Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу. Ч.4. Диференціальні рівняння: Конспект лекцій.– Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 61 с.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 12 березня 2001 р., протокол № 7.

Рецензент

проф. А.А.Янцевич (ХНУ)

ЗМІСТ

ТЕМА. Диференціальні рівняння

§ 1 Основні поняття

ОЗНАЧЕННЯ 1.1 Рівняння, яке містить у собі незалежні аргументи x, y, z, невідому функцію $U = U(x, y, z)$ та частинні похідні цієї функції за змінними x, y, z різних порядків, називають ***диференціальним рівнянням у частинних похідних*** і позначають його так:

$$\tau(x, y, z, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, ...) = 0 .$$

ОЗНАЧЕННЯ 1.2 Диференціальне рівняння, яке містить у собі лише одну незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та похідні цієї функції різних порядків за змінною "x", називають ***звичайним диференціальним рівнянням*** і позначають його так:

$$\tau(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

або ж

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ... y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Рівняння (1) називають загальним виглядом звичайного диференціального рівняння.

Рівняння (2) називають нормальною формою звичайного диференціального рівняння.

Перехід від загальної форми (1) до нормальної форми (2) здійснюється шляхом розв'язання рівняння (1) відносно старшої за порядком похідної.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3 ***Порядком диференціального рівняння*** називається ***найвищий*** порядок похідної невідомої функції $y = y(x)$, яка міститься у диференціальному рівнянні.
Наприклад, рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

буде рівнянням другого порядку.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4 Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називають функцію

$$y = y(x),$$

яка перетворює рівняння у тотожність, якщо підставити її у диференціальне рівняння замість y.

ОЗНАЧЕННЯ 1.5 Процес розв'язання диференціального рівняння називають інтегруванням диференціального рівняння.

Розв'язати диференціальне рівняння означає відшукати усі функції, які перетворюють диференціальне рівняння у тотожність.

ОЗНАЧЕННЯ 1.6 Іноді розрізняють результат розв'язання диференціального рівняння, а саме

$y = y(x)$ - розв'язок диференціального рівняння ;

$\phi(x, y) = 0$ - якщо результат має вигляд неявної функції, його називають інтегралом диференціального рівняння.

ТЕМА. Звичайні диференціальні рівняння. Рівняння першого порядку

§ 2 Основні поняття

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку, тобто рівняння

$$F(x, y, y') = 0$$

або ж

$$y' = f(x, y) .$$

Розв'язок $y = y(x)$ перетворює рівняння у тотожність

$$y' \equiv f[(x, y(x)[.$$

При розгляді диференціального рівняння першого порядку виникають такі питання:

а) чи має таке рівняння розв'язок ?

б) якщо воно має розв'язок, тоді скільки воно має розв'язків ?

в) як знайти ці розв'язки ?

Можна довести при досить загальних умовах, що кожне диференціальне рівняння першого порядку має нескінченну множину розв'язків, які залежать від значень довільної сталої, таким чином, усі розв'язки можна записати у формі

$$y = g(x, C) .$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.1 ***Розв'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку, у склад якого входить довільна стала, називається загальним розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння.***

ОЗНАЧЕННЯ 2.2 ***Розв'язки, які виходять із загального розв'язку при конкретних значеннях довільної сталої С, називаються частинними розв'язками (або частинними інтегралами).***

ЗАУВАЖЕННЯ: загальний розв'язок не завжди вичерпує усі розв'язки диференціального рівняння.

Іноді існують так звані особливі інтеграли, які не виходять із загального інтеграла ні при якому значенні довільної сталої С.

Але якщо загальний інтеграл нам відомий, не важко знайти і особливі інтеграли, якщо такі існують, шляхом диференціювання і виключення.

Таким чином, розв'язання диференціального рівняння першого порядку зводиться до відшукання загального розв'язку (загального інтеграла) рівняння.

§ 3 Різні форми запису диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння у нормальній формі

$$y' = f(x, y).$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx.

$$y'dx = f(x, y)dx$$

або

$$dy = f(x, y)dx,$$

тому що $dy = y'dx$ завжди.

Далі перенесемо усі члени рівняння у ліву частину

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

Помножимо далі обидві частини на деяку функцію двох змінних $N(x, y)$

$$N(x, y)dy + [- f(x, y)N(x, y)]dx = 0$$

і позначимо

$$- f(x, y)N(x, y) = M(x, y),$$

тобто ми отримаємо

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

ВИСНОВОК: звичайне диференціальне рівняння першого порядку можна записати у трьох формах:

а) $\tau(x, y, y') = 0$ - загальна форма;

б) $y' = f(x, y)$ - нормальна форма;

в) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - форма запису за допомогою диференціалів.

§ 4 Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

ОЗНАЧЕННЯ 4.1 Диференціальне рівняння першого порядку у третій формі запису

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо коефіцієнти навколо dx і dy, тобто функції $M(x, y)$; $N(x, y)$ можна записати у вигляді добутку двох множників, один із яких залежить тільки від «x», а другий – тільки від «y»

$$M(x, y) = X_1(x)Y_1(y),$$

$$N(x, y) = X_2(x)Y_2(y).$$

Розв'язання: підставимо у рівняння замість коефіцієнтів ці добутки двох функцій

$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на добуток $X_2(x)Y_1(y)$ і отримаємо

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0.$$

Далі позначимо:

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)} = \varphi(x), \quad \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)} = \psi(y), \quad \varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0. \qquad (3)$$

Рівняння (3) називають ***рівнянням з відокремленими змінними.***

Далі інтегруємо ліву та праву частини (3) і отримаємо рівність:

$$\varphi(x) + \psi(y) = C, \qquad (4)$$

де $\quad \phi(x) = \int \varphi(x)dx, \quad \psi(y) = \int \psi(y)dy, \quad C$ *– довільна стала.*

Рівність (4) визначає загальний інтеграл нашого рівняння у неявній формі.

ПРИКЛАД:

$$(xy+x)dx+(xy+y)dy=0,$$

$$x(y+1)dx+y(x+1)dy=0:(y+1)(x+1),$$

$$\frac{x}{x+1}dx+\frac{y}{y+1}dy=0 \quad \int\frac{(1+x)-1}{x+1}dx+\int\frac{(1+y)-1}{y+1}dy=C \ .$$

$x-\ln|x+1|+y-\ln|y+1|=C$ - ***загальний інтеграл диференціального рівняння*** .

ЗАУВАЖЕННЯ: якщо диференціальне рівняння записати у нормальній формі і якщо його праву частину, тобто функцію $f(x,y)$ можна записати у вигляді добутку двох функцій, одна із яких є функцією тільки аргументу "x", а друга – функцією тільки аргументу "y", тоді таке рівняння теж буде диференціальним рівнянням з відокрем-леними змінними: $y'=f(x,y),\quad f(x,y)=X(x)Y(y)$.

§5 <u>Однорідні функції. Однорідні диференціальні рівняння</u>

<u>ОЗНАЧЕННЯ 5.1</u> Функція $f(x,y)$ називається однорідною, якщо вона задовольняє тотожності

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$$

для будь-якого t. Показник степеня "к" називають <u>вимірюванням однорідності.</u>

ПРИКЛАДИ:

а) $f(x,y)=x^3+3xy^2+5x^2y+y^3$.

Перевіримо, чи буде ця функція однорідною. Для цього розглянемо довільну величину t та обчислимо

$$f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)(ty)^2+5(xt)^2(ty)+(ty)^3=$$
$$=t^3(x^3+3xy^2+5x^2y+y^3)=t^3f(x,y).$$

Таким чином, для функції $f(x,y)=x^3+3xy^2+5x^2y+y^3$ виконується тотожність $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$, тобто ця функція буде однорідною третього вимірювання.

б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$,

$f(tx,ty)=\sqrt[3]{(tx)^2+(ty)^2}=\sqrt[3]{t^2(x^2+y^2)}=t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^2+y^2}=t^{\frac{2}{3}}f(x,y)$ - однорідна функція вимірювання $k=\frac{2}{3}$;

в) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$,

$f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{tx-ty}=\dfrac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0f(x,y)$ - функція однорідна нульового вимірювання;

г) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$,

$f(tx,ty)=\dfrac{ty}{tx}+e^{\frac{ty}{tx}}=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}=t^0f(x,y)$ - функція однорідна нульового вимірювання.

ЗАУВАЖЕННЯ: однорідна функція нульового вимірювання задовольняє тотожності: $f(tx,ty)\Xi f(x,y)$.

<u>ОЗНАЧЕННЯ 5.2</u> Диференціальне рівняння першого порядку, яке записане у третій формі

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (5)$$

називається однорідним диференціальним рівнянням, якщо функції двох змінних $M(x,y)$, $N(x,y)$, тобто коефіцієнти при диференціалах dx, dy є функціями однорідними однакового вимірювання.

<u>ОЗНАЧЕННЯ 5.3</u> Диференціальне рівняння першого порядку, яке записане у нормальній формі: $y'=f(x,y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ є функцією однорідного нульового вимірювання ($f(tx,ty)\Xi f(x,y)$).

Означення 3 випливає із означення 2, якщо перетворити рівняння (5) у нормальну форму. Для цього потрібно розв'язати рівняння (5) відносно похідної y'

$$M(x,y)dx+N(x,y)y'dx=0,\quad y'-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)).$$

<u>ОЗНАЧЕННЯ 5.4</u> Однорідне диференціальне рівняння розв'язується за допомогою введення нової функції замість невідомої функції "y"

$$U=\frac{y}{x}.$$

Звідси $y = Ux$, обчислимо похідну $y' = U'x + U$ і підставляємо у рівняння $U'x + U = f(x, Ux)$, але множник "x" під знаком функції $f(x, Ux)$ зникає, тому що вона однорідна функція нульового вимірювання; $U'x = f(1, U) - U$ виявляється рівнянням з відокремлюваними змінними.

Після розв'язання останнього рівняння ми повертаємось до попередньої невідомої функції за формулою: $y = Ux$ (або $U = \frac{y}{x}$).

ПРИКЛАД

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Вводимо нову невідому функцію $U = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Ux \Rightarrow y' = U'x + U$.

Підставляємо у наше рівняння $U'x + U = U + e^U$, $U'x = e^U$.

Переходимо до третьої форми запису, для чого домножимо частини рівняння на dx:

$$xU'dx = e^U dx, \qquad xdU = e^U dx.$$

Відокремлюємо змінні, для чого поділимо обидві частини рівняння на добуток $x \cdot e^U$

$$e^{-U} dU = \frac{1}{x} dx,$$

$$\int e^{-u} dU = \int \frac{1}{x} dx.$$

Далі інтегруємо

$$-e^{-u} = ln|x| + C,$$

$$e^{-U} = C - ln|x|,$$

$$-U = ln(C - ln|x|),$$

$$U = -ln(C - ln|x|) = \frac{1}{ln(C - ln|x|)}.$$

Замість U підставляємо $\frac{y}{x}$ і отримуємо загальний розв'язок рівняння

$$y = \frac{x}{\ln(C - \ln x)}.$$

§ 6 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

ОЗНАЧЕННЯ 6.1 Диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним, якщо воно є рівнянням першого степеня відносно невідомої функції у та її похідної y'.

Лінійне рівняння має такий стандартний вигляд:

$$y' + p(x)y = f(x),$$

де $p(x)$, $f(x)$ - задані функції.

Для розв'язання лінійного рівняння використаємо метод, який називають **методом розділення змінних.**

Цей метод полягає в тому, що ми позначаємо невідому функцію "у" як добуток двох інших невідомих функцій $y = UV$.

Обчислимо $y' = U'V + UV'$ і підставимо у рівняння

$$U'V + UV' + P(x)UV = f(x).$$

Виносимо U за дужки $U'V + U[V' + P(x)V] = f(x)$.

Далі вимагаємо, щоб сума, яка стоїть у дужках, дорівнювала 0, тобто замість одного диференціального рівняння ми отримаємо два диференціальних рівняння відносно кожної невідомої функції V та U, які будуть рівняннями з відокремлюваними змінними

$$(*) \begin{cases} V' + P(x)V = 0 \\ U'V = f(x). \end{cases}$$

ПРИКЛАД

$$y' - \frac{y}{x} = xe^x,$$

$$y = UV,$$

$$y' = U'V + UV',$$

$$U'V + UV' - \frac{UV}{x} = xe^x,$$

$$U'V + U\left[V' - \frac{V}{x}\right] = xe^x,$$

$$(*) \quad \begin{cases} V' - \frac{V}{x} = 0 \\ U'V = xe^x. \end{cases}$$

Розв'язуємо спочатку перше рівняння системи:

$$V' - \frac{V}{x} = 0,$$

$$V'\,dx = \frac{V}{x}\,dx,$$

$$\frac{1}{V}\,dV = \frac{1}{x}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{V}\,dV = \int \frac{1}{x}\,dx,,$$

$$ln|V| = ln|x|$$

$$\Downarrow$$

$$V = x.$$

Розглянемо далі друге рівняння системи (*), заміняючи множник V обчисленим значенням

$$U'x = xe^x,$$

$$U' = e^x,$$

$$U'dx = e^x dx,$$

$$du = e^x dx,$$

$$\int dU = \int e^x dx + C,$$

$$U = e^x + C.$$

Записуємо кінцевий результат розв'язання рівняння у вигляді добутку

$$y = UV = x(e^x + C).$$

§ 7 Диференціальне рівняння Бернуллі

ОЗНАЧЕННЯ 7.1 Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням Бернуллі, якщо воно має вигляд: $y' + p(x)y = f(x)\cdot y^n$.

ЗАУВАЖЕННЯ: показник степеня "n" може бути будь-яким дійсним числом, крім $n=0$, або $n=1$, тому що, якщо $n=0$, рівняння Бернуллі $y'+p(x)y = f(x)$ буде просто лінійним диференціальним рівнянням, при $n=1$ $y'+p(x)y = f(x)y$, тобто буде рівнянням з відокремлюваними змінними.

ОЗНАЧЕННЯ 7.2 Диференціальне рівняння Бернуллі за допомогою заміни невідомої функції можна звести до лінійного диференціального рівняння відносно нової невідомої функції.

Для цього поділимо обидві частини рівняння на y^n

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x)$$

і позначимо через z нову невідому функцію

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

Обчислимо похідну $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Далі помножимо обидві частини рівняння на сталий множник $(1-n)$

$$(1-n)\frac{y'}{y^n} + (1-n)p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = (1-n)f(x)$$

і здійснюємо заміну невідомої функції

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x);$$

Отримане рівняння буде лінійним диференціальним рівнянням відносно функції z, тобто ми маємо змогу розв'язати його, а потім знайти і невідому функцію у за формулою

$$y^{n-1} = \frac{1}{z},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ: рівняння Бернуллі можна розв'язувати методом розділення змінних, не переходячи спочатку до лінійного рівняння.

Дійсно, якщо $z = UV$, тоді $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{U}\cdot\sqrt[n-1]{V}} = U_1 \cdot V_1$.

ПРИКЛАД

$$y' + tg\,xy = \sqrt{\cos^3 x}\sqrt{y},$$

$$y = U\cdot V,$$

$$y' = U'V + UV',$$

$$y'V + UV' + tg\,x\,UV = \sqrt{cos^3 x}\sqrt{UV},$$

$$U'V + U\left[V' + tgx\,V\right] = \sqrt{cos^3 x}\sqrt{UV},$$

$$(*) \qquad \begin{cases} V' + tg\,x\,V = 0 \\ U'V = \sqrt{\cos^3 x}\sqrt{UV} \end{cases}.$$

Розв'язуємо перше рівняння системи (*):

$$V' = -tg\,x\,V,$$
$$\frac{1}{V}dV = -tg\,x\,dx,$$
$$\int \frac{1}{V}dV = \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx,$$
$$ln|V| = ln|\cos x|,$$
$$V = \cos x,$$
$$U'\cos x = \sqrt[2]{\cos^3 x}\sqrt{U}\sqrt{\cos x},$$
$$U'\cos x = \sqrt{U}\cos^2 x,$$
$$U' = \sqrt{U}\cos x,$$
$$\frac{U'}{\sqrt{U}}dx = \cos x dx,$$
$$2\int \frac{1}{2\sqrt{U}}dU = \int \cos x dx + C,$$
$$2\sqrt{U} = \sin x + C,$$
$$\sqrt{U} = \frac{1}{2}\sin x + C,$$
$$U = \left(\frac{1}{2}\sin x + C\right)^2,$$
$$y = UV = \cos x\left(\frac{1}{2}\sin x + C\right)^2.$$

§ 8 Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку

Введемо деякі означення.

ОЗНАЧЕННЯ 8.1 Розглянемо область D у системі координат XOY. Нехай у кожній точці цієї області $M(x,y)\in D$ задається вектором деякий напрям. У такому випадку ми будемо говорити, що у області D визначено **поле напрямів.**

ОЗНАЧЕННЯ 8.2 Розглянемо область D у системі координат XOY і функцію двох змінних $f(x,y)$, яка визначена в області D. Розглянемо далі поле напрямів, яке визначається таким правилом:

вектор поля в точці: $M_0(x_0,y_0)$ утворює з додатним напрямом вісь OX кут α_0 такий, що

$$tg\alpha_0 = f(x_0,y_0).$$

Поле напрямів у цьому випадку називають **полем напрямів функції** $f(x,y)$.

ОЗНАЧЕННЯ 8.3 Розглянемо у системі координат XOY область D і диференціальне рівняння першого порядку у нормальній формі

$$y' = f(x,y),$$

права частина якого визначена у області D, і побудуємо в області D поле напрямів цієї функції $f(x,y)$ за формулою

$$tg\alpha_0 = f(x_0,y_0) \qquad \forall M_0(x_0,y_0)\in D.$$

Побудоване поле напрямів називають полем напрямів диференціального рівняння $y' = f(x,y)$.

ОЗНАЧЕННЯ 8.4 Розглянемо будь-який розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x,y)$

$$y = g(x);$$

графік цієї функції називають <u>інтегральною кривою.</u>

З геометричної точки зору загальний розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння є сукупністю усіх <u>інтегральних кривих.</u>

Виявляється, що між полем напрямів диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ і інтегральними кривими цього рівняння існує тісний зв'язок, а саме має місце

ТЕОРЕМА ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ КРИВІ

Для того щоб крива $y = g(x)$ була інтегральною кривою рівняння $y' = f(x,y)$, необхідно і достатньо, щоб вона у кожній своїй точці дотикалася до напряму поля рівняння $y' = f(x,y)$.

ПРИКЛАД

Розглянемо диференціальне рівняння $y' = -\frac{x}{y}$.

Побудуємо для нього поле напрямів. За означенням у точці $M(x,y)$

вектор поля утворює з віссю OX кут α, тангенс якого дорівнює значенню правої частини рівняння у точці $M(x,y)$, тобто $tg\alpha = -\frac{x}{y}$. У системі координат XOY з'єднаємо $M(x,y)$ з початком координат.

Радіус-вектор $O\vec{M}$ точки M утворює із додатним напрямом осі ОХ кут φ такий, що $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

Але тоді добуток $tg\alpha \cdot tg\varphi = -\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1.$

Тобто виконується умова перпендикулярності і вектор поля у точці $M(x,y)$ буде перпендикулярним до її радіуса-вектора $O\vec{M}$.

Із вигляду поля напрямів можна зробити висновок, що інтегральними кривими будуть концентричні кола із центром у точці O(0,0)

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Перевіримо цей висновок, для чого розв'яжемо це рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = -\frac{x}{y},$$

$$yy'\,dx = -xdx,$$

$$ydy + xdx = 0,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

тобто $x^2 + y^2 = c^2$.

ЗАУВАЖЕННЯ: із теореми про інтегральні криві можна зробити висновок, що через будь-яку фіксовану точку $M_0(x_0,y_0) \in D$ буде проходити лише одна інтегральна крива, тобто диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y)$$

буде мати один і тільки один інтеграл $y = y(x)$ (розв'язок), який у фіксованій точці x_0 набуває фіксованого значення

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

Записана умова називається **початковою умовою**.

Тут x_0 - дане значення аргументу, y_0 - можна задавати довільно, але точка $M_0(x_0,y_0)$ має залишатися в області D.

Тобто y_0 виграє роль довільної сталої.

Має місце така **теорема існування і єдиності розв'язку для диференціального рівняння першого порядку (теорема Пеано):**

якщо у диференціальному рівнянні $y' = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ задовольняє таким двом умовам:

а) f неперервна в області D;

б) частинна похідна $f'_y(x,y)$ обмежена в області D та якщо x_0 - фіксоване значення аргументу x, а y_0 довільне наперед задане число, тоді диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ має один і тільки один інтеграл (розв'язок), який задовольняє у точці x_0 умові

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

(єдина вимога, накладена на y_0, полягає у тому, щоб точка $M_0(x_0,y_0)$ залишалася в області D).

ЗАУВАЖЕННЯ: якщо у точці $M_0(x_0,y_0)$ не виконуються умови теореми Пеано (хоча б одна з двох умов), через цю точку може проходити декілька інтегральних кривих або ж ні однієї).

ПРИКЛАД

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Для цього рівняння у точці $M_0(0,0)$ порушуються обидві умови теореми Пеано, а саме:

а) $f(x,y) = \frac{y}{x}$ не визначена у точці $M_0(0,0)$, тобто не буде неперервною;

б) $f'_y = \frac{1}{x}$ і не виконується в точці $M_0(0,0)$ умова обмеженості частинної похідної за аргументом y.

Тому може не виконуватися твердження теореми Пеано.

Розв'яжемо це рівняння:

$$y' = \frac{y}{x},$$

$$\frac{y'}{y}dx = \frac{1}{x}dx,$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx + ln|C|,$$

$$ln|y| = ln|x| + ln|c|,$$

$$y = Cx.$$

Дійсно через точку $M_0(0,0)$ проходить скільки завгодно інтегральних кривих.

<u>ОЗНАЧЕННЯ 8.5</u> Точку $M_0(x_0, y_0)$, через яку проходить більш ніж одна інтегральна крива, або ж не проходить жодної інтегральної кривої, називають <u>особливою</u> точкою диференціального рівняння.

§ 9 <u>Теорема існування і єдиності розв'язку для диференціального рівняння другого порядку (теорема Пеано)</u>

Якщо у диференціальному рівнянні другого порядку $y'' = f(x, y, y')$ функція $f(x, y, y')$, яка розглядається як функція трьох змінних x, y, y', задовольняє умовам:

а) $f(x, y, y')$ неперервна в області D $(M(x, y, y') \in D)$;

б) частинні похідні $f'_y, f'_{y'}$ обмежені в області D,

і якщо x_0 - фіксоване значення аргументу x, а y_0, y'_0 два довільних наперед заданих числа, тоді диференціальне рівняння

$$y'' = f(x, y, y')$$

має один і тільки один інтеграл (розв'язок)

$$y = y(x),$$

який у точці x_0 задовольняє початковим умовам

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,$$

$$y'\Big|_{x=x_0} = y'_0$$

(при цьому передбачається, що точка $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ не виходить за межі області D).

Тут y_0, y'_0 грає роль двох довільних сталих.

Аналогічно формулюється теорема Пеано для диференціального рівняння n-го порядку.

ЗАУВАЖЕННЯ: задача Коші для диференціального рівняння будь-якого порядку формулюється так: задається диференціальне рівняння і початкові умови

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y\Big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\Big|_{x=x_0} = y'_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Треба знайти частинний інтеграл (розв'язок), який у точці x_0 задовольняє даним початковим умовам.

У частинному випадку для диференціального рівняння першого порядку задача Коші формулюється таким чином:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\Big|_{x=x_0} = y \end{cases}.$$

Треба знайти частинний розв'язок (інтеграл), який у точці x_0 задовольняє початковій умові.

ПРИКЛАД

Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \\ y\Big|_{x=1} = 4 \end{cases}$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння:

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ – однорідне рівняння,

$$U = \frac{y}{x};\ y = Ux;\ y' = U'x + U,$$

$$U'x + U = \frac{1}{U} + U,$$

$$U'x = \frac{1}{U},$$

$$\int U dU = \int \frac{1}{x} dx + C,$$

$$\frac{U^2}{2} = ln|x| + C, \quad U^2 = 2\,ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\,ln|x| + C \Rightarrow y = |x|\sqrt{2\,ln|x| + C} - \textit{загальний розв'язок.}$$

Для визначення конкретного значення сталої С використовуємо початкову умову, тобто підставимо у загальний розв'язок замість "х" одиницю, а замість "у" – 4

$$4 = 1\sqrt{2\,ln 1 + C},$$
$$4 = \sqrt{C} \Rightarrow C = 4^2 = 16.$$

Таким чином, частинний розв'язок, тобто розв'язок задачі Коші, має вигляд

$$y^* = |x|\sqrt{2\ln|x| + 16}\ .$$

Механічний зміст початкових умов для диференціального рівняння другого порядку

Нехай матеріальна точка, маса якої m, переміщується уздовж прямої.

Нехай F - рівнодіюча усіх сил, які діють на точку m.

У загальному випадку сила F залежить від часу t, шляху x та швидкості V, тобто за другим законом Ньютона

$$ma = F(t, x, V),$$

де $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},$

тобто

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

або

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}).$$

Щоб знайти закон руху точки m, тобто залежність шляху x від часу t, потрібно розв'язати це диференціальне рівняння другого порядку.

За теоремою існування і єдиності (теорема Пеано) це рівняння має один і тільки один розв'язок (інтеграл), який задовольняє таким початковим умовам

$$\begin{cases} x\Big|_{t = t_0} = x_0 \\ \frac{dx}{dt} = \dot{x} = V\Big|_{t = t_0} = V_0. \end{cases}$$

З механічної точки зору задання початкових умов означає задання початкового місцезнаходження точки m, x_0 та її початкової швидкості V_0.

Рух точки повністю визначається, якщо задати початкове місцезнаходження точки та її початкову швидкість.

§ 10 Неповні диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку такий:

$$F(x, y, y', y'')\ 0$$

або у нормальній формі

$$y'' = f(x, y, y').$$

Розглянемо два випадки неповних диференціальних рівнянь другого порядку

$$F(x, y', y'') = 0, \qquad F(y, y', y'') = 0.$$

Ми покажемо, що кожне з цих рівнянь можна звести до двох рівнянь першого порядку, тобто зменшити порядок цих рівнянь.

10.1 $\qquad F(x, y', y'') = 0.$

Уводимо нову невідому функцію z, позначаючи $y' = z$. Тоді $\quad y'' = z'$

і якщо підставити ці позначення у рівняння, отримаємо

$$F(x,z,z')=0,$$

тобто замість одного диференціального рівняння другого порядку ми отримали два диференціальних рівняння першого порядку

$$\begin{cases} y'=z \\ F(x,z,z')=0. \end{cases}$$

Якщо ми розв'яжемо друге рівняння відносно невідомої функції $z(x)$, ми підставимо отримане $z(x)$ у перше рівняння.

Розв'язуючи перше рівняння відносно невідомої функції $y(x)$, ми отримаємо розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

10.2 $$F(y,y',y'')=0.$$

Знову уводимо нову невідому функцію, позначаючи:

$$y'=z.$$

Але тепер виразимо y'' таким чином:

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z.$$

Якщо тепер замінити y' і y'' у рівнянні, ми отримаємо рівняння

$$F(y,z,z\frac{dz}{dy})=0$$

першого порядку відносно нової невідомої функції z.

Таким чином, замість одного диференціального рівняння другого порядку ми отримали два диференціальних рівняння першого порядку

$$\begin{cases} y'=z \\ F(y,z,z\dfrac{dz}{dy})=0. \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо друге рівняння і отримуємо функцію $z(y)$, яку підставляємо у перше рівняння і розв'язуємо його відносно невідомої функції $y(x)$.

ПРИКЛАД

$$y''-ctgxy'=sin\,2x,$$

$$y'=z, \tag{6}$$

$$y''=z',$$

$$z'-ctgx\cdot z=sin\,2x. \tag{7}$$

Розв'язуємо рівняння (7). Воно виявляється лінійним відносно функції z. Тому позначаємо:

$$z=UV,$$
$$z'=U'V+UV'$$

і підставляємо у рівняння (7)

$$U'V+UV'-ctgxUV=sin\,2x,$$
$$U'V+U[V'-ctgxV]=sin\,2x,$$
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} V'-ctgxV=0\Rightarrow\dfrac{V'}{V}dx=ctgxdx;\ \int\dfrac{dV}{V}=\int ctgxdx,\ ln|V|=ln|sin\,x|,\ V=sin\,x \\ U'V=sin\,2x, \\ U'\,sin\,x=2\,sin\,x\cos x, \\ U'=2\cos x, \\ \int dU=\int 2\cos xdx+C_1, \\ U=2\,sin\,x+C_1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$z=UV=(2\sin x+C_1)\sin x=2\sin^2 x+C_1\sin x. \tag{8}$$

Підставляємо замість z у рівняння (6) його значення (8)

$$y'=2\,sin^2\,x+C_1\,sin\,x,$$
$$\int dy=\int(2\,sin^2\,x+C_1\,sin\,x)dx+C_2,$$
$$y=\int(1-cos\,2x+C_1\,sin\,x)dx+C_2,$$
$$y=x-\frac{1}{2}sin\,2x-C_1\,cos\,x+C_2.$$

ПРИКЛАД

$2yy'' = 1 + (y')^2$,

$y' = z$, $$y'' = z\frac{dz}{dy},\qquad (9)$$

$$2y \cdot z\frac{dz}{dy} = 1 + z^2 . \qquad (10)$$

Відокремлюємо змінні у рівняння (10)

$$\frac{2z}{1+z^2}dz = \frac{1}{y}dy,$$

інтегруємо

$$\int \frac{2z}{z^2+1}dz = \int \frac{1}{y}dy + ln|C_1|,$$

$$ln(1+z^2) = ln|y| + ln|C_1| = ln|C_1 y|,$$

$$1 + z^2 = C_1 y.$$

Знайдемо звідси z як функцію від аргументу y

$$z = \sqrt{C_1 y - 1}$$

і підставимо цей вираз у рівняння (9)

$$y' = \sqrt{C_1 y - 1}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{1}{C_1} \cdot \frac{2C_1 dy}{2\sqrt{C_1 y - 1}} = dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\int \frac{2C_1 dy}{2\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx + C_2,$$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,$$

$$\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1 x + C_1 C_2}{2},$$

$$C_1 y - 1 = \left(\frac{C_1 x + C_1 C_2}{2}\right)^2,$$

$$y = \frac{1}{C_1} + C_1\frac{(x + C_2)^2}{4}.$$

§ 11 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

ОЗНАЧЕННЯ 11.1 Диференціальне рівняння другого порядку називають ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно y, y', y'', тобто якщо воно містить у собі невідому функцію y та її похідні y', y'' тільки у перших степенях. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (*)$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – відомі неперервні функції у деякій області Д.

ОЗНАЧЕННЯ 11.2 Диференціальне рівняння (*) називають ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням*** (ЛОДР) другого порядку, якщо його права частина, тобто функція $f(x)$, дорівнює нулю

$$f(x) = 0,$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (ЛОДР)$$

ОЗНАЧЕННЯ 11.3 Лінійне диференціальне рівняння (*) називають ***лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням*** (ЛНДР) другого порядку, якщо його права частина $f(x)$ не дорівнює нулю

$$f(x) \neq 0,$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (ЛНДР)$$

Основна теорема 11.1 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку)
Нехай

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \text{ -}$$

лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку і нехай

$$y_1(x), \quad y_2(x) \text{ -}$$

два непропорційні частинні розв'язки ЛОДР і нехай

$$C_1, C_2 \text{ -}$$

дві довільні сталі величини.

Тоді загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

(тобто загальний розв'язок ЛОДР є лінійною комбінацією із довільними сталими коефіцієнтами двох непропорційних частинних розв'язків ЛОДР).

ЗАУВАЖЕННЯ: якщо лінійне однорідне диференціальне рівняння має порядок, вищий за другий, загальний розв'язок теж має вигляд лінійної комбінації частинних розв'язків, причому їх кількість дорівнює порядку рівняння, але умова непропорційності заміниться на умову лінійної незалежності цих частинних розв'язків

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

де $y_i^{(n)} + p_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_i \equiv 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$ лінійно незалежні, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі.

Основна теорема 11.2 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку)

Нехай

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \text{ -} \qquad (*)$$

лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку і нехай

$$y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \text{ -}$$

загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (**)$$

і нехай $z(x)$ деякий частинний розв'язок ЛНДР (*), тобто $z'' + p(x)z' + q(x)z \equiv f(x)$. Тоді загальний розв'язок ЛНДР (*) дорівнює сумі

$$y = y_0 + z$$

(тобто дорівнює сумі загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння і деякого частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння).

ЗАУВАЖЕННЯ: ця теорема поширюється на лінійні диференціальні неоднорідні рівняння будь-якого порядку.

ПРИКЛАД

Розглянемо рівняння

$x^2y'' - 2xy^2 + 2y = 0$ – рівняння Ейлера

Розглянемо далі дві функції

$$y_1(x) = x,$$

$$y_2(x) = x^2.$$

Перевіримо, що кожна з них є частинним розв'язком рівняння Ейлера, тобто при підстановці у рівняння перетворює його у тотожність

$$\begin{array}{r|l} 2 & y_1 = x \\ -2x & y'_1 = 1 \\ x^2 & y''_1 = 0 \end{array}$$

$$x^2y''_1 - 2xy'_1 + 2y = 0 \cdot x^2 - 2x \cdot 1 + 2x = 0 \;,$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & y_2 = x^2 \\ -2x & y'_2 = 2x \\ x^2 & y''_2 = 2 \end{array}$$

$$x^2y''_2 - 2xy'_2 + 2y_2 = 2x^2 - 2x \cdot 2x + 2x^2 \equiv 0 \;.$$

Далі очевидно, що $y_1(x) = x,\, y_2(x) = x^2$ будуть непропорційними розв'язками, тому що їх відношення $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ – не є сталою величиною.

Тому за теоремою 11.1 загальний розв'язок рівняння Ейлера такий:

$$y = C_1x + C_2x^2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

ПРИКЛАД

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \text{ – неоднорідне рівняння;}$$

$$y = y_0 + z\,, \qquad (11)$$

де $y_0 = C_1x + C_2x^2$ – загальний розв'язок однорідного рівняння $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Розглянемо функцію

$$z = \frac{1}{2}x^3$$

і перевіримо, що вона є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Для цього обчислимо $z = \frac{1}{2}x^3;\; z' = \frac{3}{2}x^2;\; z'' = \frac{3}{2}2x = 3x$ та підставимо ці значення у ліву частину ЛНДР замість y, y', y''

$$x^2z'' - 2xz' + 2z = x^2 \cdot 3x - 2x\frac{3}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x^3 \equiv x^3.$$

Таким чином, $z=\frac{1}{2}x^3$ є потрібний нам частинний розв'язок ЛНДР, але тоді за формулою (11)

$$y=y_0+z=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}x^3\ \text{-}$$

загальний розв'язок рівняння

$$x^2y''-2xy'+2y=x^3.$$

§ 12 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

12.1 Розглянемо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=0, \qquad (12)$$

де p,q - сталі величини.

Для рівняння (12) має місце основна теорема 1 про структуру загального розв'язку, тобто загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $y_1(x),y_2(x)$ - два частинних непропорційних розв'язки (12), а C_1,C_2 - довільні сталі.

Таким чином, для розв'язання рівняння (12) потрібно відшукати $y_1(x),y_2(x)$.

Будемо відшукувати розв'язок рівняння (12) у вигляді

$$y=e^{kx},$$

де k - невідомий доки постійний множник.

Задамо собі питання: яким повинен бути постійний множник k, щоб функція

$$y=e^{kx}$$

була розв'язком рівняння (12).

З цією метою обчислимо похідні першого та другого порядків

$$y'=ke^{kx},$$

$$y''=k^2e^{kx}$$

та підставимо у ліву частину рівняння (12) замість y,y',y'' і поставимо вимогу, щоб ліва частина тотожно дорівнювала правій

$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}\equiv 0$, звідки, маючи на увазі, що

$$e^{kx}\neq 0,$$

$$k^2+pk+q=0. \qquad (13)$$

Таким чином, якщо функція $y=e^{kx}$ є розв'язком рівняння (12), тоді постійний множник k задовольняє квадратному рівнянню (13).

Навпаки, якщо k є коренем квадратного рівняння (13), тоді функція $y=e^{kx}$ є розв'язком рівняння (12).

ОЗНАЧЕННЯ 12.1 Квадратне рівняння $k^2+pk+q=0$ називається ***характеристичним*** рівнянням для лінійного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=0.$$

Таким чином, справедлива така теорема:

для того щоб функція $y=e^{kx}$ була розв'язком диференціального рівняння $y''+py'+qy=0$, необхідно і достатньо, щоб k було коренем характеристичного рівняння (Х.Р.)

$$k^2+pk+q=0.$$

12.2 З елементарної алгебри відомо, що корені квадратного рівняння залежать від знака дискримінанта, тому розглянемо три випадки: Д>0, Д<0,Д=0

12.2.1 Нехай

$$y''+py'+qy=0, \qquad \text{(ЛОДР)}$$

$$k^2+pk+q=0, \qquad \text{(Х.Р.)}$$

$$Д=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0.$$

У цьому випадку відомо, що характеристичне рівняння має два дійсних відмінних один від одного кореня

$$k_1\neq k_2.$$

Але тоді, за попередньою теоремою, функції

$$y_1(x)=e^{k_1x}, \qquad y_2(x)=e^{k_2x}$$

будуть частинними розв'язками ЛОДР (12), більш того, вони будуть непропорційними, тому що

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

12.2.2 Нехай
$$y'' + py' + qy = 0, \qquad \text{(ЛОДР)}$$
$$k^2 + pk + q = 0, \qquad \text{(Х.Р.)}$$
$$Д = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 .$$

У цьому випадку відомо, що (Х.Р.) має два однакових корені
$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

Але тоді ми можемо побудувати лише <u>один</u> розв'язок рівняння (12), а саме
$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Необхідний нам другий непропорційний частинний розв'язок рівняння (12) будемо розшукувати у вигляді

$$\begin{array}{l|l} q & y_2(x) = U(x)e^{-\frac{p}{2}x} \\ p & y'_2(x) = U'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + U(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) \\ 1 & y''_2(x) = U''(x)e^{-\frac{p}{2}x} + U'(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) + U'(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) + U(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(\frac{p^2}{4}\right) \end{array}$$

Якщо тепер підставити отримані вирази для $y''_2(x)$, $y'_2(x)$, $y_2(x)$ у ліву частину рівняння (12) і поставити вимогу, щоб ліва частина тотожно дорівнювала правій частині, ми отримаємо тотожність відносно невідомої функції $U(x)$, а саме

[redacted]

тобто $U''(x)e^{-\frac{p}{2}x} \equiv 0$,

звідки $U''(x) \equiv 0$, тому що $e^{-\frac{p}{2}x} \neq 0$.
Але тоді $U'(x) = C$ або ж $U'(x) = 1$,

а
$$U(x) = x .$$

Таким чином, $y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}$, причому $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \dfrac{xe^{-\frac{p}{2}x}}{e^{-\frac{p}{2}x}} = x \neq const$

і загальний розв'язок рівняння (12) у випадку Д=0 має вигляд
$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x},$$
$$Д = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0.$$

12.2.3 Нехай
$$y'' + py' + qy = 0, \qquad \text{(ЛОДР)}$$
$$k^2 + pk + q = 0, \qquad \text{(Х.Р.)}$$
$$Д = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 .$$

З елементарної алгебри відомо, що у цьому випадку (Х.Р.) не має дійсних коренів.

Будемо діяти так: розглянемо функцію
$$q\,\big|\, y(x) = U(x)e^{-\frac{p}{2}x} \qquad (14)$$

і будемо відшукувати нову невідому функцію так, щоб $y(x)$ (14) була розв'язком рівняння (12). З цією метою обчислюємо

$$\begin{array}{l|l} p & y'(x) = U'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + U(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) \\ 1 & y''(x) = U''(x)e^{-\frac{p}{2}x} + 2U'(x)e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) + U(x)e^{-\frac{p}{2}x}\frac{p^2}{4} \end{array}$$

і підставляємо у ліву частину рівняння (12) і тотожно дорівнюємо правій частині

[redacted]

звідки $U''(x) + U(x)\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \equiv 0$.

Позначимо додатну величину

$$0<q-\frac{p^2}{4}=-Д=b^2,$$

$$U''+b^2U=0. \qquad (15)$$

Таким чином, функція $U(x)$ задовольняє, тобто є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами (15).

Можна перевірити, що функції

$$U_1(x)=sin\,bx,$$

$$U_2(x)=cos\,bx$$

виявляються частинними і непропорційними розв'язками рівняння (15), тому що

$$\frac{U_1(x)}{U_2(x)}=\frac{\sin bx}{\cos bx}=tgbs\neq const.$$

Перевіримо першу з них

$$U_1(x)=sin\,bx,$$

$$U''_1(x)=-b^2\,sin\,bx$$

і тому

$$U''_1(x)+b^2U(x)=-b^2\sin bx+b^2\sin bx\equiv 0.$$

Аналогічно перевіряється і функція $U_2(x)=\cos bx$. Але тоді функції

$$\begin{cases} y_1(x_1)=e^{-\frac{p}{2}x}\sin bx \\ y_2(x_2)=e^{-\frac{p}{2}x}\cos bx \end{cases}$$

утворюють пару частинних непропорційних розв'язків ЛОДР (12), тобто

$$y(x)=C_1e^{-\frac{p}{2}x}\sin bx+C_2e^{-\frac{p}{2}x}\cos bx,\text{ де } b=\sqrt{-Д},$$

виявляється загальним розв'язком рівняння (12) у випадку $Д<0$ для Х.Р.

ЗАУВАЖЕННЯ: метод характеристичного рівняння можна застосувати для ЛОДР будь-якого порядку з постійними коефіцієнтами.

ПРИКЛАД

$$y''-7y'+12y=0,$$
$$k^2-7k+12=0,$$
$$Д=\left(\frac{7}{2}\right)^2-12=\frac{1}{4}>0: k_1=3, k_2=4,$$
$$y_1(x)=e^{3x}, y_2(x)=e^{4x},$$
$$y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}.$$

ПРИКЛАД

$$y''-6y'+9y=0,$$
$$X.P.\ \ k^2-6k+9=0,$$
$$Д=\left(\frac{6}{2}\right)^2-9=\frac{1}{4}>0: (k-3)^2=0,$$
$$k_1=k_2=3,$$
$$y_1(x)=e^{3x}, y_2(x)=xe^{3x},$$
$$y(x)=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

ПРИКЛАД

$$y''-2y'+5y=0,$$
$$X.P.\ k^2-2k+5=0,$$
$$Д=\left(\frac{2}{2}\right)^2-5=-4<0,$$
$$b^2=-Д=4\Rightarrow b=2,$$
$$y_1(x)=e^x\,sin\,2x, y_2(x)=e^x\,cos\,2x,$$
$$y=C_1e^x\,sin\,2x+C_2e^x\,cos\,2x.$$

ПРИКЛАД

$$y'''-3y''+3y'-y=0,$$
$$X.P.\ \ k^3-3k^2+3k-1=0\Rightarrow (k-1)^3=0\Rightarrow$$
$$k_1=k_2=k_3=1,$$
$$y_1(x)=e^x,\quad y_2(x)=xe^x,\quad y_3(x)=x^2e^x,$$
$$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x.$$

§ 13 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку та їх розв'язання

За основною теоремою 11.2 про структуру загального розв'язку ЛНДР загальний розв'язок рівняння

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (*)$$

складається із загального розв'язку $y_0(x)$ відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (**)$$

і деякого частинного розв'язку $z(x)$ неоднорідного диференціального рівняння (*)

$$y=y_0+z.$$

13.1 Метод варіації сталих Лагранжа

ТЕОРЕМА: якщо відомий загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння, тоді частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна побудувати за допомогою інтегрування.

Нехай

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \text{ - } \qquad \text{(ЛНДР)}$$

і

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \text{ - }$$

відповідне (ЛОДР) і нехай

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \text{ - }$$

загальний розв'язок (ЛОДР), де C_1, C_2 – довільні сталі.

Побудуємо частинний розв'язок (ЛНДР) у вигляді

$$z(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x), \qquad (16)$$

де невідомі поки що функції $C_1(x), C_2(x)$ підберемо так, щоб $z(x)$ була розв'язком рівняння (*).

Складемо систему лінійних рівнянь відносно похідних $C'_1(x), C'_2(x)$, а саме систему Лагранжа

$$(*)\begin{cases} C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0 \\ C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x). \end{cases}$$

Перевіримо, по-перше, що розв'язок C'_1, C'_2 системи (*) існує. З цією метою обчислимо головний детермінант системи (*).

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}=y_1y'_2-y_2y'_1=\frac{y'_2y_1-y_2y'_1}{y_1^2}y_1^2=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'y_1^2\neq 0,$$

тому що $\frac{y_2}{y_1}\neq const$, тому і $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\neq 0$.

Таким чином, за правилом Крамера, система (*) має єдиний розв'язок

$$C'_1(x), C'_2(x),$$

звідки шляхом інтегрування можна відновити функції $C_1(x), C_2(x)$

$$C_1(x)=\int C'_1(x)dx,$$
$$C_2(x)=\int C'_2(x)dx.$$

По-друге, перевіримо, що функція

$$z(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

де функції $C_1(x), C_2(x)$ виявляються розв'язком системи (*) Лагранжа, є розв'язком ЛНДР.

З цією метою, обчислюємо похідні

$$\begin{array}{l|l} q & z=C_1y_1+C_2y_2 \\ p & z'=\underbrace{C'_1y_1+C'_2y_2}_{0}+C_1y'_1+C_2y'_2 \\ 1 & z''=\underbrace{C'_1y'_1+C'_2y'_2}_{f(x)}+C_1y''_1+C_2y''_2 \end{array}$$

і підставимо їх у ліву частину ЛНДР (*)

$$f(x)+C_1y''_1+C_2y''_2+p(C_1y'_1+C_2y'_2)+q(C_1y_1+C_2y_2)=$$
$$=f(x)+C_1\underbrace{(y''_1+py'_1+qy_1)}_{0}+C\underbrace{(y''_2+py'_2+qy_2)}_{0}\equiv f(x).$$

Таким чином, функція

$$z=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2,$$

де $C_1(x), C_2(x)$ задовольняють системі (*) Лагранжа,

$$(*)\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \end{cases},$$

є частинним розв'язком ЛНДР (*) другого порядку.

ЗАУВАЖЕННЯ: метод варіації довільних сталих можна використовувати для відшукування частинного розв'язку ЛНДР будь-якого порядку, а саме, якщо

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \qquad \text{(ЛНДР)}$$

і $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

тоді

$$z(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n$$

буде частинним розв'язком ЛНДР, якщо функції $C_1(x), C_2(x), \ldots C_n(x)$ задовольняють системі рівнянь Лагранжа відносно похідних $C_1'(x), C_2'(x), \ldots C_n'(x)$

$$(*)\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + \ldots + C'_n(x)y_n = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \ldots + C'_n(x)y'_n = 0 \\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)} + C'_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C'_n(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

причому система (*) завжди має єдиний розв'язок $C_1'(x), C_2'(x), \ldots C_n'(x)$ тому, що головний детермінант системи (*), так званий ***детермінант Вронського,***

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots y_n \\ y'_1 & y'_2 \ldots y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Останній факт є наслідком того факту, що система частинних інтегралів

$$y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$$

ЛОДР повинна бути лінійно незалежною.

ПРИКЛАД

$$y''-3y'+2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}},$$

$$y = y_0 + z,$$

$$y''-3y'+2y = 0,$$

$$X.P.\ k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2;\ k_2 = 1,$$

$$y_1 = e^{2x};\ y_2 = e^x,$$

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

$$z = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^x$$

Система Лагранжа має вигляд

$$\begin{cases} C'_1(x)e^{2x} + C'_2(x)e^x = 0 \\ 2C'_1(x)e^{2x} + C'_2(x)e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$C'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}};\quad C'_2(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}},$$

$$C_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}-1}}dx = \begin{vmatrix} U = e^{-x} \\ dU = -e^{-x}dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{U^2-1}}du = -ln\left|U + \sqrt{U^2-1}\right| = -ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}\right|,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = -arcsine^x,$$

$$z = -ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}\right|e^{2x} - arcsine^x \cdot e^x.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = y_0 + z = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - e^{2x}\, ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}\right| - e^x\, arcsine^x$$

або

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{2x} \cdot x - e^{2x}\, ln\left|1 + \sqrt{1-e^{2x}}\right| - e^x \cdot arcsine^x.$$

13.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Нехай ЛНДР з постійними коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=f(x)$$

має праву частину $f(x)$, яка має один із трьох виглядів

$$а)\quad f(x)=\phi(x),$$

$$б)\quad f(x)=\phi(x)e^{\alpha x},$$

$$в)\quad f(x)=\phi(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

У цих трьох випадках частинний розв'язок ЛНДР треба відшукати у такому ж вигляді, у якому маємо праву частину ЛНДР, якщо число "r" не є коренем характеристичного рівняння.

У випадку а) ми вважаємо $r=0$,

у випадку б) ми вважаємо $r=\alpha$,

у випадку в) ми вважаємо $r=\alpha+\beta i$.

Таким чином,

а) $z(x)=A(x)$, де $A(x)$ - поліном того ж степеня, що і поліном $\phi(x)$, але з невідомими поки що коефіцієнтами, якщо серед коренів характеристичного рівняння нема кореня, який дорівнює 0;

б) $z(x)=A(x)e^{\alpha x}$, якщо корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння відрізняються від α

$$k_1\neq\alpha;\quad k_2\neq\alpha;$$

в) $z(x)=A(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+B(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, якщо дискримінант характеристичного рівняння Д>0 або Д=0.

У випадку від'ємного дискримінанта характеристичного рівняння Д<0 виконується хоча б одна із нерівностей

$$\alpha\neq-\frac{P}{2},\qquad \beta\neq b=\sqrt{-Д}.$$

Виняткові випадки

а) якщо $k_1=0;\quad k_2\neq0$ для коренів характеристичного рівняння, тоді

$$z(x)=A(x)\cdot x$$

якщо $k_1=k_2=0$, тоді

$$z(x)=A(x)\cdot x^2;$$

б) якщо $k_1=\alpha;\quad k_2\neq\alpha$ для коренів характеристичного рівняння, тоді

$$z(x)=A(x)xe^{\alpha x}$$

і якщо

$$k_1=k_2=\alpha,$$

тоді

$$z(x)=A(x)x^2e^{\alpha x};$$

в) якщо дискримінант характеристичного рівняння Д<0 і якщо

$$\alpha=-\frac{P}{2},\qquad \beta=b=\sqrt{-Д},$$

тоді

$$z(x)=A(x)xe^{\alpha x}\cos\beta x+B(x)xe^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ПРИКЛАД

$$y''-5y'+4y=x^2+1,$$

$$y=y_0+z,$$

$$y''-5y'+4y=0,$$

$$k^2-5k+4=0,\qquad\qquad \alpha=0,$$

$$k_1=1;\quad k_2=4,$$

$$y_0=C_1e^x+C_2e^{4x},$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & z=Ax^2+Bx+C \\ -5 & z'=2Ax+B \\ 1 & z''=2A, \end{array}$$

$$z''-5z+4z=4Ax^2+(4B-10A)x+(4C-5B+2A)\equiv x^2+1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 4A=1 \\ 4B-10A=0 \\ 4C-5B+2A=1, \end{cases}\qquad A=\frac{1}{4},\quad B=\frac{10}{4}A=\frac{5}{8},\quad C=\frac{1}{4}\left(1+5\cdot\frac{5}{8}-2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{29}{32}$$

Таким чином,

$$z=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{29}{32},$$

а загальний розв'язок дорівнює

$$y=C_1e^x+C_2e^{4x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{29}{32}.$$

ПРИКЛАД

$$\begin{cases} y''-2y'+y=5e^x \\ y\big|_{x=0}=0 \\ y'\big|_{x=0}=8 \end{cases} \qquad \alpha=1.$$

Треба розв'язати задачу Коші, тобто знайти частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок, а потім використаємо початкові умови і знайдемо частинний розв язок.

$$y''-2y'+y=5e^x,$$
$$y=y_0+z,$$

а) $y''-2y'+y=0,\qquad \alpha=1,$

$$k^2-2k+1=0,$$
$$k_1=k_2=1.$$
$$y_0=C_1e^x+C_2xe^x,$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & z=A_0x^2e^x \\ -2 & z'=A_02xe^x+A_0x^2e^x \\ 1 & z''=2A_0e^x+4A_0xe^x+A_0x^2e^x \end{array}$$

$$z''-2z'+z=A_0x^2\left(e^x-2e^x+e^x\right)+A_0x\left(-4e^x+4e^x\right)+2A_0e^x\equiv 5e^x,$$
$$2A_0e^x\equiv 5e^x\Rightarrow 2A_0\equiv 5\Rightarrow A_0=5/2,$$
$$z=\frac{5}{2}x^2e^x,$$
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{5}{2}x^2e^x;$$

б) якщо $x=0$, тоді $y=0$, тобто $C_1=0$.

Обчислимо похідну

$$y'=C_1e^x+C_2\left(e^x+xe^x\right)+\frac{5}{2}\left(2xe^x+x^2e^x\right)$$

при $x=0$ $y'=8$

$$8=C_1+C_2,$$

таким чином,

$$\begin{cases} 0=C_1 \\ 8=C_1+C_2, \end{cases}$$

тобто $C_1=0,\quad C_2=8$,

$y^*=8xe^x+\frac{5}{2}x^2e^x$ - є розв'язком задачі Коші.

§ 14 Системи звичайних диференціальних рівнянь

14.1 Система диференціальних рівнянь першого порядку у нормальній формі записується таким чином:

$$(*)\qquad \begin{cases} y'_1=f_1(x,y_1,y_2,\dots y_n) \\ y'_2=f_2(x,y_1,y_2,\dots y_n) \\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx \\ y'_n=f_n(x,y_1,y_2,\dots y_n) \end{cases}$$

Тут $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ - шукані функції.

Розв'язати систему (*) означає – відшукати такі функції $y_1,y_2,\dots,y_n$, які перетворюють систему рівнянь у систему тотожностей.

Будемо розв'язувати систему (*) так: знайдемо похідну лівої і правої частини першого рівняння за аргументом x

$$y_1''=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}y'_1+\dots+\frac{\partial f_n}{\partial y_n}y'_n \qquad (17)$$

і замінимо у правій частині отриманого рівняння $y'_1,y'_2,\dots y'_n$ їх виразами із системи (*).

Тоді рівняння (17) буде мати вигляд

$$y_1''=F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n). \qquad (18)$$

Знову знайдемо похідну обох частин рівняння (18) за аргументом x і замінимо $y'_1,\dots,y'_n$ їх виразами із системи (*).

Отримаємо

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Повторюючи цей процес, ми отримаємо систему

$$(**)\quad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ... y_n) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, ... y_n) \\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, ... y_n). \end{cases}$$

Якщо тепер із перших «$n-1$» рівнянь системи (**) виразити $y_2, y_3, ..., y_n$ через $x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}$ і підставити ці вирази у останнє рівняння системи (**)

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}\right) \\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', ... y_1^{(n-1)}\right), \end{cases} \quad (19)$$

ми отримаємо одне рівняння «n-го» порядку відносно невідомої функції «y_1»

$$y_1^{(n)} = \phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \quad (20)$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння (20), знайдемо

$$y_1 = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (21)$$

а потім із системи (19) знайдемо

$$y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$
$$\approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx\ \approx$$
$$y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

ЗАУВАЖЕННЯ: якщо система (*) виявляється лінійною, тоді і рівняння (20) теж буде лінійним.

ПРИКЛАД:

$$\begin{cases} y' = x + y + z \\ z' = 2x - 4y - 3z, \end{cases} \qquad y\Big|_{x=0} = 1,\ \ z\Big|_{x=0} = 0,$$

$$y'' = 1 + y' + z',$$
$$y'' = 1 + (x + y + z) + (2x - 4y - 3z) \Rightarrow$$
$$y'' = 1 + 3x - 3y - 2z = 1 + 3x - 3y - 2(y' - x - y) = -2y' + 2y - 3y + 1 + 5x,$$
$$y'' + 2y' + y = 5x + 1,$$
$$y = y_0 + z_0,$$
$$y'' + 2y' + y = 0,$$
$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$
$$k_1 = k = -1,$$
$$y_1(x) = e^{-x},\ \ y_2(x) = xe^{-x},$$
$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & z_0 = Ax + B \\ 2 & z_0' = A \\ 1 & z_0'' = 0, \end{array}$$

$$z_0'' + 2z_0' + z_0 = Ax + (2A + B) \equiv 5x + 1,$$
$$A = 5,$$
$$2A + B = 1,$$
$$B = 1 - 10 = -9,$$
$$z_0 = 5x - 9,$$
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 5x - 9,$$
$$z = y' - y - x = -C_1 e^{-x} + C_2\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) + 5 - \left[C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 5x - 9\right] - x,$$
$$z = -2C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - 6x + 14 - 2C_2 x e^{-x}.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи такий:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 5x - 9 \\ z = -2C_1 e^{-x} + C_2\left(e^{-x} - 2xe^{-x}\right) - 6x + 14. \end{cases}$$

Знайдемо конкретні значення довільних сталих C_1, C_2 за допомогою початкових умов

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 9 \\ 0 = -2C_1 + C_2 + 14, \end{cases}$$
$$C_1 = 10,\ \ C_2 = 6.$$

Таким чином, частинний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} y = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9 \\ z = -20e^{-x} + 6(e^{-x} - 2xe^{-x}) - 6x + 14 \end{cases}$$

або ж

$$\begin{cases} y = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9 \\ z = -14e^{-x} - 12xe^{-x} - 6x + 14. \end{cases}$$

14.2 Система лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами (матричний спосіб розв'язання)

Система має вигляд

$$(*)\quad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Якщо увести матричні позначення

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \approx \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \approx \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \approx & \approx & \approx & \approx \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

систему (*) можна переписати у матричній формі

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}. \qquad \text{(I)}$$

Будемо шукати частинні розв'язки системи у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \ldots, \quad y_n = \alpha_n e^{kx},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, k$ - невизначені поки що сталі.

Для визначення сталих $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, k$ підставимо замість $y_1, y_2, \ldots, y_n$ у рівняння (I) їх вирази. Отримаємо матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} k\alpha_1 e^{kx} \\ k\alpha_2 e^{kx} \\ \approx \approx \approx \\ k\alpha_n e^{kx} \end{pmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \approx \approx \approx \\ \alpha_n e^{kx} \end{bmatrix}$$

або після скорочення рівняння на додатний множник $e^{kx} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

або

$$(\mathrm{A} - k\mathrm{E}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \approx \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Таким чином, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ повинно бути розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (II).

Якщо «к» - таке, що детермінант

$$\det(\mathrm{A} - k\mathrm{E}) \neq 0,$$

тоді за правилом Крамера система (II) має єдиний розв'язок

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

тобто і

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0.$$

Якщо ж $\det(\mathrm{A} - k\mathrm{E}) = |\mathrm{A} - k\mathrm{E}| = 0$, тоді система (II) має не нульовий розв'язок, тобто не усі $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Рівняння

$$|\mathrm{A} - k\mathrm{E}| = 0$$

називається характеристичним рівнянням і є рівнянням "n" степеня відносно "k".

З вищої алгебри відомо, що таке рівняння має "n" коренів. Корені характеристичного рівняння можуть бути різними дійсними,кратними, комплексними.

Розглянемо випадок, коли корені характеристичного рівняння **усі різні і дійсні**, тобто $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Для кожного значення "k" знайдемо відповідні значення α_i

$k_1 :\quad \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)},$

$k_2 :\quad \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)},$

$\approx \approx \approx \approx \approx \approx$

$k_n :\quad \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)},$

розв'язуючи кожний раз систему (II).

Відповідні частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь (*) будуть мати вигляд

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x}, \quad y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x}, \ldots\ldots, \quad y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 x},$$
$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x}, \quad y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x}, \ldots\ldots, \quad y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 x},$$
$$\approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx$$
$$y_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n x}, \quad y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n x}, \ldots\ldots, \quad y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n x}.$$

Легко перевіряється, що

$$y_1 = C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n x},$$
$$y_2 = C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n x},$$
$$\approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx \quad \approx$$
$$y_n = C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 x} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n x}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі, буде загальним розв'язком лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

ПРИКЛАД

$$(*) \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Побудуємо матрицю коефіцієнтів системи (*)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

і характеристичне рівняння

$$A - kE = \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix},$$

$$|A - kE| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-k)(3-k) - 2 = 0,$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 4.$$

Відшукаємо $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$. З цією метою записуємо однорідну систему

$$(A - k_1 E)\begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1^{(1)} = -2\alpha_2^{(1)}.$$

Якщо покласти $\alpha_2^{(1)} = 1$, тоді $\alpha_1^{(1)} = -2$ і відповідні частинні розв'язки будуть

$$y_1^{(1)} = -2e^x, \quad y_2^{(1)} = e^x.$$

Відшукаємо $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ із системи

$$(A - k_2 E)\begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$
$$\alpha_2^{(2)} = \alpha_1^{(2)} = 1,$$

тобто

$$y_1^{(2)} = e^{4x}, \quad y_2^{(2)} = e^{4x}.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_1 = C_1(-2e^x) + C_2 e^{4x} \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}. \end{cases}$$

§ 15 Рівняння першого порядку, які не розв'язані відносно похідної

До сих пір ми розглядали диференціальні рівняння першого порядку, які можна записати у нормальній формі

$$y' = f(x, y). \tag{22}$$

Але рівняння може бути записано у загальній формі

$$F(x, y, y') = 0, \tag{23}$$

причому безпосередній перехід від рівняння виду (23) до рівняння виду (22) не завжди можливий.

Але можна довести, що шляхом введення параметра задачу інтегрування диференціального рівняння (23) завжди можна звести до задачі інтегрування рівняння (22), розв'язаного відносно похідної.

Розглянемо деякі частинні випадки рівняння (23) і з'ясуємо способи їх інтегрування.

<u>РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА.</u> Так називається рівняння лінійне відносно "x" і "y", тобто рівняння, яке має вигляд

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'). \tag{24}$$

Припустимо, що $\varphi(y')\neq y'$ (випадок $\varphi(y')\equiv y'$ буде розглянуто окремо). Для інтегрування рівняння застосуємо параметричний метод.

Позначимо

$$y'=p,$$

тоді рівняння буде мати вигляд

$$y=\varphi(p)x+\psi(p). \tag{25}$$

Обчислюючи похідні обох частин (26) за аргументом "x", отримаємо

$$y'=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx} \tag{26}$$

або, після заміни y' на p, множення на $\frac{dx}{dp}$ і алгебраїчних перетворень

$$p\frac{dx}{dp}-\varphi(p)\frac{dx}{dp}=x\varphi'(p)+\psi'(p)\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}=\frac{\psi^1(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{27}$$

Рівняння (27) лінійне відносно функції "x" і похідної "$\frac{dx}{dp}$".

Його загальний інтеграл має вигляд

$$\phi(x,p,C)=0. \tag{28}$$

Сукупність рівностей

$$\begin{cases} y=\varphi(p)x+\psi(p) \\ \phi(x,p,C)=0 \end{cases} \tag{29}$$

визначає загальний інтеграл рівняння Лагранжа в параметричній формі.

Якщо виключити параметр "p" із рівностей (29), отримаємо загальний інтеграл рівняння Лагранжа

$$\phi_1(x,y,C)=0.$$

ЗАУВАЖЕННЯ: перетворення рівняння (26) у (27) можливо лише при умові $p-\varphi(p)\neq 0$. Якщо рівняння $p-\varphi(p)=0$ має корені $p=p_i(i=1,2,...,k)$, тоді розв'язками рівняння Лагранжа будуть співвідношення

$$y=\varphi(p_i)x+\psi(p_i)\ ,\quad p=p_i(i=1,2,...,k).$$

ПРИКЛАД

Визначити загальний розв'язок рівняння Лагранжа

$$y=x(y')^2+(y')^2.$$

<u>Розв'язання</u>: позначимо $y'=p$. Тоді $y=xp^2+p^2$, або $y=(x+1)p^2$.
Обчислимо похідну обох частин:

$$y'=p^2+(x+1)2p\frac{dp}{dx},$$

$$p=p^2+(x+1)2p\frac{dp}{dx}.$$

Якщо $p\neq 0$, тоді $1-p=2(x+1)\frac{dp}{dx}$, або

$$\frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p}$$

і

$$\ln|x+1|=-2\ln|1-p|+2\ln|c|.$$

Після потенціювання, маємо

$$x+1=\frac{c^2}{(1-p)^2}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння в параметричній формі такий:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{(1-p)^2}-1 \\ y=\dfrac{c^2p^2}{(1-p)^2} \end{cases}$$

Виключимо параметр "p". Для цього знайдемо вираз

$$p^2 = [1-(1-p)]^2 = \left(1-\frac{C}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{x+1}-C\right)^2}{x+1}$$

і підставимо в рівняння $y=(x+1)p^2$.

Маємо загальний розв'язок $y=\left(\sqrt{x+1}-C\right)^2$.

Зауважимо, що із умови $p=0$ випливає, що $y=0$ теж буде розв'язком даного рівняння.

<u>РІВНЯННЯ КЛЕРО.</u> Рівнянням Клеро називається частинний випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y')\equiv y'$.

Загальний вигляд рівняння Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \qquad (30)$$

Позначимо $y'=p$. Тоді

$$y = xp + \psi(p). \qquad (31)$$

Продиференціюємо по "x", отримаємо

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

або

$$\frac{dp}{dx}[x+\psi'(p)] = 0,$$

звідки

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

або

$$x + \psi'(p) = 0. \qquad (32)$$

Із рівняння $\frac{dp}{dx}=0$ отримуємо $p=C$.

Підставляючи "c" замість "p" в (32), отримуємо загальний розв'язок рівняння Клеро

$$y = Cx + \psi(C), \qquad (33)$$

який, з геометричної точки зору, є сім'єю прямих.

Рівняння (32) сумісно з (31) теж дає розв'язок рівняння Клеро в параметричній формі

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y = xp+\psi(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}.$$

Якщо виключити із цієї системи параметр "p", отримаємо інтеграл $\phi(x,y)=0$ рівняння (30).

Цей інтеграл не містить у собі "C" і, отже, не може бути загальним інтегралом. Його також не можна отримати із загального ні при яких значеннях "C", бо не є лінійною функцією.

Такий інтеграл є ***особливим інтегралом.***

ПРИКЛАД

Визначити загальний і особливий розв'язки рівняння

$$y = px + \frac{1}{p}, \quad y' = p.$$

<u>Розв'язання:</u> загальний розв'язок отримуємо безпосе-редньо із рівняння, якщо замінити "p" на "C":

$$y = Cx + \frac{1}{c}.$$

Для отримання особливого розв'язку знайдемо похідну

$$'(p) = \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} x=-\psi'(p)=\dfrac{1}{p^2} \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p)=\dfrac{2}{p} \end{cases}$$

визначає особливий розв'язок у параметричній формі. Виключимо параметр "p". Для цього підведемо обидві частини другого рівняння у квадрат та поділимо їх на відповідні частини першого рівняння:

$$\frac{y^2}{x} = 4 \Rightarrow y^2 = 4x.$$

З геометричної точки зору загальний розв'язок є однопараметричною сім'єю прямих

$$y = Cx + \frac{1}{C} \text{ (C - параметр)},$$

а особливий інтеграл - параболою.

Безпосередньо із рисунка видно, що особливий інтеграл (парабола) виявився геометрично обвідною сім'ї інтегральних ліній (прямих), які визначаються загальним розв'язком.

Ця властивість не випадкова.

Можливість існування особливих розв'язків пов'язана з порушенням умов теореми існування та єдиності розв'язків диференціального рівняння першого порядку.

Ці умови можуть порушуватися в усіх точках деякої лінії, яка сама по собі може бути розв'язком рівняння.

Цей розв'язок і називають <u>особливим.</u>

Таким чином, особливим розв'язком диференціального рівняння називається такий розв'язок, який в усіх своїх точках не задовольняє властивості єдиності, тобто в будь-якому околі кожної точки особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

<u>ОЗНАЧЕННЯ 15.1</u> Обвідною сім'ї ліній $\phi(x,p,C)=0$, які залежать від параметра "с", називається лінія, яка в кожній своїй точці дотикається до деякої із ліній сім'ї, причому в різних своїх точках вона дотикається до різних ліній сім'ї.

Для отримання особливого інтеграла із загального застосовується правило отримання обвідної однопараметричної сім'ї кривих $\phi(x,p,C)=0$, а саме: особливим інтегралом рівняння, якщо він існує, є розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\phi(x,p,C)=0\\ \dfrac{\partial\phi(x,y,C)}{\partial C}=0\end{cases}. \qquad (34)$$

ЗАУВАЖЕННЯ: треба мати на увазі, що система (34) може взагалі не визначати жодної кривої, тоді рівняння не матиме особливого інтеграла.

Але навіть коли система (34) визначає криву (дискримінантну

криву), то вона може виявитися не обвідною, а геометричним місцем особливих точок кривих сім'ї, і, отже, не бути особливим інтегралом.

Потрібно перевірити збіг кутових коефіцієнтів дотичних до інтегральної кривої і обвідної в спільних точках.

Лише в цьому випадку диференціальне рівняння має особливий інтеграл, параметричними рівняннями якого є система (34).

Виключаючи із цієї системи параметр "С", отримуємо особливий інтеграл у формі $\varphi(x,y)=0$.

ПРИКЛАД

Визначити загальний і особливі розв'язки рівняння

$$y=x\frac{y'^2}{2(y'+2)}.$$

<u>Розв'язання</u>: позначимо $y'=p$; тоді

$$y=x\frac{p^2}{2(p+2)}.$$

Знаходимо похідну по "x":

$$y'=\frac{p^2}{2(p+2)}+x\frac{1}{2}\frac{2p(p+2)-p^2}{(p+2)^2}\frac{dp}{dx},$$

$$p-\frac{p^2}{2(p+2)}=x\frac{1}{2}\frac{p^2+4p}{(p+2)^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp}\left[\frac{p^2+4p}{2(p+2)}\right]=x\frac{p^2+4p}{2(p+2)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{(p^2+4p)}{(p+2)}\left[\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p+2}\right]=0\Rightarrow$$

$$p=0,\quad p+4=0,\quad \frac{dx}{x}=\frac{dp}{p+2}.$$

а) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dp}{p+2}\Rightarrow \ln|x|=\ln|p+2|+\ln c\Rightarrow x=c(p+2)$.

Таким чином, загальний інтеграл в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases}x=C(p+2)\\ y=\dfrac{C}{2}p^2\end{cases}\Rightarrow p=\frac{x}{C}-2$$

або, виключаючи параметр "p":

$$y=\frac{c}{2}\left(\frac{x}{c}-2\right)^2 \Rightarrow y=\frac{1}{2c}(x-2c)^2, \text{ або } (2C=C),$$

$$Cy=(x-C)^2;$$

б) $p=o \Rightarrow y=x\frac{p^2}{2(p+2)} \Rightarrow y=0$;

в) $p+4=0;\ \ p=-4 \Rightarrow y=x\frac{(-4)^2}{2(-4+2)} \Rightarrow$

$$y=-4x.$$

Таким чином, загальним розв'язком диференціального рівняння є сім'я парабол

$$Cy=(x-c)^2,$$

а розв'язки $y=0$ і $y=-4x$ є особливими розв'язками (можна перевірити, що ці функції є розв'язками системи (34), і можна довести, що прямі $y=0$ і $y=-4x$ в кожній точці дотикаються до відповідних парабол).

§ 16 Рівняння Ейлера

ОЗНАЧЕННЯ 16.1 Диференціальне рівняння

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}++a_{n-1}xy'+a_ny=f(x), \qquad (35)$$

де $a_1,a_2,...,a_n$ - сталі коефіцієнти, називається ***рівнянням Ейлера.***

Якщо $f(x)\equiv 0$, рівняння (36) називається *однорідним*.

Якщо $f(x)\neq 0$, рівняння називається *неоднорідним*.

Очевидно, рівняння Ейлера є лінійним диференціальним рівнянням.

Розглянемо більш детально рівняння Ейлера другого порядку

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$$

і спочатку зупинимось на випадку однорідного рівняння ($f(x)\equiv 0$), тобто

$$x^2y''+pxy'+qy=0. \qquad (36)$$

Рівняння (36) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку, отже його загальний розв'язок має вигляд:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $y_1(x),y_2(x)$ - фундаментальна система розв'язків (така система розв'язків складається з непропорційних частинних розв'язків рівняння (36), а C_1,C_2 - довільні сталі.

Будемо шукати розв'язок рівняння (36) у вигляді

$$y=x^k,$$

де "k" – деяка невизначена поки що стала.

Тоді $y'=kx^{k-1}$, $y'=k(k-1)x^{k-2}$ і, підставляючи ці вирази в рівняння (36), отримаємо тотожність

$$x^2k(k-1)x^{k-2}+pkx^{k-1}x+qx^k\equiv 0,$$

$$x^k\left[k(k-1)+pk+q\right]\equiv 0 \Rightarrow$$

$$k(k-1)+pk+q=0,$$

$$k^2+(p-1)k+q=0. \qquad (37)$$

Справедливе <u>твердження</u>: для того щоб функція $y=x^k$ була розв'язком рівняння Ейлера (36), необхідно і достатньо, щоб "k" було розв'язком <u>характеристичного рівняння</u> (37).

Розглянемо далі можливі варіанти значень дискримінанта

$$Д=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-q$$

квадратного рівняння (37)

а) Д>0;
б) Д=0;
в) Д<0.

а) якщо Д>0 корені характеристичного рівняння дійсні і різні

$$k_1\neq k_2,$$

тоді функції

$$y_1=x^{k_1},\quad y_2=x^{k_2}\quad \left(\frac{y_1}{y_2}=\frac{x^{k_1}}{x^{k_2}}=x^{k_1-k_2}\neq c\right)$$

будуть двома непропорційними частинними розв'язками рівняння (36) (тобто утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків), а тоді загальний розв'язок рівняння Ейлера (36) такий:

$$y=C_1x^{k_1}+C_2x^{k_2}; \qquad (38)$$

б) якщо Д=0, корені рівняння (2) рівні

$$k = k_1 = k_2 = \frac{1-p}{2},$$

тоді $\quad y_1 = x^k$ - один розв'язок (36).

Перевіримо, що $y_2 = x^k \ln x$ теж є розв'язком рівняння (36). Дійсно,

$$y_2' = kx^{k-1} \ln x + x^k \frac{1}{x} = x^{k-1}(k \ln x + 1),$$

$$y_2'' = (k-1)x^{k-2}(k \ln x + 1) + x^{k-1}\frac{k}{x} =$$

$$= x^{k-2}\left[k(k-1)\ln x + (2k-1)\right]$$

Підставляючи вирази для y_2, y_2', y_2'' у ліву частину рівняння (37), отрима-ємо рівність

$$x^2 y_2'' + pxy_2' + qy_2 = x^2 x^{k-2}\left[k(k-1)\ln x + (2k-1)\right] + pxx^{k-1}(k \ln x + 1) + qx^k \ln x =$$

$$= x^k \ln x(k(k-1) + kp + q) + x^k(2k - 1 + p) = 0,$$

яка означає, що $y_2 = x^k \ln x$ є частинним розв'язком рівняння (36), причому y_1, y_2 непропорційні

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x^k \ln x}{x^k} = \ln x \neq c$$

і тому загальний розв'язок рівняння (1) такий:

$$y = C_1 x^k + C_2 x^k \ln x; \qquad (39)$$

в) якщо Д<0, характеристичне рівняння (37) не має дійсних коренів.

Введемо позначення:

$$a = -\frac{p-1}{2}, \qquad b = \sqrt{-Д}.$$

Тоді неважко перевірити, що функції

$$y_1 = x^a \cos(b \ln x),$$
$$y_2 = x^a \sin(b \ln x)$$

будуть непропорційними розв'язками рівняння (36). Але тоді загальний розв'язок (36) можна записати у вигляді

$$y = C_1 x^a \cos(b \ln x) + C_2 x^a \sin(b \ln x). \qquad (40)$$

ПРИКЛАДИ

а) $\quad x^2 y'' - xy' + 2y = 0,$

$k(k-1) - k + 2 = 0, \quad k^2 - 2k + 2 = 0,$

$$Д = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2 = -1 < 0,$$

позначаємо

$$a = \frac{2}{2} = 1; \quad b = \sqrt{-Д} = \sqrt{-(-1)} = 1,$$

$$y = C_1 x^1 Cos(\ln x) + C_2 x^1 Sin(\ln x);$$

б) $\quad x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0,$

$k(k-1) - 4k + 6 = 0, \quad k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2; \quad k_2 = 3,$

$$y_1 = x^2, y_2 = x^3,$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3;$$

в) $\quad x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0,$

$k(k-1)(k-2) - k(k-1) + 2k - 2 = 0,$

$k(k^2 - 3k + 2) - k^2 + k + 2k - 2 = 0,$

$k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0 \Rightarrow$

$k(k-2)^2 + (k-2) = 0 \Rightarrow$

$(k-2)(k^2 - 2k + 1) = 0,$

$(k-2)(k-1)^2 = 0 \Rightarrow$ *корені характеристичного рівняння,*

$k_2 = 2; \quad k_2 = k_3 = 1 \Rightarrow$ *частинні розв'язки,*

$y_1 = x^2, y_2 = x, y_3 = x \ln x$

становлять фундаментальну систему (функції y_1, y_2, y_3 лінійно незалежні). Цей факт можна перевірити за допомогою визначника Вронського (умова лінійної незалежності: $W(x_0) \neq 0 \ \forall x_0$)

$$W(1) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}_{x=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0.$$

Загальний розв'язок рівняння такий:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 x \ln x.$$

§ 17 Неоднорідні рівняння Ейлера

17.1 Нехай

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x) \qquad (41)$$

неоднорідне рівняння Ейлера.

За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, загальний розв'язок рівняння (41) є сумою загального розв'язку $y_0=C_1y_1+C_2y_2$ відповідного однорідного рівняння

$$x^2y''+pxy'+qy=0 \qquad (42)$$

і деякого розв'язку "z" неоднорідного рівняння (41)

$$y=\underbrace{C_1y_1+C_2y_2}_{y_0}+z.$$

Якщо права частина (41) має вигляд $f(x)=\sum x^{\alpha}P(\ln x)$, причому "$\alpha$" не збігається з жодним коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок (41) можна знайти у вигляді

$$z(x)=\sum x^{\alpha}Q(\ln x),$$

де $Q(\ln x)$ многочлен того ж степеня, що і $P(\ln x)$, але з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти $Q(\ln x)$ визначаються шляхом підстановки $z(x)$ у диференціальне рівняння і утотожнювання обох частин рівняння.

<u>ЗАУВАЖЕННЯ:</u> якщо "α" збігається з одним коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$z(x)=\sum x^{\alpha}Q(\ln x)\ln x,$$

якщо "α" збігається з двома рівними коренями, тоді

$$z(x)=\sum x^{\alpha}Q(\ln x)\ln^2 x.$$

Аналогічне зауваження справедливе для неоднорідного рівняння Ейлера будь-якого порядку.

ПРИКЛАД

Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x^2y''-2y=x^3 \\ y|_{x=1}=0 \\ y'|_{x=1}=1. \end{cases}$$

<u>Розв'язання:</u> визначимо спочатку загальний розв'язок неоднорідного рівняння Ейлера

$$x^2y''-2y=x^3, \qquad \alpha=3,$$

$$y=y_0+z,$$

$$y_0:\quad x^2y''-2y=0 \Rightarrow k(k-1)-2=0 \Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow$$

$$k_1=2, k=-1 \Rightarrow y_1=x^2;\ y_2=\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y_0=C_1x^2+C_2\frac{1}{x}.$$

$$z:\quad \begin{array}{r|l} -2 & z=Ax^3 \\ 0 & z'=3Ax^2 \\ x^2 & z''=6Ax, \end{array}$$

$$x^2z''-2z=x^2\bullet 6Ax-2Ax^3\equiv x^3 \Rightarrow 4Ax^3\equiv x^3 \Rightarrow 4A=1, \Rightarrow A=\frac{1}{4}.$$

Таким чином,

$$z=\frac{1}{4}x^3$$

і загальний розв'язок рівняння такий:

$$y=C_1x^2+C_2\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x^3.$$

Для розв'язання задачі Коші визначимо конкретні значення сталих C_1, C_2, використовуючи початкові умови:

$$y'=2C_1x-C_2\frac{1}{x^2}+\frac{3}{4}x^2,$$

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2+\frac{1}{4} \\ 1=2C_1-C_2+\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 1=3C_1+1 \Rightarrow C_1=0, C_2=-\frac{1}{4}.$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y^* = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x^3.$$

17.2 При довільній правій частині неоднорідного рівняння Ейлера для отримання частинного розв'язку неоднорідного рівняння можна застосувати метод варіації довільних сталих.

ПРИКЛАД

$$x^2y''-2xy'+2y = xe^x.$$

<u>Розв'язання:</u> $y = y_0 + z$,

y_0 : $x^2y''-2xy'+2y=0 \Rightarrow$

$$k(k-1)-2k+2=0 \Rightarrow k^2-3k+2=0 \Rightarrow$$

$$k_1=1; k_2=2 \Rightarrow y_1=x; y_2=x^2 \Rightarrow y=C_1x+C_2x^2$$

z : $z = C_1(x)\cdot x + C_2(x)x^2$.

Складаємо систему рівнянь Лагранжа відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_2'(x)$

$$(*)\quad \begin{cases} C_1'(x)\cdot x + C_2'(x)x^2 = 0 \\ C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot 2x = xe^x \end{cases}\Bigg| -x,$$

$$-x^2C_2'(x) = -x^2e^x \Rightarrow C_2'(x) = e^x.$$

Із першого рівняння (*) $C_1'(x) = -xC_2'(x) = -xe^x$.

Шляхом інтегрування визначаємо $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_2(x) = e^x,$$

$$C_1(x) = -\int xe^x dx = \begin{vmatrix} U=x, & dU=dx \\ dV=e^x dx; & V=e^x \end{vmatrix} = -\left(xe^x - \int e^x dx\right) = -xe^x + e^x = e^x(1-x).$$

Таким чином,

$$z(x) = e^x(1-x)\cdot x + e^x\cdot x^2$$

або

$$z(x) = xe^x,$$

але тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = y_0 + z = C_1x + C_2x^2 + xe^x.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1966.

І.В.Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Ковалішина І.В.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 19.03.01 р.

Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,75. Обл.-вид.арк. 4,0.

Замовлення № 2. Тираж 300 Ціна 2.68грн.

Видавництво ХарДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.

Друкарня ХарДАЗТу,

61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7