УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

І.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 8

Диференціальне числення функцій кількох змінних

Конспект лекцій

Харків 2006

Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу. Ч.8. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Конспект лекцій. - Харків: УкрДАЗТ, 2005. - 21с.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 30 травня 2005 р., протокол № 9.

Рецензент
проф. А.А. Янцевич (ХНУ)

ЗМІСТ

§ 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У різних питаннях природознавства іноді ми зустрічаємо залежність одних змінних від кількох інших.

Наприклад, сила струму в електричному колі прямо пропорційна напрузі електричного струму і обернено пропорційна його опору.

Відоме рівняння Клапейрона для газу зв'язує між собою такі змінні величини, як тиск P, об'єм V, універсальну сталу R і абсолютну температуру T:

$$\mathbf{PV=RT.}$$

Така ситуація зустрічається часто, тому в математиці теж розглядають функцію кількох змінних.

Означення. Розглянемо трійку незалежних змінних x, y, z. Припустимо, що кожній упорядкованій трійці незалежних змінних із деякої області D відповідає певне число „u". В цьому випадку будемо казати, що змінна "u" є функцією трьох змінних x, y, z і будемо позначати її так:

$$u = f(x, y, z).$$

Область D називається <u>областю визначення функції</u>.

Зауваження. Трійку x, y, z можна розглядати як координати точки M(x,y,z) в просторовій системі координат.

Тоді область визначення функції D можна розглядати як деяку область в просторовій системі координат, а функцію u=f (x,y,z) - як функцію точки M

$$\boldsymbol{U=f\,(M).}$$

Така геометрична точка зору дозволяє розглядати функцію двох змінних u=f (x,y) як функцію точки M(x,y) у плоскій системі координат u=f (M);

функцію однієї змінної $u=f(x)$ - як функцію точки $M(x)$ з однією координатою.

Якщо розглядати функцію $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n- змінних, тоді точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ буде точкою в n –вимірному просторі, а функція буде функцією точки M

$$U=f(M).$$

Таким чином, визначення функції однієї або ж кількох змінних, як функції точки M, однакові, різниця полягає лише в тому, скільки координат має точка M.

Однаковість визначення дозволяє деякі факти із теорії функцій однієї змінної перенести в теорію функцій кількох змінних.

Наприклад, визначення і властивості границі функції, неперервність функції в точці та її властивості однакові для функції точки M, де M має одну, дві, три або більше координат.

Границя функції

Число A називається границею функції $u=f(M)$ при умові $M \to M_0$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ можна знайти додатне $\delta > 0$ таке, що із нерівності $M_0M < \delta$ випливає нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Границя функції позначається так:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

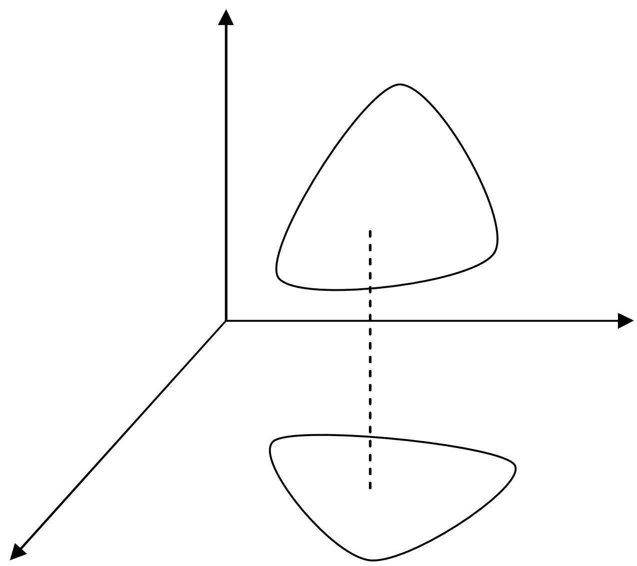
(Множина точок M, для яких відстань від точки M_0 менше $M_0M < \delta$, утворює окіл точки M_0 радіуса δ).

Неперервність функції

Функція $u=f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ можна знайти додатне $\delta > 0$ таке, що із нерівності $M_0M < \delta$ випливає нерівність $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

§ 2 ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ



Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x,y)$. Упорядковану пару незалежних змінних будемо розглядати як координати точок $M(x,y)$, які заповнюють область D на координатній площині XOY. Оберемо якусь фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$ із області D. Обчислимо значення функції в точці M_0, тобто $z_0 = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ і побудуємо в системі координат $XOYZ$ точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Таку побудову здійснимо для кожної точки $M \in D.$

Множина точок $P(x, y, z)$ $z = f(x, y)$ заповнює деяку **поверхню** в просторовій системі координат $XOYZ$. Саме ця **поверхня** і є **геометричним зображенням функції двох змінних.**

§ 3 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Означення 1. Нехай $u = f(x, y, z)$ є функцією трьох змінних і нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фіксована точка. Розглянемо нову точку $M(x_0+\Delta x, y_0, z_0)$, у якій змінилася лише перша координата x_0 на $x_0+\Delta x$ у порівнянні з координатами точки M_0, тобто тільки аргумент „x” функції $f(x, y, z)$ дістав приріст Δx, а два інших аргументи залишилися незмінними.

Обчислимо відповідний приріст функції в точці M_0 і позначимо його

$\Delta_x u = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$.

$\Delta_x u$ – називається частинним приростом функції $u = f(M)$ за аргументом „x".

Аналогічно визначаються частинні прирости функції $u = f(M)$ за аргументами „y" і "z", тобто

$\Delta_y u = f(M) - f(M_0) = f(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$,
$\Delta_z u = f(M) - f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$.

Означення 2. Частинною похідною функції $u = f(M)$ в точці M_0 називається границя відношення частинного приросту функції $u = f(M)$ до приросту відповідного аргументу при умові, що приріст цього аргументу прямує до нуля.

Позначаються частинні похідні так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = f_x'(M_0) = u_x'(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = f_y'(M_0) = u_y'(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0),$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = f_z'(M_0) = u_z'(M_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(M_0).$$

Приклад: $u = \ell^{xyz}; \quad u_x', \quad u_y', \quad u_z'$?

$$u_x' = \ell^{xyz} \cdot yz; \quad u_y' = \ell^{xyz} \cdot xz; \quad u_z' = \ell^{xyz} \cdot xy.$$

Зауваження. Значення частинних похідних залежать від вибору точки M_0. Якщо M_0 буде змінюватися, тоді будуть змінюватися і частинні похідні, тобто частинні похідні можна розглядати як функції незалежних аргументів x, y, z і обчислювати частинні похідні від цих нових функцій.

Частинні похідні від частинних похідних називають частинними похідними другого порядку і позначають їх так:

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad f''_{yx}=(f'_y)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$
$$f''_{xy}=(f'_x)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\qquad f''_{yy}=(f'_y)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Означення 3. Частинні похідні вищих порядків, у яких диференціювання виповнюється по різних змінних, називають ***мішаними*** частинними похідними.

Наприклад,

$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$ - мішана частинна похідна третього порядку.

Приклад: $u=x^5\cdot y^3;\ \ u''_{xy},\ \ u''_{yx}\ \ ?$

$$u'_x=5x^4\cdot y^3;\quad u''_{xy}=(u'_x)'_y=(5x^4y^3)'_y=15x^4y^2;$$
$$u'_y=3x^5y^2;\quad u''_{yx}=(u'_y)'_x=(3x^5y^2)'_x=15x^4y^2.$$

Теорема Шварца. Нехай z=f(x,y) – функція двох змінних. Якщо мішані частинні похідні другого порядку z''_{xy}, z''_{yx} неперервні в точці $M_0(x_0,y_0)$, тоді вони рівні між собою $z''_{xy}(M_0)=z''_{yx}(M_0)$.

§ 4 ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ

Означення. Розглянемо функцію u=f(x,y,z) і фіксовану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Задамо аргументам прирости Δx,Δy,Δz і точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ і розглянемо відповідний ***повний*** приріст функції

$$\Delta u=f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0).$$

Функція u=f(x,y,z) називається ***диференційованою*** в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, якщо повний приріст функції Δu можна записати у формі суми шести доданків

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z, \qquad (*)$$

де A, B, C – сталі величини, а α, β, γ - нескінченно малі величини при умові, що $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ одночасно прямують до нуля.

Мають місце два твердження.

Теорема 1 (пряме твердження)

Якщо функція u=f(x,y,z) диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тоді в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ існують частинні похідні $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$.

Доведення: маємо: функція u=f(x,y,z) – диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Треба довести: $\exists \; f_x'(M_0), f_y'(M_0), f_z'(M_0)$.

За умовою теореми справедлива формула $(*)$ для будь-яких значень приростів Δx, Δy, Δz.

Покладемо у рівності $(*)$ $\Delta x, \Delta y = 0, \Delta z = 0$ **і отримаємо**

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x. \qquad (1)$$

Очевидно, в цьому випадку $\Delta u = \Delta_x u.$ Поділимо обидві частини рівності (1) на Δx

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = A + \alpha$$

і знайдемо границю лівої і правої частини останньої рівності при умові, що $\Delta x \to 0.$

Оскільки $\Delta x \to 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0,$ то α теж прямує до нуля $(\alpha \to 0)$, крім того відомо, що A – стала величина, і тому границя правої частини існує і дорівнює числу A. Отже, має границю і ліва частина рівності (1)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=A.$$

Але, за означенням, ця границя дорівнює частинній похідній функції u=f(x,y,z) за аргументом «x», тобто існує $f_x'(M_0)$ і має місце рівність

$$f_x'(M_0)=A.$$

Аналогічно доводиться існування частинних похідних і рівності

$$f_y'(M_0)=B,\quad f_z'(M_0)=C.$$

Зауваження. Із доведеної теореми випливає, що A, B, C у формулі $(*)$ можна замінити частинними похідними, тобто має місце рівність

$$\begin{gathered}\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=\\ =f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+f_z'(M_0)\Delta z+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z\\ \Delta x\to 0,\Delta y\to 0,\Delta z\to 0\quad\Rightarrow\alpha\to 0,\beta\to 0,\gamma\to 0\end{gathered}\qquad (**)$$

Теорема 2 (обернене твердження)

Якщо функція u=f(x,y,z) має в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ неперервні частинні похідні, тоді функція u=f(x,y,z) буде диференційованою в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

§ 5 ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

Надалі будемо розглядати, як правило, диференційовані функції. Розглянемо детальніше формулу $(**)$.

$$\Delta u=\underbrace{f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+f_z'(M_0)\Delta z}+\underbrace{\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z}.$$

Якщо Δx, Δy, Δz прямують до нуля, тоді усі елементи останньої рівності будуть нескінченно малими величинами, але сума трьох останніх доданків правої частини буде прямувати до нуля швидше, ніж сума перших трьох доданків.

Тому головну роль у повному прирості функції відіграє сума перших трьох доданків правої частини рівності.

Означення. ***Головна лінійна*** частина повного приросту функції u=f(x,y,z)

В точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається ***повним диференціалом функції*** і позначається так:

$$du = f_x'(M_0)\Delta x + f_y'(M_0)\Delta y + f_z'(M_0)\Delta z.$$

Зауваження

Якщо Δx, Δy, Δz малі, повний приріст функції можна наближено дорівнювати повному диференціалу і застосовувати до наближених обчислень за формулою

$$u - u_0 = \Delta u \cong du \quad \Rightarrow$$
$$\underbrace{u \cong u_0 + du.}$$

Приклад: обчислити, хоча б наближено $\sqrt[3]{(5{,}01)^2 + 1{,}98}$.

Визначимо функцію двох змінних $\sqrt[3]{x^2 + y}$ і обчислимо наближено значення цієї функції в точці M(5,01;1,98). Для цього розглянемо значення функції в точці $M_0(5{,}2)$

$$z_0 = \sqrt[3]{5^2 + 2} = 3\,.$$

Шукане значення позначимо

$$z = \sqrt[3]{(5{,}01)^2 + 1{,}98.}$$

Тоді

$$z - z_0 = \Delta z \cong dz$$
$$z \cong z_0 + dz$$
$$z \cong z_0 + z_x'(M_0)\Delta x + z_y'(M_0)\Delta y.$$

Але $\Delta x = x - x_0 = 5{,}01 - 5 = 0{,}01, \quad \Delta y = y - y_0 = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$.

$$z_x'(M_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \cdot 2x \,\Big|_{M_0} = \frac{2\cdot 5}{3\sqrt[3]{(27)^2}} = \frac{10}{27},$$

$$z_y'(M_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \cdot 1 \,\Big|_{M_0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(27)^2}} = \frac{1}{27}.$$

$$z \cong 3 + \frac{10}{27}\cdot 0{,}01 - \frac{1}{27}\cdot 0{,}02 = 3 + \frac{1}{27}\cdot 0{,}08.$$

§ 6 Складена функція та її похідна

Означення. Нехай функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ визначені на сегменті $t \in [a,b]$; нехай функція $u = f(x,y,z)$ визначена в області D. Та нехай всі або деякі трійки значень функцій $x(t), y(t), z(t)$ потрапляють в область D визначення функції $u = f(x,y,z)$.

В цьому випадку із функцій $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ і функції $u = f(x,y,z)$ можна побудувати складену функцію аргументу t

$$u = f(x(t), y(t), z(t)),$$

яка визначена на сегменті $[a,b]$ або на його частині.

Функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ називаються **внутрішніми,** а функція $u = f(x,y,z)$ **- зовнішньою.**

Задача про похідну складеної функції формулюється так.

Знайти похідну складеної функції в точці t_0, якщо відомі похідні внутрішніх функцій в точці t_0 та частинні похідні зовнішньої функції у відповідній точці M_0.

Теорема. Якщо внутрішні функції мають похідні в точці t_0 і якщо $x_0 = x(t_0),\, y_0 = y(t_0),\, z_0 = z(t_0)$ і якщо зовнішня функція $u = f(x, y, z)$ диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тоді складена функція

$$u = f(x(t), y(t), z(t))$$

має в точці t_0 похідну, яка дорівнює

$$u_t'(t_0) = \frac{du}{dt}\Big|_{t_0} = f_x'(M_0)x'(t_0) + f_y'(M_0)y'(t_0) + f_z'(M_0)z'(t_0).$$

Доведення

Розглянемо фіксовану точку $t_0 \in [a, b]$ і задамо аргументу приріст Δt і обчислимо відповідні прирости внутрішніх функцій

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0),$$
$$\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0),$$
$$\Delta z = z(t_0 + \Delta t) - z(t_0).$$

А потім складемо повний приріст зовнішньої функції в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, який маємо право записати у формі $(**)$

$$\Delta u = f_x'(M_0)\Delta x + f_y'(M_0)\Delta y + f_z'(M_0)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z\,.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на приріст аргументу Δt

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f_x'(M_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(M_0)\frac{\Delta z}{\Delta t} + f_z'(M_0)\frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma\frac{\Delta z}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Нехай далі $\Delta t \to 0$, тоді $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ будуть одночасно прямувати до нуля (за умовою теореми $x(t), y(t), z(t)$ мають похідні в точці t_0, а тому будуть неперервними в точці t_0). Але одночасно з ними прямують до нуля і α, β, γ (за умовою теореми зовнішня функція диференційована в точці M_0).

Знайдемо границю обох частин рівності (2) при умові $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=f_x{}'(M_0)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y{}'(M_0)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+f_z{}'(M_0)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}+$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\gamma\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t},$$

тобто

$$\frac{du}{dt}=f_x{}'(M_0)x'(t_0)+f_y{}'(M_0)y'(t_0)+f_z{}'(M_0)z'(t_0).$$

Зауваження . Якщо внутрішні функції залежать від кількох змінних, складена функція теж буде функцією кількох аргументів і для неї можна обчислити частинні похідні за аналогічними правилами:

$$u=f(x,y,z),\qquad \begin{cases} x=x(v,w),\\ y=y(v,w),\\ z=z(v,w),\end{cases}$$

$$u=f(x(v,w),\,y(v,w),\,z(v,w)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial v}=f_x{}'\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+f_y{}'\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+f_z{}'\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial u}{\partial w}=f_x{}'\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+f_y{}'\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+f_z{}'\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

§ 7 ПОХІДНА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

Означення. Розглянемо рівняння F(x,y,z)=0. Задамо довільні значення $x=x_0,\ y=y_0$ і відшукаємо $z=z_0$ так, щоб рівняння перетворилося у тотожність $F(x_0,y_0,z_0)\equiv 0.$

Очевидно, z_0 залежить від обраних величин $x_0,\ y_0.$

Обираючи кожен раз різні значення x,y, ми будемо отримувати різні значення для $z.$

Таким чином, z є функцією від $x,\ y.$

Про таку функцію кажуть, що функція $z=f(x,y)$ визначається рівнянням $F(x,y,z)=0$ **неявно**.

Щоб отримати явний вираз для z, потрібно розв'язати рівняння $F(x,y,z)=0$ відносно z.

Задача про частинні похідні неявної функції формулюється так.

Знайти частинні похідні неявної функції, якщо відомі частинні похідні функції $F(x,y,z)$ за усіма аргументами (тобто F_x', F_y', F_z' - відомі).

Цю задачу можна розв'язати, не відшукуючи явного виразу для функції

$$z = f(x,y).$$

Припустимо, що ми розв'язали рівняння

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

та отримали

$$z = f(x,y) \tag{4}$$

Підставимо у (3) замість z його вираз із (4) і отримаємо тотожність

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0,$$

ліву частину якої будемо розглядати як складену функцію, для якої

$F(x,y,z)$ - зовнішня функція,

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ - внутрішні функції аргументів x, y.

Обчислимо частинні похідні складеної функції

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Маючи на увазі, що

$$\frac{\partial x}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial y}=1,$$

отримаємо рівності

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

і тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

де $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$- частинні похідні функції $F(x,y,z)$, яка є лівою частиною рівняння $F(x,y,z)=0$, яке визначає неявну функцію $z=f(x,y)$.

Приклад: $x^2+y^2+z^2-\ell^{xyz}=0;\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$?

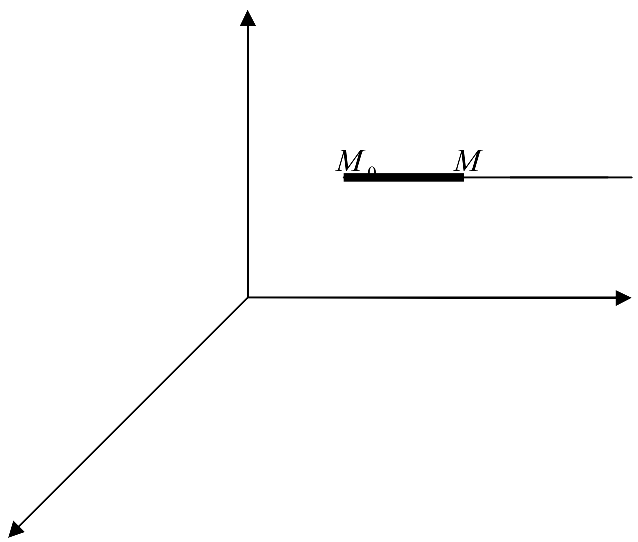
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\ell^{xyz}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-\ell^{xyz}\cdot yz}{2z-\ell^{xyz}\cdot xy},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y-\ell^{xyz}\cdot xz}{2z-\ell^{xyz}\cdot xy}.$$

§ 8 ПОХІДНА У ЗАДАНОМУ НАПРЯМІ

8.1 Геометричний зміст частинної похідної

Нехай задано функцію $u = f(x, y, z)$. Розглянемо частинну похідну цієї функції за аргументом y в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто

$$f_y'(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$



Побудуємо промінь із точки M_0 паралельний осі ОУ. Очевидно, що точка $M(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$ міститься на цьому промені на відстані Δy від точки M_0.

Таким чином, частинну похідну $f_y'(M_0)$ можна записати у вигляді

$$f_y'(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M},$$

причому умовою переходу до границі має бути таке: $M \to M_0$, залишаючись на цьому промені.

Аналогічно, можна записати і дві інші частинні похідні, тільки точку M обирати на променях, паралельних осям ОХ або OZ.

Отже, має місце таке ***правило*** побудови будь-якої частинної похідної функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1) будуємо промінь, паралельний координатній осі, який виходить із точки M_0;

2) на цьому промені визначаємо довільну точку M ;

3) обчислюємо значення функції $u = f(M)$ в точках M_0, M : $f(M_0), f(M)$;

4) обчислюємо границю відношення різниці значень функції $f(M) - f(M_0)$ до відстані між точками M_0 і M (або ж до довжини відрізку M_0M) при умові, що $M \to M_0$

$$f_{x,y,z}{}'(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}. \qquad (5)$$

Таким чином, будь-яка частинна похідна має однаковий вигляд; відмінність між ними полягає лише у тому, на якому промені міститься точка M.

8.2 Похідна у заданому напрямі

Якщо тепер ми розглянемо довільний промінь, проведений із точки M_0, і складемо таку ж границю, як у правій частині рівності (5), ми отримаємо нову конструкцію, яку ***називають похідною функції*** $u = f(M)$ ***в точці*** M_0 ***у заданому напрямі*** .

Означення. Розглянемо у просторі координат довільний одиничний вектор (орт), який утворює з координатними осями кути α, β, γ.

Із векторної алгебри відомо, що координатами орта є напрямні косинуси утворених з осями координат кутів, тобто $\vec{e}$ має координати $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Далі розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$ і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Проведемо із точки M_0 промінь, паралельний вектору $\vec{e}$.

На цьому промені оберемо довільну точку M і обчислимо границю

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = f_l{}'(M_0) = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0).$$

Ця границя називається похідною функції $u = f(M)$ в точці M_0 у заданому напрямі.

Похідна у заданому напрямі залежить від напряму $\vec{e}$, а також від частинних похідних функції $u = f(M)$, а саме

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = f_x^{\prime}(M_0)\cdot\cos\alpha + f_y^{\prime}(M_0)\cdot\cos\beta + f_z^{\prime}(M_0)\cdot\cos\gamma.$$

8.3 Градієнт

Розглянемо вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u = f(M)$ в точці M_0.

Вектор

$$grad\ f(M_0) = f_x^{\prime}(M_0)\vec{i} + f_y^{\prime}(M_0)\vec{j} + f_z^{\prime}(M_0)\vec{k}$$

називають ***градієнтом*** функції $u = f(M)$ в точці M_0.

За допомогою градієнта похідну у заданому напрямі можна записати як скалярний добуток векторів $\vec{e}$ і градієнта, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = grad\ f(M_0)\cdot\vec{e}.$$

Якщо тепер застосувати властивості скалярного добутку, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = grad\ f(M_0)\cdot\vec{e} = \left|\vec{e}\right|\Pi p_{\vec{e}}\, grad\ f(M_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \Pi p_{\vec{e}}\, grad\ f(M_0).$$

Висновок: Із останньої формули випливає, що похідна у заданому напрямі має найбільше значення у напрямі, який збігається з напрямом градієнта.

З іншого боку, похідну можна розглядати як приріст функції на одиницю довжини, тому напрям, у якому похідна має найбільше значення , є напрямом найбільшого зростання функції.

Таким чином, напрям градієнта збігається з напрямом, у якому функція зростає швидше всього, а величина зростання збігається з найбільшим значенням похідної у заданому напрямі в точці M_0.

§ 9 ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Означення 1. Розглянемо функцію трьох змінних u=F(x,y,z). Сукупність просторових точок M(x,y,z) із області D визначення функції, для яких значення функції однакові і дорівнюють сталій величині «С», тобто, які задовольняють рівність F(x,y,z)=C, утворюють в просторі деяку поверхню (рівність F(x,y,z)=C визначає неявну функцію двох змінних z=f(x,y)), яку називають ***поверхнею рівня функції***.

Задача про дотичну площину до поверхні формулюється так.

На поверхні Q F(x,y,z)=C задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in Q$.

Треба через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ провести площину дотичну до поверхні Q, тобто скласти рівняння цієї дотичної площини.

Спочатку визначимо поняття дотичної площини до поверхні в точці.

Означення 2

Побудуємо декілька кривих на поверхні, які проходять через фіксовану точку M_0. До кожної кривої побудуємо дотичну в точці M_0.

Нижче ми доведемо, що усі такі дотичні містяться в одній площині, яка проходить через точку M_0.

Цю площину називають ***дотичною площиною*** до поверхні Q в точці M_0.

<u>Доведення</u>: нехай крива (L) є довільною кривою, яка проходить через точку M_0 і міститься на поверхні Q. Нехай параметричні рівняння цієї кривої такі:

$$(L) \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

причому точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ відповідає значенню параметра $t = t_0$, тобто

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0).$$

Якщо ми підставимо ці рівняння у рівняння поверхні Q, тоді ми отримаємо тотожність

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv C.$$

Ліва частина цієї тотожності є складеною функцією аргументу "t", де

$F(x, y, z)$ - зовнішня функція,

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ - внутрішні функції.

Обчислимо похідну обох частин тотожності $\frac{dF}{dt} \equiv 0$, або ж

$$F_x' \cdot x'(t) + F_y' \cdot y'(t) + F_z' \cdot z'(t) \equiv 0.$$

Покладемо в останній тотожності $t = t_0$ і отримаємо рівність

$$F_x'(M_0) \cdot x'(t_0) + F_y'(M_0) \cdot y'(t_0) + F_z'(M_0) \cdot z'(t_0) = 0. \qquad (*)$$

Розглянемо далі два вектори з координатами

$$(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)), \qquad (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Перший з них визначає вектор – градієнт функції $u = F(x, y, z)$ в точці M_0: $grad\ F(M_0)$.

Другий – це вектор дотичної до кривої L в точці $M_0 : \overrightarrow{r'(t_0)}$.

Рівність $(*)$ означає, що скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю

$$\overrightarrow{r'(t_0)} \cdot grad\ F(M_0) = 0.$$

Але ж $grad\ F(M_0)$ - сталий вектор, а $\overrightarrow{r'(t_0)}$ - дотичний вектор до довільної кривої L . Тому усі дотичні перпендикулярні до одного того ж вектора – градієнта і проходять через точку M_0; отже, усі дотичні містяться на одній площині, яка проходить через точку M_0. Ця площина називається ***дотичною площиною***.

Рівняння дотичної площини має вигляд

$$(P)\quad F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0,\quad P\perp\vec{N}=grad\ F(M_0).$$

Означення. Пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини до поверхні в точці M_0, називається ***нормаллю до поверхні***. Рівняння нормалі можна записати у вигляді канонічних рівнянь прямої, для якої вектор – градієнт виступає в ролі напрямного вектора

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)},\qquad \vec{S}=grad\ F(M_0).$$

§ 10 ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

10.1 Нехай $u=f(x,y,z)=f(M)$ функція трьох змінних і $M_0(x_0,y_0,z_0)$ фіксована точка.

Означення 1. Функція $u=f(M)$ має в точці M_0 **максимум,** якщо існує такий окіл точки M_0 $M_0M<\delta$, що для всіх його точок M виконується нерівність $f(M)\le f(M_0)$.

Означення 2. Функція $u=f(M)$ має в точці M_0 **мінімум**, якщо існує такий окіл точки M_0 $M_0M<\delta$, що для всіх його точок M виконується нерівність $F(M)\ge f(M_0)$.

Означення 3. Функція $u=f(M)$ має в точці M_0 **екстремум**, якщо вона має в точці M_0 **максимум** або **мінімум.**

Необхідна умова екстремуму

Теорема. Якщо функція $u=f(M)$ має в точці M_0 екстремум і якщо в точці M_0 існують частинні похідні цієї функції першого порядку, тоді вони дорівнюють нулю.

Зауваження. Якщо всі частинні похідні функції $u = f(M)$ дорівнюють нулю, або ж не існують в деякій точці M_0, то з цього ще не випливає, що функція $u = f(M)$ має в точці M_0 екстремум, тобто ці умови виявляються лише необхідними, але не достатніми.

Приклад: нехай $z = x^2 - y^2$.

Обчислимо $z_x' = 2x, \quad z_y' = -2y.$

Очевидно, в точці O(0,0) обидві частинні похідні дорівнюють нулю, але в точці O(0,0) функція $z = x^2 - y^2$ не має екстремуму, тому що, по-перше, $z(0,0) = 0$, по-друге, у будь-якому околі точки O(0,0) існують точки $M_1(x,0)$, для яких $z(M) > 0$, а також точки $M_2(0,y)$, для яких $z(M) < 0$, тобто

$$z(M_2) < z(O) < z(M_1).$$

Означення 4. Точки M_0, в яких частинні похідні функції $u = f(M)$ дорівнюють нулю, або ж не існують, називають ***критичними точками функції*** $u = f(M)$.

Якщо частинні похідні дорівнюють нулю, тоді такі критичні точки називають ***стаціонарними***.

Таким чином, якщо у функції $u = f(M)$ є екстремум, тоді він міститься у критичній точці. Але не кожна критична точка є точкою екстремуму функції.

10.2 Достатні умови екстремуму для функції двох змінних

Теорема. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - стаціонарна точка функції $z = f(x,y)$, тобто

$$f_x'(M_0) = 0, \quad f_y'(M_0) = 0.$$

Складемо в точці M_0 визначник другого порядку із частинних похідних другого порядку

$$\text{H} = \begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{vmatrix}_{M_0}.$$

Тоді

1) якщо H>0, то функція $z = f(x, y)$ **має** в точці M_0 екстремум, причому

максимум, якщо $f_{xx}''(M_0) < 0$

і

мінімум, якщо $f_{xx}''(M_0) > 0.$

(в цьому випадку $f_{xx}''(M_0) = 0$ не можливе);

2) якщо H<0 , то функція $z = f(x, y)$ **не має** екстремуму в точці M_0;

3) якщо H=0, тоді ситуація з екстремумом функції в критичній точці M_0 **не визначена.**

Приклад: $z = 4x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x - 8y + 15$ - функція двох змінних. Треба визначити екстремум цієї функції.

1) обчислюємо стаціонарні точки, тобто знаходимо частинні похідні, дорівнюємо їх нулю і розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} z_x' = 8x + 6y - 4 = 0 \\ z_y' = 6x + 6y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Таким чином, стаціонарна точка має координати

$$M_0(-2, \frac{10}{3}).$$

Обчислюємо далі визначник $H(M_0)$

$$H(M_0) = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}_{M_0} = 8 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 48 - 36 = 12 > 0, \quad f_{xx}''(M_0) = 8 > 0.$$

Тобто за теоремою, в точці $M_0(-2, \frac{10}{3})$ функція має ***<u>мінімум</u>***

$$z_{\min} = 4(-2)^2 + 6(-2)\frac{10}{3} + 3(\frac{10}{3})^2 - 4(-2) - 8\frac{10}{3} + 15 = 16 - 40 + \frac{100}{3} + 8 - \frac{80}{3} + 15 = \frac{17}{3}.$$

§ 11 ВІДНОСНИЙ (УМОВНИЙ) ЕКСТРЕМУМ

Означення. Нехай $u = f(x, y, z)$ - функція трьох змінних, про аргументи якої відомо, що вони не є незалежними змінними, а пов'язані між собою співвідношенням

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

яке називають рівнянням зв'язку.

Екстремум функції $u = f(x, y, z)$ при такій умові називають ***відносним*** або ***умовним.***

Критичні точки у відносному екстремумі можна знайти за ***правилом Лагранжа:***

для відшукання критичних точок для відносного екстремуму функції $u = f(x, y, z)$, якщо рівняння зв'язку має вигляд $\varphi(x, y, z) = 0$, треба

1) скласти допоміжну функцію

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) = \lambda\varphi(x, y, z),$$

де λ - деяка стала величина. Функція $F(x, y, z)$ називається ***функцією Лагранжа***;

2) відшукувати критичні точки функції Лагранжа $F(x, y, z)$ при умові, що x, y, z розглядаються як незалежні змінні, тобто обчислити три частинні похідні функції $F(x, y, z)$ і дорівняти їх нулю.

Таким чином, ми отримаємо три рівняння відносно чотирьох невідомих $x, y, z, \lambda;$

3) об'єднуючи ці рівняння з рівнянням зв'язку, ми одержуємо систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими $x, y, z, \lambda.$

Ця система називається ***системою рівнянь Лагранжа*** і вона має вигляд

$$\begin{cases} F_x' = f_x'(x,y,z) - \lambda \cdot \varphi_x'(x,y,z) = 0 \\ F_y' = f_x'(x,y,z) - \lambda \cdot \phi_y'(x,y,z) = 0 \\ F_z' = f_z'(x,y,z) - \lambda \cdot \varphi_z'(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, ми отримаємо координати x, y, z критичних точок у відносному екстремумі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука, 1984.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. –М.: Наука, 1966.

4 Берман Г.Р. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Наука, 1976.

I.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Частина 8

Диференціальне числення функцій кількох змінних

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Ковалішина І.В.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 09.12.05 р.

Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,5. Обл.-вид.арк. 1,75.

Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7