УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

І.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Конспект лекцій

Частина 8

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ І ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Харків – 2008

Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу: Конспект лекцій. Ч.8. Кратні, криволінійні інтеграли і теорія поля. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. - 66 с.

Конспект розкриває тему «Кратні, криволінійні інтеграли і теорія поля». Наведено основні поняття, твердження, відповідні формули, приклади застосування.

Конспект лекцій може використовуватися як джерело при виконанні індивідуальних домашніх та розрахункових завдань студентами технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Бібліогр.: 4 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 29 травня 2006 р., протокол №7.

Рецензент

проф. А.А. Янцевич (ХНУ)

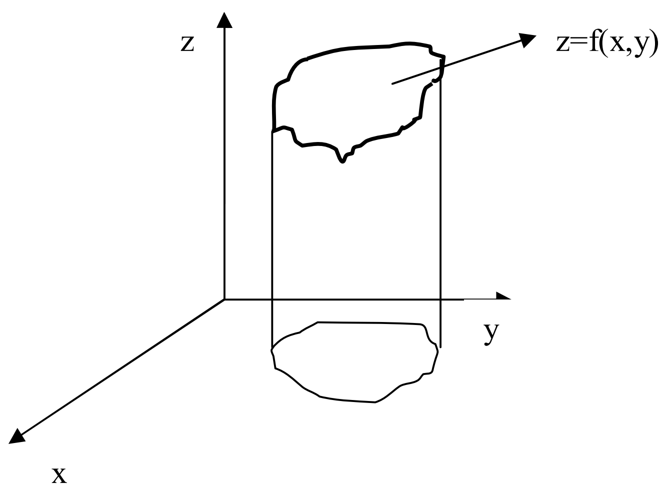
ЗМІСТ

ТЕМА 1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1 Подвійні інтеграли

1.1 Задача про обчислення об'єму зрізаного циліндра. Визначення подвійного інтеграла

Визначення. **Зрізаним циліндром** називають частину циліндра,твірна якого паралельна осі OZ, який обмежується знизу площиною XOУ, а зверху поверхнею, рівняння якої $z = f(x, y)$.



Зауваження. Переріз циліндра площиною XOУ визначає область D – дно циліндра.

Задача про обчислення об'єму зрізаного циліндра формулюється так: обчислити об'єм зрізаного циліндра, якщо відомі дно циліндра, тобто область D, та рівняння $z = f(x, y)$ поверхні, яка обмежує циліндр зверху.

Будемо розв'язувати задачу таким чином:

1) сіткою довільних кривих поділимо область D на маленькі підобласті, які позначимо $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; площі та діаметри цих підобластей позначимо відповідно

$$\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \cdots, \Delta\omega_n; \quad d_1, d_2, \cdots, d_n.$$

(діаметром підобласті називають найбільшу відстань між двома точками підобласті);

2) в кожній підобласті розглянемо довільну точку $M_i(x_i, y_i),\ i = 1,2,...,n$;

3) в кожній точці M_i обчислимо значення функції $z_i = f(M_i) = f(x_i, y_i),\ i = 1,2,...,n$ і побудуємо відповідну аплікату (очевидно, точка $P_i(x_i, y_i, z_i)$ належить поверхні $z = f(x, y)$);

4) далі побудуємо маленькі циліндри, для яких основою є підобласті ω_i, а висотою – аплікати z_i. Об'єми таких циліндрів дорівнюють $f(M_1)\Delta\omega_1,\ \ f(M_2)\Delta\omega_2,\ \ \cdots, f(M_n)\Delta\omega_n$;

5) розглянемо далі ступінчасте тіло, яке є сукупністю цих малих циліндрів.

Об'єм його дорівнює

$$V_{ст.т.} = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i .$$

Визначення. Сума $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\omega_i$ називається **інтегральною сумою**, яка побудована для функції $z - f(x, y)$ уздовж області D.

Зауваження. Для функції $z = f(x, y)$ уздовж області D можна побудувати множину різних інтегральних сум, які будуть відрізнятися одна від іншої формою підобластей ω_i та точками M_i;

6) далі будемо збільшувати кількість "n" малих підобластей ω_i так, щоб діаметр d_i кожної підобласті зменшувався. Очевидно, інтегральна сума буде змінюватися, а об'єм ступінчастого тіла буде наближатися до об'єму зрізаного циліндра;

7) в наступному кроці перейдемо до границі інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$ за умови, що $\max d_i \to 0$.

Ми отримаємо, з одного боку, об'єм зрізаного циліндра, а з другого - нову структуру, яку називають **подвійним інтегралом** і позначають так:

$$V_{зр.ц.} = \lim_{\max d_i \to 0} V_{ст.т.} = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Визначення. **Подвійним інтегралом** від функції $z = f(x,y)$ уздовж області D називають границю інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$ при умові, що найбільший діаметр підобласті ω_i $(\max d_i)$ прямує до нуля.

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\omega_i = \iint_D f(x,y)dxdy.}}$$

Область D називається областю інтегрування, $f(x,y)$ - підінтегральною функцією, x, y - змінними подвійного інтегрування.

Теорема існування подвійного інтеграла

Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій області $\overline{D}$, тоді існує границя за умови, що $\max d_i \to 0$, інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$, яка не залежить від способу розбиття області D на окремі підобласті та від вибору точок M_i в кожній підобласті ω_i.

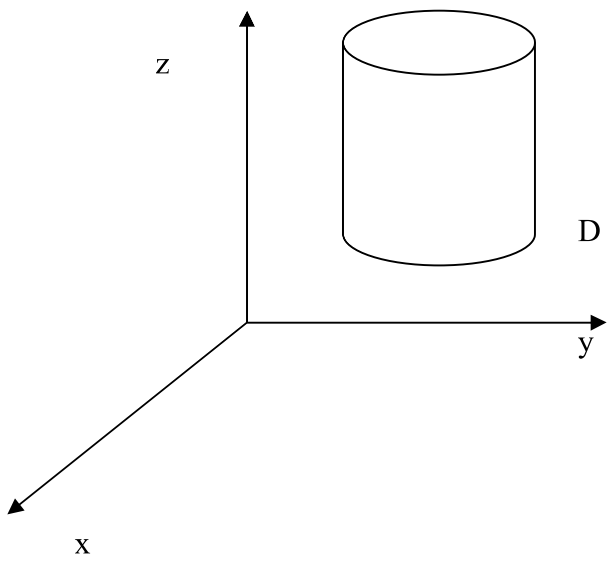
Ця границя і є подвійний інтеграл від функції $z = f(x,y)$ уздовж області D

§ 2 Потрійні інтеграли

2.1 Задача про обчислення маси неоднорідного тіла

Нехай в області D тривимірного простору задана функція $\rho = f(x, y, z) = f(P), \quad P \in D,$ яка є щільністю неоднорідного тіла D.

Треба обчислити масу тіла D.



Будемо розв'язувати цю задачу таким чином:

1) довільними поверхнями поділимо область D на малі просторові підобласті $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$.

Об'єми та діаметри цих підобластей позначимо відповідно

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n; \qquad d_1, d_2, \cdots, d_n;$$

2) в кожній підобласті ω_i розглянемо довільну точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ та обчислимо значення функції $\rho_i = f(P_i)$ в кожній точці P_i;

3) кожне значення функції $\rho_i = f(P_i)$ помножимо на об'єм відповідної підобласті ω_i

$$f(P_i)\Delta v_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

та складемо ці добутки. Ми отримаємо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i \ , \qquad (1)$$

яку називають **інтегральною сумою**, побудованою для функції $\rho = f(P)$ по області D;

4) кожний доданок інтегральної суми можна розглядати як наближене значення маси підобласті ω_i, якщо припустити, що підобласть ω_i однорідна і її щільність ρ_i дорівнює значенню функції $\rho = f(P)$ в точці P_i

$$\rho_i = f(P_i).$$

Тоді інтегральну суму (1) можна розглядати як наближене значення маси всієї області D;

5) будемо далі прямувати до границі інтегральної суми (1) за умови $\max d_i \to 0.$

Визначення. Границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$ за умови $\max d_i \to 0$ називається **потрійним інтегралом** від функції $\rho = f(x, y, z)$ по області D і позначається так:

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i = \iiint_D f(x, y, z)dv = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz.$$

З іншого боку, границя інтегральної суми дорівнює масі неоднорідного тіла

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i = M_D \, .$$

Отже, з фізичної точки зору, потрійний інтеграл є масою неоднорідного тіла D, якщо підінтегральна функція $\rho = f(x, y, z)$ виконує роль щільності неоднорідного тіла D

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = M_D.$$

Зауваження. Теорема існування потрійного інтеграла формулюється аналогічно теоремі існування подвійного інтеграла.

§ 3 Властивості подвійних та потрійних інтегралів

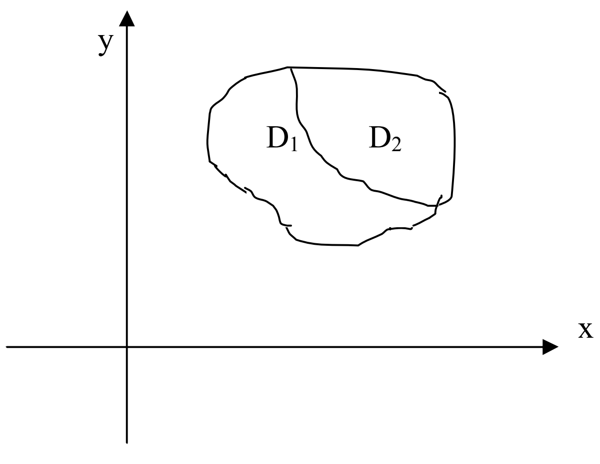
3.1 Властивості подвійних інтегралів:

1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$ - за визначенням;

2) $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$;

3) $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy, \quad k-const$ - властивість однорідності подвійного інтеграла;

4) $\iint\limits_{D_1+D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ - властивість адитивності подвійного інтеграла;



5) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V_D, \quad V_D$ - об'єм зрізаного циліндра;

6) $\iint\limits_D 1dxdy = S_D, \quad S_D$ - площа області D;

7) теорема про середнє: якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області $\overline{D}$, тоді існує хоча б одна точка $M_0 \in D$ така, що виконується рівність

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(M_0)S_D \,.$$

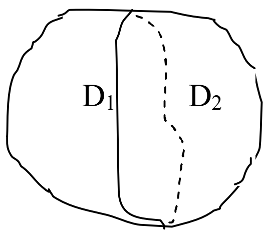
3.2 Властивості потрійних інтегралів:

1) $\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dv = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$ - за визначенням;

2) $\iiint\limits_{D} [f(x,y,z) + g(x,y,z)]dv = \iiint\limits_{D} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{D} g(x,y,z)dv$;

3) $\iiint\limits_{D} kf(x,y,z)dv = k\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dv, \quad k - const$ - властивість однорідності потрійного інтеграла;

4) $\iiint\limits_{D\ +D_2} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)dv$ - властивість адитивності потрійного інтеграла;



5) $\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dv = M_D, \quad M_D$ - маса неоднорідного тіла D, якщо $\rho = f(x,y,z)$ - щільність тіла D;

6) $\iiint\limits_{D} 1dv = M_D = \rho V_D = V_D$, $\quad V_D$ - об’єм однорідного тіла D зі сталою щільністю $\rho = 1$;

7) теорема про середнє: якщо функція $\rho = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D}$, тоді в області D існує хоча б одна точка P_0 $(P_0 \in D)$ така, що виконується рівність

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dv = f(P_0)V_D .$$

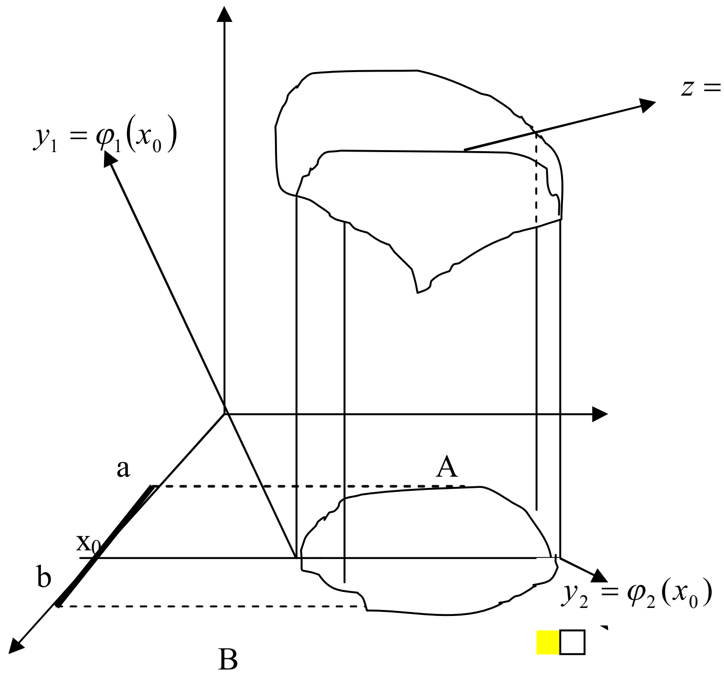
§ 4 Обчислення подвійних інтегралів

Нехай D – довільна область у площині XOY. Припустимо лише, що прямі, які паралельні осі ординат OY, перетинають контур області D не більш ніж у двох точках.

Розглянемо проекцію області інтегрування D на вісь OX. Проекцією буде сегмент $[a, b]$.

Через кінці сегмента проведемо дотичні до контура області D. Точки дотику A і B поділяють контур області D на дві частини: нижню і верхню відносно осі OX.

Нехай рівняння нижньої частини контура буде $y = \varphi_1(x), \quad a \le x \le b,$ а рівняння верхньої частини контура буде $y = \varphi_2(x), \quad a \le x \le b.$



Тоді, з одного боку, об'єм зрізаного циліндра (за геометричним змістом подвійного інтеграла) дорівнює

$$V_{зр.ц.} = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy \,. \tag{2}$$

З іншого боку, зрізаний циліндр можна розглядати як тіло з відомим поперечним перерізом

$$V_{зр.ц.} = \int_{a}^{b} S(x)dx \,, \tag{3}$$

де $S(x)$ - площа поперечного перерізу як функція аргумента $"x"$.

Розглянемо поперечний переріз, який проходить через фіксовану точку x_0.

Цей переріз є криволінійною трапецією, яка обмежена зверху кривою $z - f(x_0, y)$, основою якої є сегмент $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$, паралельний до осі ОУ.

Але тоді площа цього перерізу дорівнює

$$S(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy \,,$$

тобто площа поперечного перерізу у будь-якій точці $x \in [a, b]$ дорівнює

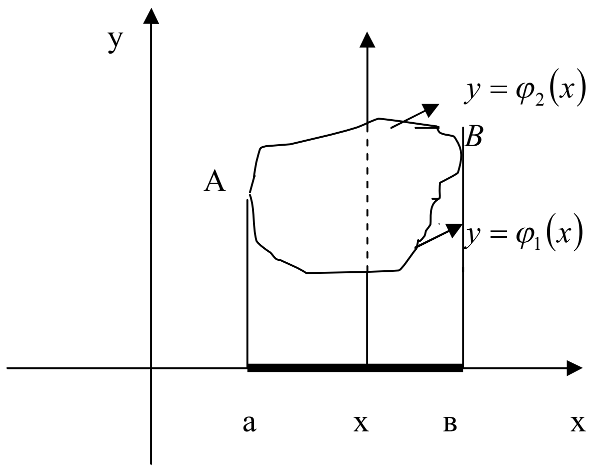
$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Таким чином,

$$V_{зр.ц.} = \int_{a}^{b} \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right\} dx \;\; . \tag{4}$$

Порівнюючи між собою вирази (2) і (4) для об'єму зрізаного циліндра, отримуємо формулу для обчислення подвійного інтеграла

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx.$$



Правило обчислення подвійного інтеграла

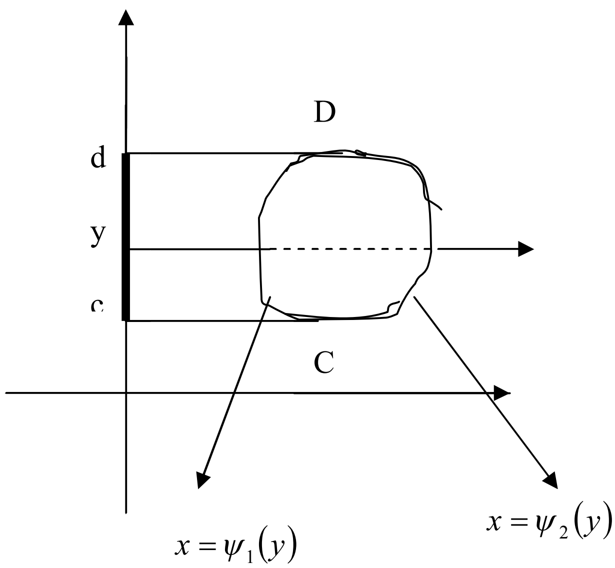
Для обчислення подвійного інтеграла необхідно виконати такі дії:

1) знайти проекцію області інтегрування D на вісь OX (це буде сегмент $[a,b]$);
2) знайти точки дотику дотичних до контура області D, які проходять через кінці сегмента $[a,b]$, тобто точки A і B, які поділяють контур на дві частини;
3) знайти рівняння нижньої $y=\varphi_1(x)$ та верхньої $y=\varphi_2(x)$ частин цього контура;
4) через довільну точку $a<x<b$ провести стрілку паралельно осі OY і точки перетину з обома частинами контура.

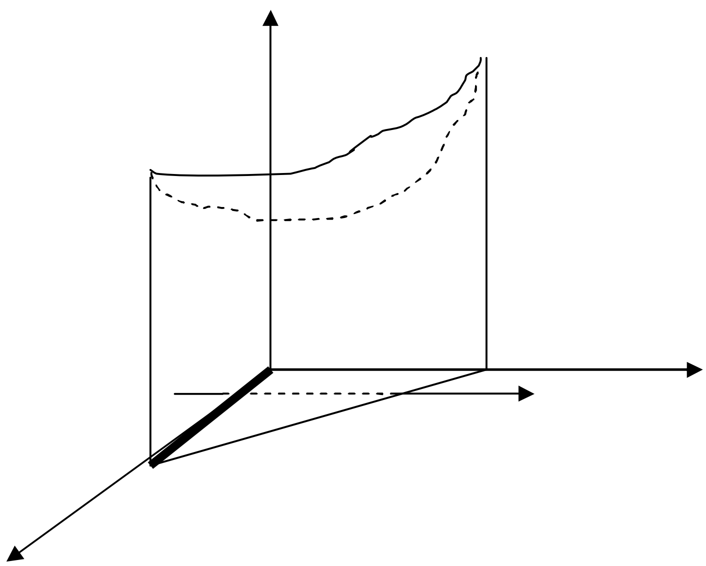
Ординати точки входу та виходу із області D утворюють нижню та верхню границі інтегрування внутрішнього інтеграла, сегмент $[a,b]$ є проміжком інтегрування зовнішнього інтеграла.

Зауваження 1. Треба пам'ятати, що змінною інтегрування внутрішнього інтеграла є буква "y", а буква "x" в цей момент виконує роль сталої величини.

Зауваження 2. При обчисленні подвійного інтеграла можна змінити порядок інтегрування, тобто проектувати область D на вісь ОУ і проводити стрілку паралельно осі ОХ.



Приклад 1. Обчислити об'єм зрізаного циліндра, обмеженого поверхнями з рівняннями $z=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad x+y=1,\quad z=x^2+y^2+1.$



Розв’язок: $V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2+1\right)dxdy=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^{1-x}\left(x^2+y^2+1\right)dy\right\}dx=$

$$=\int\limits_0^1\left\{\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^{1-x}\right\}dx=\int\limits_0^1\left\{x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}+(1-x)\right\}dx=$$

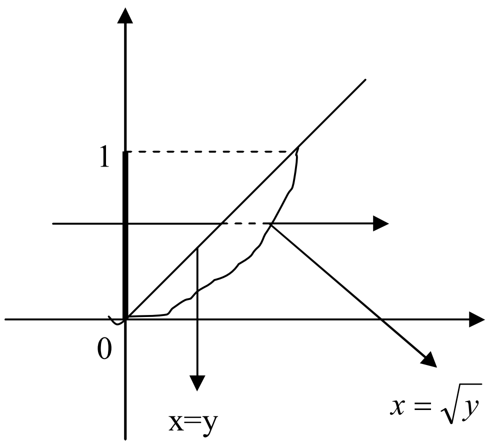
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{12}+x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{4-3+12-6+1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\text{ куб.од.}$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$\int\limits_0^1\left\{\int\limits_{x^2}^{x}f(x,y)dy\right\}dx.$$

Розв’язок: область інтегрування D обмежена лініями , які мають рівняння $x=0,\quad x=1,\quad y=x^2,\quad y=x.$

Побудуємо в системі координат ХОУ область D:



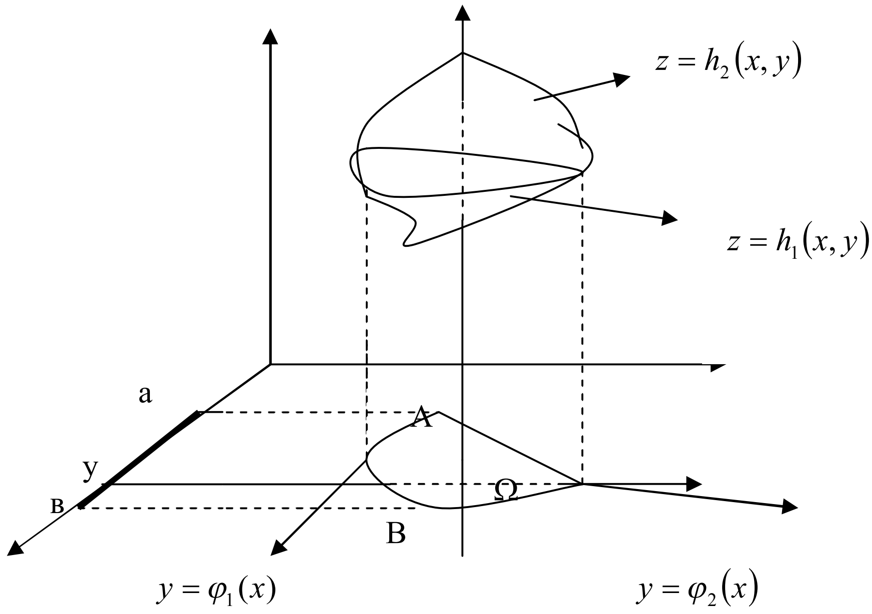
а) проектуємо область D на вісь ОУ і отримуємо на осі ОУ сегмент $[0,1]$;

б) через довільну точку $y\in[0,1]$ будуємо стрілку, паралельну осі ОХ і знаходимо абсциси точок входу і виходу із області D, які визначають границі внутрішнього інтеграла.

Отже

$$\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right\} dy.$$

§ 5 Обчислення потрійного інтеграла



Для обчислення потрійного інтеграла потрібно виконати такі дії:

1) знайти проекцію Ω просторової області D на площину ХОУ;

2) знайти проекцію плоскої області Ω на вісь ОХ. Цією проекцією буде сегмент $[a,b]$;

3) через кінці цього сегмента провести дотичні до контура проекції Ω; точки дотику А і В поділяють контур Ω на дві частини:

$$y = \varphi_1(x) - \textit{нижня};$$

$$y = \varphi_2(x) - \textit{верхня};$$

4) через контур області Ω провести циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі OZ. Ця циліндрична поверхня дотикається до поверхні області D вздовж лінії, яка поділяє поверхню області D на дві частини:

нижню з рівнянням $z = h_1(x, y)$ і верхню – з рівнянням $z = h_2(x, y)$ відносно площини ХОУ;

5) провести стрілку паралельно осі ОУ у площині ХОУ, яка перетинає проекцію Ω, і визначити ординати точок входу і виходу із області Ω:

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x);$$

6) провести стрілку паралельно осі OZ, яка перетинає область D, і визначити аплікати точок входу і виходу із області D:

$$z = h_1(x, y);$$

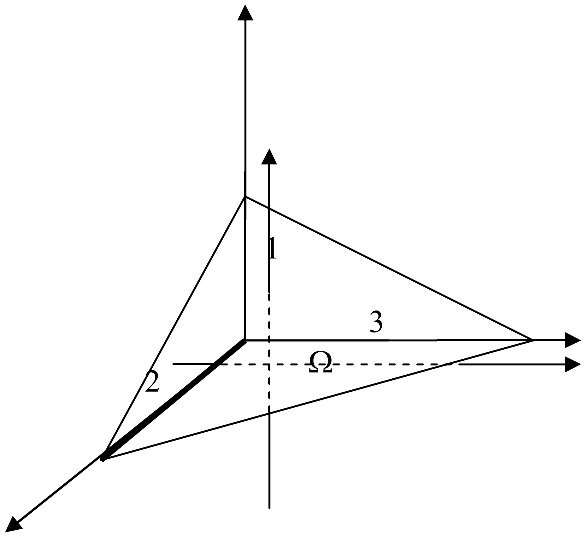
$$z = h_2(x, y).$$

Отже, має місце рівність

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx.$$

Зауваження. Кожний інтеграл інтегрується тільки за однією змінною, інші букви в цей момент виконують роль сталих величин.

Приклад. Обчислити масу неоднорідної піраміди, яка обмежена координатними площинами XOY, XOZ, YOZ і похилою площиною $(P)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$**,** якщо відома її щільність $\rho = x$.



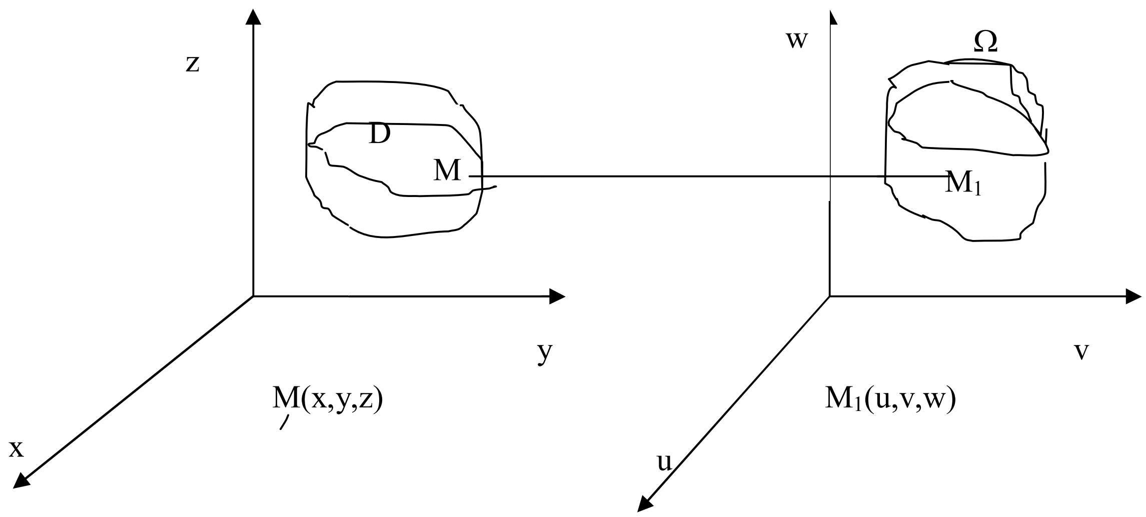
Розв’язок: за фізичним змістом потрійного інтеграла

$$M_D = \iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left\{ \int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} \left[\int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}} x\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^2 x \left\{ \int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} \left[z \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}} \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^2 x \left[\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} \left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right) dy \right] dx = \int_0^2 x \left[\left(1-\frac{x}{2}\right) y - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} \cdot dx = \int_0^2 x \left[3\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{2}\left(2-\frac{8}{3}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{6-8+3}{3} = \frac{1}{2}\ од^4.$$

§ 6 Заміна змінних в кратних інтегралах



Розглянемо рівності

$$\begin{cases} x = x(u, v, w); \\ y = y(u, v, w); \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \qquad (5)$$

Нехай відомо, що формули (5) встановлюють взаємно однозначну відповідність області D у просторі XOYZ і області Ω простору UOVW.

Нехай функції x, y, z із (5) мають неперервні частинні похідні за аргументами u, v, w.

За цих умов існує така формула заміни змінних у потрійному інтегралі

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right] \left\| \begin{matrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{matrix} \right\| dudvdw. \qquad (6)$$

Зауваження. Детермінант

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

називається детермінантом ***Якобі***, або ***якобіаном***.

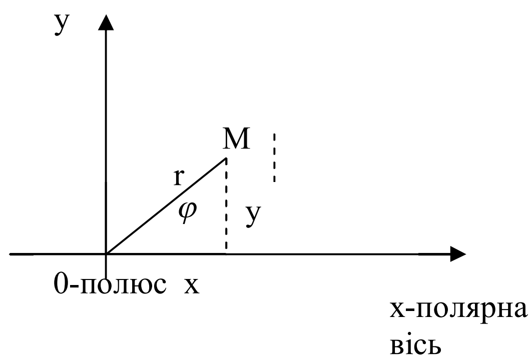
Розглянемо частинні випадки:

1) подвійний інтеграл в полярних координатах

Зв'язок між прямокутними координатами точки $M(x,y)$ та її полярними координатами $M(\varphi,r)$ має вигляд

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

якщо полярна система координат узгоджена із прямокутною таким чином, що



Обчислимо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_r \\ y'_\varphi & y'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\cos\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r.$$

Отже, абсолютна величина якобіана (саме вона міститься в правій частині рівності (6)) дорівнює

$$|J| = |-r| = r.$$

Таким чином, формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{\varphi r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi\,; \qquad (7)$$

2) потрійний інтеграл у циліндричних координатах

Визначення. Циліндричними координатами просторової точки $M(\varphi, r, z)$ називають сукупність полярних координат і аплікати точки.

Зв'язок між декартовими координатами точки $M(x, y, z)$ та її циліндричними координатами $M(\varphi, r, z)$ такий:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

якщо узгоджені між собою декартові і полярні координати на площині ХОУ.

Обчислимо якобіан

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_r & x'_z \\ y'_\varphi & y'_r & y'_z \\ z'_\varphi & z'_r & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -r\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -r,$$

тобто

$$|J| = |-r| = r.$$

Таким чином, перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі такий:

$$\underline{\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz;} \qquad (8)$$

3) потрійний інтеграл у сферичних координатах

Визначення. Сферичними координатами просторової точки M називають сукупність $M(\varphi, \theta, R)$, де

1) R - відстань від початку координат до точки M; R називають сферичним радіусом точки M і він може набувати лише невід’ємних значень

$$0 \le R \le +\infty$$

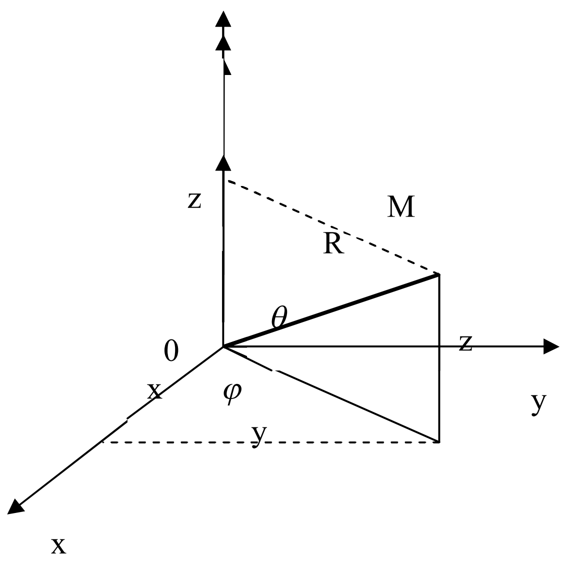
2) θ - ***кут нутації*** : θ - кут між віссю OZ і сферичним радіусом точки M. Кут нутації відлічується від додатного напряму осі OZ і може змінюватися в проміжку

$$0 \le \theta \le \pi.$$

3) φ - ***кут прецесії*** : φ - кут між віссю OX і проекцією сферичного радіуса на площину XOУ. Кут прецесії відлічується від додатного напряму осі OX і може змінюватися у проміжку

$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Зв’язок між декартовими координатами точки $M(x, y, z)$ та її сферичними координатами $M(\varphi, \theta, R)$ такий:



$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$

Обчислимо якобіан

$$J=\begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\theta & x'_R \\ y'_\varphi & y'_\theta & y'_R \\ z'_\varphi & z'_\theta & z'_R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & -R\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=$$

$$=-R\sin\theta\sin\varphi\left(R\sin\varphi\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]\right)-R\sin\theta\cos\varphi\left(R\cos\varphi\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]\right)=$$
$$=-R^2\sin\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=-R^2\sin\theta.$$

Таким чином, $|J|=\left|-R^2\sin\theta\right|=R^2\sin\theta$, тому що на проміжку $(0\le\theta\le\pi)$ $\sin\theta\ge 0.$

Отже, існує така рівність:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f\left[R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\right]R^2\sin\theta dRd\varphi d\theta. \quad (9)$$

§ 7 Геометричні та механічні застосування кратних інтегралів

1) об’єм зрізаного циліндра $V_{зр.ц.}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$

2) площа плоскої фігури D $S_D=\iint\limits_D dxdy;$

3) маса неоднорідного тіла D зі щільністю $\rho=f(x,y,z)$

$$M_D=\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz;$$

4) об’єм тіла $V_D=\iiint\limits_D dxdydz;$

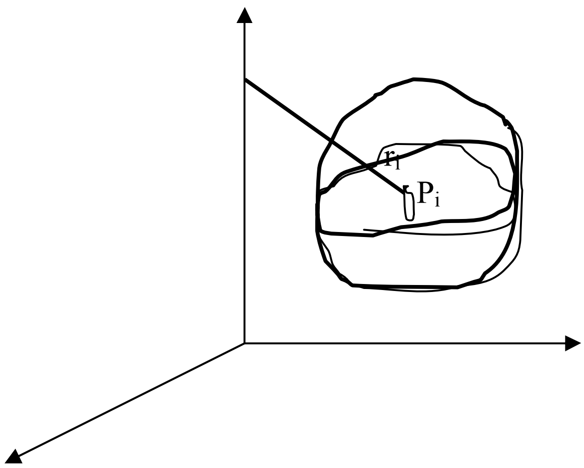
5) момент інерції тіла відносно осі.

Визначення 1. Моментом інерції матеріальної точки з масою "m" відносно деякої осі "u" називають добуток $J_u=mr^2$, де r - відстань від точки до осі.

Визначення 2. Моментом інерції системи точок називають суму моментів інерції окремих точок

$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Для обчислення моменту неоднорідного тіла D відносно осі OZ поділимо тіло D на маленькі підобласті, причому будемо припускати, що розміри підобластей такі малі, що розмірами цих підобластей можна знехтувати у порівнянні з їх відстанями до осі OZ; в кожній підобласті щільність можна вважати сталою.



Виберемо в кожній підобласті довільну точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Відстань точки P_i до осі OZ дорівнює $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$; маса підобласті дорівнює

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta v_i = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i ,$$

момент інерції підобласті

$$\Delta m_i r_i^2 = \left(x_i^2 + y_i^2\right)\rho\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta v_i ,$$

а момент інерції всього тіла наближено дорівнює сумі

$$J_{OZ} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right)\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i .$$

Далі прямуємо до границі за умови, що $\max d_i \to 0$, і отримуємо точне значення моменту інерції тіла D відносно осі OZ

$$J_{OZ} = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i,$$

або

$$\underline{J_{OZ} = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z) dv.}$$

Аналогічно отримуємо ще два моменти інерції

$$\underline{J_{OX} = \iiint_D \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dv;}$$

$$\underline{J_{OY} = \iiint_D \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dv;}$$

6) координати центра мас неоднорідного тіла.

За допомогою подібних міркувань можна отримати формули для обчислення координат центра мас, а саме:

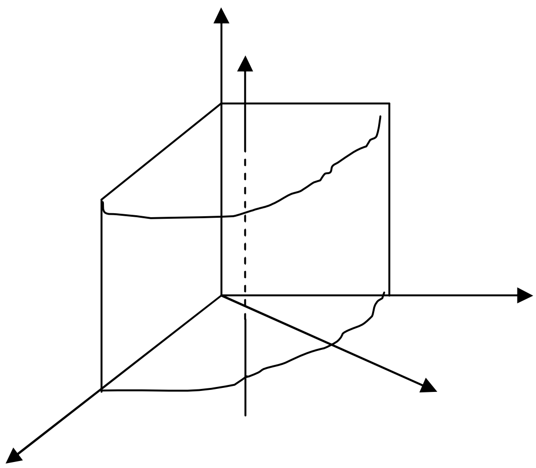
$$\underline{x_C = \frac{\iiint_D x \rho(x, y, z) dv}{\iiint_D \rho(x, y, z) dv};}$$

$$\underline{y_C = \frac{\iiint_D y \rho(x, y, z) dv}{\iiint_D \rho(x, y, z) dv};}$$

$$\underline{z_C = \frac{\iiint_D z \rho(x, y, z) dv}{\iiint_D \rho(x, y, z) dv}.}$$

Приклад. Обчислити момент інерції неоднорідного тіла D із щільністю $\rho = z$ відносно осі OZ, якщо тіло обмежене поверхнями:

$$z = 0\ (z \ge 0),\quad x = 0\ (x \ge 0),\ y = 0\ (y \ge 0),\quad x^2 + y^2 = 2^2,\quad z = 3.$$



Розв’язок:

$$J_{OZ} = \iiint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho dv = \iiint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) z dxdydz.$$

Перейдемо в цьому інтегралі до циліндричних координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

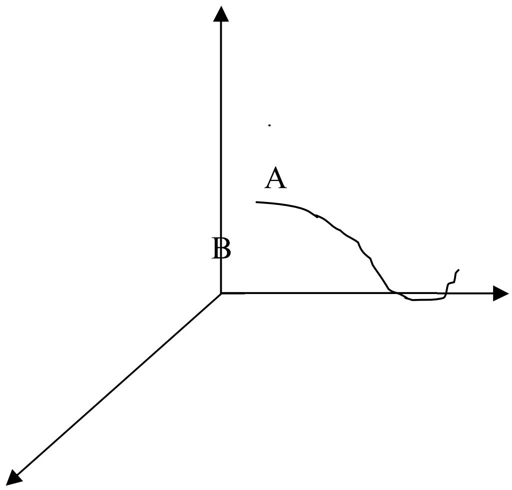
$$J_{OZ} = \iiint\limits_D r^2 zrdrdzd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^2\left[\int_0^3 r^3 zdz\right]dr\right\}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^2 r^3\left[\frac{z^2}{2}\Big|_0^3\right]dr\right\}d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right\}d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2^4}{4}\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\cdot\frac{16}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = 9\pi\ од^4.$$

ТЕМА 2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ; ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1 Криволінійні інтеграли першого роду

Визначення. Нехай у просторі координат задана функція $u = f(x, y, z)$ та нехай в області визначення цієї функції задана дуга AB кривої L.



Поділимо дугу AB довільними точками $A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$ на маленькі дужки $M_0M_1, M_1M_2, \cdots, M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n \qquad \left(\Delta s_i = \textit{довжина } M_{i-1}M_i\right).$$

На кожній дужці оберемо довільну точку

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \qquad P_i\left(x_i, y_i, z_i\right), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

і обчислимо значення функції $u = f(x, y, z)$ в точках $P_i: \ f(P_i)$, та побудуємо добутки $f(P_i)\Delta s_i \quad i = 1,2,\cdots,n$, а потім розглянемо суму таких добутків

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i. \tag{10}$$

Сума (10) називається інтегральною сумою, побудованою для функції $u = f(x,y,z)$ вздовж дуги AB кривої L.

Якщо функція $u = f(x,y,z)$ неперервна, а дуга AB кривої L має скінченну довжину, тоді існує границя інтегральної суми (10) за умови, що $\max \Delta s_i \to 0$, яка називається **криволінійним інтегралом першого роду** і позначається так:

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \int_{AB(L)} f(x,y,z)ds.$$

1.1 Правила обчислення та властивості криволінійного інтеграла першого роду

Обчилення криволінійного інтеграла першого роду виконується шляхом перетворення його у звичайний визначений інтеграл за таким правилом: якщо крива L задається параметричними рівняннями

$$(L)\quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad \begin{array}{c} t_0 \le t \le T \\ t_0 \leftrightarrow A; T \leftrightarrow B, \end{array}$$

причому існують неперервні похідні $x'(t), y'(t), z'(t)$, тоді існує така рівність

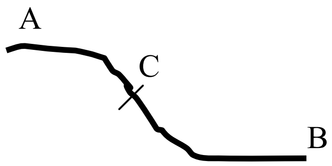
$$\int_{AB(L)} f(x,y,z)ds = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \tag{11}$$

Перелічимо основні **властивості** цих інтегралів:

1) $\int_{AB(L)} (f+g)ds = \int_{AB(L)} fds + \int_{AB(L)} gds$;

2) $\int_{AB(L)} kfds = k\int_{AB(L)} fds, \quad k = const,$ - властивість однорідності;

(3) $\int\limits_{\substack{AC+CB\\(L)}} fds = \int\limits_{\substack{AC\\(L)}} fds + \int\limits_{\substack{CB\\(L)}} fds$ - властивість адитивності;



4) теорема про середнє: якщо $u = f(x, y, z)$ неперервна на замкненій дузі AB кривої L, тоді існує хоча б одна точка $P_0 \in AB$ така, що має місце рівність

$$\int\limits_{AB(L)} f(x, y, z)ds = f(P_0)S_{AB} \qquad (S_{AB} - довжина\ дуги\ AB);$$

5) якщо підінтегральна функція $u = f(x, y, z)$ виконує роль щільності $u = \rho$ неоднорідної кривої L, тоді криволінійний інтеграл буде масою неоднорідної дуги AB кривої L

$$\int\limits_{AB(L)} \rho(x, y, z)ds = M_{AB};$$

6) якщо дуга кривої L однорідна ($\rho = const, \quad \rho = 1$), тоді криволінійний інтеграл першого роду дорівнює довжині дуги AB кривої L:

$$\int\limits_{AB(L)} 1ds = \rho S_{AB} = S_{AB};$$

7) якщо змінити напрям руху вздовж шляху інтегрування на протилежний, змінюється і знак перед інтегралом, тобто

$$\int\limits_{BA(L)} f(x, y, z)ds = -\int\limits_{AB(L)} f(x, y, z)ds.$$

Приклад 1. Обчислити масу однієї вітки AB неоднорідної гвинтової лінії L, якщо щільність в кожній точці дорівнює $\rho = x^2$, а точки A і B мають координати $A(a,0,0)$, $B(a,0,2\pi a)$.

Розв'язок: параметричні рівняння гвинтової лінії такі:

$$(L)\quad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \end{cases}$$

причому точці A відповідає значення параметра $t_0 = 0$, а точці B - $T = 2\pi$.

Таким чином, якщо точка переміщується по гвинтовій лінії від точки A до точки B, то параметр "t"змінюється так: $0 \le t \le 2\pi$.

За формулою (11) маємо

$$M_{AB} \int\limits_{AB(L)} \rho ds = \int\limits_{AB(L)} x^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} (a\cos t)^2 \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + a^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + a^2}\, dt = a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt = a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= a^3\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = a^3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi a^3\sqrt{2} \quad од^3.$$

Приклад 2. Обчислити довжину однієї вітки AB гвинтової лінії L.

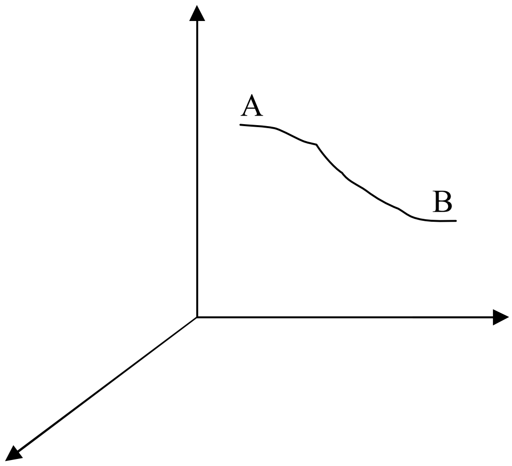
Розв'язок: гвинтова лінія має такі параметричні рівняння:

$$(L)\quad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \\ z = at, \end{cases}$$

$$S_{AB} = \int\limits_{AB(L)} 1 ds = \int\limits_0^{2\vartheta} \sqrt{(-a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + a^2}\, dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = a\sqrt{2}\left(t \Big|_0^{2\pi} \right) = 2\sqrt{2}a\pi \ од.$$

§ 2 Криволінійні інтеграли другого роду

Визначення. Нехай у просторі координат задана функція $P(x,y,z)$ і дуга AB кривої L в області визначення цієї функції.



Поділимо дугу AB точками $A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$ на окремі піддуги.

Координати точок $M_i \quad (i = 1,2,...,n)$ позначимо $M_i(x_i, y_i, z_i)$, а довжини піддуг через *довжина* $M_{i-1}M_i = \Delta s_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$.

Далі в кожній піддузі оберемо довільну точку $W_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \quad i = 1,2,...,n$; значення функції $u = P(x,y,z)$ в кожній такій точці помножимо на приріст аргументу "x" відповідної піддуги

$$P(W_i)\Delta x_i = P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

і розглянемо суму таких добутків:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta x_i \ . \tag{12}$$

Сума (12) називається інтегральною сумою, яка побудована для функції $P(x,y,z)$ вздовж дуги AB кривої L, а ***її границя*** за умови, що $\max \Delta s_i \to 0$ називається ***криволінійним інтегралом другого роду*** і позначається так:

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta x_i = \int_{AB(L)} P(x, y, z) dx .$$

Аналогічно визначаються ще два інтеграли

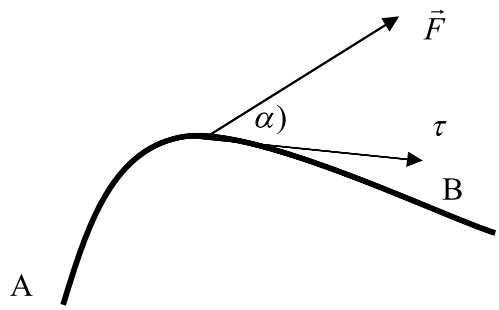
$$\int_{AB(L)} Q(x, y, z) dy, \quad \int_{AB(L)} R(x, y, z) dz.$$

Зауваження. Як правило, розглядається сума таких інтегралів:

$$\int_{AB(L)} Pdx + \int_{AB(L)} Qdy + \int_{AB(L)} Rdz = \int_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz . \qquad (13)$$

2.1 Механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду

Інтеграл (13) має простий механічний зміст, а саме: **інтеграл (13) дорівнює роботі змінної сили** $\vec{F}(P, Q, R)$ **при пересуванні із точки A в точку B вздовж кривої L.**



Дійсно, підінтегральний вираз

$$Pdx + Qdy + Rdz = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{l}\right| \cdot \cos\alpha$$

можна розглядати як елементарну роботу сили $\vec{F}$ вздовж елементарного шляху $d\vec{l}\,(dx, dy, dz)$. Тоді робота дорівнює суми елементарних робіт, тобто інтеграла

$$A = \int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz \,.$$

Зауваження. Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду аналогічні властивостям інтеграла першого роду.

2.2 Правило обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду теж виконується шляхом перетворення його у звичайний визначений інтеграл за таким правилом: якщо крива L визначена параметричними рівняннями

$$(L)\quad \begin{cases} x = x(t) & t_0 \le & t & \le T \\ y = y(t) & \updownarrow & & \updownarrow \\ z = z(t) & A & & B \end{cases}$$

і існують неперервні похідні $x'(t), y'(t), z'(t),$ тоді існує рівність

$$\int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \int\limits_{t_0}^{T} \big[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)z'(t)\big]dt. \tag{14}$$

Рівність (14) дозволяє сформулювати таке правило переходу від криволінійного інтеграла другого роду до визначеного інтеграла:

Для переходу від криволінійного інтеграла другого роду до звичайного визначеного інтеграла необхідно всі аргументи (в тому числі і під знаками диференціалів) замінити їх виразами із параметричних рівнянь шляху інтегрування.

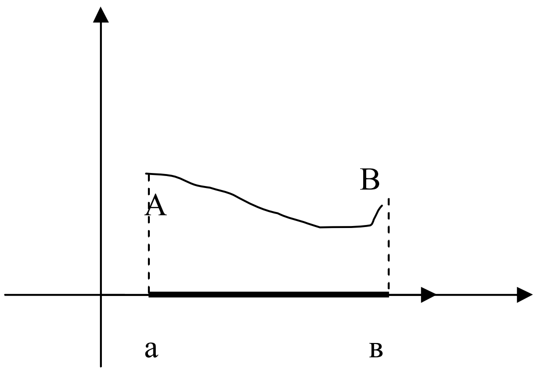
2.3 Частинні випадки

Розглянемо криволінійні інтеграли на площині

$$\int\limits_{AB(L)} P(x,y)dx, \qquad \int\limits_{AB(L)} Q(x,y)dy$$

і припустимо, що шлях інтегрування задається рівнянням

$$y = f(x), \quad a \le x \le b.$$



Таке завдання шляху інтегрування є частинним випадком параметричного

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \quad a \le x \le b,$$

де параметром виступає аргумент $"x"$. Тоді, за правилом переходу до визначених інтегралів, отримуємо рівності:

$$\int\limits_{AB(L)} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x, f(x))dx; \qquad \int\limits_{AB(L)} Q(x,y)dy = \int\limits_a^b Q(x, f(x)0 f'(x)dx.$$

§ 3 Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz$ від шляху інтегрування

Визначення. Просторова область D , в кожній точці якої діє змінна сила $\vec{F}(P,Q,R)$, називається ***силовим полем***.

Силове поле, в якому робота сили $\vec{F}$ не залежить від форми шляху, а залежить лише від положення початкової A і кінцевої B точок шляху, називають ***консервативним***.

Маючи на увазі, що інтеграл (13) визначає саме роботу сили $\vec{F}(P,Q,R)$, розглянемо за яких умов поле сили $\vec{F}$ буде консервативним, тобто при яких умовах на координати сили $\vec{F}$

$$P(x,y,z), \quad Q(x,y,z), \quad R(x,y,z)$$

криволінійний інтеграл (13) не буде залежати ві шляху інтегрування.

Справедлива така теорема:

Теорема. Для того, щоб інтеграл

$$\int\limits_{AB(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не залежав від шляху інтегрування у деякій просторовій області D, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

був у цій області D повним диференціалом, тобто щоб існувала функція $U(x,y,z)$, для якої частинні похідні збігаються із функціями P,Q,R відповідно

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Доведення

Необхідність:

Дано: $\int\limits_{AB(L)} pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми шляху інтегрування в області D.

Треба довести, що $Pdx + Qdy + Rdz = dU$.

Припустимо, що $A(x_0, y_0, z_0)$ - фіксована точка, а $B(X,Y,Z)$ - плаваюча.

Тоді, за умовою необхідності, інтеграл буде залежати лише від координат точки $B(X,Y,Z)$.

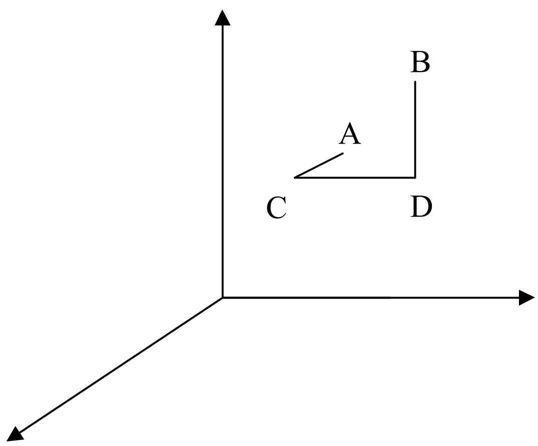
Позначимо цю залежність

$$\int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz = U(X,Y,Z)$$

і доведемо, що

$$\frac{\partial U}{\partial X} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = R.$$

Для доведення рівності, наприклад, $\frac{\partial U}{\partial Z} = R$ розглянемо як шлях інтегрування ламану лінію ACDB ($A(x_0, y_0, z_0), C(\{X, y_0, z_0), D(X,Y,z_0), B(X,Y,Z)$), ланки якої паралельні осям координат, причому остання ланка DB паралельна осі OZ.



Очевидно, $\int\limits_{ACDB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DB}$. Обчислимо кожний з цих інтегралів. Для цього запишемо параметричні рівняння кожної ланки

$$(AC)\ \begin{cases} x = x, \\ y = y_0,\ x_0 \le x \le X; \\ z = z_0, \end{cases} \quad (CD)\ \begin{cases} x = X, \\ y = y, \quad y_0 \le y \le Y; \\ z = z_0, \end{cases} \quad (DB)\ \begin{cases} x = X, \\ y = Y,\ z_0 \le z \le Z. \\ z = z. \end{cases}$$

Зауважимо, що там, де змінні x, y, z зберігають сталі значення, відповідні диференціали дорівнюють нулю. Тоді

$$\int\limits_{ACDB} Pdx + Qdy + Rdz = U(X,Y,Z) = \int\limits_{x_0}^{X} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{Y} Q(X, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{Z} R(X,Y,z)dz.$$

Застосовуючи далі теорему про похідну інтеграла зі змінною верхньою границею, ми отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = (\int\limits_{z_0}^{Z} R(X,Y,z)dz)'_Z = R(X,Y,Z).$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial U}{\partial X} = P(X,Y,Z); \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = Q(X,Y,Z).$$

Достатність

Дано: вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є в області D повним диференціалом деякої функції $U(x, y, z)$, тобто $\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \ \frac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \ \frac{\partial U}{\partial z} = R.$

Треба довести, що

$\int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми шляху інтегрування.

Для цього розглянемо довільний шлях L, який з’єднує точки A і B,

$$(L)\quad \begin{cases} x = x(t), & t_0 \le \quad t \quad \le T \\ y = y(t), & \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \\ z = z(t), & A \qquad\qquad B \end{cases}$$

та обчислимо криволінійний інтеграл

$$J = \int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt\ ;$$

але, за умовою достатності, $P = \dfrac{\partial U}{\partial x},\quad Q = \dfrac{\partial U}{\partial y},\quad R = \dfrac{\partial U}{\partial z}$, і тому

$$J = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} z'(t) \right] dt = \int\limits_{t_0}^{T} \frac{d}{dt} U(x, y, z)dt = U(x, y, z) \Big|_{t_0}^{T} = U(B) - U(A).$$

Таким чином, інтеграл дійсно не залежить від форми шляху, а залежить лише від точок початку і кінця шляху інтегрування.

Наслідок. Для того, щоб інтеграл $J = \int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежав від форми шляху інтегрування в області D, необхідно і достатньо, щоб цей інтеграл вздовж будь-якого замкненого контура в області D дорівнював нулю.

3.1 Зв’язок між подвійними і криволінійними інтегралами. Формула Гріна-Остроградського

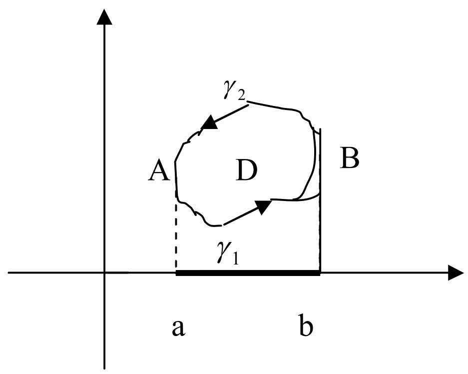
Зв’язок між подвійним інтегралом на плоскій області D і криволінійним інтегралом другого роду вздовж контура Г, який обмежує область D міститься у формулі Гріна – Остроградського, яка має місце за таких умов:

Теорема. Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій області $\overline{D}$, тоді справедлива формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy$$

($\oint$ - позначення інтеграла по замкненому контуру, причому напрям обходу обирається проти годинникової стрілки).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли прямі паралельні осям ОУ і ОХ, перетинають контур Г не більш ніж у двох точках.



Точки А і В поділяють контур Г на дві частини:

нижню $\gamma_1 : \quad y = f(x) \quad a \le x \le b,$

верхню $\gamma_2 : \quad y = g(x) \quad a \le x \le b$.

Розглянемо далі інтеграл

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \left\{ P(x,y) \Bigg|_{f(x)}^{g(x)} \right\} dx = \int_a^b \{ P(x, g(x)) - P(x, f(x)) \} dx =$$

$$= \int_a^b P(x, g(x)) dx - \int_a^b P(x, f(x)) dx =$$

(за правилом обчислення криволінійних інтегралів, перетворимо останні два інтеграли у криволінійні)

$$= \int_{AB(\gamma_2)} P(x,y)dx - \int_{AB(\gamma_1)} P(x,y)dx = - \int_{BA(\gamma_2)} P(x,y)dx - \int_{AB(\gamma_1)_1} P(x,y)dx = -\oint_\Gamma P(x,y)dx.$$

Таким чином, ми довели, що

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_\Gamma P(x,y)dx.$$

Аналогічно доводимо, що

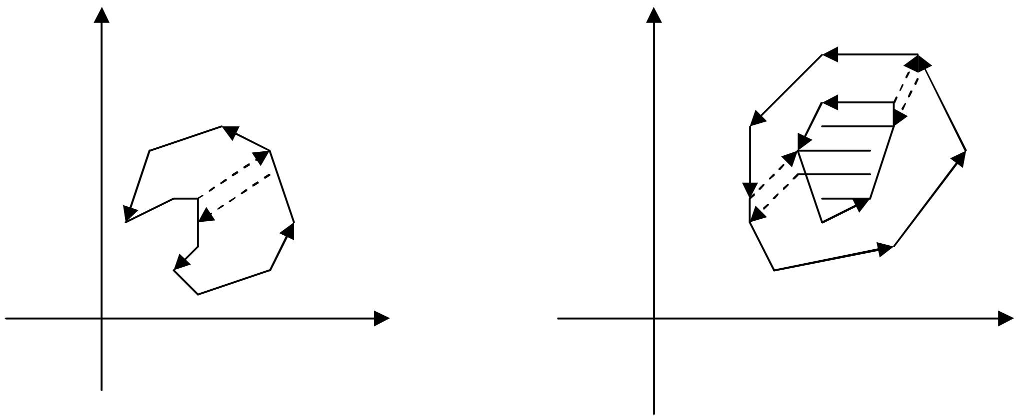
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_\Gamma Q(x,y)dy.$$

Отже, після додавання отримуємо рівність

$$\underline{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx - Qdy.}$$

Зауваження. Якщо область D однозв’язна, але обмежена довільним контуром, або ж многозв’язна, тоді ми, за допомогою додаткових відрізків, поділяємо область D на сукупність більш простих однозв’язних областей і для кожної із них записуємо формулу Гріна-Остроградського, а потім додаємо ліві і праві частини. При цьому інтеграли вздовж додаткових відрізків обчислюються двічі у протилежних напрямах і тому скорочуються.

Таким чином, формула Гріна-Остроградського має місце для будь-якої області D.



Наслідок. Нехай $P(x,y) = -y, \quad Q(x,y) = x.$ Тоді формула Гріна-Остроградського має вигляд

$$\iint\limits_D (1-(-1))dxdy = \oint\limits_{\Gamma} -ydx + xdy,$$

тобто за допомогою криволінійних інтегралів можна обчислювати площу плоскої фігури, а саме

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} -ydx + xdy.$$

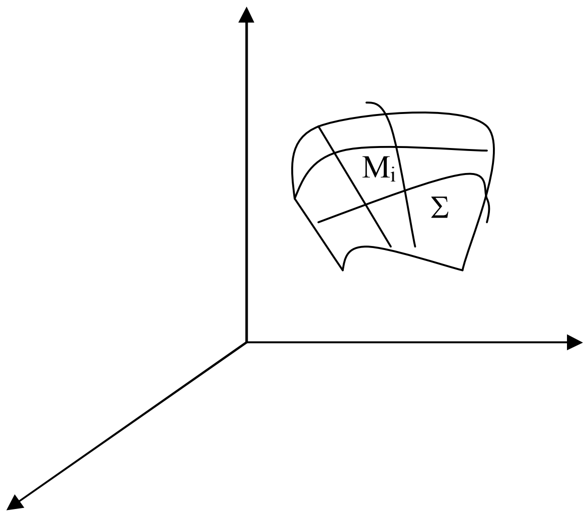
Приклад. Обчислити площу круга, обмеженого колом Г

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[-R\sin t\cdot(-R\sin t) + R\cos t\cdot R\cos t\right]dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} R^2 dt = \frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi = \pi R^2.$$

§ 4 Поверхневі інтеграли

Визначення. Нехай у просторовій області D розміщується гладка поверхня Σ , обмежена деяким контуром, то нехай у цій області D визначена неперервна функція трьох змінних $U = f(x,y,z)$.



Поверхня називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка неперервно змінюється вздовж поверхні.

Побудуємо для функції $U = f(x, y, z)$ інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$$

на поверхні Σ за алгоритмом, аналогічним тому, яким ми користувалися при побудові інтегральної суми для визначення подвійного інтеграла.

Відмітимо, що $\Delta\sigma_i$ - площа малої підобласті поверхні Σ.

Границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$ за умови, що кількість підобластей прямує до нескінченності ($n \to +\infty$), а діаметр кожної прямує до нуля ($d_i \to 0$) або за умови, що $\max d_i \to 0$ називається поверхневим інтегралом і позначається так:

$$\underline{\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\Sigma} f(x, y, z)d\sigma.}$$

Зауваження. Розглянемо важливий приклад поверхневого інтеграла, а саме:

$$\iint_{\Sigma} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) d\sigma, \tag{15}$$

де відносно поверхні Σ ми припускаємо, що в кожній її точці M задано вектор $\vec{n}(M)$ $(|\vec{n}|=1)$, який визначає додатний напрям нормалі до поверхні Σ;

$\vec{F}(P,Q,R)$ – вектор, визначений в кожній точці $M\in\Sigma$, причому вважаємо, що координати векторів $\vec{n}$, $\vec{F}$ - неперервні функції від координат $M(x,y,z)$.

Тоді, за визначенням, поверхневий інтеграл (15) дорівнює

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i .$$

Кожний доданок інтегральної суми

$$\left(\vec{F}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i=\left|\vec{F}(M_i)\right|\cos\alpha_i\Delta\sigma_i \tag{16}$$

(α_i - кут між векторами $\vec{F}(M_i),\vec{n}(M_i)$) з механічної точки зору можна витлумачити так: цей добуток дорівнює об’єму циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $\left|\vec{F}(M_i)\right|\cos\alpha_i$.

Якщо вектор $\vec{F}$ є швидкістю рідини, яка протікає через поверхню Σ, тоді добуток (16) дорівнює кількості рідини, яка протікає через $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу у напрямі вектора $\vec{n}(M_i)$.

Вираз $\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma$ визначає повну кількість рідини, яка протікає в одиницю часу через поверхню Σ у додатному напрямі, якщо під вектором $\vec{F}$ розуміти вектор швидкості течії рідини в даній точці. Тому поверхневий інтеграл (15) називають **потоком вектора $\vec{F}$ через поверхню** Σ.

4.1 Властивості та обчислення

Властивості поверхневих інтегралів аналогічні властивостям подвійних інтегралів.

Окремо відмітимо, що за допомогою поверхневих інтегралів можна обчислювати:

а) масу неоднорідної поверхні Σ, якщо підінтегральна функція $\rho = f(x, y, z)$ виконує роль щільності

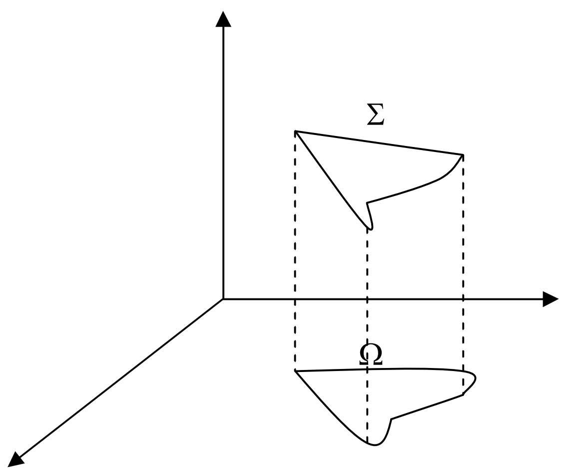
$$M_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma;$$

б) площу поверхні Σ

$$\sigma_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} 1 d\sigma.$$

Обчислення поверхневого інтеграла виконується шляхом перетворення його у подвійний інтеграл за таким правилом: якщо $z = h(x, y)$ рівняння поверхні Σ і якщо Ω - проекція Σ на площину XOY, тоді поверхневий інтеграл по поверхні Σ дорівнює подвійному інтегралу по області Ω за такою формулою:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega_{xy}} f(x, y, h(x, y))\sqrt{1 + [h'_x]^2 + [h'_y]^2}\, dxdy. \qquad (17)$$

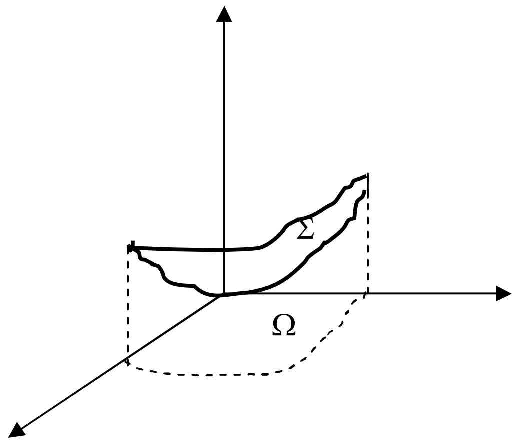


Зауваження. Можна, якщо це доцільно, обчислювати поверхневий інтеграл проектуючи поверхню Σ на площину YOZ, або XOZ:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega_{yz}} f(h_1(y, z), y, z)\sqrt{1 + [x'_y]^2 + [x'_z]^2}\, dydz, \quad (x = h_1(y, z)), \qquad (18)$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega_{xz}} f(x,h_2(x,z),z)\sqrt{1+[y'_x]^2+[y'_z]^2}\,dxdz, \quad (y = h_2(x,z)). \qquad (19)$$

Приклад. Обчислити масу частини неоднорідного еліптичного параболоїда $z = x^2 + y^2$, який розташовано між площинами XOY ($z = 0$) і $z = 1$, якщо його щільність дорівнює $\rho = z$.



$$M_{\Sigma} = 4\iint\limits_{\Sigma}\rho d\sigma = 4\iint\limits_{\Sigma} z d\sigma = 4\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\sqrt{1+[z'_x]^2+[z'_y]^2}\,dxdy = 4\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

(у цьому випадку для обчислення подвійного інтеграла краще перейти до полярних координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$).

$$M_{\Sigma} = \iint\limits_{\Omega} r^2\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\rho}{2}}\left\{\int\limits_0^1 4r^2\sqrt{1+4r^2}\,rdr\right\}d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^1 (4r^2+1-1)\sqrt{1+4r^2}\,rdr\right\}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^1\left[(4r^2+1)^{\frac{3}{2}} - (4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]8rdr\right\}d\varphi = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(4r^2+1)^{5/2}}{5/2} - \frac{(4r^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{5}5^{5/2} - \frac{2}{3}5^{3/2} - \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}\left(\frac{2\cdot 25\sqrt{5}}{5} - \frac{2\cdot 5\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}\,\frac{100\sqrt{5}+4}{15}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{25\sqrt{5}+1}{15}.$$

ТЕМА 3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ

§ 1 Скалярні та векторні поля. Потік вектора

Визначення 1. Якщо в кожній точці $M(x,y,z)$ деякої області D $(M \in D)$ задано функцію, яка залежить від координат цієї точки (x,y,z) і від моменту часу "t"

$$U = \Phi(x,y,z,t), \tag{20}$$

тоді кажуть, що в області D задано **скалярне поле.**

Наприклад, поле температур (відомо, що температура залежить від місця і часу), тисків, електростатичне поле.

Якщо функція "U" не залежить від часу t, тобто

$$U = \Phi(x,y,z),$$

тоді скалярне поле називають **стаціонарним.**

(Як правило, ми будемо розглядати саме стаціонарні скалярні поля).

Визначення 2. Множина точок M із області D, для яких виконується рівність

$$\Phi(M) = C, \tag{21}$$

де "C" деяка стала, називається **поверхнею рівня**, яка відповідає числу "C".

Сім'я поверхонь рівня скалярного поля $U = \Phi(M)$ в декартових координатах визначається рівнянням

$$\Phi(x,y,z) = C, \tag{22}$$

де "C" - довільне дійсне число.

З теорії функцій кількох змінних відомо, що вектор – градієнт функції $U = \Phi(x,y,z)$

$$grad\Phi\Big|_{M_0} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{k}\,\Big|_{M_0}$$

в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярний до поверхні рівня функції $U = \Phi(x, y, z)$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\Phi(x, y, z) = C, \quad C = \Phi(x_0, y_0, z_0).$$

Зауваження. В теорії полів зручно розглядати символічний вектор, який називають ***оператором Гамільтона***

$$\underline{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\ ,}$$

тобто вектор, координати якого є символами частинних похідних.

За допомогою оператора набла (∇) градієнт можна записувати таким чином:

$$grad\Phi\Big|_{M_0} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\Phi,$$

тобто розглядати $grad\Phi$ як добуток оператора набла (∇) на скаляр Φ.

Властивості оператора ∇

1) $\nabla c\Phi = c\nabla\Phi$ (властивість однорідності);
2) $\nabla(\Phi_1 + \Phi_2) = \nabla\Phi_1 + \nabla\Phi_2$ (властивість адативності);
3) $\nabla(\Phi_1 \cdot \Phi_2 = \nabla\Phi_1 \cdot \Phi_2 + \nabla\Phi_2 \cdot \Phi_1$.

Визначення 3. Простір або частина простору, в кожній точці якого заданий вектор, який залежить від координата точки і моменту часу t, називається **векторним полем**

$$\vec{U} = \vec{\Phi}(x, y, z, t).$$

Якщо вектор $\vec{U}$ не залежить від часу, тоді векторне поле називають **стаціонарним.**

Приклади векторних полів: поле тяжіння, магнітне поле, гідродинамічне або аеродинамічне, поле (в кожній точці задається вектор швидкості).

Визначення 4. Крива лінія у векторному полі, яка в кожній точці дотикається до вектора поля, називається **векторною лінією** (якщо векторне поле є силовим, тоді векторні лінії є силовими; якщо векторне поле є полем швидкостей, тоді векторні лінії називають **векторами току**).

Визначення 5. Розглянемо у векторному полі деякий замкнений контур (Г). Через кожну точку контура проведемо векторну лінію.

Сукупність цих векторних ліній утворює поверхню, яку називають **векторною трубкою**.

Визначення 6. Поверхня у просторі називається **орієнтованою,** якщо визначено, яка її сторона вважається **зовнішньою,** а яка – **внутрішньою**.

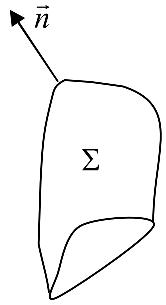
Орієнтацію поверхні можна визначити за допомогою нормалі до цієї поверхні, якщо вона замкнена, або за допомогою узгодження напряму зовнішньої нормалі з напрямом обходу її контура, якщо поверхня незамкнена.

В темі 3 ми будемо вважати, що поверхні орієнтовані так:

1) для замкненої поверхні зовнішньою стороною вважаємо природно зовнішню сторону цієї поверхні. В цьому випадку нормаль до поверхні, розташовану назовні тіла, обмеженого поверхнею, називають зовнішньою нормаллю;

2) для незамкненої поверхні узгодження між зовнішньою стороною поверхні, зовнішньою нормаллю і напрямом обходу її контура таке: з кінця зовнішньої нормалі до зовнішньої сторони поверхні напрям обходу її контура спостерігається проти годинникової стрілки.

Визначення 7. Нехай $\vec{F}$ - вектор поля та Σ деяка поверхня в полі, яка обмежена контуром Г, а $\vec{n}\ (|\vec{n}|=1)$ - вектор зовнішньої нормалі до цієї поверхні.



Поверхневий інтеграл

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\Pi_{\Sigma}$$

називається **потоком вектора** $\vec{F}$ через поверхню Σ.

Зауваження. Припустимо, що поверхня Σ однозначно проектується на яку-небудь координатну площину, наприклад, на площину ХОУ (або XOZ, або YOZ), має рівняння $z=h(x,y)$ (або $y=\varphi(x,z)$, або $x=\psi(y,z)$) і область D_{XY} (або D_{XZ}, або D_{YZ}) на цій площині є її проекцією.

Тоді поверхневий інтеграл $\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma$ можна обчислювати за допомогою подвійного інтеграла

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\pm\iint_{D_{XY}}\left[P(x,y,h(x,y))h'_x+Q(x,y,h(x,y))h'_y-R(x,y,h(x,y))\right]dxdy.$$

Аналогічно

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\pm\iint_{D_{XZ}}\left[P(x,\varphi(x,z),z)\varphi'_x-Q(x,\varphi(x,z),z)+R(x,\varphi(x,z),z)\varphi'_z\right]dxdz,$$

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\pm\iint_{D_{YZ}}\left[-P(\psi(y,z),y,z)+Q(\psi(y,z),y,z)\psi'_y+R(\psi(y,z),y,z)\psi'_z\right]dydz.$$

Знаки «+», або «-» перед подвійним інтегралом залежать від того, збігається (+) чи ні (-) напрям нормалі $\vec{n}$ з напрямом градієнта функції $f(x,y,z)=h(x,y)-z$ в кожній точці M_0, через яку проходить поверхня Σ, а саме – з напрямом вектора

$$grad f\Big|_{M_0}=\left(h'_x\vec{i}+h'_y\vec{j}-\vec{k}\right)\Big|_{M_0}.$$

Розглянемо далі замкнену поверхню Σ у векторному полі $\vec{F}$, вектори зовнішніх нормалей $\vec{n}\ (|\vec{n}|=1)$ до цієї поверхні, потік вектора $\vec{F}$ через цю поверхню

$$\Pi_\Sigma=\iint\limits_\Sigma\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma;$$

1) якщо $\Pi_\Sigma>0$, тоді кажуть, що в середині цієї поверхні міститься ***джерело*** векторного поля;

2) якщо $\Pi_\Sigma<0$, тоді кажуть, що в середині поверхні Σ міститься ***стік*** векторного поля;

3) якщо $\Pi_\Sigma=0$, тоді в середині поверхні Σ нема ні джерела, ні стоку векторного поля (або джерело і стік компенсують один іншого).

Для векторних полів $\vec{F}(P,Q,R)$ існує **формула Гаусса-Остроградського**

$$\underline{\iint\limits_\Sigma\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.}$$

§ 2 Потужність джерела. Дивергенція та її властивості

Визначення 1. Нехай вектор $\vec{F}(P,Q,R)$ визначає векторне поле.

Розглянемо деяку фіксовану точку M_0 в цьому полі і кулю малого радіуса з центром у точці M_0.

Розглянемо далі потік вектора $\vec{F}$ через поверхню Σ цієї кулі і поділимо його на об'єм цієї кулі.

Границя цього дробу за умови, що поверхня кулі стягується до точки M_0, називається ***потужністю*** джерела в точці M_0 і позначається так:

$$\underline{q(M_0) = \lim_{\Sigma \to M_0} \frac{\Pi_\Sigma(\vec{F})}{V}.}$$

Обчислимо потужність джерела в точці M_0, використовуючи формулу Гаусса- Остроградського

$$q(M_0) = \lim_{\Sigma \to M_0} \frac{\Pi_\Sigma(\vec{F})}{V} = \lim_{\Sigma \to M_0} \frac{\iint\limits_\Sigma (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma}{V} = \lim_{\Sigma \to M_0} \frac{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV}{V} =$$

(Застосуємо до потрійного інтеграла теорему про середнє значення. Це можливо, якщо припустити, що підінтегральна функція неперервна у замкненій області інтегрування)

$$= \lim_{\Sigma \to M_0} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\Big|_M \cdot V}{V} = \lim_{\substack{\Sigma \to M_0 \\ M \to M_0}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \partial z \right)_M = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0}.$$

(Тут точка M розташовується в середині кулі з поверхнею Σ).

Таким чином, потужність джерела векторного поля в точці M_0 дорівнює

$$\underline{q(M_0) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0}.}$$

Визначення 2. Сума частинних похідних від координат вектора поля $\vec{F}(P,Q,R)$ називається ***дивергенцією*** вектора $\vec{F}$ і позначається так:

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Зауваження. За допомогою оператора Гамільтона (∇) дивергенцію можна записувати як скалярний добуток двох векторів

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \vec{F}(P,Q,R)$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$$

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Властивості дивергенції

1) $div\vec{C} = 0$, тому що усі координати сталого вектора $\vec{C}$ є сталими величинами і тому їх похідні дорівнюють нулю;

2) $div\left(c\vec{F}\right) = c\,div\vec{F}$;

3) $div\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = div\vec{F}_1 + div\vec{F}_2$;

4) $div\left(\varphi \cdot \vec{F}\right) = grad\varphi \cdot \vec{F} + \varphi \cdot div\vec{F}$.

Доведемо четверту властивість. Дійсно,

$$div(\varphi \cdot \vec{F}) = \frac{\partial(\varphi \cdot P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi \cdot Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi \cdot R)}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot P + \varphi \cdot \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot Q + \varphi \cdot \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot R + \varphi \cdot \frac{\partial R}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot Q + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot R\right) + \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = grad\varphi \cdot \vec{F} + \varphi \cdot div\vec{F}.$$

Зауважимо, що за допомогою оператора Гамільтона ∇ четверту властивість можна записати так:

$$\nabla \cdot \left(\varphi\vec{F}\right) = \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi\nabla \cdot \vec{F}.$$

§ 3 Вихор (ротор) векторного поля та його властивості

Визначення. Розглянемо стаціонарне векторне поле

$$\vec{F}\big(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\big).$$

Новий вектор, який будується за формулою

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

називається ***вихром*** (або ***ротором***) вектора $\vec{F}$.

Зауваження. Ротор можна записати за допомогою оператора Гамільтона

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{так:} \qquad rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}.$$

Перелічимо ***властивості ротора:***

1) $rot\vec{C}=0$;
2) $rot(c\vec{F})=c\,rot\vec{F}$ (однорідність);
3) $rot(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=rot\vec{F}_1+rot\vec{F}_2$ (адитивність);
4) $rot(\varphi\cdot\vec{F})=grad\varphi\times\vec{F}+\varphi\, rot\vec{F}$.

Доведемо цю формулу:

$$rot(\varphi\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(\varphi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi R)}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi P)}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}R + \varphi\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}Q + \varphi\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right]\vec{i} + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}P + \varphi\frac{\partial P}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}R + \varphi\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right]\vec{j} +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q + \varphi\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}P + \varphi\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}R - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Q\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}P - \frac{\partial\varphi}{\partial x}R\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q - \frac{\partial\varphi}{\partial y}P\right)\vec{k} +$$

$$+ \varphi\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \varphi \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = grad\varphi \times \vec{F} + \varphi \cdot rot\vec{F}.$$

5) $rot(grad\varphi) = 0, \quad (\nabla \times (\nabla\varphi) = 0)$

(Ми припускаємо, що скалярна функція $\varphi(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні другого порядку). Дійсно, якщо

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

тоді

$$rot(grad\varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} = 0.$$

6) $\nabla(\nabla\cdot\vec{F})=\nabla(div\vec{F})=grad(div\vec{F})=grad(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})=$

$$=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}.$$

§ 4 Циркуляція вектора. Формула Стокса. Завихреність

Визначення 1. Нехай Г – деякий замкнений контур, який розташовано у векторному полі $\vec{F}(P,Q,R)$.

Криволінійний інтеграл другого роду

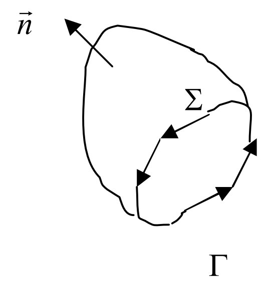
$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=Z_{\Gamma}(\vec{F})$$

називається **циркуляцією** вектора $\vec{F}$ вздовж контура Г (стандартним вважається обхід контура проти годинникової стрілки).

Між ротором векторного поля і циркуляцією існує певна залежність, яка міститься у формулі Стокса.

Формула Стокса

Якщо на замкнений контур Г у векторному полі $\vec{F}(P,Q,R)$ натягнута деяка поверхня Σ і $\vec{n}\ (|\vec{n}|=1)$ - нормаль до цієї поверхні, яка направлена назовні, тоді існує рівність

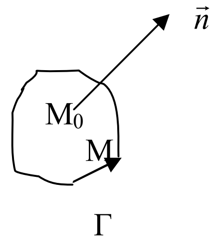


$$\iint_{\Sigma}\left(rot\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz. \qquad (23)$$

Рівність (23), тобто формулу Стокса, можна прочитати так: циркуляція вздовж замкненого контура Г дорівнює потоку ротора крізь будь-яку поверхню Σ, натягнуту на контур Г в напрямі зовнішньої нармалі до поверхні Σ.

Введемо далі поняття завихреності векторного поля в даній точці навколо заданого напряму.

Нехай M_0 - деяка фіксована точка векторного поля $\vec{F}$ і $\vec{n}$ орт деякого напряму.



Розглянемо далі деяку поверхню Σ, перпендикулярну до вектора $\vec{n}$ (наприклад, можна побудувати площину, перпендикулярну до вектора $\vec{n}$).

На цій поверхні розглянемо довільний замкнений контур Г, який охоплює точку M_0.

Напрям руху вздовж контура Г оберемо так, щоб з кінця вектора $\vec{n}$ він спостерігався проти годинникової стрілки.

Через S позначимо площу частини поверхні Σ, яка обмежена контуром Г.

Визначення 2. Розглянемо відношення циркуляції вектора $\vec{F}(P,Q,R)$ вздовж контура Г до площі S і перейдемо до границі за умови, що контур Г стягується до точки M_0.

Ця границя називається ***завихреністю*** векторного поля $\vec{F}(P,Q,R)$ в точці M_0 навколо напряму $\vec{n}$:

$$\underline{\lim_{\Gamma\to M_0}\frac{Z_\Gamma(\vec{F})}{S}=W_{\vec{n}}(\vec{F}).}$$

Обчислюємо завихреність $W_{\vec{n}}(\vec{F})$ за допомогою формули Стокса, а саме:

$$W_{\vec n}(\vec F)=\lim_{\Gamma\to M_0}\frac{Z_\Gamma(\vec F)}{S}=\lim_{\Gamma\to M_0}\frac{\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz}{S}=\lim_{\Gamma\to M_0}\frac{\iint\limits_\Sigma\left(rot\vec F\cdot\vec n\right)d\sigma}{S}=$$

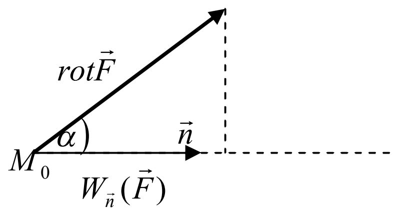
(Застосуємо до поверхневого інтеграла у чисельнику дробу теорему про середнє значення (ця теорема буде справедливою, якщо підінтегральна функція неперервна у замкненій області Σ)).

$$=\lim_{\Gamma\to M_0}\frac{\left(rot\vec F\cdot\vec n\right)_M\cdot S}{S}=\lim_{\Gamma\to M_0}\left(rot\vec F\cdot\vec n\right)_M=\left(rot\vec F\cdot\vec n\right)_{M_0}.$$

Отже, завихреність $\vec F$ в точці M_0 навколо напряму $\vec n$ дорівнює

$$\underline{W_{\vec n}(\vec F)=\left(rot\vec F\cdot\vec n\right)_{M_0}.}$$

Зауваження



$$W_{\vec n}(\vec F)=(rot\vec F\cdot\vec n)_{M_0}=|\vec n|\cdot\left|rot\vec F\right|\cdot\cos\alpha=\left|rot\vec F\right|\cdot\cos\alpha=Пр_{\vec n}rot\vec F.$$

Таким чином,

$$\underline{W_{\vec n}(\vec F)=Пр_{\vec n}rot\vec F.}$$

Висновок: напрям $rot\vec F$ є напрямом, навколо якого завихреність векторного поля має найбільше значення, а довжина $rot\vec F$ ($\left|rot\vec F\right|$) дорівнює найбільшому значенню цієї завихреності.

§ 5 Соленоїдальні та потенціальні векторні поля

Визначення 1. Векторне поле $\vec{F}$ називається ***соленоїдальним***, або ***трубчастим***, якщо потужність джерела в кожній точці поля дорівнює нулю.

Теорема. Наступні 5 тверджень еквівалентні:

1) векторне поле $\vec{F}(D)$ є соленоїдальним

$$q(M) = 0 \quad \forall M \in D;$$

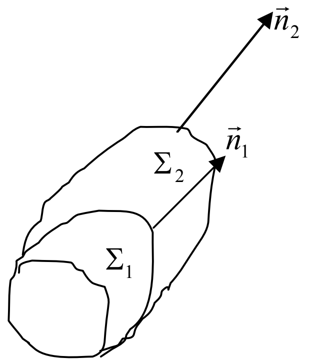
2) $div\vec{F} = 0;$

3) потік вектора $\vec{F}$ крізь будь-яку замкнену поверхню Σ, розташовану у векторному полі $\vec{F}(D)$, дорівнює нулю

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{F}) = 0 \quad \forall \Sigma \subset D;$$

4) потоки вектора $\vec{F}$ крізь дві поверхні, натягнуті на один контур, рівні між собою, якщо напрями нормалей однакові

$$\Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma_2};$$



5) потоки вектора $\vec{F}$ крізь будь-які два перерізи векторної трубки при однакових напрямах нормалей рівні між собою.

Доведення: Ми доведемо, що із твердження 1 випливає твердження 2 і т.д.

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (1).$$

1) $q(M) = 0 \quad \forall M \in D \Rightarrow div\vec{F} = 0$?

Вже доведено, що потужність джерела дорівнює дивергенції $\vec{F}$ в точці M

$q(M) = div\vec{F}\big|_M$, тобто, якщо $q(M) = 0$, тоді і $div\vec{F}\big|_M = 0.$

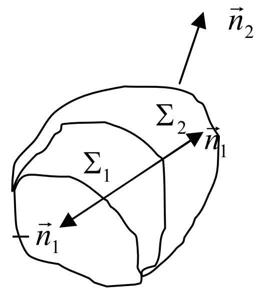
2) $div\vec{F} = 0 \Rightarrow \Pi_\Sigma(\vec{F}) = 0$?

Нехай відомо, що $div\vec{F}\big|_M = 0 \quad (\forall M \in D)$. Розглянемо будь-яку замкнену поверхню $\Sigma \subset D$ і запишемо формулу Гаусса-Остроградського

$$\oiint_\Sigma \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) d\sigma = \iiint_V div\vec{F} dv \quad \Rightarrow \iiint_V div\vec{F} d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \Pi_\Sigma = \oiint_\Sigma \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) d\sigma = 0;$$

3) $\Pi_\Sigma = 0 \quad (\forall \Sigma \subset D) \Rightarrow \Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma_2}$?

Розглянемо будь-який контур Г і дві поверхні, натягнуті на цей контур: $\Sigma_1, \Sigma_2 \quad (\Sigma_1, \Sigma_2 \subset D)$.



Напрями нормалі до кожної поверхні оберемо однакові в тому сенсі, що напрям обходу контура, який ми спотерігаємо з кінців векторів $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ буде однаковим.

Далі розглянемо затмкнену поверхню, утворену двома поверхнями

$$\Sigma = \Sigma_1^- + \Sigma_2.$$

Потік вектора $\vec{F}$ крізь замкнену поверхню Σ зараз дорівнює нулю, якщо нормалі направлені назовні, тобто

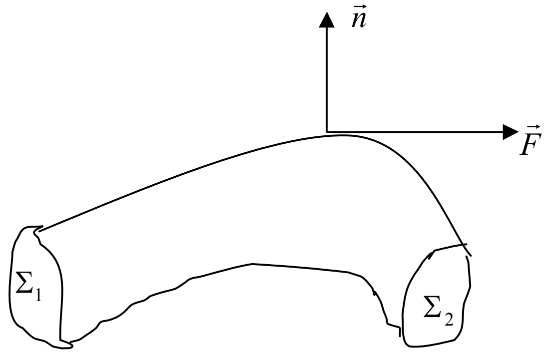
$$\Pi_\Sigma = \oiint_\Sigma \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \iint_{\Sigma^-_1}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma + \iint_{\Sigma_2}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = 0 \;\;\Rightarrow -\iint_{\Sigma_1}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma + \iint_{\Sigma_2}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma.$$

Отже,

$$\Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma_2};$$

4) $(4)\to(5)$?

Розглянемо векторну трубку та її два перерізи Σ_1, Σ_2.



Через $\hat{\Sigma}_2$ позначимо поверхню, яка складається із бічної поверхні векторної трубки π та перерізу Σ_2

$$\hat{\Sigma}_2 = \Sigma_2 + \pi.$$

Розглянемо потік вектора крізь поверхню $\hat{\Sigma}_2$

$$\Pi_{\hat{\Sigma}_2} = \Pi_{\Sigma+\pi} = \Pi_{\Sigma_2} + \Pi_\pi.$$

Але, вектор $\vec{F}$, за визначенням, завжди дотичний до векторної лінії, яка є твірною векторної трубки. Тому нормаль до поверхні векторної трубки буде завжди перпендикулярною до вектора $\vec{F}$, а тому скалярний добуток $\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$, тобто $\Pi_\pi = \iint_\pi \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = 0.$

Таким чином, оскільки дві поверхні $\Sigma_1, \hat{\Sigma}_2$, натягнені на один контур, то потоки вектора $\vec{F}$ крізь ці поверхні рівні між собою

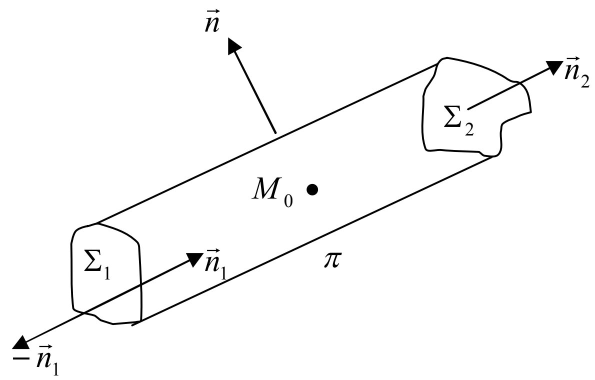
$$\Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\hat{\Sigma}_2} \Rightarrow \Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma + \pi} = \Pi_{\Sigma_2} + \Pi_{\pi} = \Pi_{\Sigma_2},$$

або

$$\Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma_2}.$$

5) нарешті, доведемо, що із твердження 5 випливає твердження 1.

Для цього розглянемо у векторному полі частину векторної трубки, в середині якої розташована точка M.



Розглянемо далі повну поверхню, складену із трубки і двох перерізів

$$\Sigma = \Sigma_1^- + \pi + \Sigma_2$$

та потік крізь цю поверхню

$$\Pi_{\Sigma} = \Pi_{\Sigma^-{}_1 + \pi + \Sigma_2} = \Pi_{\Sigma^-{}_1} + \Pi_{\pi} + \Pi_{\Sigma_2} = -\Pi_{\Sigma_1} + \Pi_{\Sigma_2} = 0,$$

тому і

$$q(M) = \lim_{\Sigma \to M} \frac{\Pi_{\Sigma}}{V} = 0.$$

Визначення 2. Векторне поле $\vec{F}$ називається **безвихорним**, якщо завихреність поля в кожній точці $M \in D$ навколо будь-якого напряму нормалі дорівнює нулю

$$W_{\vec{n}}(\vec{F})\big|_M = 0.$$

Визначення 3. Векторне поле $\vec{F}$ називається **потенціальним**, якщо існує така скалярна функція $\Phi(x, y, z)$, що вектор поля $\vec{F}$ дорівнює градієнту цієї функції

$$\underline{\vec{F} = grad\Phi},$$

це означає, що для $\vec{F}(P, Q, R)$ виконуються рівності

$$P = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Функцію $\Phi(x, y, z)$ називають **потенціалом** векторного поля.

Якщо область D, в якій визначено векторне поле $\vec{F}(P, Q, R)$, однозв'язна (область D називається однозв'язною, якщо будь-який замкнений контур $\gamma \subset D$ можна шляхом неперервної деформації стягнути в точку, не виходячи за межі області D), тоді справедлива

Теорема (основна теорема про потенціальні поля)

Наступні 5 тверджень еквівалентні:

(1) векторне поле $\vec{F}$ є безвихорним, тобто $W_{\vec{n}}(\vec{F})\big|_M = o, \quad \forall M \in D, \quad \forall \vec{n};$

2) $rot\vec{F}\big|_M = 0, \quad \forall M \in D;$

3) циркуляція $Z_\Gamma(\vec{F}) = 0, \quad \forall \Gamma \subset D;$

---

4) криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB(L)} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми шляху L, а залежить лише від координат початку A і кінця B шляху інтегрування;

5) векторне поле $\vec{F}$ є потенціальним, тобто існує скалярна функція $\Phi(x, y, z)$ така, що

$$\vec{F} = grad\Phi.$$

Доведення. покажемо, що із твердження 1 випливає твердження 2 і т.д.

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (1).$$

1) $(1) \to (2)$

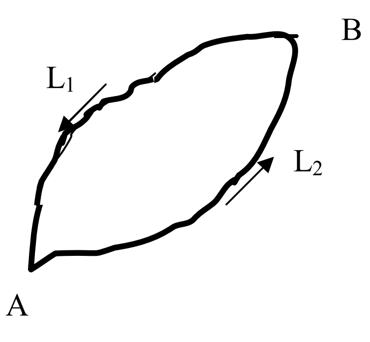
Нехай відомо, що $W_{\vec{n}}(\vec{F})\big|_M = 0 \quad \forall M \subset D, \quad \forall \vec{n},$ крім того відомо, що $W_{\vec{n}}(\vec{F}) = rot\vec{F} \cdot \vec{n}.$ Розглянемо такий напрям $\vec{n}$, що збігається із напрямом $rot\vec{F}.$

Тоді скалярний добуток $rot\vec{F} \cdot \vec{n} = \left|rot\vec{F}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0 = \left|rot\vec{F}\right|.$

Отже, $\left|rot\vec{F}\right| = 0$, тобто і $rot\vec{F} = 0;$

2) $(2) \to (3)$

Нехай $rot\vec{F} = 0$. Розглянемо у векторному полі $\vec{F}$ будь-який замкнений контур Г, натягнемо на нього будь-яку поверхню Σ і запишемо формулу Стокса



$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n}\right) d\sigma,$$

але $\iint\limits_{\Sigma}\left(rot\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=0,$ тому і циркуляція

$$Z_{\Gamma}\left(\vec{F}\right)=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=0;$$

3) $(3)\rightarrow(4)$

Нехай $Z_{\Gamma}(\vec{F})=0\quad\forall\Gamma.$

Розглянемо в полі $\vec{F}$ дві точки А і В і з’єднаємо їх двома шляхами l_1, l_2.

Розглянемо далі замкнений контур $\Gamma=l_1\left(AB\right)+l_2^{-}(BA).$ Тоді

$$0=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{l_1(AB)}+\int\limits_{l_2^{-}(BA)}=\int\limits_{AB(l_1)}-\int\limits_{AB(l_2)},$$

тобто

$$\int\limits_{AB(l_1)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AB(l_2)}Pdx+Qdy+Rdz;$$

4) $(4)\rightarrow(5)$

Нехай відомо, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. Нехай $A(x_0, y_0, z_0)$ - фіксована точка, точка $B(X,Y,Z)$ - змінна. Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{AB(L)}Pdx+Qdy+Rdz=\Phi(X,Y,Z).$$

За теоремою про незалежність такого інтеграла від шляху інтегрування (необхідність) функція $\Phi(X,Y,Z)$ буде такою, що

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}=P,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=Q,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial Z}=R,$$

тобто

$$\vec{F} = grad\Phi,$$

отже, векторне поле $\vec{F}$ буде дійсно потенціальним, а функція $\Phi(X,Y,Z)$ - його потенціалом;

5) нарешті, доведемо, що із 5 випливає 1.

Нехай $\vec{F} = grad\Phi.$

Обчислимо $rot\vec{F} = rot(grad\Phi) = 0$, тобто завихреність векторного поля в точці M навколо будь-якого напряму нормалі

$$W_{\vec{n}}(\vec{F})\big|_M = \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n}\right)_M = 0,$$

тобто векторне поле $\vec{F}$ є безвихорним.

Зауваження. В пункті 4 доведення теореми сформульоване правило обчислення потенціала векторного поля $\vec{F}(P,Q,R)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1984.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1967.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - М.: Наука, 1966.

4 Берман Г.Р. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Наука, 1976.

І.В. Ковалішина

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Конспект лекцій

Частина 8
КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ І ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Відповідальний за випуск Волохова Н.І.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 18.09.06 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 4,0. Обл.-вид.арк. 4,25.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7