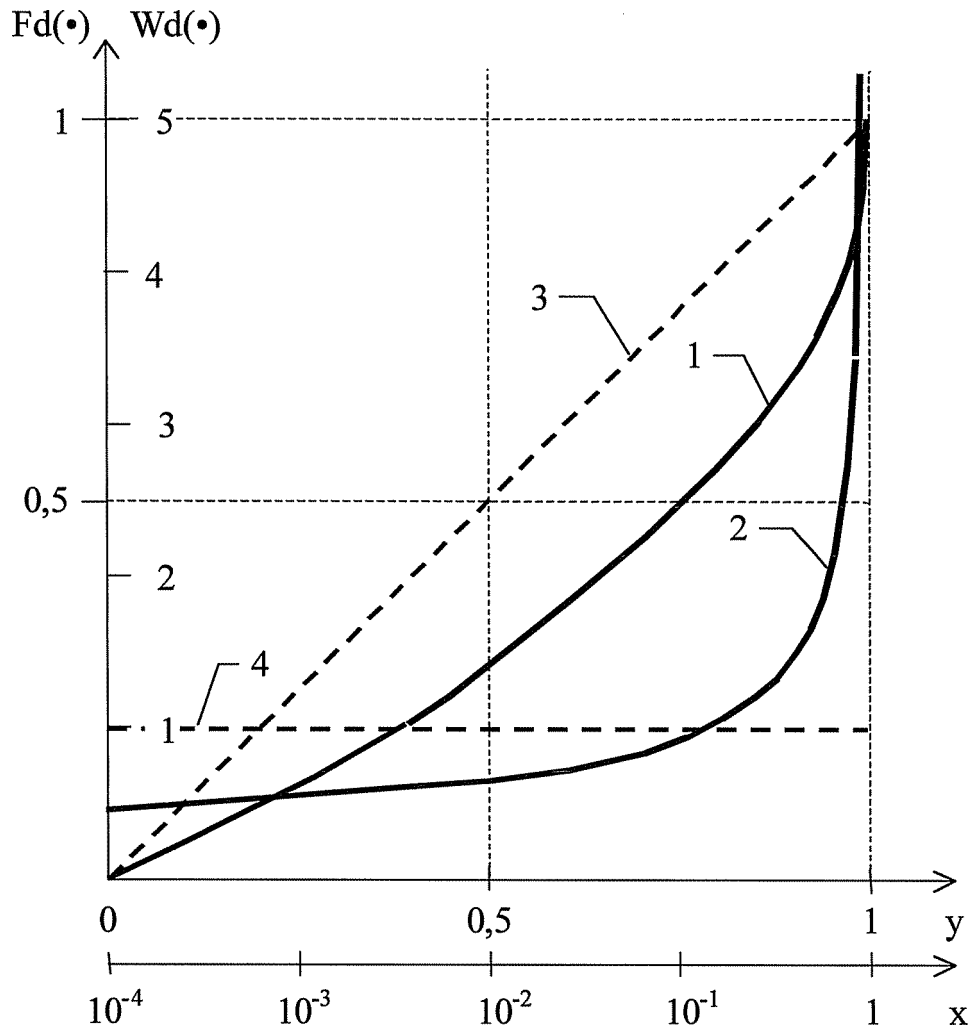


Рис. А.3 Графики функций $Fd(x)$ и $Wd(x)$ непериодических сигналов

Воспользовавшись методикой получения функций распределения для гармонического сигнала, получим для сигнала с ЛЧМ

$$Fd_{лчм}(x) = \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{m=0}^{B-1} \left[\sqrt{(m+1)} \frac{\arccos(x)}{2\pi} \right]$$

$$Wd_{лчм}(x) = \frac{1}{4\pi dB(1-x^2)} \sum_{m=0}^{B-1} \frac{1}{\sqrt{m+1} + \arccos(x)/2\pi}$$

где $B = T_B A f$ - база сигнала.

На рис. А.4 приведены графики функций распределения ЛЧМ-сигнала для ряда значений базы B . При $B \rightarrow \infty$ получаем распределения (А.1) и (А.2)

соответственно.

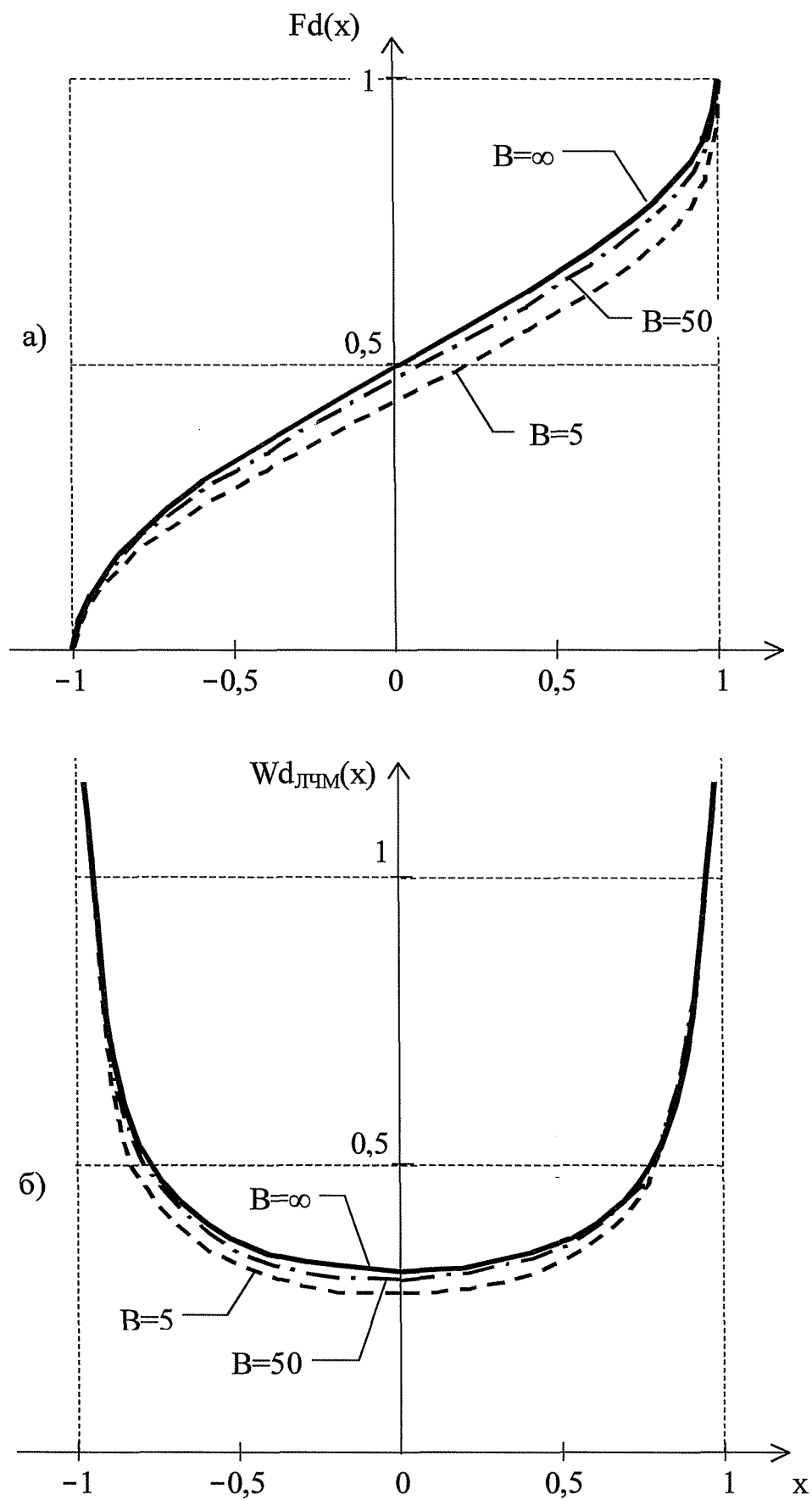


Рис. А.4 Графики функций $F_d(x)$ и $W_d(x)$ для ЛЧМ-сигналов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Особенности дискретизации узкополосных сигналов

Узкополосные сигналы (см. раздел 1.4) обладают спектром, сосредоточенным вблизи некоторой несущей частоты ω_0 , причем ширина спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$. Такой сигнал может быть представлен [26, 112] в виде

$$z(t) = u(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (\text{Б.1})$$

где $u(t)$ - огибающая, $\varphi(t)$ - фаза сигнала.

Воспользовавшись понятием комплексной огибающей аналитического сигнала $s(t) = u(t)\exp[j\varphi(t)]$ и её преобразованием (спектром) Фурье

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp[j\varphi(t)]e^{-j\omega t} dt,$$

спектр сигнала (Б.1) можно представить в виде

$$z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2}U[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}U^*[j(\omega + \omega_0)], \quad (\text{Б.2})$$

где $U^*(j\omega)$ - комплексно-сопряженный спектр.

Теорема Котельникова распространяется [26, 33] на узкополосные сигналы, причем финитным должен быть спектр $U(j\omega)$. Если в нем нет составляющих с частотами выше $\omega_T = 2\pi B_T$, то спектр (Б.2) будет сосредоточен в двух полосах: $[-\omega_0 - \omega_T; -\omega_0 + \omega_T]$ и $[\omega_0 - \omega_T; \omega_0 + \omega_T]$. Тогда сигнал $z(t)$ можно представить в виде

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi(t - kA_t)}{A_t} \right] \cos[\omega_0 t + \varphi(kA_t)], \quad (\text{Б.3})$$

где A_t - интервал дискретизации.

Для узкополосных сигналов достаточно, чтобы интервал дискретизации A_t удовлетворял условию

$$A_t = 1/2aF_m, \quad a > 1.$$

Для восстановления сигнала в виде (Б.3) необходима бесконечная последовательность пар отсчетов: огибающей $u(kA_t)$ и фазы $\varphi(kA_t)$. Их можно получить из

мгновенных отсчетов сигнала $z(t) \rightarrow z(kA_t)$ и сопряженного с ним по Гильберту $z(t) \rightarrow z(kA_t)$. Из определения аналитического сигнала [112] $v(t) = z(t) + jz(t)$ следует, что

$$u(t) = \sqrt{z^2(t) + \hat{z}^2(t)}, \quad u \cdot \operatorname{tg}[\varphi(t)] = \frac{\hat{z}(t)}{z(t)}$$

Для узкополосного сигнала (Б.1) преобразование Гильберта имеет достаточно простой вид $z(t) = u(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$ и является квадратурной составляющей сигнала $z(t)$. Тогда

$$u(kA_t) = \sqrt{z^2(kA_t) + \hat{z}^2(kA_t)} \quad \text{и} \quad \varphi(kA_t) = \operatorname{arctg} \frac{\hat{z}(kA_t)}{z(kA_t)}$$

Дискретизация во времени приводит к периодизации спектра в частотной области. Это следует из свертки (2.1.3), в которую входит периодический дискретный спектр $W(j\omega)$ дискретизирующей последовательности импульсов. Тогда, в соответствии с (2.1.3), спектр дискретизированного сигнала примет вид

$$Z_g(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} U[j(\omega - \omega_0 + k\omega_g)] + \frac{1}{2} U^*[j(-\omega - \omega_0 + k\omega_g)] \right\}$$

На рис. Б.1 показано соотношение спектров исходного и дискретизированного сигналов.

Возможны два вида дискретизации узкополосных сигналов: когерентная и некогерентная.

При когерентной дискретизации, показанной на рис. Б.1, между несущей частотой (ω_0) и частотой дискретизации выполняется соотношение $\omega_0 = N_{kg} \omega_g$, где $N_{kg} > 1$ - некоторое целое число. В этом случае парциальные спектры в (Б.4) повторяют спектр комплексной огибающей исходного сигнала на частотах $(\omega_0 - k\omega_g) = \omega_0(1 - k/N_{kg}) = \omega_0(1 - m/N_{kg})$.

Значение N_{kg} определяется из отношения $\omega_0/2\omega_T$, которое дает верхнюю границу значения. Учитывая, что в реальных системах в спектре могут быть слабые составляющие с частотами выше ω_T , восстанавливающие фильтры неидеальны, число отсчетов ограничено и т.п., должно выполняться условие $G)_{g} = 2aia)_{m}$ и $ai > 1$.

Тогда $N_{kg} = \text{int}(c\omega_0/2aG)_m$, что дает фактическое значение частоты дискретизации $a_{>g} = (c\omega_0/N_{kg})g$ и $a = c\omega_g/2a)_m > ai$.

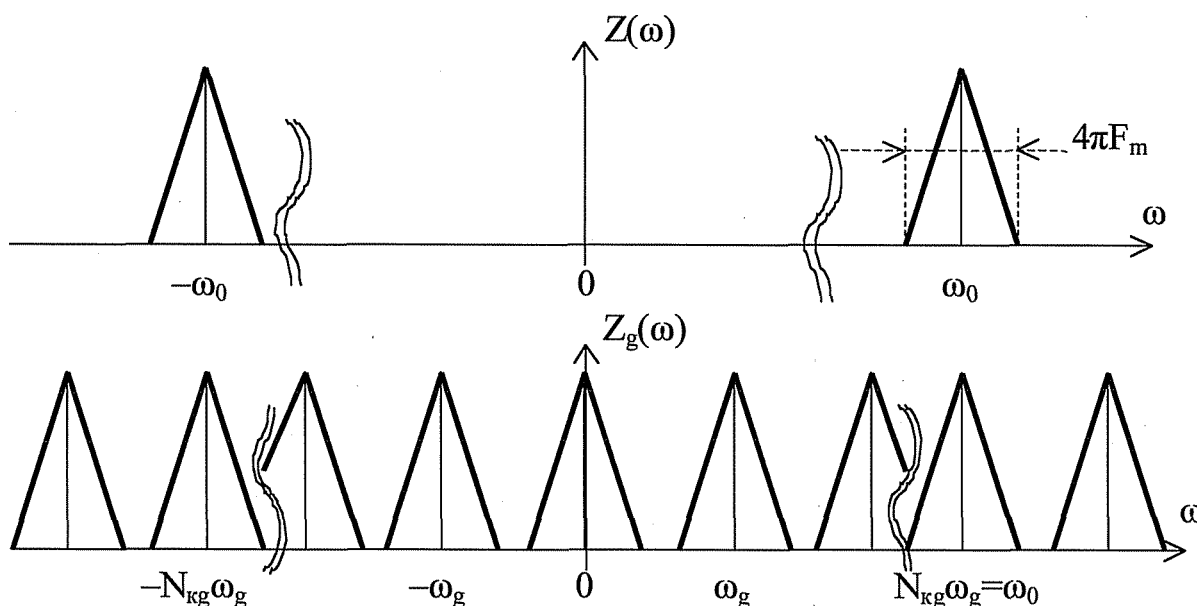


Рис. Б.1 Преобразование спектров при когерентной дискретизации

Используя в качестве восстанавливающего устройства идеальный полосно-пропускающий фильтр (ППФ) с характеристикой

$$\begin{aligned} &1, \quad n < Dg \rightarrow \bullet \quad c\omega_m < I \quad c\omega < I < nCOg + c\omega_m, \\ &0, \quad 0 < |\omega| < nCOg - c\omega_m, \quad |a| > nCOg + c\omega_m, \end{aligned}$$

можно восстановить исходный сигнал на несущей частоте $nCOg = nCO\omega/N_{kg}$. Тем самым процедура дискретизации совмещается с преобразованием частоты, причем нестабильность преобразованной несущей определяется нестабильностью частоты исходного сигнала (или $c\omega_g$).

Как правило, в сигнале (Б.1) полезная информация заключена в комплексной огибающей $s(t)$. Для её выделения можно использовать ФНЧ (2.1.6), после прохождения которого, как следует из (Б.4), будет получен сигнал со спектром

$$Xg(j\omega) = |uGa\rangle + iu'(-j\omega). \quad (\text{Б.5})$$

Из (Б.5) следует, что в этом случае процедура дискретизации и восстановления совмещаются с синхронным детектированием. Из выражения также следует, что неискаженное восстановление комплексной огибающей возможно только при

определенных дополнительных требованиях к спектру исходного сигнала. Искажения будут отсутствовать при выполнении одного из двух условий:

$$U(j\omega) = U^*(-j\omega) \quad (\text{Б.6,а})$$

или

$$U(j\omega) = 0, \quad \omega < 0 \text{ (либо } \omega > 0). \quad (\text{Б.6,б})$$

Условие (Б.6,а) означает, что сигнал $s(t)$ должен иметь четно-симметричный амплитудный и нечетно-симметричный фазовый спектры. Такими спектрами обладают сигналы с амплитудной модуляцией несущей ω_0 действительными функциями времени. Условие (Б.6,б) означает, что сигнал $s(t)$ должен быть аналитическим сигналом, действительная и мнимая части которого связаны преобразованием Гильберта [71]. Такие сигналы получаются при однополосной модуляции несущей ω_0 .

Таким образом, при когерентной дискретизации возможно неискаженное синхронное детектирование амплитудно-модулированных и однополосных сигналов. Другие виды сигналов при такой обработке будут претерпевать искажения.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) [13, 65, 92, 112]. Спектр этого сигнала (см. раздел 2.2) обладает свойством четной симметрии

$$S_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = S_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega) \cdot$$

Тогда из (Б.5) следует, что

$$S_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = S_{\text{ЛЧМ}}(\omega) + S_{\text{ЛЧМ}}(\omega)$$

Полученное выражение совпадает со спектром сигнала с V-образной (симметричной) частотной модуляцией [13, 65]. Свойства этого сигнала существенно отличаются от свойств ЛЧМ-сигнала.

При получении соотношения (Б.3) полагалось, что начальные фазы сигнала (Б.1) и дискретизирующей последовательности $D(t)$ (2.1.1) равны нулю. Реально эти фазы могут иметь произвольное значение. Тогда сигнал $z(t)$ можно представить как

$$z(t) = u(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0 + \theta(t)) + u(t) \sin(\omega_0 t + \phi_0 + \theta(t)), \quad (\text{Б.7})$$

где ϕ_0 - начальная фаза несущего колебания ω_0 .

При ненулевой начальной фазе y_g дискретизирующей последовательности её спектр определяется выражением

$$W_g(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots \quad (\text{Б.8})$$

Результат дискретизации будет зависеть от соотношения фаз ϕ_0 и y_g :

$$z_g 0(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-j\omega k} \{u[j(\omega) - \omega_0 + k\omega_g]\} + U^* [j(-\omega - \omega_0 + k\omega_g)]\} \quad (\text{Б.9})$$

Как это видно из выражений (Б.7) - (Б.9) при $\omega_0=0$ и $\omega_g=\pi/2$ (или $\phi_0= \pi/2$ и $\omega_g=0$) исчезает действительная (косинусоидальная) составляющая спектра сигнала, а при $\omega_0 \sim \omega_g$ (или $\phi_0 = \pi/2 = \omega_g$) - мнимая (синусоидальная) составляющая. Для неискаженного восстановления комплексной огибающей сигнала при произвольных соотношениях фаз ϕ_0 и y_g необходимо дискретизацию узкополосных сигналов осуществлять в квадратурных каналах. Это следует также из общего принципа низкочастотного представления узкополосных сигналов [112].

Квадратурность каналов может быть обеспечена двумя способами: сдвигом фазы сигнала $z(t)$ в одном из каналов на $\pi/2$ (см. рис. Б.2,а) или сдвигом фазы дискретизирующей последовательности на $\pi/2$ (см. рис. Б.2,б). В последнем случае это может быть осуществлено задержкой дискретизирующей последовательности в одном из каналов на $t_{\text{см}} = A_t/4N_{\text{кг}}$.

При некогерентной дискретизации между частотами ω_0 и ω_g выполняется соотношение

$$\omega_0 = (N_g/4)\omega_g$$

где ω_g -постоянное слагаемое, $0 < |\omega_g| < 0,5$.

Тогда спектр дискретизированного сигнала будет иметь вид

$$z_g W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K^{-k} R^{-k} \dots \quad (\text{Б.10})$$

Фильтрация (восстановление) сигнала (Б. 10) идеальным ФНЧ с полосой $[-2\text{лБ}_r^{-1}\omega_g; 27\text{сF}_m + \omega_g]$ даст сигнал со спектром

$$X_B(j\omega) = \frac{1}{2} \left\{ U[j(\omega - \xi\omega_g)] + U^*[j(-\omega - \xi\omega_g)] \right\}$$

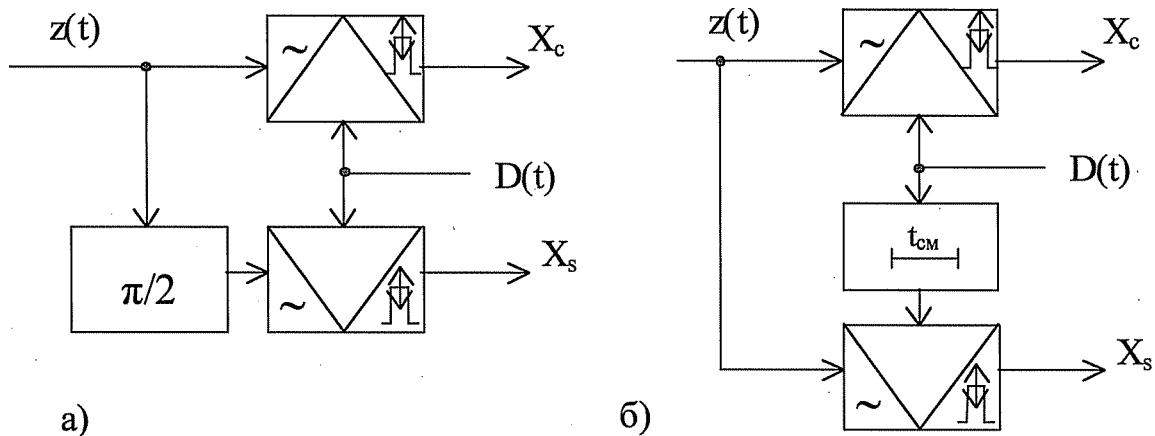


Рис. Б.2 Схемы получения квадратурных отсчетов

В этом случае искажения имеют место при любом спектре $U(j\omega)$. Выполнение условий (Б.6) может изменить характер и несколько уменьшить величину искажений, но не устраняет их полностью. В системах передачи речевой информации допустимая величина расстройки $\hat{\omega}_g$ определяется теми же значениями, что и расстройка опорного сигнала и несущей при детектировании в системах модуляции с одной боковой полосой [94].

Неискаженное восстановление исходного сигнала возможно на несущей частоте ω_0 , что следует из (Б. 10) при $k=0$.

Если при восстановлении использовать 1111Ф с полосой

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & (n-0,5)\omega_g < \omega < (n+0,5)\omega_g, \\ 0, & 0 < |\omega| < (n-0,5)\omega_g, \quad |\omega| > (n+0,5)\omega_g, \end{cases}$$

то сигнал имеет несущую частоту, равную

$$\omega_0 = (N_g - n)\omega_g = (n + \xi)\omega_g =$$

В этом случае нестабильность частоты новой несущей определяется общей нестабильностью частот ω_0 и ω_g .

В реальных устройствах, обладающих конечной крутизной склонов амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и спадов спектров сигналов, необходимо тщательно подходить к выбору частоты дискретизации, исключая перекрытие парциальных спектров (Б.4). Для этого следует определить верхнюю $\omega_{\text{в}}$ и нижнюю $\omega_{\text{н}}$ граничные частоты дискретизируемого сигнала следующим образом [31]. По известному спектру сигнала (или АЧХ фильтра), пример которого приведен на рис. Б.3,а, определяют полосу $\Delta\omega_{\text{п}}$ на уровне ЗдБ и полосу $\Delta\omega_{\text{д}}$ на уровне динамического диапазона $D_{\text{с}}$ или коэффициента прямоугольности $a = \Delta\omega_{\text{д}}/\Delta\omega_{\text{п}}$. При несимметричном спектре (или АЧХ) эти параметры определяют по части с большей протяженностью спада (см. рис. Б.3,б).

Значения граничных частот определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{н}} &= \omega_0 - 0,5A(\omega_{\text{п}} - 0,25(A\omega_{\text{д}} - A\omega_{\text{п}})) = \omega_0 - 0,25(a+1)\Delta\omega_{\text{п}}, \\ \omega_{\text{в}} &= \omega_0 + 0,25(a+1)\Delta\omega_{\text{п}}.\end{aligned}\tag{Б.11}$$

Частота дискретизации должна выбираться [24, 25] из условия

$$\omega_{\text{дмин}} - \omega_{\text{г}} - \omega_{\text{дмакс}} \leq 5\tag{Б.12}$$

где $\omega_{\text{дмин}} = 2(\omega_{\text{в}}/q)$, $\omega_{\text{дмакс}} = (\omega_{\text{н}}/(q-1))$, $q \in \{1, 2, 3, \dots, \inf[(\omega_{\text{в}}/(\omega_{\text{в}}-\omega_{\text{н}}))]\}$.

В системе всегда желательно иметь минимальное значение частоты дискретизации, поэтому следует взять $q \gg \inf[(\omega_{\text{в}}/(\omega_{\text{в}}-\omega_{\text{н}}))]$ и далее выбирать $\omega_{\text{п}}$ из условия (Б.12), а также обеспечить $\omega_{\text{г}} = (\omega_0/N_{\text{кг}})$ при когерентной дискретизации.

Соблюдение условия (Б.12) будет достаточно при дискретизации сигналов в условиях отсутствия шумов и помех. Такая ситуация типична для цифровых формирователей полосовых сигналов [2, 129].

Другой характерной ситуацией является дискретизация слабых сигналов в цифровых приемных устройствах [83, 130]. В этом случае для исключения наложения в парциальных спектрах шумов, имеющих более широкую полосу, и появления дополнительных каналов приема, необходимо частоты $\omega_{\text{в}}$ и $\omega_{\text{п}}$ в условии (Б.12) определять по АЧХ преселектора с учетом нестабильности его настройки [17, 83, 130].

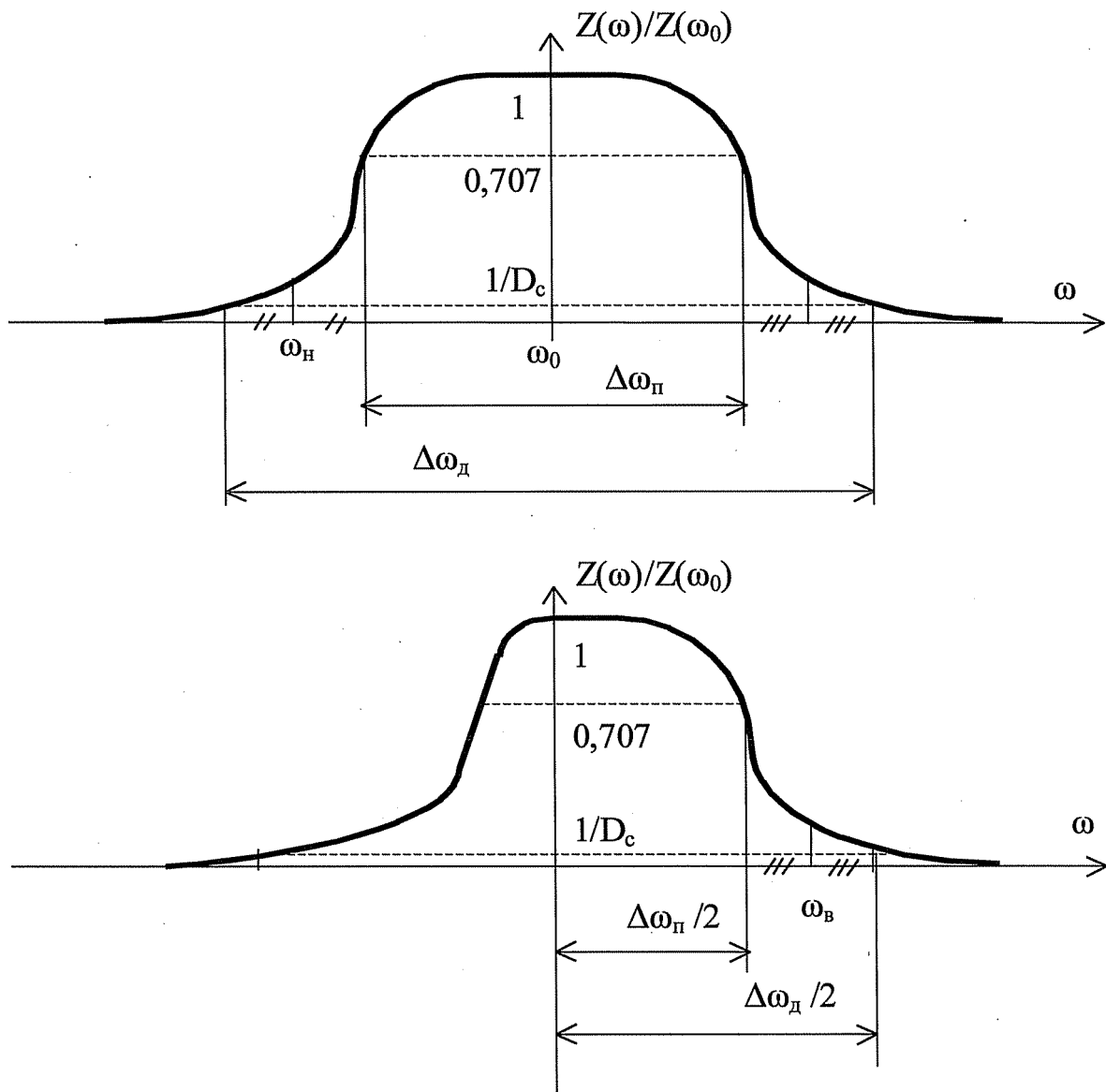


Рис. Б.3 Частотные характеристики преселектора

При высокой частоте дискретизации ($\omega_{\text{д}} \gg 2A_{\text{вп}}$) и использовании полосовых восстанавливающих фильтров желательно обеспечить равенство защитных интервалов $A_{\text{сох}}$ и $A_{\text{Фу}}$ между исходным и парциальными спектрами (см. рис. Б.4) дискретизированного сигнала [130]. Это позволяет упростить реализацию фильтра благодаря снижению требований к его АЧХ. Равенство $A_{\text{сох}} = A_{\text{Фу}}$ достигается соответствующим выбором частоты дискретизации.

Если полоса пропускания преселектора $A_{\text{опр}} = \omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мин}}$, то из рис. Б.4 можно получить $A_{\text{сод}} = 2(N_{\text{г}}\omega_{\text{д}})g_{\text{вмакс}}$ и $A_{\text{ох}} = 2(\omega_{\text{мин}} - (2N_{\text{г}}-1)\omega_{\text{д}})$. Равенство защитных интервалов обеспечивается при

$$\omega_g = \frac{2(\omega_{\text{макс}} + \omega_{\text{мин}})}{4N_g - 1}. \quad (\text{Б.13})$$

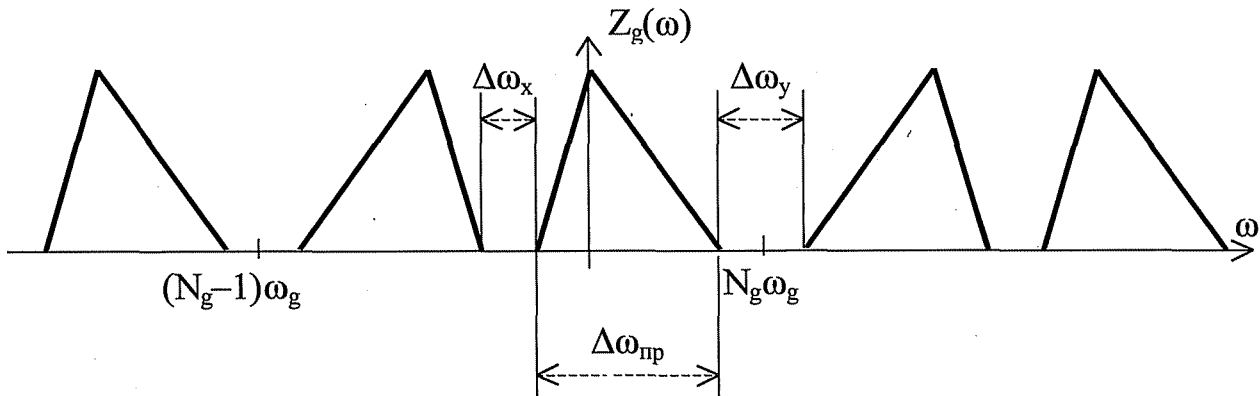


Рис. Б.4 Выбор защитных интервалов

Учитывая, что $\mathbb{R}_\varepsilon = aL\mathbb{R}_{\text{пр}} = a(\mathbb{R}_{\text{макс}} - \mathbb{R}_{\text{мин}})$, где $a > 1$, величину N можно определить как

$$N_B = \text{int} \frac{\mathbb{R}_{\text{макс}}}{\mathbb{R}_{\text{макс}} - \mathbb{R}_{\text{мин}}}$$

В зависимости от решаемой задачи, типов сигналов и помех на выбор частоты дискретизации могут налагаться дополнительные условия (например, см. [130]).

Важным моментом, влияющим на эффективность системы дискретизации, является выбор формы и длительности t_g дискретизирующих импульсов [76, 130]. В идеальном дискретизаторе выборки осуществляются δ -функциями. В реальных системах их обычно заменяют импульсами близкими к прямоугольным с длительностью $t_g \ll Af$. При последующем амплитудном квантовании, когда используется схема выборки и хранения (см. раздел 2.7), для получения отсчета в виде мгновенного значения процессов $z(t)$ и $z(t)$ длительность t_g должна быть много меньше периода несущего колебания ω_0 :

$$t_g \ll 2\pi/\omega_0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Среднеквадратическая ошибка нестабильности частоты дискретизации

Для определения среднеквадратичной ошибки преобразуем выражение (2.4.1), сделав следующее. Во-первых, разложим функцию $u(t)$ в ряд Тейлора в окрестностях точек $t = kA_t$. Тогда

$$u(kA_t + A^k) = u(kA_t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{(n)}(kA_t) A^k}{n!}, \quad (\text{B.1})$$

где $u^{(n)}(kA_t)$ - значение n -ой производной функции $u(t)$ при $t = kA_t$.

Во-вторых, разложим функцию $\text{sinc}(\cdot)$ в выражение:

$$\text{sinc}[7T(t - kA_t - A^k)/A_t] = [\sin(Q_k)\cos(\Delta_k) - \cos(Q_k)\sin(7r^k)]/ \quad (\text{B.2})$$

где использовано обозначение $Q_k = 7i(t - kA_t) / A_t$.

Относительное смещение $\Delta_k \ll 1$, поэтому можно воспользоваться разложением в ряд функций $\sin(x)$, $\cos(x)$ и $1/(1-x)$ с удержанием двух-трех членов. Тогда выражение (B.2) преобразуется к виду

$$\text{sinc}[7T(t - kA_t - A^k)/A_t] = [\text{sinc}(Q_k)(1 - \text{tr}^2 \delta_k / 2) - \Delta^5 \cosc(Q_k) \times \quad (\text{B.3}) \\ \times (1 - \text{tr}^2 \delta_k / 6)] \cdot [(1 - 7^k / Q_k + (7^k / Q_k)^2 - (\text{tr}^5 \delta_k / Q_k)^3)],$$

где $\text{cosc}(Q_k) = \cos(Q_k)/Q_k$.

Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = x$, поэтому в разложении (B.3) имеем

$$\lim_{t \rightarrow kA_t} [1 - \Delta^k / Q_k + (\Delta^8 / Q_k)^2 - (\Delta^8 / Q_k)^3] = 1.$$

Подставив соотношения (B.1) и (B.3) в (2.4.1) и ограничив ряд (B.1) третьей производной, получим

$$u_H(0) = \int_{k=-\infty}^{\infty} \{ u(kA_t) + u^{(1)}(kA_t)A_t 8^k + u^{(2)}(kA_t)A_t^2 8^{2k} + u^{(3)}(kA_t)A_t^3 8^{3k} \} \times \\ \times [\text{sinc}(Q_k / (1 - it^2 8^k / 2)) - It^2 8^k \cos c(Q_k)(1 - Tt^2 6_{<k} / 6)] \times \\ \times [1 - it^2 8^k / Q_k + (\text{Л}8_{kk} / Q_k)^2 - \dots / Q_k^3 \}]. \quad (\text{B.4})$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые со степенью 8^k не выше четвертой, представим (B.4) как две суммы:

$$u_H(0) = S^{u(kA_t) \text{sinc}(Q_k)} + Z[u(kA_t) \{ \text{sinc}(Q_k) \text{Jc}5_{5k}[-1/Q_k + \\ + \text{тг}8_{,k} (1/Q_k - 1/2) - \text{я}^2 8^2_k (1/Q_k^2 + 1/2)/Q_k] - 7^k \cos c(Q_k)[1 - \\ - 7t^2 8^k \cos Q_k + 7t^2 8^2_k (1/Q_k^2 + 1/6)] \} + u^{(1)}(kA_t)A_t 8^k \{ \text{sinc}(Q_k) \times \\ \times [1 - 1/Q_k + (1/Q_k - 1/2)] - 4_k \cos c(Q_k)(1 - \text{Tr}8_{,k}/Q_k) \} + \\ + u^{(2)}(kA_t)A_t^2 8^2_k \times [\text{sinc}(Q_k)(1 - \text{д}8_{5k} / Q_k) - \text{тс}8^k \cos c(Q_k)] + \\ + u^{(3)}(kA_t)A_t^3 8^3_k \text{sinc}(Q_k)].$$

Первая сумма в выражении (B.5) представляет собой восстановленный исходный сигнал $u(t)$, а вторая сумма - ошибку за счет нестабильности отсчетных импульсов. Тогда ошибка $s_H(t) = u(t) - u_H(t)$ будет равна

$$e_H(t) = Z[u(kA_t) \{ \text{sinc}(Q) 7c8^k[-1/Q_t + 7^k (1/Q \\ + 1/2)/Q] - 8^k \cos c(Q_t)[1 - Tt^2 \cos Q + (1/Q - 1/6)] \} 4 - \\ + u^{(1)}(kA_t)A_t 8^k \{ \text{sinc}(Q_t)[1 - 7t^2 8^k / Q_t \text{Wfi}^2 (1/Q - 1/2)] - \\ - K8_{jk} \cos c(Q_t)[1 - K8_{kk}/Q_k] \} + u^{(2)}(kA_t)A_t^2 8^2_k [\text{sinc}(Q_k)(1 - \\ - 1/Q_k) - 8^k \cos c(Q_k)] + u^{(3)}(kA_t)A_t^3 8^3_k \text{sinc}(Q_k)]. \quad (\text{B.6})$$

Среднеквадратичное значение ошибки определим как

$$\epsilon_H = \int_{-\infty}^{\infty} [s_H(t)]^2 dt. \quad (\text{B.7})$$

Подставив выражение (B.6) в (B.7), возведя в квадрат и поменяв местами порядок интегрирования и суммирования, получим интегралы вида:

$$\left. \begin{matrix} \text{sine} \\ \text{cosc} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{sinc } l \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{sinc}(Q_m) / (Q_k Q_m) dt; \\ \text{COSC } J \end{matrix} \quad k, m \in N; P, L \in \{0, 3\}, \quad (B-8)$$

из которых отличающимися от нуля при $k = m$ и $i, j \in \{к, ш\}$ будут:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{sinc}(Q_m) dt &= A_t; \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{sinc}(Q_m) / Q_k Q_m dt = -2A_t / 3; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{fcosc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q_k Q_m dt &= 2A_t / 3; \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q_i dt = A_t; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{fsinc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q^3 dt &= -2A_t / 3; \int_{-\infty}^{\infty} \text{fcosc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q^2 dt = 2A_t / 3; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q^4 dt &= A_t / 3; \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q^5 dt = A_t / 3; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{inc}(Q_m) / Q^6 Q_j dt &= 2A_t / 15; \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Q_k) \text{sinc}(Q_m) / Q_k Q^4 dt = 2A_t / 15; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Jcosc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q^* Q^* dt &= -2A_t / 15; \int_{-\infty}^{\infty} \text{Jcosc}(Q_k) \text{cosc}(Q_m) / Q_j Q_j dt = -2A_t / 15. \end{aligned}$$

Подставляя (B.6) и значения интегралов (B.8) в среднеквадратическую ошибку (B.7), получим:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= Z\{u^2(kA_t)\} [47t^2 A_t 8f_k / 3 - 2\Gamma^3 A_t 8^4 / 3 - \text{я}^4 \text{Д}_k 8^4 / 60] + \\ &+ [u^m(kA_t)]^2 [A_t^3 8j_k + \text{л}^2 \text{Д}^3 3^4 / 3] - 7\text{и}(\text{кД}_k) \text{и}^{(1)}(kA_t) \text{л}^2 A_t^2 8^3 / 6 - \\ &- 3u(kA_t) u^{(2)}(kA_t) 7t^2 A_t^3 8^4_k + 2u^{(1)}(kA_t) u^{(2)}(kA_t) A_t 5^4_k + \\ &+ [u^{(2)}(kA_t)]^2 A_t^5 5^*_k + 2u^{(1)}(kA_t) u^{(3)}(kA_t) A X_k \}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Шварца [112]

$$\sum_k X_k \sum_k Y_k \leq 3 \sum_k X_k Y_k$$

позволит представить выражение (B.9) в виде:

$$\epsilon^2 < \text{Д}_k \chi^2(\text{кД}_k) 2 \int_{-\infty}^{\infty} [4\text{я}^2 8|_k / 3 - 2\Gamma^3 8^3_k / 3 - \Gamma^4 8^4 / 60] +$$

$$\begin{aligned}
& + A' \int_{k=-\infty}^{\infty} [u^m(kA_t)]^2 2X + 7t\% / 3 + \int_{k=-\infty}^{\infty} [u \otimes(kA_t)]^2 X \\
& \times 2X \int_{k=-\infty}^{\infty} A_t^2 \int_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) u^{(1)}(kA_t) 2L(-7K^2 3^{\wedge} / 6) - A_t^3 \int_{k=-\infty}^{\infty} u(kA_t) \times \\
& xu \otimes(kA_t) + \int_{k=-\infty}^{\infty} Su^{<1>}(kA_t) u^{<2>}(kA_t) 2M + \\
& + \Delta_t^5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^{(1)}(k\Delta_t) u^{(3)}(k\Delta_t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\delta_{\xi k}^4.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Суммы, входящие в (B.10), представляют собой [33, 74, 112, 114]:

$\int_{k=-\infty}^{\infty} X^{\ddot{u}}(kA_t) = \mathcal{E}_c$ - энергию исходного сигнала;

$\int_{k=-\infty}^{\infty} 22^u(kA_t)]^2 = \mathcal{E}_c$ - энергию n-й производной сигнала;

$\int_{k=-\infty}^{\infty} 22^u(\Pi(kA_t)u(kA_t) = R_{nTn}(0)$ - взаимокорреляционную функцию n-й

и m-й производной сигнала в совпадающий момент времени, n, m ∈ {0; 3};

$\int_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^8_k = M_2\{5\}$ — и - дисперсию случайной величины Δ^8 ;

$\int_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^3_k = M_3\{\xi\}$, $\int_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^4_k = M_4\{f_c\}$ - третий и четвертый моменты

случайной величины Δ^8 .

С учетом изложенного, соотношение (B. 10) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 < 4L^2 \mathcal{E}_c M_2\{3^{\wedge}\} / 3 - 2L^3 \mathcal{E}_c M_3\} / 3 - L^4 \mathcal{E}_c M_4\{3^{\wedge}\} / 60 + \\
+ \mathcal{E}^{\wedge} [M_2\{3^{\wedge}\} - D^2 M_4\{3^{\wedge}\} / 3] + \mathcal{E}^{\wedge} A^4 M_4\{3J - 3A^2 R_{02}(0) L^2 M_4\{3^{\wedge}\} + \\
+ 4A^2 R_{,,}(0) M_4\} + 2A^3 R_{j2}(0) M_3^{\wedge}\}.
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Параметры оптимальных АЦП детерминированных сигналов

Д.1 Оптимизация АЦП для гармонического сигнала

Д. 1.1 Четный АЦП, разрядность $\nu=2$

$$l := 1.4 \quad U := -8.8888 \quad 112 := - \quad 114 = 0.8888$$

$$W(4) := \dots$$

Given

$$(112 - U)^2 + (113 - U)^2 - F(\dots) = 8$$

$$(113 - \dots)^2 + (114 - \dots)^2 - F(\dots) = 0$$

-8.38

0.38 J

Д. 1.2 Нечетный АЦП, разрядность $\nu=2$

$$l := 1.6 \quad \dots := -8.88888 \quad \dots := -8.5 \quad \dots := 0 \quad \dots := 8.5 \quad \dots := 8.88888$$

$$W := \dots \cdot \arccos(\dots)$$

$$W(\dots) := \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1 - (\dots)^2}}$$

$$(\dots - U) \dots + 21(113) - 2(112 - \dots) F(\dots) - 2(\dots) = 0$$

$$(\dots - \dots) \{ (2 - \dots - \dots) (\dots) + \dots \} - 2(\dots - \dots) (\dots) - 2(\dots) F W =$$

$$(\dots - \dots) \{ (2 - \dots - \dots) (\dots) + \dots \} + 2 F(\dots) - 2(\dots - \dots) F(\dots) = 0$$

-0.566

$$\dots = 1.046 \times 10^{...}$$

0.566

Д. 1.3 Нечетный АЦП, разрядность $v=3$

$I := |B U| := -0.888$ $-0.75 \ 113 := -0.5 \ u_n := -0.25 \ U_{bj} := 0 \ U_g := 0.25$

$U_j := 0.5$ $U_g := 0.75 \ U_g := 0.888$

$F_W := 1$ $\text{acos}(iig)$
 π $W(u_j) := \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1 - (|u_j|)^2}}$

Given

$(^3 - u) \{ (2^4 - 1 - u)^n(u) + 2^F (^2 \tilde{u} \sim ^2(u - u)^r(u) \text{ " } ^2(u - ^2) < u) = 0$
 $(^4 - ^2) \{ (2 - \ll 3 - ^2 - u)^*(u) + ^2 < u \} - ^2 (u \ 4 > ^F (^2) - ^2 < 4 - u)^r(u) = \bullet$
 $(^5 - u) K^2 u - 4 - u M u + ^2 X u \ddot{i} - ^2 (^4 - u I u) - ^2 (u - u I u) = \gg$
 $(u - u) \{ (^* u - u - u)^n(u) + \gg(u) \} - ^2 (u - u I u) - ^2 (u - u M u) = "$
 $(^7 - u) \{ (^* u - u - u I u) + \ll (u \ \text{Я} - ^2 (u - u \ \text{Ж} u) - ^2 (u - u I u) = \bullet$
 $(u - u) K^2 u - u - u)^*(u) + ^2 X u \} - ^2 (u - u) < u \} - ^2 (u - u I u) = "$
 $(u - u) K^2 u - u - 4)^w(^B) + ^2(u) \} - ^2 (u - u)^r(u) - ^2 (u - u)^r(u) = \ll$

- 'оми'
- 0.555
- 0.281
- 1.050 x 10⁸
- 0.281
- 0.555
- 1 0.808 J

“(u>u>u>u’u>u>u)

Д. 1.4 Четный АЦП, разрядность $v=3$

$$1 := 1..8 \quad 1| := -\text{ОЛИ } U_j := O_j \gg_4 := B_j := 1 \text{ ч} := | \text{"7} = \text{\textcircled{R}}$$

$$11g := 0.888$$

$$F(4) = 1 \frac{\text{aeosfuj}}{7C}$$

$$W(u_j) := \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1 - (|u_j|)^2}}$$

Given

$$(O_3 - B|) - E(2112 - \ll 1 - 0!) w(l_j) + 21 (\%) - \ll i \wedge \gg - 1(\% - 11j)! (\text{ц}) = 0$$

$$(\text{ц} - \blacksquare) \mathcal{E}(\pm \text{ц} - \ll 3 - 4.) - W(\%) + 21 (\text{ц}) - 2 (И_3 - \%) \cdot F(\%) - 2(\gg_4 - \text{ц}3) 1(u_4) = 0$$

$$(\ll 5 - "s) \{ (2'HI - \% - \text{ч}) \gg (\text{ч}) + 2 - F - 2 (u_4 - 03) 1(03) - 2 \cdot (115 - M) F(4S) = 0$$

$$("6 - " \ll \{ (2'П - O \gg - \ll o) \text{ч} 1(\%) + 2 F(lb_j) \} - 2 - (lkj - \text{ц}) 1(\text{ц}) - 2 (115 - \text{ч}6) F(\text{ч}) = \blacksquare$$

$$("7 - *) \{ (2-01 - "5 "7) * ("s) + 2 - F(l^\wedge) \} - 2 \cdot (05 - \%) 1(\text{ц}) - 2 - (n, - 4) - F(l,) = 0$$

$$("8 - \text{ч}o) \{ (2 "7 - OВ - \text{ч}) - И(0\text{ц}) + 2 - F(l,) \} - 2 \cdot (07 - OВ) \cdot F(\text{н}) - 2 (0, - 07) 1(05) = 0$$

(0.775

-0478

$$\text{Hnfl}(1J2, 113, 84, \%, 86, 87) \stackrel{-0.162}{=} 0.162$$

0470

< 0.775 >

Д.2 Оптимизация АЦП для сигнала вида $\arcsin(x)$ Д.2.1 Четный АЦП, разрядность $v=2$

I := 1.4

ORIGIN := 1

$$U_j := -0.88888 U_j \quad \frac{2}{3} \quad U_3 := \frac{2}{3} \quad I_d := 0.99888$$

$$F(U_j) := \frac{1 + \sin \pi i - \sqrt{2}}{2} \quad := mi- \quad \cos \left(\pi \cdot \frac{U_j}{4} \right) \quad K \frac{27}{4}$$

Given

$$(u - i) \{ (2^4 - 1 - u) * (u) + \} (u^2 - 2(u - i)) F(i) - 2(u - i) i(u) = 0$$

$$(4 - u) [(2 - u - i - u) + 2] (u^2 - 2(u - i)) - 2(u - i) = 0$$

$$\ll (u, u) = aa1 \quad (-0.28)$$

Д.2.2 Нечетный АЦП, разрядность $v=2$

$$III := -0.8080 \quad \psi := -1 \quad K3 := | \quad 114 := 0.0000$$

$$1 + 8 \pi \gamma C \frac{u}{2} \quad \psi(u) = \frac{\cos \pi u}{4} - \frac{\sin \pi u}{4}$$

Given

$$(i\gamma - u)^2 + (i\gamma - i\gamma)^2 F(u) - (i\gamma - u)^2 \gamma(i\gamma) - (i\gamma - \psi)^2 F(i\gamma) = 0$$

$$(i\gamma - u)^2 + (i\gamma - i\gamma)^2 i(i\gamma) - (i\gamma - i\gamma)^2 F(u) - (114 - i\gamma)^2 F(u) = 0$$

$$\text{ЛпИ}(u, i\gamma) = \begin{matrix} -0.287 \\ 0.287 > \end{matrix}$$

(£90
 OZFO
 IZO
 o_l 0l x Ne (4'A1'A'4'4'4'4)puil
 120-
 OZVO-
 k £90

$$0 = W^j z^{*} \text{ " } 0\Phi z^{\wedge} \text{ " Ai} - (A\phi fz^{*} \sim *)^+ z^{(4 \text{ " } 8n)}$$

$$0 = (A\phi_{-}(4 - A) - (A)] z(A - Ai) - (Ai) j_{-} z(Ai - Ai) + z(A - Ai)$$

$$o = (Ai) j z(A - Ai) - (4) j z(4 - A) - (Ai) j_{-} z(A - Ai) + z(4 - A)$$

$$o = (A\phi z(Ai - A) - (A) j z(A - A) - (A) j z(A - A) + z(A - A)$$

$$^0 = \text{ " Ai} - (A) j z(A - A) - (A) i^{-\wedge}(A - A) + z(A - A) \sim$$

$$^{\circ} = (A\phi^{\wedge 8n} \text{ " *}) \text{ " (Ai)] z(A - A) - (A) j |^{\wedge} z(A - A) + z(A - A)$$

$$^{\circ} = (A\phi z^{\wedge} \text{ " Ai} - (Ai) j z(n - A) - (A) j z(A - A) + z(ki - A)$$

ИИИ

$$\left(\frac{l \cdot \pi}{h} \right)^t \quad \blacksquare u =: (*i)M \quad \frac{z}{\left(\left(\frac{z \cdot \pi}{h} \right) \sin + 1 \right)} =: (h)_J$$

оово'о =: A s£0 =: A so -■ 4 9zo =: A o= A

Й O-= 4

90-= 4

9£0-= A1 00000-=: to

0 1=1

£=Л ЧЮОНІІКСІЕВСІ 'ТТТТУ ИЧШ9Е9Н Е'3'ІІ'

Д.2.4 Четный АЦП, разрядность $v=3$

11..8 $|1| - 0.9899 Lkj := -^m Ug := - y ||д := -^m llg := - Ug := - lij := -$

$Ug := 0.8990$

$$F(u_i) := \frac{\left(1 + \sin\left(\pi \cdot \frac{u_i}{2}\right)\right)}{2} \quad W(u_i) := \pi \cdot \frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{u_i}{2}\right)}{4}$$

Given

$(\#3 \text{ " } u_i) \{ (2^i, 2 \text{ " } "1 - \dots - 2 (B2 \sim "i) F(0i) - 2 (03 - ug) F(1^A) = 0$
 $("4 - "2) \{ (2 \text{ " } S - \ll 2 - 4) * W + 2 F W 0 - 2 (h - "2) F W - 2 ("4 - 4) * (M) = \cdot$
 $("6 - "s) \{ (2^2) 4 - "S - \% \} "W + 2 F ("<)] - 2 ("4 43) F("s) " 2 ("S - "4) F("5) = "$
 $(u - Uj) \{ (2-115 - Uj - llg) w(1^A) + 2f(lij)] - 2-(\% - Ц>-Г(u) - 2 (uj - \dots = 0$
 $("7 - *) D>"6 - \ll 5 - "7) - \ll ("B) + 2 F(HI)] " 2 (>6 - \%) F(\ll 5) - 2 ("7 - "6H("7) = \ll$
 $("» ЧВ) \{ (2 "7 " "6 - 4B) "W + 2 F("7)] - 2 ("2 - "6) F W - 2 ("» - "7) F("») = "$

$r - 0.030 \text{ "}$

-0.368

-0.121

Finding, Иц, Цi, «B.»?) $\overline{= 0.121}$

0.368

$10.638)$

Д.3.3 Нечетный АЦП, разрядность $\nu=3$

$I := 1..B$ $op := 0.025$ $\psi := 0.025$

$112 := 0.125\%$ $:= 0.25$

$11д := 0.375$

$115 : 0.5$ $Ug: 0.025$ $11/$

$075 \psi := 0.075$ $Ид := 0.00000$

$$F(\psi) := 1 - \sqrt{\frac{\ln(\psi)}{\ln(op)}} \quad u(\psi) := \frac{1}{2\psi д / 1п(\psi) - 1п[01й]}$$

Given

$$\begin{aligned} & (из - III) [(2 112 - 0| - Из) * (12) + 2 p(иг)] - 2 (Ily - \psi) P(\psi) - 2 («з - ЦгЖчз) = 0 \\ & (||4 - Иг)-[(2 Из - Ц2 - iu) w(II3) + 2-f(из)] - 2 (1I3 - Иг) FW - 2 (iш - Из)-г(\psi) = 0 \\ & (ив - Из){(2-114 - из - It)-w(iu) + 2-F(U4)} - 2 (iш - из) г(\psi) - 2 (is - is)-F(is) = 0 \\ & (ив - ии) [(2 BS - И4 - Иб)-и(ии) + 2 F(II5)] - 2 (1$ - - 2 (ив - is)-F(и) = 0 \\ & (и/ - Bб) [(2-Ив - IS - Иу) W(ИВ) + 2 F(UB)] - 2-(ив - lfe) F(UB) - 2 (и/ - Ив)-F(Ily) = 0 \\ & (ив - ИВ) [(2 и7 - ИВ - ЧВ) w(IIz) + Z-F(IIy)] - 2 (ii/ - НВ) F(UB) - 2 (ifc - Иу)i(ив) = 0 \\ & (IIS - 4y){(2-IS « 7 - ИВ)-W(ИВ) + 2-F(Is)] - 2 (ив - Иу) г(iiy) - 2 (IIfI - ИВ)-Г(\psi) = 0 \end{aligned}$$

	0.111
	0.223
«(i^MJI^M)	0.351
	0Д88
	0.620
	0.760
	0.884

Д.3.4 Четный АЦП, разрядность $v=3$

dt := | Цi := * Ч := | U7 := | Ч := ОЛВОВЯ

$r(\zeta) := 1$

$I(\zeta) := \frac{\dots}{2-\zeta^7 i a(\zeta) I[\zeta]}$

Given

$$(\langle 3 - I1 \rangle [(2 \text{ II} 2 - \text{Ш} - \text{ч})^*(\text{ч}) + M(\text{чЦ} - \text{Г} (\langle 2 - \text{O} \text{ Кц} - 2-(\text{ч} - \text{ч})\text{Г}(\text{ч}) = 0$$

$$(\text{ч} - \text{ВГ}) [(2 \text{ ч} - \langle 2 - \text{ч} - \text{I} \rangle (\text{ч}) + 2 F(\text{Iij})] - 2 (\text{ч} - \langle 2 \rangle 2(4) - 2-(\text{ч} - \text{ч})\text{Г}(\text{ч}) = \rangle$$

$$(\text{ч} - \text{ч})[(\text{Г} - \text{ч} - \text{ч} - \text{ч})^*(\text{ч}) + 2-2(4)] - 2 (\zeta - \text{ч})-2(\text{ч}) - \text{Г}(\text{ч} - \text{ч})\text{К}(\text{ч}) = 0$$

$$\langle \text{В} - \text{ш} \rangle [(2 \text{ Ч} - \text{Ч} \sim \text{ч}) \text{ и}(\text{ч}) + 2 \text{ Г}(\text{ч})] - 2-(\text{ч} - \text{ч})\text{К}(\text{ч}) - 2-(\text{ч} - \text{ч})\text{Г}(\text{ч}) = \langle$$

$$(\text{ч} - \text{ч})\{ (2-\text{ч} - \text{ч} - \text{ч}) \rangle (\text{ч}) + m(\text{чД} - 2(\text{ч} - \text{ч})\text{I}(\text{ч}) - \text{Г}(\text{ч} - \text{ч})-\text{Г}(\text{ч}) = \langle$$

$$(\text{ч} - \text{ч}) [(2-\text{Ч} \text{ Ч} \text{ ч}) \text{н}(\text{ч}) + 2\text{i}(\text{ч})] - 2 (\text{ч} - \text{ч}) \text{К}(\text{ч}) - 2-(\text{ч} - \text{ч}) \text{К}(\text{ч}) = 0$$

(0.105 >

0.238

Hnd(II2,II3,IfcblI5,U6,U7) =

0.381

0.555

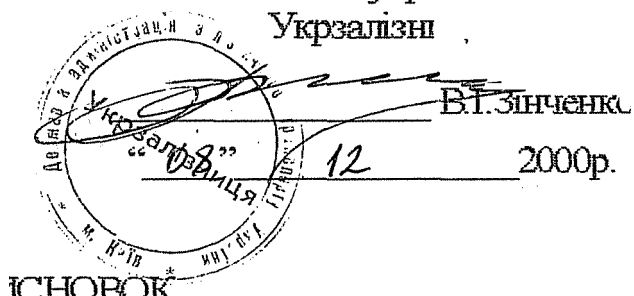
0.721

I 0.88 y

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Акты внедрения результатов исследований

ЗАТВЕРДЖУЮ _____,

Нач. Головного управл
Укрзалізниці _____

Головного усттввління автоматики, телемеханіки і зв'язку

Укрзалізниці по дисертаційній роботі Книш®а І.П

«Методологія аналого-цифрового перетворення анналів і

оц інка похибок»

Відділ зв'язку, розглянув матеріали дисертаційної роботи доцента кафедри 'Транспортний зв'язок' 5<фДАЗТ Книш®а І.П «Методологія аналого-щіфрового перетворення сигналів і оцінка похибок», представлений на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук, матеріали звіту з дфжбюджетної НДР 'Розробка та дослідження спеціалізованих систем передачі аналогових та дискретних сигналів у цифрових мережах зв'язку залізничного транспорту', 1997, ГР № 0197U003555, виконаної у 1996-97 р.р. на замовлення Укрзалізниці, а також: 'Кої-щепцію побудови цифрової мережі зв'язку залізничного транспорту' 1999р., прийшов до висновку, що при розробці "Концопці....". були враховані або використані такі результати дасертаційної роботи.

- 1) Методи ошимізації нерівномірних АЦП за імовірністними харжтеристикалі інформаційних сигналів з використанням цифрових методів.
- 2) Залежніші інтервалів термінової дискретизації та амплітудного квантування між собою, а також від кореляційних властивостей сигналів і співвіднолення сигнал/шум.
- 3) Здійснення перетворення частоти або дегазування у разі цифрової обробки радіосигналів.
- 4) Вимоги до стабільності параметрів АЦП (по частоті дискретизації).

Зам. начальника ГУ АТіФ УЗ

Ю.НТерещенко

^^^УТВЕРЖДАЮ
 ^^дай^^гаоерального директора ОАО
 ^КорпорШт «Фазотрон - НИИР» -
 Р в ИП|>йрийга® НИИ «Рассвет»
 I—Колодин
 2001г.

ЧОиоск^^

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Кнышева Ивана Петровича «Теория аналого-цифрового преобразования сигналов и оценка погрешностей»

Комиссия в составе начальника СКВ - главного конструктора Логинова С.Н., заместителя начальника СКВ к.т.н. Назаркина М.Д., начальника отдела Кобы С.В. составила настоящий акт о том, что при разработке аппаратуры канала приёма и цифровой обработки сигналов изделия «Сектор» были использованы результаты диссертационной работы Кнышева И.П. «Теория аналого-цифрового преобразования сигналов и оценка погрешностей», в части:

- оценки влияния процесса амплитудного квантования слабых сигналов на фоне шумов на характеристики системы обработки;
- уточнения ошибок, вносимых устройством выборки и хранения АЦП;
- оценки погрешностей дискретизации сигналов с неограниченным спектром, а также сигналов, представленных конечным числом отсчётов;
- оптимизации параметров аналого-цифрового преобразования стохастических сигналов.

Внедрение результатов диссертационной работы позволило расширить динамический диапазон аппаратуры, уточнить требования к параметрам системы цифровой обработки сигналов, включая аналого-цифровой преобразователь, оптимизировать объём буферного запоминающего устройства.

Данный акт не может служить основанием для финансовых претензий сторон.

Начальник СКВ - главный конструктор



С.Н. Логинов

Зам. начальника СКВ, к.т.н.



М.Д. Назаркин

Начальник отдела

С.В. Коба



ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор з навчальної роботи

ХарДАЗТ

І.Д. Михайлов

03

2001р.

АКТ

про впровадження у навчальний процес: результатів дослідницької роботи
Книшева І.П. «Теорія аналого-цифрового подтворення сигналів і оцінка
похибок»

Комісія у складі декана факультету "Автоматика, телемеханіка та зв'язок", к.т.н., доц. Кошового С.В., заступника кафедри "Транспортний зв'язок", д.т.н., проф. Полякова П.Ф. і професора кафедри, д.т.н. Артеменка Є.А. склала цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Книшева І.П. запроваджені у навчальний процес на кафедрі "Транспортний зв'язок" у таких видах навчання

- ^в у жкційному курсі з дисципліни "Теорія електричного зв'язку" для спеціальності 7.092507 "Автоматика, і автоматизація на транспорті - теоретичний аналіз амплітудного квантування та метода оцінки похибок;
- ^и у курсовому проекті з дисципліни "Теорія електричного зв'язку" - оцінки похибок дискретизації та квантування у реальних умовах;
- ⁶ у навчально-дослідних роботах студентів, виконуваних на кафедрі - використання імовірнісних метода аналізу детермінованих сигналів та оцінок похибок дискретизації та квантування;
- ^в при підготовці аспірантів за спеціальністю 05.12.02 "Системи телекомунікацій та управління ними" - заповнені результати аналізу процесів дискретизації, квантування та оптимізації аналого-цифрових перетворювачів.

Декан факультету АТЗ

к.т.н., доц.

Кошовий С.В.

Зав. каф. "Транспортний зв'язок"

д.т.н., проф.

Поляков П.Ф.

Проф., д.т.н.

Артеменко Є.А.

ЗАТВЕРДЖЕНО
 Заступник начальника кафедри "Систем управління та зв'язку"
 університету з навчання кандидатів військових спеціальностей

" 13 "

12



Н.П. Демченко

Комісія у складі голови, начальника кафедри "Систем управління та зв'язку", доктора технічних наук, професора Стасєва Ю.В., заступника начальника кафедри "Систем управління та зв'язку", кандидата технічних наук, доцента Приходько С.І., професора кафедри "Систем управління та зв'язку", кандидата технічних наук, професора Корольова А.В. склала цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Книшева І.П. "Методологія аналого-цифрового перетворення сигналів і оцінка погрешностей" використовується в учбовому процесі у Харківському військовому університеті на кафедрі "Систем управління та зв'язку".

- в лекційному курсі по дисципліні "Основи обробки та передачі інформації" викладаються результати узагальнення та теоретичного аналізу процедур аналого-цифрового перетворення сигналів, видів помилок, які виникають та методи їх оцінки;

- при курсовому проектуванні по дисципліні "АСУ спеціального призначення" використовуються оцінки помилок дискретизації та квантування, методи оптимізації характеристик нерівномірних АЦП.

Голова комісії

Начальник кафедри "Систем управління та зв'язку"

доктор технічних наук, професор

Ю.В. Стасєв

Заступник начальника кафедри "Систем управління та зв'язку"

кандидат технічних наук, доцент

С.І. Приходько

Професор кафедри "Систем управління та зв'язку"

кандидат технічних наук, професор

А.В. Корольов

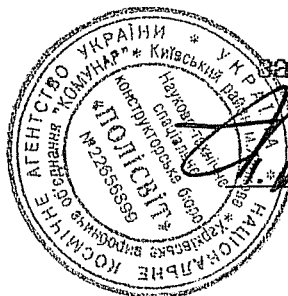
Заместитель главного конструктора

ПО «Коммунар»

заслуженный изобретатель Украины

канд. техн. наук

Н. Ф. Сидоренко



« 07 05 2001г.

АКТ

Комиссия в составе председателя - начальника отдела, канд. техн. наук Остроумова Б. В и членов - заместителя начальника отдела Петренко ВИ, начальника сектора. Сальникова ВВ. составила настоящий жг о том, что при выполнении опытно-конструкторских работ использовались

1. Вероятностные характеристики результатов амплитудного квантования слабых детфминированных сигналов на фоне шумов.
2. Определение погрешностей, вносимых схемой выборки и хранения АЦП
3. Оценки погрешностей при дискретизации случайных сигналов с неограниченным спектром и при конечном числе отсчетов.
4. Методика оптимизации АЦП детфминированных и случайных сигналов по функциям распределения.

Обобщение результатов диссертационных исследований Кнышева Ивана Петровича дало возможность повысить точность измерения параметров, уточнить требования к устройствам аналого-цифрового преобразования сигналов и снизить на 2,5дБ уровень шумов квантования, уменьшить объем устройства обработки сигналов.

Председатель комиссии
канд. техн. наук

Б. В Остроумов

Члены комиссии

В. И Петренко

В В Сальников