Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу. Ч.6. Операційне числення: Конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2003. – Ч. 6. - 34 с.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 21 січня 2003 р., протокол № 4.

Рецензент

проф. А.А.Янцевич (ХНУ)

ЗМІСТ

ПЛАН

1 Визначення оригіналу та зображення. Приклади.
2 Найростіші властивості перетворення Лапласа:

а) лінійність;
б) теорема подібності;
в) теорема запізнювання (або зсуву);
г) теорема згасання;
д) диференціювання оригіналу;
е) інтегрування оригіналу.

4 Таблиця зображень.
5 Диференціювання і інтегрування зображень.
6 Згортка, теорема Дюамеля.
7 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.
8 Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.

§ 1 ОРИГІНАЛ І ЗОБРАЖЕННЯ

Означення 1. **Оригіналом** будемо називати комплексно-значну функцію $f(t)$ дійсного аргументу t, яка задовольняє умови:

а) $f(t)$ неперервна на всій числовій осі t за можливим виключенням точок розриву першого роду, причому на кожному скінченому відрізку точок розриву має бути скінчена множина;
б) $f(t)=0$, якщо t<0;
в) $\exists$M>0 і $s_0 \geq 0$ такі, що для $\forall t$ $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$

(s_0 – називають **показником росту** функції $f(t)$; в частинному випадку, коли $s_0 = o$, $f(t)$ - обмежена функція).

Наприклад,

1 $f(t)=\begin{cases}\cos \beta t, t \geq 0\\ 0, t \leq 0\end{cases}$

є оригіналом, її показник росту $s_0 = 0$;

2 $f(t)=\begin{cases} cht, t \geq 0\\ 0, t \leq 0\end{cases}$

$cht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = e^t \cdot \dfrac{1+e^{-2t}}{2} \leq e^t$, тобто $f(t)$ є оригіналом з показником росту $s_0 = 1$;

3 Функція $f(t)=\dfrac{1}{t}$ не є оригіналом тому, що має в точці $t=0$ нескінчений розрив, що суперечить умові а.

Означення 2. **Зображенням** функції $f(t)$ називають функцію комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається співвідношенням

$$g(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt . \qquad (1)$$

Інтеграл у правій частині рівності (1) називають **інтегралом Лапласа.**

Операцію переходу від оригіналу $f(t)$ до зображення $g(p)$ називають **перетворенням Лапласа.**

Фразу „оригінал $f(t)$ має зображення $g(p)$" записують символічно так:

$$Lf(t) = g(p). \qquad (2)$$

Теорію **перетворень Лапласа** називають **операційним численням.**

Зауваження. Практична цінність операційного числення полягає в тому, що диференціюванню оригіналів відповідає множення їх зображень на „р", а інтегруванню оригіналів – ділення їх зображень на „р", тобто складним операціям над оригіналами відповідають прості операції над зображеннями.

Схема застосування операційного числення така:

1) від даних функцій переходять до їх зображень;
2) виконуючи відповідні більш прості операції над отриманими зображеннями, знаходять зображення шуканої функції;
3) за отриманим зображенням шуканої функції відновлюють її оригінал.

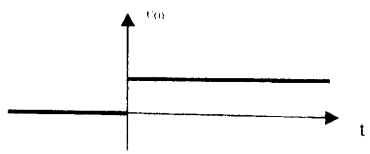
Основою операційного числення є таблиця зображень. Ця таблиця складається або безпосередньо за означенням зображення, або за допомогою теорем операційного числення.

Наведемо приклади безпосереднього отримання зображень.

Приклад 1. Функцію $U(t)$ називають одиничною, якщо

$$U(t)=\begin{cases}0, t \leq 0\\ 1, t \geq 0\end{cases}$$

Графік $U(t)$ має вигляд



Ця функція , очевидно, є оригіналом. Знайдемо її зображення :

$$LU(t)=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}U(t)dt=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}dt=\left.\left(-\frac{\ell^{-pt}}{p}\right)\right|_0^{+\infty},$$

але, якщо $p=s+i\sigma$, тоді при умові $t\to+\infty, s>0$

$$\left|\ell^{-pt}\right|=\left|\ell^{-(s+i\sigma)t}\right|=\ell^{-st}\cdot\left|\ell^{-i\sigma t}\right|=\ell^{-st}\to 0,$$

тобто $LU(t)=\frac{1}{p}, s=\operatorname{Re}p\geq 0$. Отже,

LU(t)=1/p , Rep>0 (3)

Приклад 2. Визначити зображення оригіналу $f(t)=\ell^{qt}$,

де q - довільне комплексне число:

$$L\ell^{qt}=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}\cdot\ell^{qt}dt=\int_0^{+\infty}\ell^{-(p-q)t}dt=\left.\left(-\frac{\ell^{-(p-q)t}}{p-q}\right)\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-q},$$ якщо Re(p-q)>0 (Rep>Req).

Таким чином,

Le^{qt}=1/p-q , (Rep>Req) (4)

Приклад 3. Визначити зображення оригіналу $f(t)=\cos\omega t$,

де ω - дійсне число:

$$L\cos\omega t=L\left(\frac{\ell^{i\omega t}+\ell^{-i\omega t}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}\cdot\ell^{i\omega t}dt+\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}\cdot\ell^{-i\omega t}dt\right)=\frac{1}{2}\left(L\ell^{i\omega t}+L\ell^{-i\omega t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega t}+\frac{1}{p+i\omega t}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Отже,

$$L\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \operatorname{Re}p\geq 0. \quad (5)$$

Аналогічно отримуємо

$$L\sin\omega t=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \operatorname{Re}p\geq 0. \quad (6)$$

Зауваження. Формули (5), (6) справедливі і для випадку комплексного $\omega=\alpha+i\beta$, але умова $\operatorname{Re}p\geq 0$ замінюється на умову $\operatorname{Re}p\geq|\operatorname{Im}\omega|$.

Приклад 4. Визначимо зображення оригіналу $f(t)=ch\omega t=\frac{1}{2}\left(\ell^{\omega t}+\ell^{-\omega t}\right)$,

де ω - комплексне число:

$$Lch\omega t=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}ch\omega t dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}\cdot\left(\ell^{\omega t}+\ell^{-\omega t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(L\ell^{\omega t}+L\ell^{-\omega t}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2},$$

де $\operatorname{Re}p\geq|\operatorname{Re}\beta\omega|$, тобто для гіперболічного косинуса зображення таке:

$$Lch\omega t=\frac{p}{p^2-\omega^2}, \operatorname{Re}p\geq|\operatorname{Re}\omega|. \quad (7)$$

Аналогічно для гіперболічного синуса $sh\omega t=\frac{1}{2}\left(\ell^{\omega t}-\ell^{-\omega t}\right)$ зображення має вигляд

$$Lsh\omega t=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \operatorname{Re}p\geq|\operatorname{Re}\omega|. \quad (8)$$

§ 2 ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ

Теорема. Зображення $g(p)$ оригіналу $f(t)$ визначено у півплощині $\operatorname{Re}p>s_0$, де s_0 – показник росту оригіналу.

Доведення. Із означення

$$g(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

випливає, що зображення $g(p)$ визначено в таких точках площини комплексної змінної „p", де інтеграл Лапласа збігається, тобто потрібно перевірити , що інтеграл Лапласа збігається у півплощині $\operatorname{Re}p>s_0$.

Дійсно, якщо $\operatorname{Re}p=s>s_0$, тоді

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\right| \le \int_0^{+\infty}\left|e^{-pt}\right|\left|f(t)\right|dt \le \int_0^{+\infty} e^{-st} M e^{s_0 t}dt = M\cdot\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t}dt = \left.\left(-M\frac{e^{-(s-s_0)t}}{s-s_0}\right)\right|_0^{+\infty} = M\cdot\frac{1}{s-s_0}\,.$$

Але

$$M\frac{1}{s-s_0}\le+\infty$$

і тому інтеграл Лапласа збігається (навіть абсолютно) в півплощині $\operatorname{Re}p>s_0$, а це означає, що зображення $g(p)$ визначено саме в цій півплощині, що і потрібно було довести.

§ 3 ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

3.1 Лінійність перетворення Лапласа

Якщо $Lf_1(t)=g_1(p), Lf_2(t)=g_2(p)$, тоді для $\forall C_1, C_2$ справедлива рівність

$$L\big(C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)\big)=C_1 g_1(p)+C_2 g_2(p). \tag{9}$$

Співвідношення (9) є наслідком лінійності операції інтегрування.

3.2 Теорема подібності

Якщо $Lf(t)=g(p)$ і число a>0, тоді

$$Lf(at)=\frac{1}{a}g\left(\frac{p}{a}\right). \tag{10}$$

Дійсно,

$$Lf(at)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt=\left|\begin{matrix} at=z \\ dt=\frac{1}{a}dz \\ \int_0^{+\infty}\approx\int_0^{+\infty}\end{matrix}\right|=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z)dz=\frac{1}{a}g\left(\frac{p}{a}\right).$$

3.3 Теорема запізнювання (або зсуву)

Якщо $Lf(t)=g(p)$ і число b>0, тоді

$$f(t-b)=e^{-bp}g(p), \tag{11}$$

де, за означенням оригіналу, $f(t-b)=0$ при t-b<0, тобто при t<b.

Доведення. За означенням зображення

$$Lf(t-b)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt=\int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)dt+\int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt=\int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} t-b=z \\ dt=dz \\ \int_b^{+\infty}\approx\int_0^{+\infty}\end{matrix}\right|=\int_0^{+\infty} e^{-p(b+z)} f(z)dz=e^{-pb}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-pz} f(z)dz=e^{-pb}g(p).$$

Наслідок. Сумісне застосування теорем подібності і запізнювання дає такий результат:

$$f(at-b)=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}p}g\left(\frac{p}{a}\right). \tag{12}$$

Дійсно,

$$Lf(at-b)=Lf\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}p}g\left(\frac{p}{a}\right).$$

3.4 Теорема згасання

Якщо $Lf(t)=g(p)$, тоді при будь-якому комплексному α

$$L\ell^{-\alpha t}f(t)=g(p+\alpha),\mathrm{Re}\,p\ge s_0-\mathrm{Re}\,\alpha. \qquad (13)$$

Дійсно,

$$L\ell^{-\alpha t}f(t)=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}\cdot\ell^{-\alpha t}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\ell^{-(p+\alpha)t}f(t)dt=g(p+\alpha).$$

При цьому, якщо операційне співвідношення $Lf(t)=g(p)$ має місце в півплощині Rep=s>s_0 , то формула (13) має місце при $\mathrm{Re}(p+\alpha)\ge s_0$, тобто при $\mathrm{Re}\,p\ge s_0-\mathrm{Re}\,\alpha$.

Теорема згасання дозволяє за відомим зображенням оригіналу отримувати зображення добутку оригіналу на показникову функцію.

Приклад. Із співвідношення

$$L\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2},\mathrm{Re}\,p\ge 0$$

отримуємо співвідношення для оригіналу

$$L\left(\ell^{-\alpha t}\cdot\cos\omega t\right)=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2},\mathrm{Re}\,p\ge-\mathrm{Re}\,\alpha. \qquad (14)$$

Аналогічно утворюються і такі зображення:

$$L\left(\ell^{-\alpha t}\cdot\sin\omega t\right)=\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},\mathrm{Re}\,p\ge-\mathrm{Re}\,\alpha, \qquad (15)$$

$$L\left(\ell^{-\alpha t}\cdot ch\omega t\right)=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\,\mathrm{Re}\,p\ge|\mathrm{Re}\,\omega|-\mathrm{Re}\,\alpha, \qquad (16)$$

$$L\left(\ell^{-\alpha t}\cdot sh\omega t\right)=\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},\mathrm{Re}\,p\ge|\mathrm{Re}\,\omega|-\mathrm{Re}\,\alpha. \qquad (17)$$

3.5 Диференціювання оригіналу

Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником росту s_0, причому $Lf(t)=g(p)$ і існує (принаймні при $t\ne 0$) похідна $f'(t)$, яка теж є оригіналом, тоді зображення похідної $f'(t)$ має вигляд

$$Lf'(t)=pg(p)-f(0),\mathrm{Re}\,p\ge 0, \qquad (18)$$

де $f(0)$ є правим граничним значенням, тобто $f(0)=\lim\limits_{t\downarrow 0}f(t)$.

Доведення. Припускаючи, що $\mathrm{Re}\,p=s\ge s_0$, і застосовуючи формулу інтегрування частинами, отримуємо

$$Lf'(t)=\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}f'(t)dt=\Big|_0^{+\infty}\ell^{-pt}f(t)+p\int_0^{+\infty}\ell^{-pt}f(t)dt, \qquad (19)$$

якщо обидва доданки (подвійна підстановка і невласний інтеграл) в правій частині існують.

Розглянемо перший доданок: якщо $t\to+\infty$

$$\left|\ell^{-pt}f(t)\right|\le\ell^{-st}M\ell^{s_0t}=M\ell^{-(s-s_0)t}\to 0,$$

тому що s-s_0 >0, і $\lim\limits_{t\to+\infty}\ell^{-pt}f(t)=0$, тобто підстановка верхньої границі $t=+\infty$ у подвійній підстановці дорівнює нулю.

Далі, із того, що $f(t)$ є оригіналом, випливає, що $f(t)$ в точці $t=0$ може мати лише точку розриву першого роду, а це означає, що в такій точці існує праве граничне значення $\lim\limits_{t\downarrow 0}\ell^{-pt}f(t)=f(0)$.

Отже, перший доданок правої частини рівності (19) існує і дорівнює $[-f(0)]$.

Другий доданок існує і дорівнює $pg(p)$ за теоремою § 2.

Таким чином, рівність (19) можна записати так: $Lf'(t)=pg(p)-f(0)$.

Зауваження 1 У частинному випадку, коли $f(t)$ неперервна в точці

$t=0$, тоді $f(0)=\lim\limits_{t\uparrow 0}f(t)=0=\lim\limits_{t\downarrow 0}f(t)$, тобто $f(0)=0$.

В цьому випадку справедлива формула

$$Lf'(t) = pg(p), \operatorname{Re} p > s_0 . \qquad (20)$$

Зауваження 2 Правило диференціювання розповсюджується на похідні вищих порядків так: якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником росту „s_0", причому $Lf(t) = g(p)$, і існують (принаймні при $t \neq 0$) похідні $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$, які, в свою чергу, теж виявляються оригіналами, тоді зображення похідної n-го порядку має вигляд

$$Lf^{(n)}(t) = p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \qquad (21)$$

де $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ - праві граничні значення функції $f(t)$ та її похідних в точці $t = 0$.

Зауваження 3 Якщо похідна $f^{(n-1)}(t)$ неперервна в точці $t = 0$ (тоді неперервними будуть і всі попередні похідні), тоді

$$f^{(n-1)}(0) = f^{(n-2)}(0) = \ldots = f'(0) = f(0) = 0$$

і формула (21) має вигляд

$$Lf^{(n)}(t) = p^n g(p), \operatorname{Re} p > s_0 . \qquad (22)$$

3.6 Інтегрування оригіналу

Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, причому $Lf(t) = g(p)$, тоді $\int_0^t f(z)dz$ теж є оригіналом і його зображення таке:

$$L\int_0^t f(z)dz = \frac{g(p)}{p}. \qquad (23)$$

Доведення. Очевидно, що умови а і б визначення оригіналу виконуються і для $\int_0^t f(z)dz$. Виконується і умова в тому, що

$$\left|\int_0^t f(z)dz\right| \le \int_0^t |f(z)dz| < \int_0^t M\ell^{s_0 z} dz = M \left.\frac{\ell^{s_0 z}}{s_0}\right|_0^t = M\frac{\ell^{s_0 t} - 1}{s_0} \le M_1 \ell^{s_0 t}.$$

Далі,

$$g(p) = Lf(t) = L\left(\int_0^t f(z)dz\right)' = pL\left(\int_0^t f(z)dz\right),$$

тобто

$$L\left(\int_0^t f(z)dz\right) = \frac{g(p)}{p}.$$

Приклад. Відомо, що зображення одиничної функції має вигляд

$$L1 = \frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0,$$

але тоді

$$Lt = \int_0^t 1dz = \frac{1}{p^2}, \operatorname{Re} p > 0; \quad Lt = \frac{1!}{p^2},$$

$$\int_0^t zdz = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \quad Lt^2 = \frac{2!}{p^3}, \operatorname{Re} p > 0,$$

$$\int_0^t z^2 dz = \frac{t^3}{3}, \Rightarrow \quad Lt^3 = \frac{3 \cdot 2!}{p \cdot p^3} = \frac{3!}{p^4}, \quad \operatorname{Re} p > 0 .$$

Продовжуючи, так ми знайдемо зображення для оригіналу , який є степеневою функцією:

$$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0 . \qquad (24)$$

3.7 Диференціювання зображення

Нехай $f(t)$ оригінал, а $g(p)$ - його зображення, тобто $g(p) = \int_0^{+\infty} \ell^{-pt} f(t)dt$.

Можна довести, що в півплощині Rep>s_0 функція $g(p)$ диференційована.

Обчислимо похідну $g(p)$, застосовуючи правило диференціювання за параметром

$$g'(p) = \int_0^{+\infty} (\ell^{-pt})'_p f(t)dt = \int_0^{+\infty} \ell^{-pt}[-tf(t)]dt, \qquad (25)$$

причому вираз $[-tf(t)]$ теж є оригіналом з показником росту $s_1 > s_0$.

Із (25) випливає, що оригіналом для зображення $g'(p)$ є функція $[-tf(t)]$, тобто справедлива рівність

$$L[-tf(t)] = g'(p), \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0 . \qquad (26)$$

Зауваження. Тому що $g(p) = Lf(t), \ g'(p)L[-tf(t)]$, то

$$g''(p) = L[-t(-tf(t))] = L[(-1)^2 t^2 f(t)] ,$$

$$g'''(p) = L[-t((-1)^2 t^2 f(t))] = L[(-1)^3 t^3 f(t)],$$

$$\approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx$$

$$g^{(n)}(p) = L[(-1)^n t^n f(t)].$$

Приклад 1. Відомо, що зображення оригіналу $ch\,at$ є вираз $L(ch\,at) = \frac{p}{p^2 - a^2}$, тоді оригіналу $[-tch\,at]$ відповідає зображення

$$L[-tch\,at] = \left(\frac{p}{p^2 - a^2}\right)' = \frac{(p^2 - a^2) - p \cdot 2p}{(p^2 - a^2)^2} = -\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2},$$

тобто має місце рівність

$$L[tch\,at] = \frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2} .$$

Приклад 2

$$L(e^{qt}) = \frac{1}{p - q} \Rightarrow L[-te^{qt}] = \left(\frac{1}{p - q}\right)' = -\frac{1}{(p - q)^2};$$

$$L[-t(te^{qt})] = \left(\frac{1}{(p - q)^2}\right)' = \frac{-1 \cdot 2}{(p - q)^3} \Rightarrow L[t^2 e^{qt}] = \frac{2!}{(p - q)^3},$$

$$\approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx \approx\approx \approx$$

$$L[t^n e^{qt}] = \frac{n!}{(p - q)^{n+1}} .$$

3.8 Інтегрування зображення

Якщо $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом (тоді $f(t)$ теж оригінал), тоді із співвідношення $Lf(t) = g(p)$ випливає співвідношення

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{+\infty} g(p)dp .$$

Доведення. Нехай $L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = F(p)$, тоді за правилом диференціювання зображення

$$F'(p) = L\left(-t\frac{f(t)}{t}\right) = -Lf(t) = -g(p),$$

тобто

$$g(p) = -F'(p).$$

Інтегруючи останню рівність у межах від „p” до „P” , отримуємо

$$-\{F(P) - F(p)\} = \int_p^P g(z)dz . \qquad (27)$$

Якщо в цій рівності перейти до границі при $P \to +\infty$ і врахувати при цьому, що зображення $F(p) \to 0, \ \operatorname{Re} p \to +\infty$

(дійсно, $|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt\right| \le \int_0^{+\infty}\left|e^{-(s+i\sigma)t}\right| \cdot \left|\frac{f(t)}{t}\right|dt \le \int_0^{+\infty} e^{-st} M e^{s_0 t}dt =$

$= M \Big|_0^{+\infty} \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s - s_0)} = M\frac{-1}{-(s - s_0)} = \frac{M}{s - s_0} \to 0, \quad s = \operatorname{Re} p \to +\infty$), остаточно отримаємо

$$F(p) = \int_p^{+\infty} g(z)dz ,$$

тобто

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{+\infty} g(z)dz .$$

Приклад. Зображення оригіналу $f(t) = \sin t$ дорівнює $L(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}$.

Функція $\frac{\sin t}{t}$ теж є оригіналом (тому, що $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ і тому в точці $t = 0$ має лише усувний розрив) і, за правилом інтегрування,зображення маємо

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\int_p^{+\infty}\frac{1}{p^2+1}dp=\left|arctg\ p\right|_p^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg\ p=arcctg\ p.$$

(дійсно, якщо

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-arctg\ p\ \Rightarrow\ arctg\ p=\frac{\pi}{2}-\alpha\ \Rightarrow\ p=tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\ \alpha\Rightarrow\ \alpha=arcctg\ p\ ).$$

Таблиця оригіналів і їх зображень

Оригінал $f(t)$	**Зображення** $g(p)$
1	$\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p>0$
e^{qt}	$\frac{1}{p-q}$, $\operatorname{Re} p\ge \operatorname{Re} q$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$ch\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge \lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge \lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$e^{-\alpha t}f(t)$	$g(p+\alpha$, $\operatorname{Re} p\ge s_0-\operatorname{Re}\alpha$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge -\operatorname{Re}\alpha$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p\ge -\operatorname{Re}\alpha$
$f(at)$	$\frac{1}{a}g(\frac{p}{a})$
$f(t-b)$	$e^{-bp}g(p)$
$f'(t)$	$pg(p)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n g(p)-p^{n-1}f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(z)dz$	$\frac{g(p)}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

$-t\,f(t)$	$g'(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty}g(p)dp$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\,ch\,\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
$t\,sh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
$t\,e^{qt}$	$\frac{1}{(p-q)^2}$
$t^n e^{qt}$	$\frac{n!}{(p-q)^{n+1}}$

§ 4 ПОНЯТТЯ ЗГОРТКИ

Означення. ***Згорткою*** функцій $a(t)$ і $b(t)$ дійсної змінної t називається функція $c(t)$, яка визначається рівністю

$$c(t)=\int_0^t a(t-z)\cdot b(z)dz\ . \qquad (28)$$

Символічно згортку позначають так:

$$a(t)*b(t),$$

тобто

$$a(t)*b(t)=\int_0^t a(t-z)b(z)dz\ .$$

Для згортки справедливі переставний, сполучний і розподільний закони:

1) $a(t)*b(t)=b(t)*a(t)$,
2) $(a*b)*c=a*(b*c)$,
3) $(a+b)*c=a*c+b*c$.

Операцію побудови згортки двох функцій будемо називати **згортанням** функцій.

Приклад 1. Нехай $a(t)=t$; $b(t)=\ell^t$, тоді згортка дорівнює

$$a(t)*b(t)=\int_0^t (t-z)\ell^z dz = \left| \int_0^t (t-z)\ell^z dz = \begin{vmatrix} u=t-z, & du=-dz \\ dv=\ell^z dz, & v=\ell^z \end{vmatrix} \right| = \Big| _0^t \left((t-z)\ell^z + \int \ell^z dz\right) =$$

$$= \Big| _0^t \left((t-z)\ell^z + \ell^z\right) = 0\cdot\ell^t - t + \ell^t - 1 = \ell^t - t - 1.$$

Таким чином, згортка має вигляд

$$t*\ell^t = \ell^t - t - 1.$$

Приклад 2. Нехай $a(t)=b(t)=\cos t$, тоді

$$a(t)*b(t)=\int_0^t \cos(t-z)\cos z dz = \frac{1}{2}\int_0^t [\cos t + \cos(t-2z)]dz = \frac{1}{2}\Big|_0^t \cos t\cdot z - \frac{1}{4}\Big|_0^t \sin(t-2z) =$$

$$= \frac{1}{2}t\cdot\cos t - \frac{1}{4}[\sin(-t)-\sin t] = \frac{1}{2}t\cdot\cos t + \frac{1}{2}\sin t,$$ тобто

$$\cos t * \cos t = \frac{1}{2}(t\cdot\cos t + \sin t).$$

§ 5 ТЕОРЕМА МНОЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Нехай $g_1(p)$ і $g_2(p)$ два зображення. Розглянемо нову функцію

$$g_1(p)\cdot g_2(p).$$

Виникають два питання:

1) чи буде добуток $g_1(p)\cdot g_2(p)$ - зображенням ?

2) якщо добуток $g_1(p)\cdot g_2(p)$ є зображенням, то якому оригіналу він відповідає ?

Теорема . Добуток двох зображень $g_1(p)$ і $g_2(p)$ є зображенням згортки відповідних оригіналів, тобто якщо

$$Lf_1(t)=g_1(p),\ Lf_2(t)=g_2(p) \Rightarrow L(f_1(t)*f_2(t))=g_1(p)\cdot g_2(p) \quad (29)$$

Приклад Знайти оригінал $f(t)$, якщо відомо, що його зображення

$$g(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Розв'язання. Відомо, що функціям t, ℓ^t відповідають зображення

$$L\,t=\frac{1}{p^2},\quad L\,\ell^t=\frac{1}{p-1}$$

і тому згортці цих функцій відповідає добуток зображень

$$L(t*\ell^t)=\frac{1}{p^2(p-1)},$$

або оригіналом для зображення $g(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}$ є функція

$$f(t)=t*\ell^t=\ell^t-t-1.$$

Зауваження. Такий самий результат можна отримати інакше: розкласти раціональний дріб на елементарні дроби

$$\frac{1}{p^2(p-1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-1}=\frac{p^2(B+C)+p(A-B)-A}{p^2(p-1)},$$

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A=-1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{matrix}$$

тобто

$$\frac{1}{p^2(p-1)}=-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}$$

і кожному з доданків відповідає свій оригінал:

$$L(\ell^t)=\frac{1}{p-1},\ L(1)=\frac{1}{p},\ L(t)=\frac{1}{p^2},$$

тому оригіналом для зображення $g(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}=-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}$ буде функція $f(t)=-t-1+\ell^t$.

§ 6 ФОРМУЛА ДЮАМЕЛЯ

Нехай $f_1(t)$ - неперервно – диференційований на проміжку $[0,+\infty]$ оригінал, а $f_2(t)$ - неперервний на цьому проміжку оригінал. Тоді із співвідношень

$$Lf_1(t)=g_1(p),\ Lf_2(t)=g_2(p)$$

за теоремою множення зображень випливає рівність

$$L\left(\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)dz\right)=g_1(p)g_2(p).$$

Звідси , за правилом диференціювання оригіналів,

$$L\left(\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)dz\right)=pg_1(p)g_2(p),$$

або, якщо застосувати формулу для похідної за параметром інтеграла зі змінною верхньою границею

$$\left(\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,z)dz=\int_0^t f_t'(t,z)dz+f(t,t)\right),$$

її можна обчислити безпосередньо за означенням похідної, ми остаточно отримаємо формулу, яка називається **формулою Дюамеля:**

$$L\left(\int_0^t f_{1t}'(t-z)f_2(z)dz+f_1(0)f_2(t)\right)=pg_1(p)g_2(p).$$

Цю формулу можна переписати і за допомогою згортки так:

$$L\left[f_1'(t)*f_2(t)\right]=pg_1(p)g_2(p),$$

або

$$L\left[f_1(t)*f_2'(t)\right]=pg_1(p)g_2(p).$$

§ 7 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (І СИСТЕМ) ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Операційний метод дозволяє насамперед дуже просто розв'язувати лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

При розв'язанні таких рівнянь методом перетворень Лапласа шукана функція та її похідні замінюються їх зображеннями, після чого утворюється *алгебраїчне* лінійне рівняння відносно зображення шуканої функції. Розв'язуючи його, ми отримуємо так званий *операторний розв'язок*, після чого залишається відновити оригінал.

Аналогічно розв'язуються системи лінійних диференціальних рівнянь, а в теорії електроланцюгів – інтегро-диференціальні рівняння.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задані початкові умови (задача Коші)

$$y''-2y'+5y=5\sin 2t,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

Розв'язання. Нехай зображення шуканої функції таке: $Ly(t)=\overline{y(p)}$. Тоді перейдемо до зображень усіх елементів диференціального рівняння:

$$Ly(t)=\overline{y(p)},$$

$$Ly'(t)=p\overline{y(p)}-1,$$

$$Ly''(t)=p^2\overline{y(p)}-p\cdot 1-2.$$

$$L(\sin 2t)=\frac{2}{p^2+4}.$$

Рівняння в операторній формі таке:

$$p^2\bar{y}-p-2-2(p\bar{y}-1)+5\bar{y}=5\frac{2}{p^2+4},$$

$$\bar{y}(p^2-2p+5)=p+\frac{10}{p^2+4},$$

$$\bar{y}=\frac{p^3+4p+10}{(p^2+4)(p^2-2p+5)}.$$

Розкладемо раціональний дріб в правій частині на елементарні дроби

$$\frac{p^3+4p+10}{(p^2+4)(p^2-2p+5)}=\frac{Ap+B^{p^2-2p+5}}{p^2+4}+\frac{Cp+D^{p^2+4}}{p^2-2p+5}\,.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів A, B, C, D приводимо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях букви „р” зліва і справа в чисельниках дробів. Це правило випливає із таких міркувань:

1) якщо рівні дроби з рівними знаменниками, то рівні і їх чисельники;

2) чисельники є многочленами;

3) два многочлени будуть рівними, якщо рівні коефіцієнти при однакових степенях букви „р”.

$$\begin{array}{l|l} p^3 & A+C=1 \\ p^2 & -2A+B+D=0 \\ p & 5A-2B+4C=4 \\ 1 & 5B+4D=10 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B+D=2A \\ A-2B=0 \\ B+8A=10 \end{cases}$$

Розв’язуючи останню систему, отримуємо такі значення для коефіцієнтів:

$$A=\frac{20}{17},\quad B=\frac{10}{17},\quad C=-\frac{3}{17},\quad D=\frac{30}{17}.$$

Таким чином, операторний розв’язок рівняння такий:

$$\bar{y}(p)=\frac{20}{17}\cdot\frac{p}{p^2+4}+\frac{10}{17}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}-\frac{3}{17}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{30/17-3/17}{(p-1)^2+4}.$$

Відповідний оригінал має вигляд

$$y(t)=\frac{20}{17}\cos 2t+\frac{5}{17}\sin 2t-\frac{3}{17}e^t\cos 2t+\frac{27}{34}e^t\sin 2t.$$

Приклад 2. Розв’язати операційним методом систему диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах (задачу Коші)

$$\begin{cases} y'=y-2z, \\ z'=2y+6z, \end{cases}\quad y(0)=0,\ z(0)=3.$$

Розв’язання. Знаходимо зображення усіх елементів системи

$$Ly=\overline{y(p)},\qquad Lz=\overline{z(p)},$$
$$Ly'=p\overline{y(p)},\quad Lz'=p\overline{z(p)}-3$$

і записуємо операторну систему

$$\begin{cases} p\overline{y(p)}=\overline{y(p)}-2\overline{z(p)} \\ p\overline{z(p)}-3=2\overline{y(p)}+6\overline{z(p)} \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} (p-1)\overline{y(p)}+2\overline{z(p)}=0, \\ -2\overline{y(p)}+(p-6)\overline{z(p)}=3. \end{cases}$$

Розв’язуємо цю систему за правилом Крамера, а саме: знаходимо головний визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ -2 & p-6 \end{vmatrix}=(p-1)(p-6)+4=p^2-7p+10=(p-2)(p-5).$$

$$\Delta_{\bar y}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & p-6 \end{vmatrix}=-6;\qquad \Delta_{\bar z}=\begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3(p-1);$$

$$\overline{y(p)}=\frac{\Delta_{\bar y}}{\Delta}=\frac{-6}{(p-2)(p-5)},\qquad \overline{z(p)}=\frac{\Delta_{\bar z}}{\Delta}=\frac{3(p-1)}{(p-2)(p-5)}\ \Rightarrow$$

$$\overline{y(p)}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p-5},\qquad \overline{z(p)}=\frac{-1}{p-2}+\frac{4}{p-5}.$$

Відшуканим зображенням відповідають такі оригінали:

$$\overline{y(p)}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p-5}\ \Rightarrow\ y(t)=2e^{2t}-2e^{5t};\quad \overline{z(p)}=\frac{-1}{p-2}+\frac{4}{p-5}\ \Rightarrow z(t)=-e^{2t}+4e^{5t}.$$

Отже, розв’язок системи такий:

$$\begin{cases} y(t)=2e^{2t}-2e^{5t}, \\ z(t)=-e^{2t}+4e^{5t}. \end{cases}$$

Зауваження 1. Операторний метод зручний у тому випадку, коли права частина неоднорідного диференціального рівняння має спеціальний вигляд.

Якщо права частина рівняння має довільний вигляд, тоді для його розв'язання можна застосувати згортку функцій, або формулу Дюамеля.

Зауваження 2. Операційним методом можна розв'язувати також лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, і навіть диференціальні рівняння у частинних похідних, але для цього потрібні відомості про так звані „спеціальні функції", а саме: гамма-функції та функції Бесселя.

§ 8 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ДОВІЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо спочатку як можна розв'язати такі рівняння операторним способом за допомогою згортки.

Будемо розв"язувати диференціальне рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t) \tag{30}$$

при нульових початкових умовах

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 .$$

Операторне рівняння для такої задачі Коші має вигляд

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n\right)\overline{y(p)} = F(p), \tag{31}$$

де

$$Lf(t) = F(p).$$

Позначимо многочлен

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = \mathrm{M}(p).$$

Рівняння (31) можна записати так:

$$\mathrm{M}(p)\overline{y(p)} = F(p), \tag{31*}$$

або

$$\overline{y(p)} = \frac{1}{\mathrm{M}(p)} \cdot F(p).$$

Якщо позначити

$$\frac{1}{\mathrm{M}(p)} = G(p), \tag{32}$$

тоді операторний розв"язок рівняння (30) буде таким:

$$\overline{y(p)} = G(p) \cdot F(p) ,$$

а оригінал $y(t)$ дорівнює згортці функцій $g(t), f(t)$, де $g(t)$ є оригіналом зображення

$$Lg(t) = G(p),$$

тобто

$$y(t) = g(t) * f(t).$$

Таким чином, послідовність дій при розв"язанні диференціального рівняння (30) повинна бути такою:

1) записуємо рівняння (30) в операторній формі (31), (31*)

$$\mathrm{M}(p)\overline{y(p)} = F(p);$$

2) визначаємо із нього операторний розв'язок

$$\overline{y(p)} = \frac{1}{\mathrm{M}(p)} \cdot F(p);$$

3) вводимо у розгляд функцію

$$G(p) = \frac{1}{\mathrm{M}(p)};$$

4) відшукуємо оригінал, якому відповідає зображення $G(p)$;

5) згортка функцій $g(t) * f(t)$ має зображення

$$L[g(t) * f(t)] = G(p) \cdot F(p),$$

тобто є розв'язком рівняння (30)

$$y(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t g(t - z) f(z) dz.$$

Зауважимо, що це правило можна застосовувати і в тому випадку, коли початкові умови відрізняються від нульових.

Приклад. $y'' - y = \frac{1}{1+e^t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання.

1) записуємо операторну форму нашого рівняння:

$$Ly = \overline{y(p)},$$
$$Ly' = p\overline{y(p)} - 2,$$
$$Ly'' = p^2\overline{y(p)} - 2p - 1,$$

$$L\left(\frac{1}{1+e^t}\right) = F(p),$$

$$p^2\overline{y} - 2p - 1 - \overline{y} = F(p),$$
$$(p^2-1)\overline{y} = F(p) + 2p + 1,$$
$$M(p) = p^2 - 1,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M(p)}F(p) + \frac{2p+1}{M(p)}; \qquad (*)$$

2) $\frac{1}{M(p)} = G(p) = \frac{1}{p^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{p-1} - \frac{\frac{1}{2}}{p+1}$; $\frac{2p+1}{M(p)} = \frac{2p+1}{p^2-1} = \frac{\frac{3}{2}}{p-1} + \frac{\frac{1}{2}}{p+1}$;

3) визначаємо далі оригінали:

$\frac{1}{M(p)} = G(p) \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$; $\frac{2p+1}{M(p)} = N(p) \Rightarrow n(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$;

4) визначаємо оригінал зображення

$$G(p)\cdot F(p) \Rightarrow g(t)*f(t) = \int_0^t g(t-z)f(z)dz = \int_0^t \left(\frac{1}{2}e^{t-z} - \frac{1}{2}e^{-(t-z)}\right)\frac{1}{1+e^z}dz =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\int_0^t \frac{e^{-z}}{1+e^z}dz - \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t \frac{e^z}{1+e^z}dz = \frac{1}{2}e^t\int_0^t \frac{-e^{-z}}{e^{-z}+1}d(e^{-z}) - \frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^t \ln|1+e^z| =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\int_0^t \frac{-e^{-z}-1+1}{e^{-z}+1}d(e^{-z}) - \frac{1}{2}\{\ln|1+e^t| - \ln 2\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\Big|_0^t\left(-e^{-z} + \ln|e^{-z}+1|\right) - \frac{1}{2}e^{-t}\{\ln|1+e^t| - \ln 2\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\{\ln|e^{-t}+1| - e^{-t} - \ln 2 + 1\} - \frac{1}{2}e^{-t}\{\ln|1+e^t| - \ln 2\}.$$

Переходячи до $y(t)$, отримуємо $y(t) = g(t)*f(t) + n(t)$, тобто

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t\{\ln|1+e^{-t}| - e^{-t} + 1 - \ln 2\} - \frac{1}{2}e^{-t}\{\ln|1+e^t| - \ln 2\} + \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

§ 9 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ ДЮАМЕЛЯ

Будемо розглядати диференціальне рівняння (30)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t)$$

при нульових початкових умовах

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Зауважимо, що випадок, коли початкові умови відрізняються від нуля, можна звести до нульових початкових умов заміною шуканої функції $y(t)$ на нову функцію за формулою

$$x(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}y^{(k)}(0).$$

Припустимо далі, що відомий розв'язок рівняння (30) при правій частині, яка дорівнює „1", і нульових початкових умовах $y_1(t)$

$$a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1 = 1 \;;\; y_1(0) = y_1'(0) = \cdots = y_1^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (33)$$

Операторне рівняння для цієї задачі має вигляд

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n\right)\overline{y_1(p)} = \frac{1}{p}, \qquad (34)$$

або

$$M(p)\overline{y_1}(p)=\frac{1}{p},$$

де $\overline{y_1(p)}$ - зображення розв'язку $y_1(t)$ задачі (33), тобто

$$p\overline{y_1}(p)=\frac{1}{M(p)}. \qquad (35)$$

Але ж операторне рівняння для задачі (30) має вигляд

$$M(p)\overline{y(p)}=F(p), \qquad (36)$$

де $\overline{y(p)}, F(p)$ - зображення розв'язку $y(t)$ рівняння (30) і правої його частини $f(t)$. Із (36) і (35) маємо

$$\overline{y(p)}=\frac{F(p)}{M(p)}=p\overline{y_1(p)}F(p). \qquad (37)$$

Далі застосовуємо формулу Дюамеля, а саме: зображенню $p\overline{y_1}(p)F(p)$ відповідає оригінал

$$p\overline{y_1}(p)F(p) \Rightarrow \int_0^t y_1'(t-z)f(z)dz+y_1(0)f(t),$$

але $y_1(0)=0$ і тому зображенню $\overline{y(p)}=p\overline{y_1(p)}F(p)$ відповідає оригінал

$$\int_0^t y_1'(t-z)f(z)dz,$$

тобто розв'язок рівняння (30) такий:

$$y(t)=\int_0^t y_1'(t-z)f(z)dz,$$

де $y_1(t)$ - розв'язок рівняння (33).

Приклад. Розв'язати задачу Коші за допомогою формули Дюамеля

$$y''-y=\frac{1}{1+\ell^t}, \quad y(0)=y'(0)=0.$$

З цією метою записуємо допоміжне рівняння

$$y_1''-y_1=1$$

і розв'язуємо його операторним методом:

$$p^2\overline{y_1}(p)-y_1(p)=\frac{1}{p}\Rightarrow\overline{y_1}(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}=\frac{1}{p(p-1)(p+1)}=\frac{-1}{p}+\frac{\frac{1}{2}}{p-1}+\frac{\frac{1}{2}}{p+1} \Rightarrow$$

$$y_1(t)=-1+\frac{1}{2}\ell^t+\frac{1}{2}\ell^{-t}.$$

Далі, за формулою Дюамеля розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y(t)=\int_0^t y_1'(t-z)f(z)dz=$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{2}\ell^{t-z}+\frac{1}{2}\ell^{-(t-z)}-1\right)\frac{1}{1+\ell^z}dz=\frac{1}{2}\ell^t\int_0^t\frac{\ell^{-z}}{1+\ell^z}dz+\frac{1}{2}\ell^{-t}\int_0^t\frac{\ell^z}{1+\ell^z}dz-\int_0^t\frac{1}{1+\ell^z}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\ell^t\int_0^t\frac{(-\ell^{-z}-1)+1}{\ell^{-z}+1}d(\ell^{-z})+\frac{1}{2}\ell^{-t}\int_0^t\frac{\ell^z}{1+\ell^z}dz-\int_0^t\frac{\ell^{-z}}{1+\ell^{-z}}dz=$$

$$=\Big|_0^t\left[\frac{1}{2}\ell^t\left(-\ell^{-z}+\ln(\ell^{-z}+1)\right)+\frac{1}{2}\ell^{-t}\ln(1+\ell^z)+\ln(1+\ell^{-z})\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ell^t\left(-\ell^{-t}+\ln(\ell^{-t}+1)\right)+\frac{1}{2}\ell^{-t}\ln(1+\ell^t)+\ln(1+\ell^{-t})\right]-\left[\frac{1}{2}\ell^t(-1+\ln 2)+\frac{1}{2}\ell^{-t}\ln 2+\ln 2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\ell^t\left[\ln(\ell^{-t}+1)+1-\ln 2\right]+\frac{1}{2}\ell^{-t}\left[\ln(1+\ell^t)-\ln 2\right]+\ln(1+\ell^{-t})-\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Таким чином, остаточний результат має вигляд

$$y(t)=\frac{1}{2}\ell^t\left[\ln(\ell^{-t}+1)+1-\ln 2\right]+\frac{1}{2}\ell^{-t}\left[\ln(1+\ell^t)-\ln 2\right]+\ln(1+\ell^{-t})-\frac{1}{2}-\ln 2.$$

§ 10 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

10.1 Функції помилок, їх визначення та деякі властивості

Означення. Функція помилок (error function) визначається для будь-яких комплексних „z" рівністю

$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \ell^{-u^2}du. \qquad (38)$$

Зауважимо, що цю функцію ми будемо розглядати лише для дійсних значень аргументу z=x.

Властивості функції помилок

1 Зв'язок між інтегралом ймовірності $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \ell^{-\frac{t^2}{2}}dt$ і функцією помилок такий:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \ell^{-u^2}du=\left|\begin{matrix} u=\frac{t}{\sqrt{2}}, du=\frac{dt}{\sqrt{2}} \\ \int_0^x \approx \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \end{matrix}\right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\ell^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\left/\sqrt{2\pi}\right.\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\ell^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

тобто

$$erf(x)=2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

2 Функція $erf(x)$, - непарна

$$erf(-x)=-erf(x).$$

3 Функція erf(x) монотонно зростаючи швидко наближається до свого граничного значення

$$erf(+\infty)=2\Phi(+\infty)=2\frac{1}{2}=1.$$

4 Різницю між 1 і функцією помилок erf(x) позначають erfc(x) і вона дорівнює

$$erfc(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\ell^{-u^2}du-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\ell^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\ell^{-u^2}du,$$

тобто

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\ell^{-u^2}du. \qquad (39)$$

Зауваження. Функція помилок застосовується у різних питаннях прикладної математики, може бути корисною при розв'язанні задач теплопровідності; функція erf(x) табульована.

Зауваження 2. Функція помилок застосовується в операційному численні і може бути як оригіналом, так і зображенням.

Наведемо декілька формул без доведення.

Оригінали f(t)	Зображення g(p)
$erf(t)$	$\frac{1}{p}\ell^{\frac{p^2}{4}}erfc(\frac{p}{2})$
$erf(\frac{t}{2})$	$\frac{1}{p}\ell^{p^2}erfc(p)$
$\ell^t erf(\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{p-1}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})$	$\frac{1}{p}\ell^{-a\sqrt{p}}, \mathrm{Re}\,a>0, \mathrm{Re}\,p>0$
$\frac{\sin(2\sqrt{t})}{\pi t}$	$erf(\frac{1}{\sqrt{p}})$

Зауважимо, що співвідношення 5 є одним із найважливіших для розв'язання задач теплопровідності.

10.2 Операційне числення успішно застосовується для розв'язання задач математичної фізики.

Розглянемо нижченаведену **задачу.**

Відомо, що температура **U(x,t)** в стрижні задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де a^2 - сталий коефіцієнт (a>0).

Знайдемо розподіл температур у півобмеженому стрижні $0 \le x \le \infty$, коли початкова температура стрижня дорівнює нулю (початкова умова), а температура його лівого кінця залишається сталою і рівною U_0 (гранична , або крайова умова), тобто

$$U(x,0)=0; \quad U(0,t)=U_0 .$$

Вважаючи, що U, $\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, які розглядаються як функції аргументу „t",є оригіналами, і приймаючи, що

$$\overline{U}(x,p) = LU(x,t) = \int_0^{+\infty} \ell^{-pt} U(x,t)dt ,$$

отримуємо

$$L\frac{\partial U}{\partial t} = p\overline{U},$$

$$L\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{x} \ell^{-pt} U(x,t)dt = \int_0^{x} \ell^{-pt} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dt = \frac{d^2 \overline{U}}{dx^2}$$

(диференціювання $\overline{U}$ по „x" позначаємо символом „d", а не "∂" тому, що вважаємо „x" аргументом, а „p" – параметром).

Тоді операторне рівняння, яке відповідає даному диференціальному рівнянню з частинними похідними, буде мати вигляд

$$p\overline{U} = a^2 \frac{d^2 \overline{U}}{dx^2} , \qquad (40)$$

тобто є звичайним диференціальним рівнянням, яке містить у собі комплексний параметр „p".

Шуканий розв'язок цього рівняння повинен задовольняти умови

$$\overline{U}(0,p) = LU_0 = \frac{U_0}{p}.$$

Загальний розв'язок рівняння (40), який знаходиться за допомогою характеристичного рівняння $k^2 - \frac{p}{a^2} = 0$ такий:

$$\overline{U} = C_1 \ell^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 \ell^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

де $C_2=0$ тому, що інакше $\overline{U}$ буде необмежено зростати при $x \to +\infty$, що суперечить фізичному змісту задачі.

Застосовуючи далі граничну умову, маємо

$$\frac{U_0}{p} = \overline{U}(0,p) = C_1 \ell^0 \Rightarrow C_1 = \frac{U_0}{p}.$$

Таким чином, потрібний нам розв'язок операторного рівняння (40) такий:

$$\overline{U}(x,p) = \frac{U_0}{p} \ell^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \qquad (41)$$

Повертаючись до оригіналів, знаходимо оригінал – розв"язок даної задачі, а саме:

Зображенню (41) відповідає оригінал

$$U(x,t) = erfc(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} \ell^{-u^2} du \qquad (42)$$

або

$$U(x,t) = U_0(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \ell^{-u^2} du) = U_0(1 - erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}})) = U_0 - 2U_0\Phi(\frac{x}{2\sqrt{2t}a}).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.–М.: Наука, 1968. - т.2.

3 Римский-Корсаков Б.С. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа. - 1960.

І.В.Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 6

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Ковалішина І.В.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 28.01.03 р.

Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,0. Обл.-вид.арк. 2,25.

Замовлення № 122. Тираж 300 Ціна

Видавництво ХарДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.
Друкарня ХарДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7