УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

І.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 5

Ряди

Конспект лекцій

ХАРКІВ 2003

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 13 травня 2002 р., протокол №8.

Рецензент
проф. А.А. Янцевич (ХНУ)

Зміст

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Деякі відомості з теорії послідовностей

Означення 1

Послідовністю називають нескінченну перенумеровану множину чисел і позначають її так:

$$a_1,\ a_2, \dots, a_n, \dots \qquad\qquad \{a_n\}$$

Зауваження

Послідовність вважається відомою, якщо відомий закон, за яким визначається залежність члена послідовності від його номера, тобто відома структура загального члена:

$$a_n = f(n).$$

Таким чином, послідовність можна розглядати як функцію цілочисельного аргументу $n\ (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Приклади:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots ;$$

$$\frac{1}{1+1^2}, \frac{2}{1+2^2}, \frac{3}{1+3^2}, \dots, \frac{n}{1+n^2}, \dots .$$

Означення 2

Число *A* називається границею послідовності $\{a_n\}$, якщо для будь–якого додатного малого $\varepsilon > 0$ існує номер N, починаючи з якого усі наступні члени послідовності задовольняють нерівності:

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad n \ge N.$$

Факт існування границі позначається так:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$

Це означення можна коротко записати так:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall n \ge N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Арифметичні дії з послідовностями

Означення

Якщо $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ дві послідовності, тоді послідовності

$$\{a_n + b_n\},$$
$$\{a_n - b_n\},$$
$$\{a_n \cdot b_n\},$$
$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},$$

називають відповідно сумою, різницею, добутком і часткою двох послідовностей.

Має місце теорема:

Теорема:

якщо існують границі двох послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

тоді існують границі суми, різниці, добутку і частки цих послідовностей і виконуються рівності:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

У випадку частки послідовностей додатковою умовою є така частка $B \neq 0$.

Означення

Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається нескінченно малою, якщо:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

або ж, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n \geq N \ \ |\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема про зв’язок між послідовностями, які мають границю, і нескінченно малими

Для того, щоб послідовність $\{a_n\}$ мала своєю границею число *А*, необхідно і достатньо щоб різниця $\alpha_n = a_n - A$ була нескінченно малою послідовністю.

Має місце і таке твердження:

якщо послідовність $\{a_n\}$ має границю, тоді має ту ж саму границю будь–яка нескінченна підпослідовність:

$$\{a_{n_k}\}.$$

І навпаки, якщо будь–яка підпослідовність $\{a_{n_k}\}$ послідовності $\{a_n\}$ має однакову границю *A*, тоді і послідовність $\{a_n\}$ також має границю, яка дорівнює *A*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

Зауваження

Якщо виявляється, що хоча б дві підпослідовності мають різні границі, тоді послідовність у цілому границі не має.

Проте і у цьому випадку серед підпослідовностей, які мають границю, можна відшукати таку, для якої границя буде мати найбільше значення серед усіх границь, і таку, для якої границя буде мати найменше значення серед усіх границь.

Перша з цих границь називається верхньою границею, друга – нижньою границею і позначаються вони так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Монотонні та обмежені послідовності

Означення

Послідовності, для яких виконуються нерівності:

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n,$$
$$a_n \le a_{n+1} \qquad \forall n,$$
$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n,$$
$$a_n \ge a_{n+1} \qquad \forall n,$$

відповідно називаються:

монотонно зростаючими,
монотонно неспадними,
монотонно спадними,
монотонно незростаючими,

або ж монотонними послідовностями.

Означення

Послідовність $\{a_n\}$ називають обмеженою, якщо існує додатне $M > 0$ таке, що для будь–якого члена послідовності виконується нерівність:

$$|a_n| < M \qquad \forall_n .$$

Теорема:

Якщо послідовність $\{a_n\}$ має скінчену границю *A*, тоді ця послідовність $\{a_n\}$ буде обмеженою.

Але обернене твердження не буде вірним, як це випливає з такого прикладу:

$$1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{2}{3},\ 0,\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ 0,\ \frac{n}{n+1},\ 0,\ \cdots.$$

Ця послідовність буде обмеженою, але границі не має.

Означення

Послідовність $\{a_n\}$ називають нескінченно великою, якщо для будь–якого великого додатного $M > 0$ існує фіксований номер N такий, що для $n \geq N$ буде виконуватися нерівність:

$$|a_n| > M \qquad n \geq N .$$

Зауваження

Нескінченно велика послідовність є необмеженою, але не усяка необмежена послідовність виявляється нескінченно великою.

Приклад:

$$1, 0, 2, 0, 3, \ldots, 0, n, 0, n+1, \ldots \ .$$

Для існування границі послідовності потрібно щоб виконувались дві умови, а саме має місце теорема т*еорема Вейєрштрасса*

Будь–яка обмежена і монотонна послідовність має границю.

Ще одне твердження відносно монотонних послідовностей має вигляд:

Теорема

Якщо монотонно неспадна послідовність $\{a_n\}$ має своєю границею число *A*, тоді для будь–якого члена послідовності $\{a_n\}$ виконується нерівність:

$$a_n \leq A \qquad \forall_n .$$

1.2 Основні поняття теорії числових рядів

Означення

Числовим рядом називають послідовність чисел, які з’єднані між собою знаками “+”.
Позначається ряд так:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \ .$$

Очевидно, що числовий ряд є узагальненням поняття суми, коли кількість доданків стає нескінченною.

Означення

За даним рядом побудуємо нову послідовність:

$$\begin{aligned}
&S_1 = U_1, \\
&S_2 = U_1 + U_2, \\
&S_3 = U_1 + U_2 + U_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

яку називають послідовністю часткових сум.

Означення

Якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ даного ряду має скінчену границю S, тоді ряд:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

називають збіжним, а число S називають сумою ряду:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

і позначають це так:

$$S = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \ .$$

Якщо ж послідовність часткових сум $\{S_n\}$ не має границі, або ж її границя дорівнює нескінченності, тоді ряд називають розбіжним.
У цьому випадку вираз:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

не має ніякого числового змісту.

Розглянемо таку властивість рядів.

Означення

$$\underbrace{U_1 + U_2 + \cdots + U_m}_{} + \underbrace{U_{m+1} + U_{m+2} + \cdots + U_{m+k} + \cdots}_{} \ . \qquad \text{(I)}$$

Залишком ряду називають ряд, який утворюється із ряду (1), якщо відкинути перші m його членів, тобто ряд:

$$U_{m+1} + U_{m+2} + \cdots + U_{m+k} + \cdots \ . \qquad \text{(II)}$$

Має місце наступна властивість рядів:
ряд (I) і його залишок (II) збігаються і розбігаються одночасно, тобто відкидання скінченого числа (m) перших його членів не впливає на поведінку ряду в розумінні його збіжності або розбіжності.

Приклад

Розглянемо нескінчену геометричну прогресію:

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots ,$$

де q – знаменник прогресії
і побудуємо з неї ряд:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots,$$

який називають геометричним рядом.

Теорема

Геометричний ряд:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

є збіжним рядом тоді і тільки тоді, коли знаменник прогресії:

$$|q| < 1.$$

Доведення:

Розглянемо послідовність часткових сум геометричного ряду:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^{n-1} \cdot q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Розглянемо декілька випадків для знаменника q і обчислимо границю S_n:

1) $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q},$$

тобто у цьому випадку геометричний ряд збігається і має суму $\dfrac{1}{1-q}$:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots;$$

2) $|q| > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \infty,$$

і геометричний ряд розбігається за означенням;

3) $|q| = 1$:

а) $|q| = 1$. У цьому випадку геометричний ряд має вигляд:

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

і його часткова сума дорівнює:

$$S_n = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty,$$

тобто геометричний ряд розбігається;

б) $|q| = -1$. У цьому випадку ряд має вигляд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots,$$

а послідовність часткових сум буде такою:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Але ж послідовність:

1, 0, 1, 0, …

границі не має і тому за означенням геометричний ряд і у цьому випадку розбігається.

Таким чином, теорема доведена повністю.

Необхідна умова збіжності ряду

Теорема

Якщо ряд:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

збігається, тоді загальний член ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n \to 0} U_n = 0.$$

Доведення

За умовою теореми існують границі послідовностей часткових сум:

$$\lim_{n \to 0} S_n = S,$$

$$\lim_{n \to 0} S_{n-1} = S.$$

Але тоді:

$$\lim_{n \to 0} \left(S_n - S_{n-1} \right) = S - S = 0,$$

а:

$$S_n - S_{n-1} = \left(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} + U_n \right) - \left(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} \right) = U_n.$$

Таким чином, дійсно:

$$\lim_{n \to 0} U_n = 0.$$

Зауваження

Доведена теорема є тільки необхідною умовою збіжності ряду, але не є достатньою умовою збіжності.

Для того, щоб підтвердити це твердження розглянемо такий приклад:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots.$$

Загальний член цього ряду прямує до нуля, якщо $n \to \infty$:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

тобто для цього ряду виконується необхідна умова збіжності ряду.

Але ми доведемо, що цей ряд є розбіжним. Для цього розглянемо послідовність його часткових сум:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Таким чином:

$$S_n > \sqrt{n},$$

і S_n прямує до нескінченності, якщо $n \to \infty$:

$$\lim S_n = +\infty,$$

тобто ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

розбігається.

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду):

> Якщо загальний член ряду U_n не прямує до нуля при умові $n \to \infty$, тоді ряд розбігається.

Приклад:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \cdots.$$

Розглянемо його загальний член прямує до e:

$$U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

тобто для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності і тому цей ряд розбігається.

1.3 Числові ряди з невід’ємними членами

У цьому параграфі будемо розглядати тільки числові ряди з невід’ємними членами, тобто:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \qquad \left(U_n \ge 0,\ \forall n\right).$$

Теорема про порівняння двох рядів

> Якщо для двох рядів з невід’ємними членами:
>
> $$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \qquad \left(U_n \ge 0\right) \tag{1}$$
>
> і:
>
> $$V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots \qquad \left(V_n \ge 0\right) \tag{2},$$
>
> відомо, що члени ряду (2) більші, або дорівнюють, відповідним членам ряду (1), тобто:
>
> $$U_n \le V_n \qquad \forall n, \tag{3}$$

і якщо ряд (2) збігається, тоді збігається і ряд (1). Якщо ж ряд (1) розбігається, тоді розбігається і ряд (2).

Таким чином, якщо збігається ряд з більшими членами, тоді збігається і ряд з меншими членами. Якщо розбігається ряд з меншими членами, тоді розбігається ряд з більшими членами.

Доведемо цю теорему.

1) Позначимо через:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n,$$
$$\sigma_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

часткові суми цих рядів.

Ці часткові суми будуть *монотонно неспадними послідовностями*, тому що члени цих рядів невід'ємні:

$$S_n \le S_{n+1},$$
$$\sigma_n \le \sigma_{n+1}.$$

Крім того, за умовою теореми, ряд (2) збігається, тобто існує скінчена границя:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma .$$

Більш того, виконується нерівність:

$$\underline{\sigma_n \le \sigma \qquad \forall n},$$

тому що σ_n – монотонно неспадна.

Далі відомо, що члени ряду (2) більші за члени ряду (1):

$$U_n \le V_n \qquad \forall n,$$

а тому справедлива нерівність:

$$\underline{S_n \le \sigma_n \qquad \forall n}.$$

З двох підкреслених нерівностей випливає, що:

$$S_n \le \sigma,$$

тобто часткова сума S_n для ряду (1) монотонно неспадна і обмежена, а тоді, за теоремою Вейєрштрасса, існує скінченна границя:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Остання рівність за ознакою означає, що ряд (1) збігається.

2) Нехай відомо тепер, що ряд (1) розбігається. Припустимо, що ряд (2) збігається. Тоді за першою частиною теореми буде збігатися і ряд (1), що суперечить тому, що ряд (1) розбігається.

Таким чином, наше припущення не є вірним і залишається вважати, що ряд (2) теж розбігається.

Приклад:

Дослідити збіжність або розбіжність ряду:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2^2}+\cdots+\frac{1}{1+2^n}+\cdots. \qquad (4)$$

Порівняємо цей ряд з геометричним рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

який збігається тому, що знаменник:

$$q=\frac{1}{2}<1.$$

Крім того виконуються нерівності:

$$\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n} \qquad \forall n.$$

Тому за теоремою про порівняння рядів ряд (4) збігається.

Зауваження.

Теорема про порівняння рядів залишається вірною і у тому випадку, коли мажорація рядів I і II починається не з першого номера, а деякого номера *N*, тобто:

$$U_{N+1}\le V_{N+1},$$
$$U_{N+2}\le V_{N+2},$$
$$\sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim$$
$$U_{N+K}\le V_{N+K}$$
$$\sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim$$

Це виявляється наслідком відповідної властивості рядів і їх залишків.

Гранична ознака порівняння рядів

Теорема

Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ (I)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ (2)}$$

два ряда з додатніми членами і якщо існує границя відношення загальних членів:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = K, \qquad \left(K \neq 0, \infty\right),$$

яка відрізняється від нуля і від нескінченності, тоді ряди (1) і (2) збігаються і розбігаються одночасно.

Приклад:

Дослідити збіжність або розбіжність ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}+1}, \qquad U_n = \frac{1}{3\sqrt{n}+1}. \tag{5}$$

Порівняємо наш ряд із рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}, \qquad V_n = \frac{1}{3\sqrt{n}},$$

про який нам відомо, що він розбігається.

Але у прямому сенсі теорема порівняння не відповідає на наше питання, тому що:

$$U_n < V_n; \qquad \forall_n .$$

Використаємо граничну ознаку порівняння рядів. Для цього обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{3\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{3+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Отже $K = 1 \neq 0, \infty$ і тому ряд (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}+1}$ розбігається одночасно з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}$.

Зауваження

Теореми про порівняння рядів дуже прості у застосуванні, але сфера їх можливостей обмежена, тому що вони припускають порівняння даного ряду з відомим рядом.

Ознака Даламбера

Якщо ряд з додатніми членами:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots \qquad (U_n > 0, \forall_n)$$

такий, що існує скінченна границя відношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l,$$

тоді:

1) якщо $l < 1$ – ряд збігається;

2) якщо $l > 1$ – ряд розбігається;

3) якщо $l = 1$ – ситуація невизначена, тому що у цьому випадку ряд може збігатися, або розбігатися.

Приклад:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

Для цього ряду виконується необхідна умова збіжності, тому що:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

До цього ряду застосувати ознаку порівняння ми не можемо, тому що немає відомого ряду для порівняння.

Розглянемо ознаку Даламбера, для чого обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд, який ми розглядаємо, збігається.

Радикальна ознака Коші

Якщо ряд з додатніми членами:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \qquad (U_n > 0)$$

такий, що існує скінченна границя:

$$\lim \sqrt[n]{U_n} = l,$$

тоді:

1) якщо $l < 1$ – ряд збігається;
2) якщо $l > 1$ – ряд розбігається;
3) якщо $l = 1$, тоді радикальна ознака Коші відповіді на запитання про збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ не дає.

Приклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n .$$

Для цього ряду загальний член:

$$U_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \right)^n \underset{n \to \infty}{\to} 0 .$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші, тобто обчислимо:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Таким чином, ряд збігається.

Інтегральна ознака Коші

Нехай ряд з додатніми членами:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \qquad (U_n > 0 \quad \forall_n) \tag{6}$$

такий, що:

1) його члени, монотонно спадаючи, прямують до нуля:
$$U_1 \geq U_2 \geq \cdots \geq U_n \geq U_{n+1} \geq \cdots \to 0 ;$$

2) існує функція $\varphi(x)$ така, що у цілих точках її значення дорівнюють відповідним членам ряду:

$$\varphi(1)=U_1,\quad \varphi(2)=U_2,\ \dots,\quad \varphi(n)=U_n,\dots$$

і монотонно спадна функція $\varphi(x)$ прямує до нуля при умові, що $x\to+\infty$.

$$\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0.$$

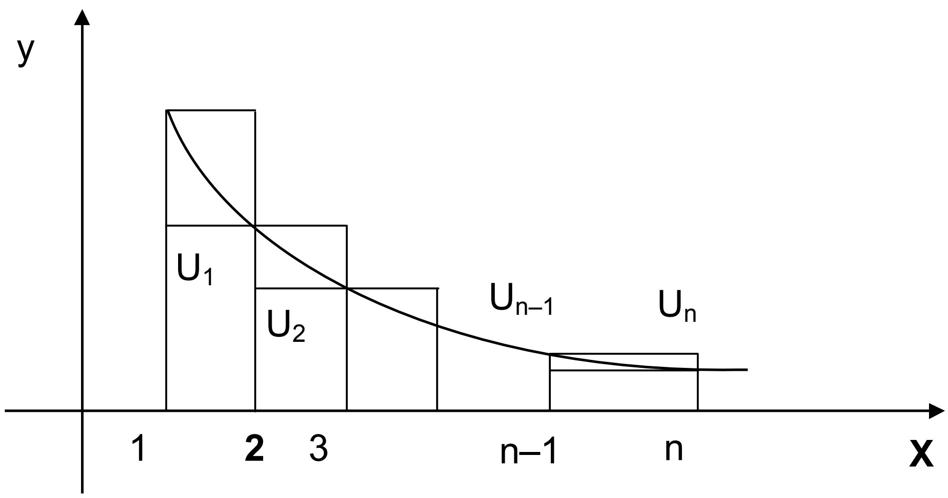
Тоді ряд (6) і невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$$

збігаються і розбігаються одночасно.

Доведення:

Розглянемо графік функції $\varphi(x)$:



Очевидно, справедлива подвійна нерівність:

$$U_2+U_3+\dots+U_n<\int_1^n\varphi(x)dx<U_1+U_2+\dots+U_{n-1},$$

або ж:

$$S_n-U_1<\int_1^n\varphi(x)dx<S_{n-1}. \tag{7}$$

1 Нехай спочатку відомо, що збігається ряд (6). Тоді за означенням існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ і, за умовою монотонного зростання S_{n-1}, виконується нерівність

$$S_{n-1} \le S .$$

Але тоді інтеграл

$$\int_1^n \varphi(x)\,dx < S_{n-1} \le S$$

є обмеженою і монотонно зростаючою послідовністю, тобто, за теоремою Вейєрштрасса, ця послідовність має границю, а це означає, що невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx \text{ – збігається.}$$

Нехай тепер збігається невласний інтеграл, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \varphi(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx .$$

Очевидно, має місце нерівність

$$\int_1^n \varphi(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx ,$$

але тоді послідовність часткових сум ряду (6)

$$S_n - U_1 < \int_1^n \varphi(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

буде обмеженою і монотонною, а тому, за теоремою Вейєрштрасса існує границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

а це за означенням означає, що ряд (6) збігається.

2 За допомогою нерівності (7) легко довести і друге твердження теореми.

Ознака Раабе

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n \ (U_n > 0)$ такий, що існує границя $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) = l$. Тоді, якщо $l > 1$ – ряд збігається, $l \le 1$ – ряд розбігається.

Приклад:

Розглянемо ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

1 Якщо $\alpha < 0 \;\Rightarrow\; -\alpha > 0 \;\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, члени цього ряду зростають, коли *n* прямує до нескінченності, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \ne 0,$$

тоді за достатньою ознакою розбіжності, ряд Діріхле розбігається.

2 Нехай $\forall \alpha > 0$. Тоді $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ і необхідна умова збіжності ряду Діріхле виконується застосуємо ознаку Даламбера для дослідження збіжності або розбіжності ряду Діріхле:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = 1.$$

Таким чином, ознака Даламбера неспроможна відповісти на запитання про збіжність або розбіжність ряду Діріхле.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Побудуємо функцію $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Очевидно ряд Діріхле і $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ задовольняє всім умовам інтегральної ознаки Коші.

Розглянемо інтеграл:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ – інтеграл Діріхле,}$$

про який відомо, що він збігається лише при $d > 1$.

Таким чином, ряд Діріхле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \textit{розбігається, якщо } \alpha < 0 \\ \textit{розбігається, якщо } 0 < \alpha < 1 \\ \textit{розбігається, якщо } \alpha = 1 \\ \textit{збігається, якщо } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Висновок. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1.$$

Означення

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – називається гармонійним і цей ряд розбігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – називається узагальненим гармонійним.

1.4 Знакозмінні та знакопереміжні ряди. Ознака Лейбніца

Означення

Якщо у ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ члени усі дійсні числа і серед них зустрічаються як додатні так і від'ємні числа, тоді ряд називають **знакозмінним**.

Якщо у ряду будь–які два сусідні члени мають різні знаки, тоді ряд називається **знакопереміжним**.

Такий ряд можна записати у вигляді:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{n-1} U_n + \cdots \qquad (\forall n : U_n > 0).$$

Теорема Лейбніца

Якщо члени знакопереміжного ряду:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{n-1} U_n + \cdots$$

монотонно спадаючі прямують до нуля, тоді такий ряд збігається.

Доведення

Розглянемо спочатку підпослідовність його часткових сум з парними номерами:

$$S_2,\ S_4,\ \ldots,\ S_{2n},\ \ldots$$

$$S_{2n} = \left(\underset{0}{U_1 - U_2}\right) + \left(\underset{0}{U_3 - U_4}\right) + \cdots + \left(\underset{0}{U_{2n-1} - U_{2n}}\right), \tag{8}$$

або

$$S_{2n} = U_1 - \left(\underset{0}{U_2 - U_3}\right) - \cdots - \left(\underset{0}{U_{2n-2} - U_{2n-1}}\right) - \underset{0}{U_{2n}}\,. \tag{9}$$

Із співвідношень (8) і (9) випливає, що S_{2n} монотонно зростає і обмежена, тобто за теоремою Вейєрштрасса має границю

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S\,.$$

Розглянемо тепер підпослідовність часткових сум з непарними номерами

$$S_1,\ S_3,\ S_5,\ \ldots,\ S_{2n-1},\ \ldots.$$

Очевидно загальний член S_{2n-1} має вигляд

$$S_{2n-1} = U_1 - U_2 + \cdots + U_{2n-1} - U_{2n} + U_{2n} = S_{2n} + U_{2n}\,,$$

але тоді:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} + U_{2n}\right) = S + 0 = S\,.$$

Очевидно тепер, що границя послідовності часткових сум:
$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ існує і дорівнює S

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\,,$$

тобто знакопереміжний ряд $\sum (-1)^{n-1} u_n$ збігається.

Наслідок 1. Сума знакопереміжного ряду, який задовольняє умовам теореми Лейбніца, менша за його перший член:

$$S < U_1\,,$$

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n-1} U_n + \ldots (U_n > 0, \forall_n)\,,$$

$$U_1 \ge U_2 \ge U_3 \ge \ldots \ge U_n \ge \ldots \to 0\,,$$

$$S < U_1.$$

Дійсно, розглянемо підпослідовність часткових сум з непарними номерами:

$$S_{2n-1} = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots U_{2n-1} =$$

$$= U_1 (U_2 - U_3) - \ldots - (U_{2n-2} - U_{2n-1}) < U_1,$$

тобто $S \le S_{2n-1}$ обмежена і монотонно спадна і має границю S, тобто

$$S \le S_{2n-1} < U_{1},$$

звідки

$$S < U_{1}.$$

Наслідок 2. Для знакопереміжного ряду Лейбніца справедлива нерівність:

$$\left|S - S_n\right| < U_{n+1}.$$

Дійсно:

$$|S - S_n| = \left|(-1)^n U_{n+1} + (-1)^{n+1} U_{n+2} + \cdots\right| = \left|(-1)^n\right| \left|U_{n+1} - U_{n+2} + \cdots\right| < U_{n+1}.$$

Приклад

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$ збігається за ознакою Лейбніца.

1.5 Абсолютна та умовна збіжність рядів

Розглянемо числовий ряд (з дійсними або комплексними членами)

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ... \quad (10)$$

Побудуємо для ряду (1) новий ряд із абсолютних величин його членів (модулей)

$$\left|U_1\right| + \left|U_2\right| + ... + \left|U_n\right| + ... \quad (11)$$

Ряд (11) буде рядом з додатними членами.

Означення:

Якщо ряд (11) збігається, тоді говорять, що ряд (10) **збігається абсолютно**.

Якщо ряд (11) розбігається, а ряд (10) при цьому збігається тоді говорять, що ряд (10) **збігається умовно або відносно**.

Мають місце такі твердження:

Теорема 1. Якщо ряд (10) збігається абсолютно, тоді він збігається і у звичайному розуміння цього слова, тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|U_n\right| \textit{ збігається } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n \textit{ збігається}$$

Обернене твердження буде невірним.

Наприклад, ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...,$$

за ознакою Лейбніца збігається, а ряд побудований із абсолютних величин:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

є гармонічним рядом, про який відомо, що він є розбіжним.

Теорема 2. Якщо ряд збігається абсолютно, тоді в ньому можна міняти місцями члени будь–яким способом. При цьому збіжність ряду не порушиться, а сума – не зміниться.

Зауваження. В рядах, які збігаються лише умовно, від перестановки його членів може змінитися його сума і навіть може порушитися його збіжність.
Приклад. Ряд:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

збігається за ознакою Лейбніца і його сумою буде число S.

Перестивимо його елементи таким чином:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+...=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-...=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...\right)=\frac{1}{2}S.$$

1.6 Узагальнені ознаки Даламбера і Коші

Ознака Даламбера. Нехай ряд з довільними членами (дійсними або комплексними)

$$U_1+U_2+...+U_n+... \tag{12}$$

такий, що існує границя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=l.$$

Тоді, якщо:
1) $l<1$ ряд (12) збігається (навіть абсолютно);

2) $l > 1$ ряд (12) розбігається;
3) $l = 1$ сумнівний випадок.

Ознака Коші. Нехай ряд з довільними членами:

$$U_1 + U_2 + ... + U_n + ... \qquad (13)$$

такий, що існує границя:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = l,$$

тоді, якщо

1) $l < 1$ ряд (13) збігається (навіть абсолютно);
2) $l > 1$ ряд (13) розбігається;
3) $l = 1$ сумнівний випадок.

1.7 Деякі ознаки, які дозволяють досліджувати умовно збіжні ряди, які не задовольняють умовам теореми Лейбніца

Ознака Діріхле

Ряд:

$$\lim_{k=1} a_k b_k$$

збігається, якщо виконуються наступні дві умови:

1) усі часткові суми ряду $\lim_{k=1} a_k$ – обмежені, тобто існує додатне $M > 0$ таке, що виконується нерівність:

$$\left| \lim_{k=1}^{n} a_k \right| < M \qquad (\forall n \geq 1);$$

2) послідовність b_k монотонно прямує до нуля $(b_k \to 0 \;\; при \;\; k \to \infty)$.

Приклад 1

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$ збігається при $\forall x \neq 2\pi m \;\; (m \in z)$.

Застосуємо ознаку Діріхле позначаючи:

$$a_k = e^{ikx}, \; b_k = \frac{1}{k}.$$

Перевіряємо умови ознаки Діріхле:

1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\begin{array}{l} e^{ix} = q \\ e^{ikx} = q^k \end{array}\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} q^k\right| = \left|\dfrac{q-q^{n+1}}{1-q}\right| = \dfrac{\left|q-q^{n+1}\right|}{|1-q|} \le \dfrac{2}{|1-q|} =$

$$= \frac{2}{\left|1-e^{ix}\right|} = \frac{2}{\left|1-(\cos x + i\sin x)\right|} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(1-\cos x)}} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|};$$

тобто $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|$ – обмежені при $x \ne 2\pi m$;

2) $b_k = \dfrac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{монот.}} 0$.

Таким чином, за ознакою Діріхле, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{ikx}}{k}$ збігається при умові $x \ne 2\pi m$.

Розглянемо тепер випадок:

$$x = 2\pi m,$$

$$e^{ixk} = e^{ik2\pi m} = \cos\, \underline{2\pi} km + i\, \sin\, \underline{2\pi} km = 1,$$

тобто ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{ikx}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ – гармонійний і він розбігається.

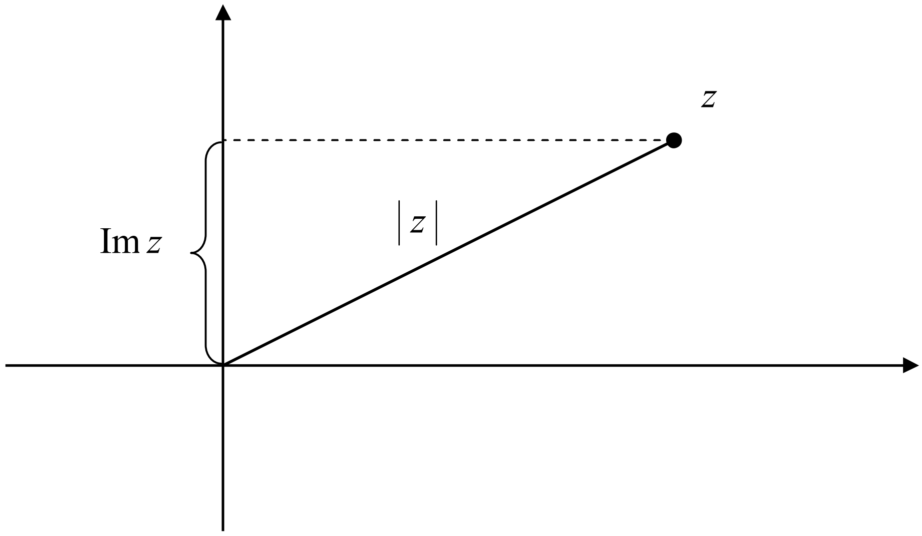
Приклад 2.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\, k\,x}{\sqrt{k}}$ збігається для будь якого $\underline{x}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\, kx \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\, e^{ikx}\right| =$

$= \left|\mathrm{Im} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \le \left|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}\right|$ – обмежена при $x \ne 2\pi m$.



2) $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \xrightarrow[k\to\infty]{м} 0$.

Таким чином, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ за ознакою Діріхле збігається при $x \neq 2\pi m$.

При $x = 2\pi m \quad \sin kx = \sin 2\pi km = 0$ і ряд теж збігається.

Приклад 3.

Ознака Лейбніца випливає із ознаки Діріхле.

Дійсно, ряд Лейбніца $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot U_k$ такий, що:

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, але тоді $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\right| < 2$;

2) $U_k \quad \xrightarrow[k\to\infty]{м} 0$,

тобто задовольняє умовам ознаки Діріхле і тому збігається.

Ознака Абеля

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ збігається, якщо:

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – збігається;

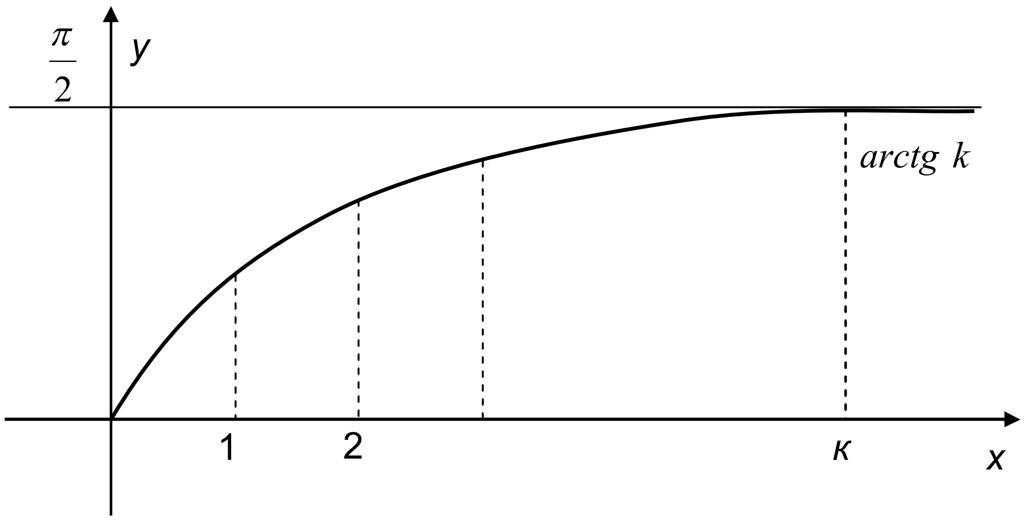
2) послідовність $\{b_k\}$ – монотонна і обмежена.

Приклад

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}} \cdot arctg\ k$ збігається $\forall_x$.

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ – збігається при $\forall_x$;

2) $b = arctg\ k$ – монотонна і обмежена.



2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1 Основні поняття

Означення

Якщо

$$U_1(z),\ U_2(z),\ \dots,\ U_n(z),\ \dots$$

послідовність функцій із загальною областю визначення $z \in D$, тоді функціональним рядом називають суму:

$$U_1(z) + U_2(z) + \dots + U_n(z) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z). \qquad (14)$$

Розглянемо довільне фіксоване z_0 із області визначення функцій $U_k(z)$ $(z_0 \in D)$ і розглянемо числовий ряд:

$$U_1(z_0) + U_2(z_0) + \dots + U_n(z_0) + \dots \qquad (15)$$

Якщо числовий ряд (15) збігається, тоді кажуть, що функціональний ряд (14) збігається у точці $z = z_0$.

Означення

Сукупність $z_0 \in D_0$ тих z, для яких функціональний ряд (12) збігається називають його **областю збіжності**.

У цьому випадку функція

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z) \quad z \in D_0$$

називається **сумою ряду**,

$R_n(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(z)$ – його залишком.

Наведемо приклади функціональних рядів.

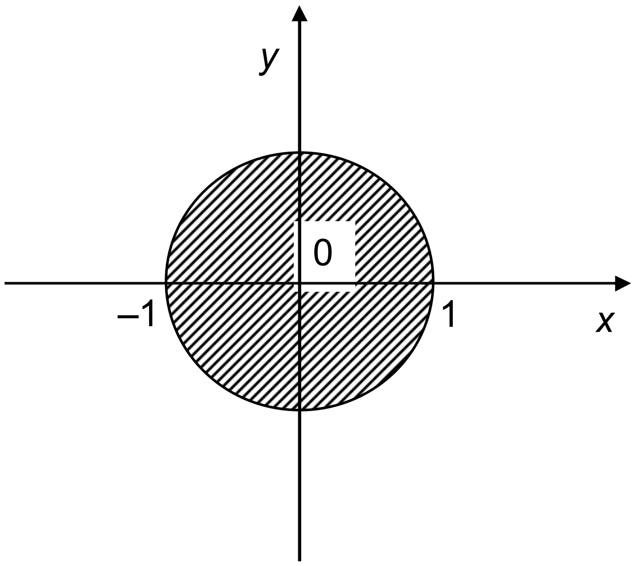
Приклад:

$\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ – геометричний ряд із знаменником $q = z$, тобто ряд, який збігається при $|z| < 1$ і розбігається при $|z| \geq 1$.

Таким чином, область збіжності – інтервал радіуса 1 із центром у початку координат:

$$z = x \in (-1, 1),$$

(якщо z – комплексне число, тоді область збіжності геометричного ряду є круг з центром на початку координат радіуса 1).



Приклад:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (16)$$

Для визначення області збіжності ряду (16) застосуємо узагальнену ознаку Даламбера:

$$U_n = \frac{z^n}{n!}, \quad U_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|z^n|}{(n+1)!}}{\dfrac{|z|^n}{n!}} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |z| \cdot 0 = 0 < 1$$

для будь–якого z. Таким чином, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ збігається на числовій осі $x_i\left(-\infty < x = z < +\infty\right)$ (або ж в усій комплексній площині, якщо $z = x + i\,y$) і його сумою є функція:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$\left(e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \right).$$

Приклад:

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2} + \cdots \qquad (17)$$

Якщо застосувати до визначення області збіжності ряду (17) ознаку порівняння рядів і порівняти ряд:

$$\frac{|\sin x|}{1^2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \cdots + \frac{|\sin nx|}{n^2} + \cdots$$

із рядом Діріхле, який збігається за умовою $\alpha = 2 > 1$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

Тоді:

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad \forall_n,$$

за ознакою порівняння рядів ряд (15) збігається при будь–якому $x \in (-\infty, +\infty)$.

2.2 Приклади

Розглянемо деякі приклади, з яких випливає, що у загальному випадку для функціональних рядів не зберігаються такі властивості скінченних сум, як:

сума неперервних функцій є неперервною функцією; інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів; похідна від суми дорівнює сумі похідних.

Приклад

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k - x^{k+1}\right) \qquad \left(0 \le x \le 1\right).$$

Побудуємо часткову суму:

$$\begin{aligned} S_n(x) = {} & \left(x^0 - x^1\right) + \\ & + \left(x^1 - x^2\right) + \\ & + \left(x^2 - x^3\right) + \cdots + \\ & + \left(x^n - x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд складений із неперервних на $\left[0, 1\right]$ функцій, має своєю сумою розривну у точці $x = 1$ функцію $S\left(x\right)$.

Приклад:

Ряд: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k^2 x}{k^2}$ буде збіжним при будь–якому x за теоремою порівняння $\left(\left|\frac{\sin k^2 x}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}\right)$; проте ряд побудований із похідних:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin k^2 x}{k^2}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\cos k^2 x,$$

у точці $x = 0$ має вигляд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$, тобто розбігається.

Щоб зберегти для функціональних рядів перелічені вище властивості скінченних сум необхідно розглянути деякі додаткові умови.

2.3 Правильна збіжність функціонального ряду та властивості рядів, які правильно збігаються

Означення

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ називається правильно збіжним на сегменті $[a, b]$, якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ із додатніми членами $(\forall_n, U_n > 0)$ такий, що для будь–якого $x \in [a, b]$ має місце нерівність:

$$|U_n(x)| \le V_n \qquad \forall n.$$

Очевидно, правильно збіжний функціональній ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ буде абсолютно збіжним на сегменті [a, b] і виконується рівність

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

Властивості правильно збіжних рядів

1 Сума правильно збіжного функціонального ряду виявляється функцією неправильного на сегменті [a, b], якщо члени цього ряду є функціями неперервними на [a, b].

2 Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ – збіжний функціональний ряд, де $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ – його сума, і нехай ряд, побудований із похідних $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{'}(x)$, правильно збігається у замкненій області $\overline{D}$ (наприклад, на сегменті [a, b]).

Тоді ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

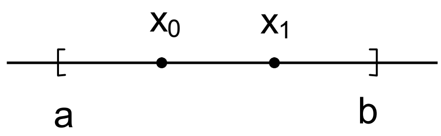
можна почленно диференціювати, тобто:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{'}(x).$$

3 Правильно збіжний ряд інтегрованих (наприклад, неперервних функцій) у області $\overline{D}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

можна почленно інтегрувати на будь–якому відрізку, який належить області D , тобто:



$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} U_n(t)\,dt$$

Приклад

1 $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin Kx}{K^2}$.

Відомо, що $|\sin Kx| \le 1$ для будь–якого $\forall x, \forall K$, тому $\left|\frac{\sin Kx}{K^2}\right| \le \frac{1}{K^2}$.

Але ж ряд Діріхлє має додатні члени і збігається, тому за означенням функціональній ряд:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin Kx}{K^2}$$

правильно збігається на усій числовій осі $x \in (-\infty, \infty)$.

2.4 Степеневі ряди

Означення

Функціональний ряд:

$$C_0 + C_1(Z - Z_0) + C_2(Z - Z_0)^2 + ... + C_n(Z - Z_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(Z - Z_0)^n \qquad (18)$$

називають **степеневим рядом**.

Числа $C_0, C_2, ..., C_n, ...$ – називаються коефіцієнтами ряду, Z_0 – фіксоване число, Z – будь–яке.

Зауваження. Аргумент Z степеневих функцій може бути комплексним числом. Тоді коефіцієнти $C_0, C_2, ..., C_n, ...$ і Z_0 теж будуть фіксованими комплексними числами.

Якщо розглядається дійсний випадок, тобто $Z = x$ виявляється дійсним аргументом, тоді коефіцієнти $C_0, C_2, ..., C_n, ...$ і Z_0 будуть фіксованими дійсними числами, а $U_n(x)$ дійними степеневими функціями дійсного аргументу $Z = x$.

Для степеневих рядів область збіжності можна визначити за допомогою теореми.

Теорема Коші–Адамара

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \dfrac{1}{R}$, (19)

тоді степеневий ряд:

$$C_0 + C_1(Z - Z_0) + C_2(Z - Z_0)^2 + ... + C_n(Z - Z_0)^n + ... \qquad (20)$$

збігається абсолютно для усіх Z, які задовольняють нерівності:

$$|Z - Z_0| < R,$$

і розбігається для усіх Z, які задовольняють нерівності:

$$|Z - Z_0| > R.$$

Доведення.

(Для випадку. коли у формулі (19) існує скінченна границя $\neq 0, \infty$):

Нехай $|Z - Z_0| < R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \Rightarrow |Z - Z_0| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} < 1$,

або:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|C_n(Z - Z_0)^n\right|} < 1.$$

Остання нерівність означає (за узагальненою радикальною ознакою Коші), що ряд (20) збігається для таких Z, які задовольняють нерівності:

$$|Z - Z_0| < R.$$

Розбіжність ряду (20) для $|Z - Z_0| > R$ доводиться аналогічно.

Зауваження 1

Умову Коші – Адамара можна ослабити, якщо замість границі використати верхню границю:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}\,.$$

Зауваження 2

Із теореми Коші–Адамара випливає, що областю збіжності степеневого ряду (20) виявляється (у комплексному випадку) внутрішність круга радіуса *R* з центром у точці z_0 плюс можливі деякі точки його межі.

У дійсному випадку $Z = x$ областю збіжності степеневого ряду:

$$C_0 + C_1(Z - Z_0) + C_2(Z - Z_0)^2 + ... + C_n(Z - Z_0)^n + ... \qquad (21)$$

буде інтервал радіуса R з центром у точці x_0 плюс можливі точки межі інтервалу $x_0 - R,\ x_0 + R$.

Тому число R називають радіусом збіжності степеневого ряду (20), або (21), а круг $|Z - Z_0| < R$ –його кругом збіжності (у комплексному випадку) або його інтервалом збіжності (у дійсному випадку).

Зауваження 3

Радіус збіжності степеневого ряду (20) можна відшукувати і за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \qquad (22)$$

Зауваження 4

Якщо $R = 0$ це означає, що степеневий ряд (20) (або(21)) збігається лише у точці z_0.

Якщо $R = +\infty$ це означає, що степеневий ряд (20) (або (21)) збігається на усій комплексній площині (збігається на усій числовій осі).

Приклади

1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}; \quad C_n = \frac{1}{n^n},$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow$$

$R = +\infty$, тобто ряд збігається на усій комплексній площині, якщо $z = x + ij$, або на усій числовій осі, якщо $z = x$.

2

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n ; c_n = n^n ;$$

$$\frac{1}{R} = lim \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \Rightarrow .$$

$R = 0$, тобто ряд збігається лише тільки у точці $z = 0$.

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n \quad \forall_{\alpha} \quad C_n = n^{\alpha},\ C_{n+1} = (n+1)^{\alpha} .$$

Обчислимо радіус збіжності за формулою (22):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 .$$

Таким чином, радіус збіжності ряду $R = 1$, тобто круг збіжності $|z| < R$ (або інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$).

Розглянемо поведінку ряду на межі круга збіжності (інтервала збіжності), тобто на колі $|z| = 1$ (або у точках $x = -1,\ x = 1$);

а) $\alpha > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |z|^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ – такий ряд розбігається для будь-якого $|z| = 1$ (тому що $U_n' = n^{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (\pm 1)^n$ – такий ряд розбігається в обох точках $x = -1, x = 1$);

б) $-1 \le \alpha < 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |z|^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}} (0 < -\alpha \le 1)$ – ряд абсолютно розбігається за умовою розбіжності узагальненого гармонійного ряду у випадку $0 < -\alpha \le 1$, але буде умовно збігатися у точці $x = -1$, яка належить колу $|z| = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}} (-1)^n ,$$

за теоремою Лейбніца для знакопереміжних рядів (для дійсного випадку $z = x$, ряд умовно збігається у точці $x = -1$) і розбігається у точці $x = 1$, тому що $0 < -\alpha \le 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}};$$

в) якщо $\alpha < -1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left| z \right|^{n} = \sum \frac{\left| z \right|^{n}}{n^{-\alpha}}$ $\left(-\alpha > +1 \right)$,

буде абсолютно збігатися для будь–якого комплексного $\left| z \right| = 1$, у тому числі для $x = -1,\ x = 1$ у дійсному випадку, а тому буде збігатися і у звичайному змісті цього слова.

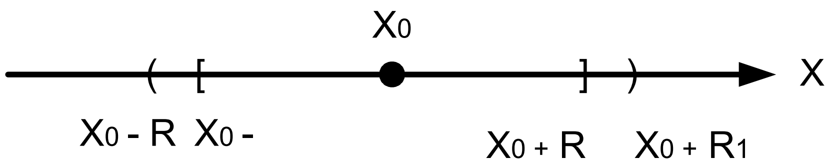
Властивості степеневих рядів

Будемо далі розглядати степеневі ряди для дійсного аргументу $z = x$.

1 Степеневий ряд:

$$C_0 + C_1\left(x - x_0\right) + C_2\left(x - x_0\right)^2 + \cdots + C_n\left(x - x_0\right)^n + \cdots \tag{23}$$

правильно збігається у будь–якому сегменті, який розташований у інтервалі збіжності:
$0 \le \left| x - x_0 \right| \le R_1 < R$.



Нехай $0 \le \left| x - x_0 \right| \le R_1 \quad \Rightarrow$

$$\left| C_n\left(x - x_0\right)^n \right| = \left| C_n \right| \left| \left(x - x_0\right)^n \right| \le \left| C_n \right| R_1^n,$$

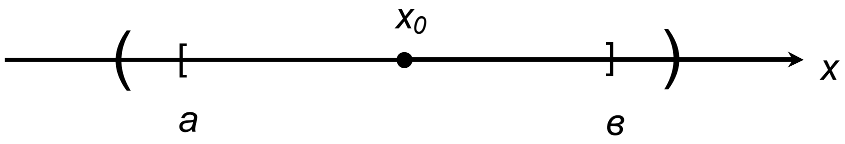
але числовий ряд з додатніми членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| C_n \right| R_1^n$ – збігається і тому за визначенням степеневий ряд (22) збігається правильно на сегменті $\left[-R_1,\ R_1 \right]$.

Із цієї властивості випливає, що до степеневого ряду застосовуються властивості правильно збіжних рядів, а саме:

2 Сума степеневого ряду (23) виявляється функцією неперервного в середині інтервалу збіжності.

3 Степеневий ряд (23) можна почленно інтегрувати за будь–яким сегментом, який розташовано в середині інтервалу збіжності:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \quad \Rightarrow \quad \int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx .$$



4 Степеневий ряд (22) можна почленно диференціювати скільки завгодно рядів.

(Дійсно, похідний ряд, тобто ряд, утворений із похідних членів ряду (18), буде знову степеневим рядом:

$$C_1+2C_2(x-x_0)+3C_2(x-x_0)^2+\cdots+nC_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots,$$

інтервал збіжності якого збігається з інтервалом збіжності ряду (23) і тому йому притаманні властивості степеневих рядів).

Таким чином, якщо:

$$S(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n+\cdots$$

$$x\in(x_0-R,R+x_0)$$

тоді:

$$S'(x)=C_1+2C_2(x-x_0)+\cdots+nC_n(x-x_0)^n+\cdots \qquad x\in(x_0-R,\,x_0+R).$$

2.5 РЯД ТЕЙЛОРА

Розглянемо збіжний степеневий ряд:

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n+\cdots \quad x\in(x_0-R,R+x_0),$$

суму якого позначимо $f(x)$:

$$f(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{24}$$

Відшукаємо залежність між сумою степеневого ряду $f(x)$, її похідними $f'(x)$, $f''(x)$, … і коефіцієнтами степеневого ряду. Для цього використаємо властивості степеневого ряду, а саме можливість диференціювати його скільки завгодно разів.

$$f(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n+\cdots \quad C_0=f(x_0);$$
$$f'(x)= \qquad C_1 \qquad +2C_2(x-x_0)+\cdots+nC_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots \quad C_1=\frac{f'(x_0)}{1!};$$
$$f''(x)= \qquad\qquad 2C_2 \quad +\cdots+n(n-1)C_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots \quad C_2=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$
~ ~
$$f^{(n)}(z)=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1C_n+(n+1)(n)(n-1)\cdots3\cdot2C_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$
$$C_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$
~ ~

Якщо у цих рівностях покласти $x=x_0$ ми отримаємо вирази для коефіцієнтів через значення функції $f(x)$ і їх похідних $f'(x)$, $f''(x)$,… у точці x_0, а саме:

Таким чином, степеневий ряд (24) можна записати так:
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

Такий ряд називають рядом Тейлора для функції $f(x)$, а процес побудови ряду називають розкладанням функції у ряд Тейлора у околі точки x_0.

Таким чином, ми довели, що сума степеневого ряду розкладається у ряд тейлора для цієї суми у околі точки x_0.

Зауваження

Розкладання функцій у ряд Тейлора дуже зручно, тому що тоді функція дорівнює сумі (нескінченній) дуже простих степеневих функцій і за допомогою цієї суми можна наближено обчислювати з будь–якою точністю значення функції.

Але тоді виникають деякі питання про можливість розкладання функції у ряд Тейлора, а саме:

1) чи можна будь–яку нескінченно диференційовану у околі точки x_0 функцію розкласти у ряд Тейлора?

2) чи буде збігатися складений для даної функції ряд Тейлора хоча б у околі точки x_0?

3) чи буде складений для функції $f(x)$ ряд Тейлора, який збігається у інтервалі $(x_0 - R,\ x + R)$, мати своєю сумою ту саму функцію $f(x)$, або ж його сумою буде якась стороння функція?

Означення

Якщо ряд Тейлора, побудований для функції $f(x)$ у околі точки $x = x_0$ і має своєю сумою саме ту функцію, тоді кажуть, що функція $f(x)$ розкладається у ряд Тейлора у околі точки $x = x_0$ і позначають це так:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots .$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Якщо у околі точки $x = x_0$ функція $f(x)$ має неперервні похідні до *n*–го порядку включно, тоді має місце рівність:

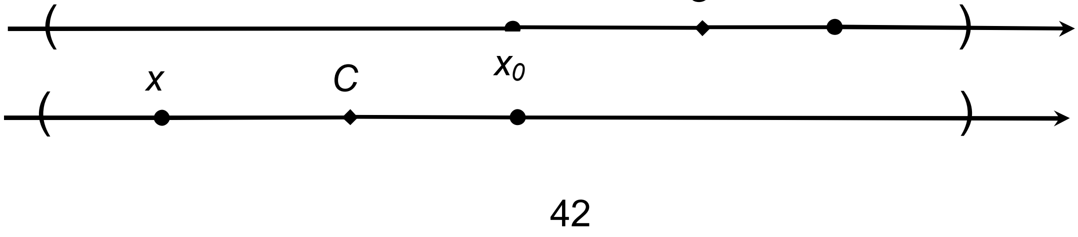
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + f^{(n)}(C)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

яку називають скінченною формулою Тейлора.

Останній доданок правої частини, який за своєю структурою відрізняється від інших доданків, називають членом формули Тейлора у формі Лагранжа і позначають його так:

$$R_n(x) = f^{(n)}(C)\frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

У цьому виразі похідна *n*–го порядку обчислюється у точці *C*, яка є проміжною між точкою x_0 і точкою x, при чому значення *C* не є сталою величиною. Ця величина змінюється у залежності від довжини сегменту $[x_0, x]$ і від номера останньої похідної.



Основна теорема (про розкладання функції у ряд Тейлора). Для того, щоб функція $f(x)$ у околі точки x_0 розкладалася у нескінченний ряд Тейлора, необхідно і достатньо, щоб вона мала у околі точки x_0 похідні будь-якого порядку і щоб залишковий член скінченної формули Тейлора прямував до нуля при умові, що $n \to +\infty$.

Доведення

Необхідність

Якщо за умовою функція $f(x)$ розкладається у ряд Тейлора, тоді функція $f(x)$ є сумою ряду Тейлора складеного для даної функції, тобто виконується рівність

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n)!}(x - x_0)^{(n)} + \ldots .$$

Оскільки степеневий ряд можна диференціювати скільки завгоодно разів, то сума ряду, тобто функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку у околі точки x_0.

Далі за умовою:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} Sn(x). \qquad (25)$$

З другого боку, у будь-якому околі точки x_0 можна записати скінченну формулу Тейлора:

$$f(x) = Sn(x) + Rn(x),$$

звідки, з урахуванням рівності (25):

$$\lim_{n\to\infty} Rn(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - Sn(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

Достатність

Нехай відомо, що функція $f(x)$ така, що вона у околі точки x_0 має похідні будь-якого порядку і $Rn(x) \to 0$ коли $n \to +\infty$.

Тоді для будь-якого $\underline{n}$ можна записати формулу Тейлора:

$$f(x) = Sn(x) + Rn(x).$$

Якщо перейти до границі при умові, що $n \to +\infty$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [Sn(x) + Rn(x)] = \lim_{n\to\infty} Sn(x) + \lim_{n\to\infty} Rn(x) = \lim_{n\to\infty} Sn(x),$$

тобто:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} Sn(x),$$

але остання рівність означає, що $f(x)$ розкладеється у ряд Тейлора.

Зауваження

Ряд Тейлора функції $f(x)$ у околі точки $x_0 = 0$ має вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

і називається **рядом Маклорена**.

2.6 Розкладання деяких функцій у степеневі ряди

2.6.1 Лема

Для будь-якого числа Z має місце рівність:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Z^n}{n!} = 0.$$

Доведення

Розглянемо ряд:

$$1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots$$

і доведемо, що він збігається абсолютно для будь-якого Z.

За узагальненою ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim \left| \frac{Z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{Z^n} \right| = |Z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

тобто ряд збігається абсолютно для усіх значень Z, отже і у звичайному розумінні цього слова.

Але, якщо ряд збігається, його загальний член прямує до нуля при умові, що $n \to \infty$.

Таким чином

$$U_n = \frac{Z^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тобто:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z^n}{n!} = 0 \qquad \forall Z .$$

2.6.2 Розкладання у степеневі ряди функцій $f(x) = e^x$

Будемо розкладати функцію $f(x) = e^x$ у степеневий ряд Маклорена:

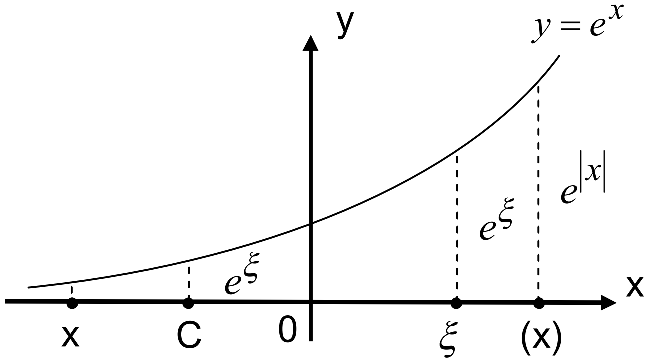
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ldots}_{Rn(x)},$$

де залишковий член скінченної формули Тейлора у формі Лагранжа

$$Rn(x) = f^{(n)}(\xi)\frac{x^n}{n!},$$

де $0 \le \xi \le x$,

або $x \le \xi \le 0$.



Перевіримо, що для функції $f(x) = e^x$ у околі точки $x_0 = 0$ виконуються обидві умови теореми Тейлора.

Очевидно, якщо: $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

~ ~ ~ ~,

тобто функція $f(x) = e^x$ має похідні будь-якого порядку в будь-якій точці.

Розглянемо далі залишковий член:

$$R_n(x) = e^{\xi}\frac{x^n}{n!}.$$

Для нього:

$$\left|R_n(x)\right| \le e^{|x|} \frac{\left|x^n\right|}{n!},$$

$$\left(\left|R_n(x)\right| = \left|e^{\xi}\right| \frac{|x|^n}{n!} \le e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \right),$$

при чому перший множник добутку $e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!}$ не залежить від n, а другий прямує до нуля завжди, якщо $n \to \infty$.

Таким чином, залишковий член теж прямує до нуля при $n \to \infty$ при будь-якому значенні x.

Отже, функція $f(x) = e^x$ розкладається у ряд Маклорена у будь-якому околі точки $x_0 = 0$ і цей ряд має вигляд:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 1;\ \ldots;\ f^{(n)}(0) = 1;\ \ldots,$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots.$$

Зауважимо, що радіусом збіжності цього ряду є $R = +\infty$, що випливає із доведення леми.

2.6.3 Розкладання у степеневий ряд функції $f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$

Запишемо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа у околі точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + f^{(n)}(C)\frac{x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(C)}{n!}x^n = \underbrace{\left\{ \pm \begin{matrix} \cos c \\ \sin c \end{matrix} \right\}}_{\substack{\textit{обмежена} \\ \textit{величина}}} \quad \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\substack{\textit{нескінченно} \\ \textit{мала}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

тобто при будь-якому x залишковий член $R_n(x)$прямує до нуля при умові, що $n \to \infty$.

Крім того функції $f(x) = \cos\ x,\ f(x) = \sin\ x$ мають похідні будь-якого порядку, а саме:

$$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0,$$
$$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1,$$
$$f'''(x)=\sin x \qquad f'''(0)=0,$$
$$f^{IV}(x)=\cos x \qquad f^{IV}(0)=1,$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$
$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0,$$
$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1,$$
$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1,$$
$$f^{IV}(x)=\sin x \qquad f^{IV}(0)=0,$$
$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Зауваження 1. Ряд для функції $f(x)=\cos x$ (і навпаки) можна отримати, якщо продиференціювати ряд для функції $f(x)=\sin x$.

Зауваження 2. Ряди для функцій $f(x)=\cos x$, $f(x)=\sin x$ використовуються для складання таблиць тригонометричних функцій.

Зауваження 3. Степеневі ряди для функцій $f(x)=e^x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\sin x$ збігаються для усіх дійсних значень аргументу x.

Зауваження 4. Степеневі ряди для функцій залишаються збіжними і для будь-якого комплексного значення $x=z$.

Ця обставина дає можливість визначити функції $e^z, \sin z, \cos z$ для комплексних значень аргументу z.

Зауваження 5. Іноді можна отримати розкладання функції у ряд за допомогою інтегрування уже відомих рядів.

2.6.4 Формули Ейлера

Розглянемо суму ряду:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\cdots+\frac{(iy)^n}{n!}+\cdots=1+i\frac{y}{1!}-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\frac{y^5}{5!}-\cdots=$$
$$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\right),$$

тобто:

$$\underline{e^{iy} = \cos y + i \sin y}\,.$$

Замінимо у останній рівності y на $(-y)$:

$$\underline{e^{-iy} = \cos y - i \sin y}\,.$$

Із підкреслених рівностей випливають формули, які називають формулами Ейлера, а саме:

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right),$$

$$\sin y = \frac{1}{2!}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right).$$

2.6.5 Розкладання у степеневий ряд функції $f(x) = \ln(1+x)$. Обчислення логарифмів

Розглянемо геометричний ряд зі знаменником $q = x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \tag{26}$$

про який відомо, що він збігається для будь-якого $q = x$, якщо:

$$|q| = |x| < 1.$$

Таким чином, ряд (26) степеневий, для якого інтервалом збіжності є інтервал:

$$x \in (-1,\, 1).$$

Замінимо у рівності (26) x на $(-x)$ і отримаємо новий ряд:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \tag{27}$$

для якого інтервалом збіжності теж буде інтервал:

$$x \in (-1,\, 1).$$

За відомою властивістю степеневих рядів проінтегруємо рівність (27) вздовж сегменту $[0,\, x]$, де $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \cdots,$$

звідки отримуємо ряд для функції $f(x) = \ln(1+x)$, який збігається у інтервалі $x \in (-1,\, 1)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots. \qquad (28)$$

Зауваження. Остання формула залишається вірною і при $x = 1$, тому що числовий ряд збігається:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

Зауваження. Ряд (28) не використовують для обчислення логарифмів за двох причин:

1) за допомогою ряду (28) можна обчислити логарифми лише чисел від 0 до 2;

2) ряд (28) збігається дуже повільно і тому для обчислення значень логарифма з великою степінню точності треба використати велику кількість членів ряду.

Наприклад, щоб обчислити $\ln 2$ з точністю $\frac{1}{100}$ треба обчислити суму 99 членів ряду.

Ряд для обчислення логарифмів

Розглянемо два ряди:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad x \in (-1,\, 1),$$

і (заміняючи x на $(-x)$):

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \qquad x \in (-1,\, 1),$$

і віднімемо другу рівність від першої:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad x \in (-1,\, 1) \qquad (29)$$

Позначимо далі:

$$N = \frac{1+x}{1-x}.$$

Якщо x буде змінюватися від (-1) до (+1) *N* буде змінюватися від 0 до $+\infty$:

$$N \in (0,\, \infty).$$

Таким чином, за допомогою рівності (29) можна обчислити логарифм будь-якого додатного числа.

Виразимо x через N:

$$N - Nx = 1 + x\,,$$
$$N - 1 = x(N+1),$$
$$x = \frac{N+1}{N-1}\,,$$
$$\ln N = 2\left(\frac{N+1}{N-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{N+1}{N-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N+1}{N-1}\right)^5 + \cdots\right) \qquad N \in (0,\,+\infty).$$

За допомогою цього ряду складаємо таблиці натуральних логарифмів, а потім, використовуючи модуль переходу, знаходимо значення логарифмів у будь-якій системі.

2.6.6 Розкладання у степеневий ряд функції $f(x) = arctg\, x$

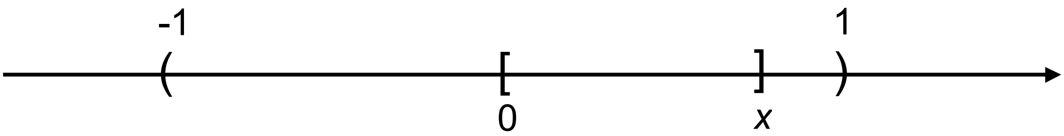
Розглянемо знову геометричний ряд:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad x \in (-1,\,1),$$

у якому замінимо x на $\left(-x^2\right)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad x \in (-1,\,1),$$

і проінтегруємо останній ряд на сегменті $[0,\,x)$:



$$\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^x dt - \int\limits_0^x t^2 dt + \int\limits_0^x t^4 dt - \cdots \qquad (x \in (-1,\,1)),$$
$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad x \in (-1,\,1).$$

Зауваження 1. Формула залишається вірною і для $x = \pm 1$. Дійсно, при $x = 1$:

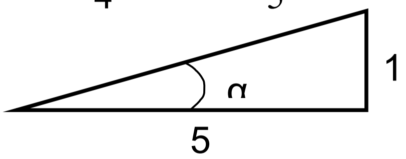
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

числовий ряд збігається за теоремою Лейбніца. Але використовувати цю рівність для обчислення π не доцільно, тому що ряд збігається повільно.

Зауваження 2. Для обчислення числа π використовують наступну формулу:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,arctg\,\frac{1}{5} - arctg\,\frac{1}{239}.$$

Дійсно, якщо



$tg\,\alpha = \frac{1}{5}$, *тоді:*

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{5}{12},$$

$$tg\,4\alpha = tg\,2(2\alpha) = \frac{2\,tg\,2\alpha}{1 - tg^2\,2\alpha} = \frac{2 \cdot 5/12}{1 - 25/144} = \frac{120}{119},$$

тобто $4\alpha > \frac{\pi}{4}$. Позначимо $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$ і обчислимо:

$$tg\,\beta = tg\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\,4\alpha - tg\,\frac{\pi}{4}}{1 + tg\,4\alpha \cdot tg\,\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Таким чином:

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4},$$

або ж:

$$arctg\,\frac{1}{239} = 4\,arctg\,\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4},$$

звідки:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,arctg\,\frac{1}{5} - arctg\,\frac{1}{239}.$$

Заміняючи $arctg\,\frac{1}{5}$ і $arctg\,\frac{1}{239}$ їх рядами, отримаємо рівність для обчислення числа π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(239)^3} + \cdots\right).$$

2.6.7 Розкладання у степеневий ряд функції $f(x)=(1+x)^{\mu}$ (біномний ряд)

Теорема

Функція $f(x)=(1+x)^{\mu}$ в інтервалі (-1, 1) розкладається у степеневий ряд:

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots[\mu-n+1]}{1\cdot2\cdot3\cdots n}x^n+\cdots,$$

де μ - будь-яке дійсне число.

Доведення

По-перше доведемо, що ряд збігається у інтервалі (-1, 1), для чого використаємо узагальнену ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot(n+1)}x^{n+1}}{\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mu-n}{n+1}\right||x|=|x|<1.$$

Таким чином, дійсно радіус збіжності ряду дорівнює $R=1$, а інтервал дорівнює:

$$x\in(-1,1).$$

Позначимо суму ряду через $\varphi_{\mu}(x)$:

$$\varphi_{\mu}(x)=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

і доведемо, що:

$$\varphi_{\mu}(x)=(1+x)^{\mu}.$$

З цією метою складемо диференціальне рівняння для функції $\varphi_{\mu}(x)$.

Обчислимо похідну $\varphi'_{\mu}(x)$ (степеневий ряд можна почисленно диференціювати):

$$\varphi'_{\mu}(x)=\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{1!}x+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$

$$+\cdots=\mu\left[1+\frac{\mu-1}{1!}x+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]=$$

$$=\mu\varphi_{\mu-1}(x).$$

Таким чином, виконується рівність:

$$\varphi'_{\mu}(x) = \mu\,\varphi_{\mu-1}(x), \qquad (30)$$

але в цьому рівнянні присутні різні функції $\varphi_{\mu}(x), \varphi_{\mu-1}(x)$.

Розглянемо далі добуток:

$$\varphi_{\mu-1}(x)(1+x) = 1 + \frac{\mu-1}{1!}x + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{3!}x^3 + \cdots +$$
$$+ x + \frac{\mu-1}{1!}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!}x^3 + \cdots = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 +$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \cdots = \varphi_{\mu}(x).$$

Таким чином:

$$\varphi_{\mu-1}(x)(1+x) = \varphi_{\mu}(x). \qquad (31)$$

Отже, з рівнянь (30) і (31) випливає, що справедливе диференціальне рівняння для функції $\varphi_{\mu}(x)$:

$$\varphi'_{\mu}(x) = \mu\frac{\varphi_{\mu}(x)}{1+x}. \qquad (32)$$

Розв’язуємо це рівняння з відокремлюваними змінними при початковій умові:

$$\varphi_{\mu}\Big|_{x=0} = \varphi_{\mu}(0) = 1,$$

$$\frac{\varphi'_{\mu}(x)}{\varphi_{\mu}(x)} = \mu\frac{1}{1+x},$$

$$\ln|\varphi_{\mu}(x)| = \mu\ln|1+x| + \ln C,$$

$$\varphi_{\mu}(x) = C(1+x)^{\mu},$$

$$1 = \varphi_{\mu}(0) = C,$$

тобто:

$$\varphi_{\mu}(x) = (1+x)^{\mu},$$

і теорема доведена повністю.

Окремі випадки біномного ряду

1 Нехай $\mu = m$, де m - натуральне число:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

Розглянемо коефіцієнт при x^{m+1}:

$$\frac{m(m-1)\cdots[m-(m+1)+1]}{(m+1)!} = 0,$$

тому що останній множник чисельника дорівнює нулю. Але усі наступні коефіцієнти ряду будуть містити у собі той самий множник і тому усі наступні члени ряду (починаючи від $m+2$ члену) дорівнюють нулю, тобто ряд містить у собі лише скінчене число членів і збігається тому при усіх значеннях x.

Вираз

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(m)+1]}{m!}x^m$$

називають біномом Ньютона.

2 $\mu = -1$.

$(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ - геометричний ряд із знаменником $q = -x$, який збігається у інтервалі (-1, +1).

3 $\mu = -\dfrac{1}{2}$, x заміняємо на $\left(-x^2\right)$:

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2 +$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-x^2\right)^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \quad x \in (-1,1)$$

3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Тригонометричні ряди

Означення

Функціональний ряд:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots,$$

або ж:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

називають *тригонометричним рядом*.

Сталі величини:

$$a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots: \quad b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n,\, \ldots$$

називаються *коефіцієнтами ряду*.

Члени ряду:

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x\,,$$
$$a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x\,,$$
$$\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim$$
$$a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,$$
$$\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim$$

називають першою, другою і так далі n-ю *гармонікою*.

Припустимо, що тригонометричний ряд правильно збігається для усіх x.

Для цього за означенням достатньо, щоб збігався числовий ряд із абсолютних величин його коефіцієнтів:

$$\frac{|a_0|}{2} + (|a_1| + |b_1|) + \cdots + (|a_n| + |b_n|) + \cdots, \tag{33}$$

Отже, припустимо, що тригонометричний ряд збігається. Позначимо його суму через $f(x)$.

Члени ряду є періодичними функціями з періодом 2π, тому і його сума $f(x)$ теж буде функцією періодичною з періодом 2π, тобто:

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Крім того члени ряду є неперервними функціями і тому його сума буде функцією неперервною.

Отже, має місце рівність:

$$f(x)=\frac{(a_0)}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots. \quad (34)$$

Виразимо коефіцієнти тригонометричного ряду через його суму $f(x)$.

Ряд (34) можна почленно інтегрувати на сегменті $[-\pi,\pi]$, тому що ряд (34) за нашим припущенням збігається правильно.

Щоб визначити коефіцієнт a_m при $\cos mx$ помножимо обидві частини рівності (34) на $\cos mx$ і проінтегруємо вздовж сегменту $[-\pi,\pi]$. Ми отримаємо рівність:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\;dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\;\cos mx\;dx+\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\;\cos mx\;dx\right)+$$

$$+\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\;dx. \quad (35)$$

Обчислимо інтеграли у правій частині рівності (35):

1 Якщо $m\neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\;\cos mx\;dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)=0.$$

2 Якщо $n=m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\;dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mx)dx=\frac{1}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\left(x+\frac{\sin 2mx}{2m}\right)=\pi.$$

3 Якщо $m\neq n$ і $n=m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\;\cos mx\;dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(m+n)x}{\cancel{m}}+\sin(m-n)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)=0.$$

Таким чином, із нескінченної суми інтегралів, яка стоїть у правій частині рівності (35) залишається відмінним від нуля лише один доданок $a_m\pi$, тобто:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\ dx = a_m\pi \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

звідки усі коефіцієнти дорівнюють:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\ dx \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Аналогічно обчислюються коефіцієнти b_m при $\sin mx$. Для цього потрібно помножити обидві частини рівності (34) на $\sin mx$, проінтегрувати вздовж сегменту $[-\pi,\ \pi]$ і обчислити відповідні інтеграли. У цьому випадку у правій частині залишається лише один доданок $b_m\pi$.

Таким чином:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\ dx \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким чином, коефіцієнти тригонометричного ряду визначаються через суму ряду.

Означення

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx & n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx & n = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases} \tag{36}$$

Формули (36) для коефіцієнтів ряду називають *формулами Фур'є–Ейлера*, а ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

де коефіцієнти a_n і b_n обчислені за формулами (36) Фур'є–Ейлера, називаються *рядом Фур'є*, побудованим для функції $f(x)$ на сегменті $[-\pi,\ \pi]$.

Таким чином, ми довели, що сума $f(x)$ тригонометричного ряду розкладається у ряд Фур'є.

Розглянемо довільну періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$ і обчислимо для неї за формулами Ф. – Е. коефіцієнти a_n і b_n і побудуємо далі ряд Фур'є:

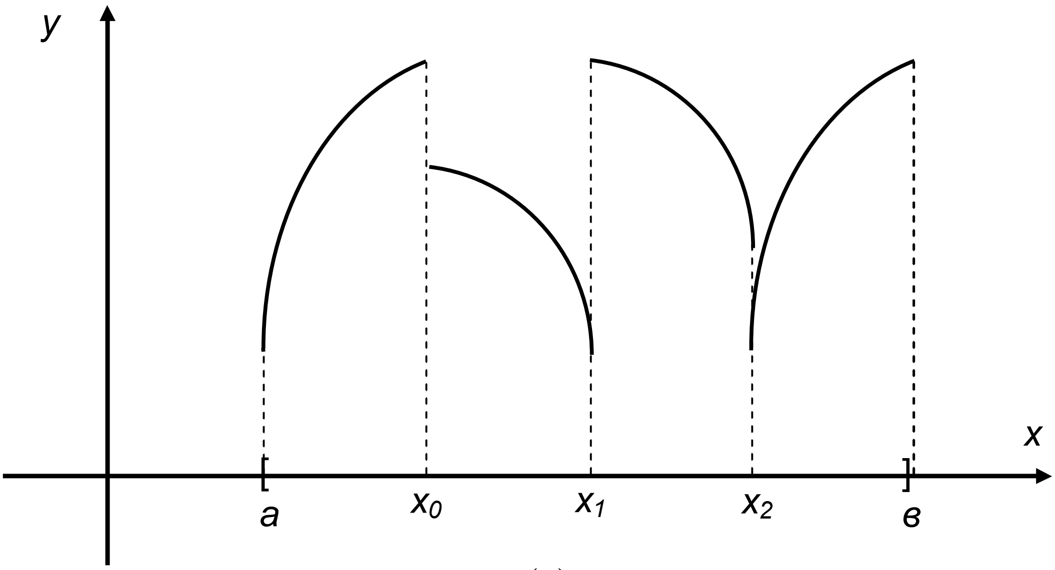
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{37}$$

Якщо ряд Фур'є (35) для функції $f(x)$ збігається і, якщо сумою ряду (37) буде функція $f(x)$, тоді ми говоримо, що довільна періодична функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур'є, тобто довільна періодична функція $f(x)$ є сумою (щоправда нескінченною) простіших періодичних функцій $\sin x,\ \cos x;\ \ldots;\ \sin nx,\ \cos nx;\ \ldots$

Питання про збіжність ряду Фур'є визначається у теоремі Діріхле.

Означення

Функція $f(x)$ називається *кусочно – монотонною* на сегменті $[a,\ b]$, якщо $[a,\ b]$ можна поділити на скінченне число інтервалів, на кожному з яких функція $f(x)$ буде монотонною.



Якщо функція $f(x)$ кусочно-монотонна і обмежена на сегменті $[a,\ b]$, тоді існують границі зліва і справа у точках x_0, де функція $f(x)$ має розриви:

$$f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x),$$

$$f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x),$$

тобто такі функції $f(x)$ мають лише розриви першого роду (або стрибок).

Теорема Діріхле

Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом 2π кусочно-монотонна і обмежена на сегменті $[-\pi, \pi]$, тоді ряд Фур'є побудований для функції $f(x)$ у кожній точці неперервності функції $f(x)$ і збігається до середнього арифметичного лівої і правої границь:

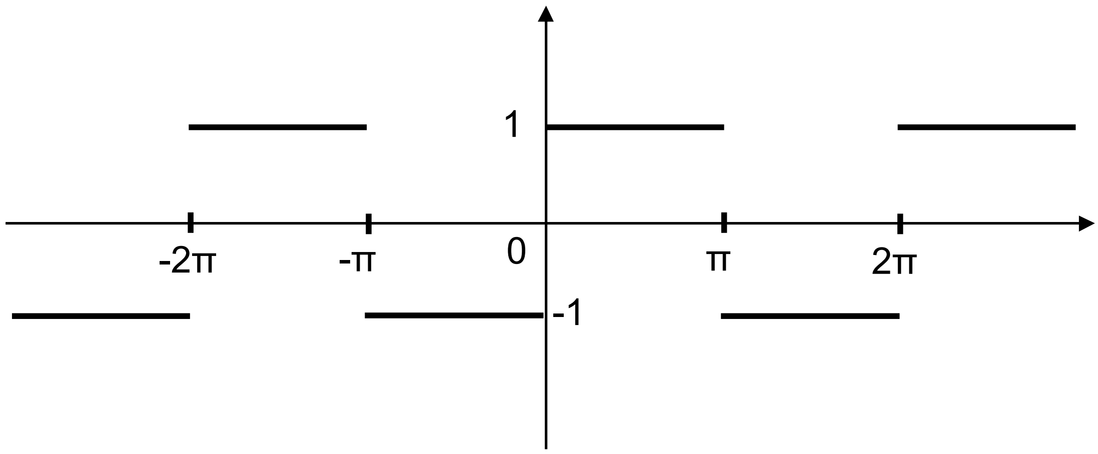
$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

у кожній точці x_0, де функція $f(x)$ має розрив.

Приклад

Періодична (з періодом 2π) функція $f(x)$ визначена так:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & при \quad -\pi<x<0\\ 1 & при \quad 0\le x\le\pi\end{cases}.$$



Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле і тому її можна розкласти у ряд Фур'є.

Обчислимо коефіцієнти за формулами Фур'є-Ейлера:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left.\phantom{\frac{1}{1}}\right|_{-\pi}^{0}-\frac{\sin nx}{n}+\left.\phantom{\frac{1}{1}}\right|_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\right]=0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] =$$

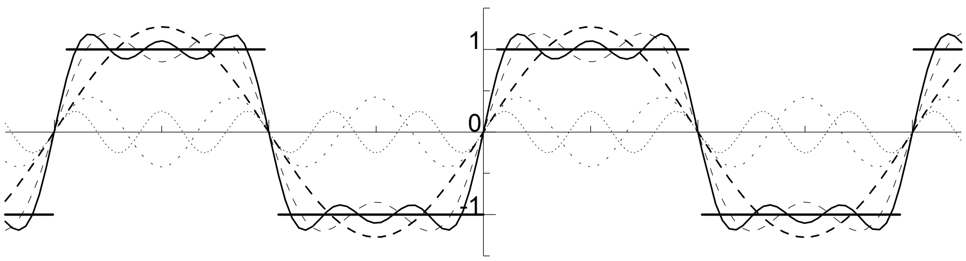
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} - \left(\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right) = \begin{cases} 0 & n - парне \\ \dfrac{4}{n\pi} & n - непарне \end{cases}.$$

Таким чином, для функції $f(x)$ ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \cdots\right\}. \qquad (38)$$

Рівність (38) має місце в усіх точках крім точок розриву:

$$S_1 = \frac{4}{\pi}\sin x, \quad S_2 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3}\right), \quad S_3 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right).$$



3.2 Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

3.2.1 Якщо $f(x)$ парна $\left(f(-x) = f(x)\right)$, тоді коефіцієнти Фур'є-Ейлера дорівнюють:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0,$$

тому, що добуток двох парних функцій виявляється парною функцією, графік якої є симетричною відносно осі *OY* кривою і тому інтеграл в симетричних [-π, π] границях дорівнює подвійному значенню інтеграла у границях від 0 до π.

З другого боку, добуток парної і непарної функції виявляється непарною функцією, графік якої є симетричною відносно початку координат кривої і тому інтеграл в симетричних [-π, π] границях дорівнює нулю.

Таким чином, ряд Фур'є парної функції містить у собі "тільки косинуси", тобто має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,,$$

де

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,....$$

3.2.2 Якщо функція *f(x)* непарна (*f(–x)=–f(x)*), тоді коефіцієнти Фур'є-Ейлера дорівнюють:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0\,,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,3,...$$

тому що добуток $f(x)\cos nx$ – непарна функція, а добуток $f(x)\sin nx$ – парна функція.

Таким чином, ряд Фур'є для непарної функції $f(x)$ містить у собі "лише синуси", тобто має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,,$$

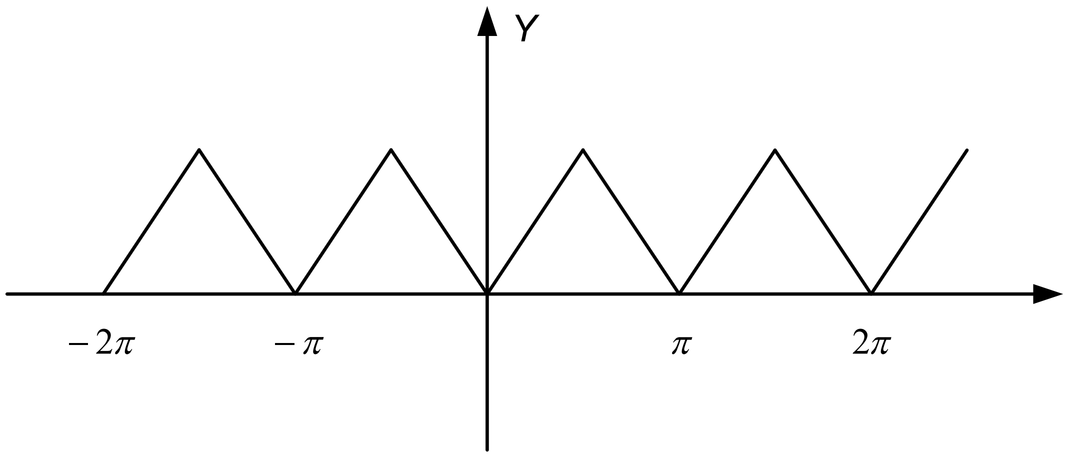
де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,...$$

Приклад

Розкласти у ряд Фур'є парну функцію *f(x)* з періодом 2π, яка на сегменті [0, π] дорівнює:

$$f(x) = x, \quad x \in [0, \pi].$$



$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left| \begin{matrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx \, dx, \; v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\left|\left(\frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n} dx \right)\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n} \right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \textit{парне}, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n - \textit{непарне} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi 3^2}\cos 3x - \frac{4}{\pi 5^2}\cos 5x - \ldots - \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x - \ldots \right).$$

3.3 Ряд Фур'є для функції з періодом 2ℓ

Розглянемо функцію *f(x)* періодичну, але з періодом 2ℓ ($\neq 2\pi$):

$$f(x+2\ell)=f(x).$$

виконаємо заміну змінних за формулою:

$$x=\frac{\ell}{\pi}t.$$

Тоді функція $f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$ виявляється періодичною функцією аргументу *t* з періодом 2π.

Дійсно,

$$t=\frac{\pi}{\ell}x,$$

і якщо x змінюється на сегменті:

$$-\ell\le x\le\ell,$$

тоді *t* змінюється на сегменті:

$$-\pi\le t\le\pi.$$

Крім того:

$$\varphi(t)=f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right),$$

і:

$$\varphi(t+2\pi)=f\left[\frac{\ell}{\pi}(t+2\pi)\right]=f\left(\frac{\ell}{\pi}t+2\ell\right)=f(x+2\ell)=f(x)=f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Функцію $\varphi(t)$ можна розкласти у ряд Фур'є на сегменті [$-\pi\le t\le\pi$]:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \qquad (39)$$

де

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \end{aligned}\right\}, \tag{40}$$

або

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right),$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\cos nt\,dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\sin nt\,dt \end{aligned}\right\}.$$

Повернімось до старої змінної x:

$$x = \frac{\ell}{\pi}t; \quad t = \frac{\pi}{\ell}x; \quad dt = \frac{\pi}{\ell}dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\ell}^{\ell} \ .$$

Тоді формули Фур'є-Ейлера для коефіцієнтів ряду Фур'є мають вигляд:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\frac{\pi}{\ell}x\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\frac{\pi}{\ell}x\,dx \end{aligned}\right\}, \tag{41}$$

а сам ряд Фур'є (40) має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{\ell}x + b_n\sin n\frac{\pi}{\ell}x\right). \tag{42}$$

усі властивості і теореми зберігаються незмінними.

3.4 Розкладання у ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай на деякому сегменті $[a, b]$ задана кусочно-монотонна і обмежена функція $f(x)$.

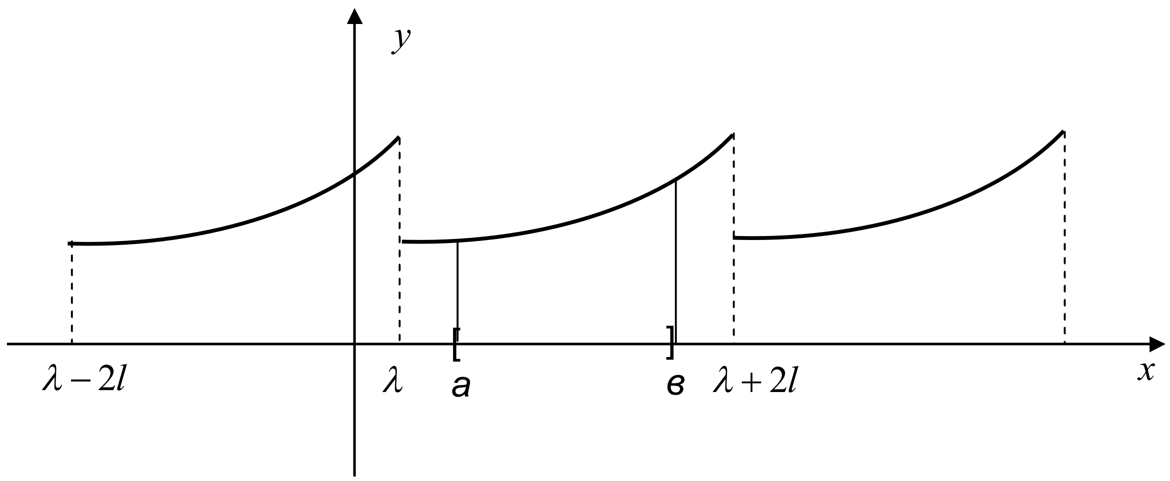
Ми покажемо, що цю функцію $f(x)$ у точках її неперервності можна виставити у вигляді суми ряду Фур'є.

Для цього розглянемо довільну кусочно-монотонну і періодичну функцію $F(x)$ з періодом:

$$2l \geq |b-a|,$$

яка збігається з функцією $f(x)$ на сегменті $[a, b]$:

$$F(x) = f(x) \qquad x \in [a, b].$$



Розкладемо функцію $F(x)$ у ряд Фур'є.

Сума цього ряду в усіх точках $[a, b]$ (крім точок розриву) збігається з функцією $f(x)$, тобто функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур'є.

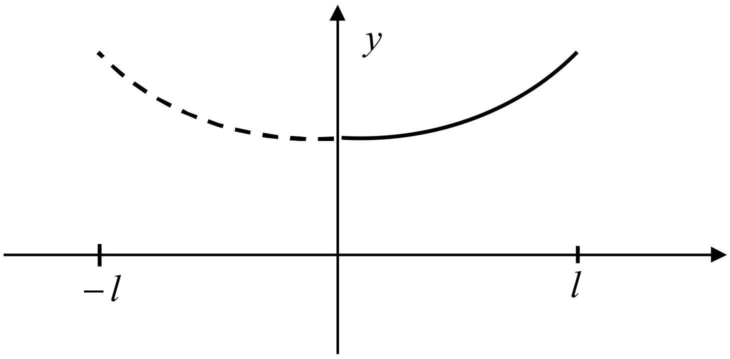
3.4.1 Розглянемо далі такий важливий випадок:

нехай функція $f(x)$ задана на сегменті $[0, l]$. Доповнюючи визначення цієї функції довільним чином на сегменті $[-l, 0]$ (зберігаючи кусочно-монотонність і обмеженість), ми можемо розкласти таку функцію у ряд Фур'є.

Зокрема, якщо ми доповнимо визначення даної функції так, щоб при:

$$-l \leq x \leq 0,$$
$$f(x) = f(-x).$$

У результаті ми отримаємо парну функцію:



У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ “продовжується парним числом”.

Ця функція розкладається у ряд Фур’є, який містить у собі лише косинуси.

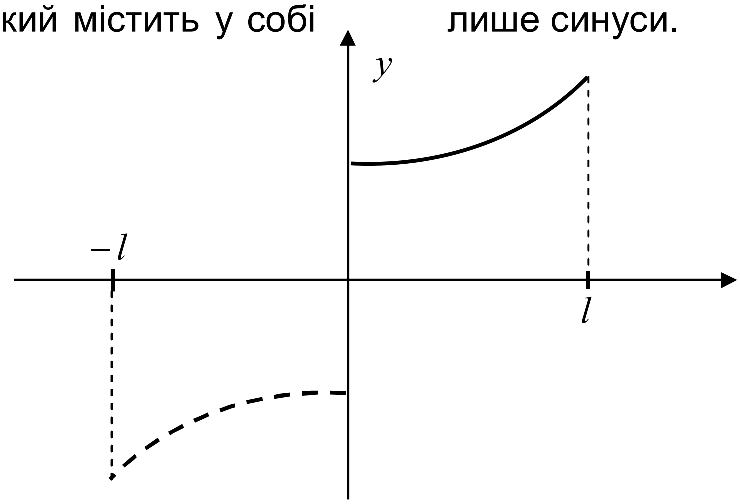
Якщо ми доповнимо визначення функції $f(x)$ при:

$$-l \leq x \leq 0,$$

так щоб:

$$f(x) = f(-x),$$

тоді ми отримаємо непарну функцію, яку потім розкладаємо у ряд Фур’є, який містить у собі лише синуси.

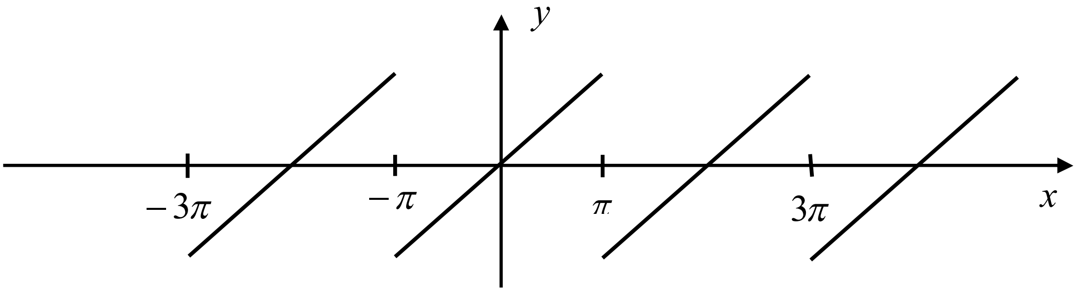


Приклад 1

Розкласти функцію $f(x) = x \quad x \in [0, \pi]$ у ряд Фур’є, який містить у собі лише синуси.

Розв’язання:

Продовжимо цю функцію непарним чином.



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\right|_0^{\pi} =$$

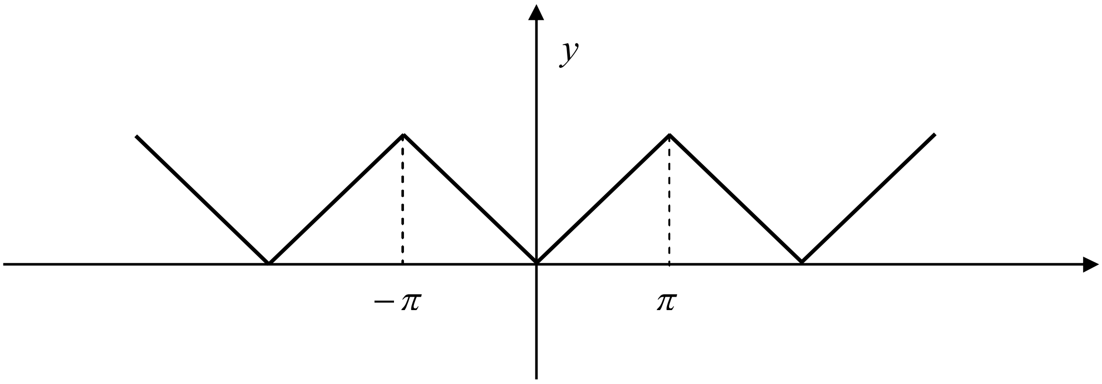
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \begin{cases} -\dfrac{2}{n} & n - \text{парне} \\ \dfrac{2}{n} & n - \text{непарне} \end{cases},$$

$$x = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots .$$

Приклад 2

Розкласти функцію $f(x) = x \quad x \in [0, \pi]$ у ряд Фур'є, який містить у собі лише косинуси.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ -x & x \in [-\pi, 0] \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi].$$



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left.\left(x\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\begin{cases}0 & n-парне\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n-непарне\end{cases},$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi\cdot 1^2}\cos x-\frac{4}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x-\frac{4}{\pi\cdot 5^2}\cos 5x-\cdots-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\cdots$$

3.5 Інтеграл Фур'є

Розглянемо функцію $f(x)$, яка на сегменті $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми Діріхле (тобто монотонно обмежена). Ця функція розкладається у ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),\text{ де}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx \qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \qquad n=1,\,2,\,\ldots$$

або

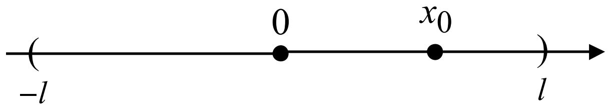
$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\cos\frac{\pi n}{l}x\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dx, \qquad (43)$$

причому це розкладання справедливе для будь-якого $x\in[-l, l]$.

Припустимо тепер, що функція задовольняє умовам Діріхле на будь-якому скінченному інтервалі $(-l, l)$.



$|x| < l$

Припустимо ще, що функція $f(x)$ абсолютно інтегрована на усій числовій осі, тобто збігається інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx .$$

Сформулюємо задачу так:
отримати розкладання $f(x)$, яке буде справедливим для будь-якого x.

З цією метою природно розглянути розкладання (43) і з'ясувати, що з ним буде, якщо $l \to +\infty$.

По перше:

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt \to 0 ,$$

тому що:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ - збігається, тобто є скінченною величиною.

По друге:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi k}{l} (t-x) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi k}{l} (t-x) dt .$$

Нехай на числовій осі неперервно змінюється від 0 до $+\infty$ змінна λ:

і нехай:

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = \frac{\pi}{l},\ \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots$$ - значення λ.

Очевидно, що:

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = \Delta\lambda_k = \frac{\pi}{l} ,$$

і наша сума має вигляд:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_k(t-x)\,dt\,,$$

і якщо вважати, що l велике, тоді має місце наближене рівняння:

$$\Delta\lambda_k \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda_k(t-x)\,dt\,.$$

Останню суму можна трактувати як інтегральну суму для функції:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\,,$$

на проміжку $[0,+\infty)$.

Прямуючи до границі при умові $\Delta\lambda \to 0$, отримаємо інтеграл:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right\}d\lambda\,.$$

Ці міркування наштовхують на думки про існування формули:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right\}d\lambda\,. \qquad (44)$$

При наших умовах, яким задовольняє функція $f(x)$, така формула має місце і називається інтегральною формулою Фур’є.

Далі перетворимо цю формулу:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos\lambda t\,\cos\lambda x+\sin\lambda t\,\sin\lambda x\right]dt\right\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt\cdot\cos\lambda x+\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt\cdot\sin\lambda x\right\}d\lambda=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda\,,$$

де

$$\begin{cases} A(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \\ B(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt \end{cases}. \qquad (45)$$

Вираз:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

називають інтегралом Фур'є, де $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ мають вигляд (45).

Перетворимо трохи інтеграл Фур'є.

Якщо розглядати інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\,,$$

як функцію аргументу λ, вона буде функцією парного, тому:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right\}d\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\widetilde{A}(\lambda)\cos\lambda x+\widetilde{B}(\lambda)\sin\lambda x\right\}d\lambda\,,$$

$$\widetilde{A}(\lambda)=\frac{1}{2}A(x),\quad \widetilde{B}(\lambda)=\frac{1}{2}B(\lambda).$$

3.6 Комплексна форма інтеграла Фур'є

Розглянемо ще інтеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt\right\}d\lambda\,.$$

Через те, що справедлива нерівність:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt\right| < \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty,$$

внутрішній інтеграл:

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$$

збігається.

Розглянемо тепер зовнішній інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda)\,d\lambda.$$

Зауваження

Взагалі під невласним інтегралом ми розуміємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_{B}^{A} f(x)\,dx.$$

Якщо ж існує лише границя:

$$\lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{B} f(x)\,dx,$$

тоді кажуть, що інтеграл збігається у розумінні головного значення.

У нашому випадку ми можемо гарантувати збіжність невласного інтеграла у розумінні головного значення.

Дійсно:

$$\int_{-B}^{B} \Phi(\lambda)\,d\lambda = 0,$$

через те що $\Phi(\lambda)$ непарна функція відносно λ і якщо $B \to \infty$, тоді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Таким чином:

$$i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt \right\} d\lambda = 0. \qquad (46)$$

Якщо додати рівність (46) до інтегральної формули Фур'є (44) отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(t-x)}\,dt\right\}d\lambda$$

показникова або комплексна формула Фур'є, але лише у розумінні головного значення.

Взагалі потрібно писати:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(t-x)}\,dt\right\}d\lambda .$$

Зауваження

Інтеграл Фур'є спрощується, якщо функція $f(x)$ парна, або непарна.

Наприклад:

якщо $f(x)$ парна, тобто $f(-x)=f(x)$, тоді:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)dx,$$

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\;dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt=0,$$

і тому:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,$$

де $A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt$,

або, тому що $A(\lambda)$ - парна функція:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt\right\}\cos\lambda\,d\lambda .$$

Аналогічний результат отримаємо, якщо $f(x)$ непарна функція, тобто:

$$f(-x)=-f(x),$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt\right\}\sin\lambda x\,d\lambda .$$

Нехай тепер задана довільна функція, яка задовольняє на інтервалі $(0, +\infty)$ умовам Діріхле і абсолютно інтегрована.

Перший шлях – продовжити цю функцію парним чином на усю числову вісь.

Її розкладання буде мати вигляд:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \cos \lambda x \, dt \, d\lambda \, ,$$

причому наша функція буде мати таке розкладання лише при $x > 0$.

Другий шлях – продовжити функцію непарним чином і здійснити розкладання лише за синусами:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \lambda t \sin \lambda x \, dt \, d\lambda \qquad (x > 0).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1966.

І.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 5

Ряди

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Ковалішина І.В.

Редактор Дмитроченко Л.І.

Підписано до друку 31.05.02 р.

Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,5. Обл.-вид.арк. 1,75.

Замовлення № 467 Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7