Ковалішина І.В. Теорія ймовірностей. Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2004. – Ч. 1. - 58 с.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 2 лютого 2004 р., протокол № 6.

Рецензент

проф.. А.А.Янцевич (ХНУ)

ЗМІСТ

ТЕМА 1 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1.1 Предмет комбінаторики. Правила суми і добутку

У багатьох галузях людської діяльності доводиться зустрічатися із задачами, в яких треба знайти ***число*** можливих розміщень заданих предметів, число способів, якими можна здійснити деякий вибір тощо.

Такі задачі вивчає ***комбінаторика - галузь математики, предметом якої є теорія скінчених множин***.

Окремі комбінаторні задачі розглядалися ще в стародавні часи, але перші теоретичні дослідження в цій галузі були зроблені в XY11 сторіччі Б. Паскалем і П. Ферма у зв'язку з підрахунком числа різних можливостей в азартних іграх (карточні ігри, ігри з кубиком тощо).

Ряд задач комбінаторики розв'язав Л. Ейлер.

Проте в справжню математичну науку комбінаторика перетворилася лише у наш час. Підвищення інтересу до комбінаторики викликане бурхливим розвитком обчислювальної техніки і, пов'язаним з ним, загальним розвитком дискретної математики. Зокрема, багато задач теорії ймовірностей розв'язується за допомогою комбінаторики.

Введемо ***позначення***.

Множини позначатимемо великими латинськими буквами

A, B, C, . . .

їх елементи - малими

a, b, c, . . .

Об'єднання, переріз і різницю множин A, B позначатимемо відповідно:

$A+B$ $(A\cup B)$, AB $(A\cap B)$, $A\setminus B$, $\varnothing$ – порожня множина.

У цьому розділі розглядатимемо лише скінченні множини; через N(A) позначається число елементів множини A; якщо N(A) =n, тоді множину A називають n-множиною.

Значна кількість теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами ***суми*** і ***добутку***.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт " a" можна вибрати " m" способами, а об'єкт "b" – "n" способами, причому ніякий вибір "a" не збігається з жодним з виборів "b", то один з об'єктів „a" або "b" можна вибрати "m+n" способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт "a" можна вибрати "m" способами і при кожному виборі об'єкта "a" об'єкт „b" можна вибрати "n" способами, то вибір пари (a,b) можна здійснити "mn" способами.

Задача. У розіграші першості держави з футболу приимають участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі?

Розв'язання. Золоту медаль може отримати одна з 16 команд, а срібну – одна з 15 команд, які залишилися після того, як золота медаль вже має свого володаря. Тобто існує 16·15=240 способів розподілу золотої і срібної медалей.

Узагальнене правило добутку

Якщо об'єкт „a_1" можна вибрати "m_1" способами, об'єкт „a_2" – "m_2" способами, . . . ,об'єкт „a_r" – "m_r" способами, то вибір системи об'єктів $(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ можна здійснити $m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$ способами.

Приклад. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити із цифр 0,1,2,3,4,5, якщо:

1) усі цифри утвореного числа повинні бути різними?
2) цифри можуть повторюватися?
3) утворені числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватися)?

Розв'язання.

1 Першою цифрою може бути одна з п'яти цифр 1,2,3,4,5. Якщо перша цифра вже обрана, тоді друга цифра може бути вибраною п'ятьма способами, третя – чотирма, четверта – трьома, тобто загальне число способів дорівнює 5×5×4×3=300.

2 5×6×6×6=1080.

3 5×6×6×3=540,

тому,що останньою може бути лише одна із непарних цифр 1,3,5.

1.2 Упорядковані множини. Розміщення (без повторень). Перестановки

Означення. Множину М називають ***упорядкованою*** , якщо в ній встановлено відношення порядку $\prec$, що має такі властивості:

1) для будь-яких $a,b \in$ М або $a \prec b$ (a передує b) або $b \prec a$;
2) якщо $a \prec b,\ \ b \prec c\ \ \Rightarrow a \prec c$.

Вибір відношення порядку в даній множині називають її **впорядкуванням.**

Дві впорядковані множини вважаються рівними, якщо вони складаються з однакових елементів і однаково впорядковані.

Наприклад, (a,b,c), (a,c,b) - різні впорядковані множини.

Розміщення.

Означення. Нехай М є n- множиною, $k \le n$. Розміщенням з „n" елементів по „к" називають будь-яку впорядковану к-підмножину множини М.

Число розміщень з „n" елементів по "k" позначається так: A_n^k. (А –це перша буква французького слова „arrangement" – розміщення).

Отже, два розміщення вважаються різними не тільки тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, але і тоді, коли вони складаються з однакових елементів, але відрізняються їх порядком. За правилом добутку

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Задача 1. Студенту необхідно скласти 4 іспити за 8 днів. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу 4-елементних груп (дні складання іспитів), які можна скласти із 8 елементів, тобто

$$A_8^4 = 8\times 7\times 6\times 5 = 1680\ .$$

Якщо додатково відомо, що останній іспит складається у 8-ий день, тоді число способів дорівнює **;**

$$A_7^3 \times 4 = 7\times 6\times 5\times 4 = 840.$$

Перестановки

Означення. Розміщення з „n" елементів по "n" елементів називаються ***перестановками*** і позначаються так P_n (P – перша буква французького слова „permutation" – перестановка). Очевидно,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)] = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Таким чином,

$$P_n = n!\,.$$

Приклад. Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Власник ресторану запропонував їм заходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по-іншому; після того, як усі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть в ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

$$P_{10} = 10! = 3628000.$$

Цей день настане через 9942 роки.

1.3 Комбінації (без повторень). Трикутник Паскаля

Означення. Нехай M є n-множиною, k≤n. ***Комбінацією*** з „n" елементів по "k" називають будь-яку k- підмножину множини M і позначають її так: C_n^k. (C- перша буква французького слова "combinaison"- комбінація).

Отже, комбінації, на відміну від розміщень, - це **невпорядковані** підмножини заданої множини, і тому, дві k-підмножини, які відрізняються лише порядком елементів, вважаються рівними (таких рівних підмножин буде $P_k = k!$ і їх треба викреслити), тобто

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

Зауваження.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

тобто

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

З цієї формули випливає рівність

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

якою доцільно користуватися, якщо k>n/2.

Запишемо ще декілька формул:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (1.1)$$

Дійсно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\left(\frac{(n-k+1)+k}{k\cdot(n-k+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k.$$

Задача 1. Скількома способами читач може вибрати 3 книги із 7?

$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Задача 2. Скількома способами можна відібрати групу з 5 осіб із групи, в якій присутні 7 чоловіків і 3 жінки?

$$C_{10}^5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252.$$

А якщо в цій групі повинно бути 3 чоловіка і 2 жінки?

$$C_7^3\cdot C_3^2 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3 = 105.$$

З формули (1.1) випливає простий і зручний спосіб обчислення чисел C_n^k, або, як їх часто називають, біномний коефіцієнт. Цей спосіб називають ***трикутником Паска ля***.

Це трикутна таблиця, в якій кожне число (крім крайніх одиниць) дорівнює сумі двох чисел, що розташовані над ним (n ий рядок містить числа $C_n^k, (k = 0,1,2,\cdots,n)$, C_n^n - і -за означенням)

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \cdots\cdots C_n^{n-2} \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

1.4 Розміщення з повтореннями

Означення. Нехай М є n- множиною, к – довільне натуральне число. ***Розміщенням з повтореннями*** з „n" елементів по "к" називають будь-який упорядкований к- елементний набір виду $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, де $a_1, a_2,\ldots, a_k$ – елементи множини М (не обов'язково різні).

Число усіх розміщень з повтореннями з „n" елементів по "к" позначається так : $\overline{A}_n^k$.
(Зазначимо, що, на відміну від розміщень без повторень, тепер може бути k>n). Має місце рівність

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{1.2}$$

Зауваження. Має місце рекурентна формула

$$\overline{A}_n^{k+1} = n \cdot \overline{A}_n^k.$$

Дійсно, щоб із к-елементної вибірки отримати к+1 – елементну треба додати до $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ ще один елемент „a_{k+1}", а це можна зробити „n" способами. За правилом добутку

$$\overline{A}_n^{k+1} = n \cdot \overline{A}_n^k.$$

Далі, очевидно, що $\overline{A}_n^1 = n$, тоді, за методом індукції, отримуємо формулу (1.2).

Задача 1. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, 0 ?

Кожне число, яке менше за мільйон, можна записати за допомогою шести цифр, дописавши, в разі потреби, необхідне число нулів зліва. Тому кількість таких чисел дорівнює

$$\overline{A}_4^6 = 4^6 = 4096.$$

Задача 2. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9 ?

Оскільки число к – цифрових чисел, записаних за допомогою цифр 7, 8, 9 , дорівнює $\overline{A}_3^k$, то всіх таких чисел, менших за мільйон, є $\sum_{k=1}^{6} \overline{A}_3^k = \sum_{k=1}^{6} 3^k = 3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6 = 1092.$

1.5 Перестановки з повтореннями

Відомо, що з „n" елементів можна утворити n! Перестановок. Але, якщо серед „n" елементів є однакові, то перестановки, які утворюються при переставленні однакових елементів, нічим не відрізняються одна від іншої; тому кількість різних перестановок буде меншою, ніж n!.

Означення. ***Перестановкою з повтореннями*** з „n" елементів називається будь-яке впорядкування n-множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів n-множини М є „n_1" елементів першого типу, "n_2" – другого, . . . , „n_k" – елементів к-го типу ($n_1+n_2+\ldots+n_k=n$), тоді число всіх перестановок такої множини позначається як $P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ і дорівнює

$$P_n(n_1,n_2,\cdots,n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}. \tag{1.3}$$

Зауваження. Формула (1.3) допускає інше комбінаторне тлумачення, а саме: $P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ – це число способів, якими можна розкласти „n" різних предметів по "к" ящиках так, щоб до і-го ящика потрапило „n_i" предметів (і=1,2,...,к).

Приклад. Скільки різних „слів" (у тому числі і беззмістовних) можна дістати, переставляючи букви у слові „математика" ?

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$$

1.6 Комбінації з повтореннями

Означення. ***Комбінацією з повтореннями*** з „n" елементів по "к" елементів називається будь-який к-елементний набір типу $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, де кожний з елементів $a_1, a_2, \dots, a_k$ належить до одного з „n" типів, і позначається так: $\overline{C}_n^k$.

Теорема. Для будь-яких натуральних чисел „n" і "к" має місце формула

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.4)$$

Приклад. Скількома способами можна купити 8 тістечок у крамниці, де є 6 різних сортів таких виробів ?

$$\overline{C}_6^8 = C_{13}^8 = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!8!} = 1287.$$

Зауваження 1. Формула (1.4) допускає також інше комбінаторне тлумачення, а саме: $\overline{C}_n^k$ - це число способів, якими можна розкласти „к" однакових предметів по „n" ящиках.

Зауваження 2. Позначивши число предметів, які потрапили до і-го ящика через x_i (i=1, 2,...,n) , ми можемо дати таке тлумачення числа комбінацій з повтореннями: $\overline{C}_n^k$ - **це число цілих невід'ємних розв'язків рівняння**

$$x_1+x_2+\dots+x_n=k.$$

1.7 Біном Н'ютона

Означення. Біномом Н'ютона називають вираз $(a+b)^n$.

Розглянемо відомі формули:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Якщо скористатися методом повної математичної індукції, можна довести, що має місце рівність

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.$$

Біном Н'ютона має такі властивості:

1) сума показників степенів кожного члена правої частини формули Н'ютона дорівнює „n";
2) кількість доданків у правій частині формули Н'ютона дорівнює (n+1);
3) показник степеня „а" спадає від „n" до "0", а показник степеня „b" зростає від "0" до „n";
4) із рівності $C_n^{n-m}=C_n^m$ випливає, що коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців , рівні між собою;
5) якщо a=1, b=1, формула Н'ютона має вигляд

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n,$$

тобто сума біномних коефіцієнтів дорівнює 2^n;
6) якщо a=1, b=-1, тоді

$$0=1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\dots+(-1)^nC_n^n,$$

звідки

$$1+C_n^2+C_n^4+\dots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+\dots+C_n^n,$$

тобто сума парних коефіцієнтів дорівнює сумі непарних коефіцієнтів.

ТЕМА 2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

РОЗДІЛ 2.1 ПОДІЇ ТА ЙМОВІРНІСТЬ

2.1.1 Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XY111 сторіччя, коли були дуже поширені азартні ігри (гра в „орлянку", ігри з кубиком, деякі карточні ігри).

У листуванні Паскаля і Ферма з приводу задач, які виникли у зв'язку з азартними іграми, було введено поняття ймовірності і математичного сподівання.

Теорія ймовірностей - це галузь математики, яка вивчає математичні моделі випадкових явищ.

Наведемо приклади таких явищ.

1 Якщо підкинути монету, то вона може впасти цифрою або гербом догори.

2 Якщо слідкувати за певним атомом радіоактивної речовини, то за даний проміжок часу він може або розпастись, або не розпастись.

Настання або ненастання кожної з цих подій залежить від цілого ряду умов, які неможливо наперед врахувати, тому такі події вважають випадковими.

Зрозуміло, що при одноразовому проведенні будь-якого експерименту ми ніяких закономірностей не помітимо. Закономірності починають виявлятися лише тоді, коли ми здійснюємо цей експеримент багато разів в однакових умовах.

2.1.2 Різні типи подій

Основними поняттями теорії ймовірностей є поняття ***експерименту*** (випробування) і ***події*** .

Означення 1. *Експериментом* (випробуванням) називають певний комплекс умов. „Повторити експеримент" означає ще раз здійснити заданий комплекс умов.

Означення 2. *Подією* називають факт, який настає або не настає в результаті даного експерименту.

Зауважимо, що настання або ненастання події в результаті експерименту не можливо передбачити, і тому **подія є явищем випадковим.**

Приклад. Нехай з урни, в якій міститься певна кількість білих і чорних куль, навмання витягують одну кулю. Це –випробування.

Поява білої кулі - це подія A.

Поява чорної кулі - це подія B.

Розглянемо деякі типи подій.

Означення 3. Подія називається ***вірогідною*** , якщо вона обов'язково відбудеться в результаті експерименту.

Означення 4. Подія називається ***неможливою*** , якщо вона не може відбутися в результаті експерименту.

Приклад. Нехай з урни, в якій містяться червоні, жовті, зелені кулі, навмання витягують одну кулю. Поява кольорової кулі – це подія вірогідна; поява білої кулі – це подія неможлива.

Випадкові події можуть бути ***складеними*** (розкладними) або ***елементарними*** (нерозкладними).

У попередньому прикладі поява кольорової кулі – це складена подія, поява червоної кулі – елементарна подія.

Зауважимо, що **будь-який результат випробування є елементарною подією.**

Сукупність всіх елементарних подій даного експерименту називають *простором елементарних подій*, а окремі елементарні події – точками цього простору.

Наприклад, в експерименті з урною, у якій містяться червоні, зелені, жовті та білі кулі, простір елементарних подій складається з чотирьох точок, а саме: E_1 – поява червоної кулі, E_2 – поява жовтої кулі, E_3 – зеленої, E_4 – білої.

Будь-яку випадкову подію у даному експерименті можна розглядати як сукупність елементарних подій.

Наприклад, подія A – поява кольорової кулі може розглядатися як сукупність трьох елементарних подій
$A = (E_1,E_2,E_3)$.

Означення 5. Сукупність елементарних подій, які визначають дану випадкову подію A, називають подіями ***сприятливими*** для події A.

Очевидно, у нашому прикладі подія E_4 (тобто поява білої кулі) не сприятлива для події A (появі кольорової кулі).

Приклад. Експеримент полягає в тому, що виконується одночасно декілька пострілів по мішенях.

Нехай подія A – влучення хоча б у одну мішень; подія B – влучення у дві мішені; подія C – влучення у три мішені.

Очевидно, в результаті експерименту події A і B можуть здійснитися одночасно, а події B і C одночасно відбутися не можуть.

Означення 6. Дві події A і B називаються ***сумісними*** , якщо вони можуть відбутися одночасно в результаті одного експерименту.

Означення 7. Дві події B і C називаються ***несумісними*** , якщо вони не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.

Зауваження. ***Елементарні події завжди несумісні.***

2.1.3 *Алгебра події*

Означення 1. *Сумою* (або об'єднанням) двох події A і B називається третя подія C, яка полягає в тому, що відбувається або подія A, або подія B, або обидві події A і B разом.

Таким чином, сума двох подій – це подія, яка полягає в тому, що відбувається хоча б одна з подій A або B.

Сума подій позначається так: A+B, або $A \cup B$.

Поняття суми розповсюджується на будь-яку кількість доданків, а саме: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Сумою „n" подій $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$ називають подію, яка полягає в тому, що відбувається хоча б одна з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Властивість суми двох однакових подій: A+A=A.

Приклад. Експеримент полягає в тому, що по мішені виконуються два постріли. Простір елементарних подій даного експерименту складається з чотирьох точок, а саме:

	перший постріл	другий постріл
E_1	+ (влучив)	+
E_2	+	- (не влучив)
E_3	-	+
E_4	-	-

Розглянемо подію A – поразка мішені після першого пострілу і подію B – поразка мішені після другого пострілу. Очевидно, подія A визначається елементарними подіями $A=(E_1, E_2)$, а подія $B = (E_1, E_3)$.

C=A+B – поразка мішені хоча б після одного пострілу, тобто подія C визначається такими елементарними подіями $C=(E_1, E_2, E_3)$.

Зауваження. Будь-яку випадкову подію можна розглядати як суму елементарних подій, сприятливих для даної події:

$A=E_1+E_2$, $B=E_1+E_3$, $C=E_1+E_2+E_3$.

Означення 2. *Добутком* (або перерізом) двох подій A і B називається третя подія C, яка полягає в тому, що одночасно відбуваються події A і B. Добуток подій позначається так:
$C=A \cdot B$ або $C = A \cap B$.

Якщо подій декілька : $A_1, A_2, \dots, A_n$, тоді добутком є подія $A=A_1 \cdot A_2 \dots A_n$ ($A = \prod_{k=1}^{n} A_k$, $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$), яка полягає в тому, що одночасно відбуваються усі події $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Очевидно, що $A \cdot A=A$; якщо A і B несумісні події, тоді $A \cdot B$ – неможлива подія.

Для суми і добутку подій справедливі переставний, сполучний і розподільний закони:

$$A+B=B+A; \quad A \cdot B=B \cdot A;$$

$$(A+B)+C=A+(B+C); \quad (A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C);$$

$$(A+B) \cdot C=A \cdot C+B \cdot C.$$

Означення 3. Дві єдино можливі і несумісні події називаються *протилежними.*

Позначення: $\bar{A}$ - подія протилежна події A.

Наприклад, A – поява кольорової кулі, $\bar{A}$ - поява не кольорової кулі, тобто поява білої кулі;

A – випадіння цифри догори в експерименті з підкиданням монети, $\bar{A}$ - випадіння герба догори.

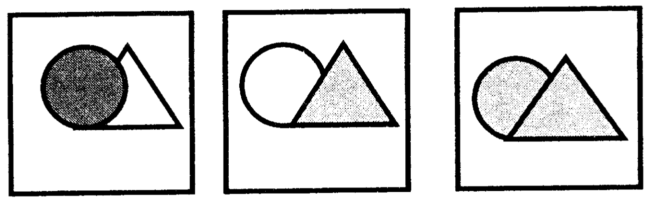
Якщо через G – вірогідну подію, а через U - неможливу, тоді мають місце рівності:

$$A + \bar{A} = G, \quad A \cdot \bar{A} = U.$$

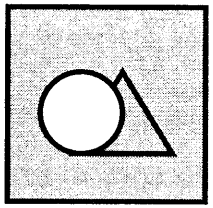
Розглянемо, як приклад, діаграму Ейлера- Венна, а саме : на площині є квадрат і на ньому круг і трикутник. Експеримент полягає в тому, що на квадрат кидаємо точку.

Нехай подія A - точка потрапляє в круг; подія B – точка потрапляє у трикутник.

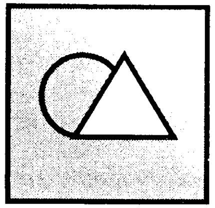
Зафарбовані частини квадрата визначають певні події, пов'язані з подіями A і B.



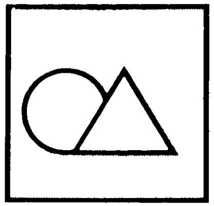
A B A+B



$\bar{A}$



$\bar{B}$



$A+B$

2.1.4 Визначення ймовірності події

Приклад 1. Нехай з урни, у якій містяться 8 білих та 2 чорних кулі, навмання витягують одну кулю.

Нехай подія А – поява білої кулі, подія В – поява чорної кулі. Очевидно, у цьому експерименті подія А більш можлива ніж подія В, тому що білих куль більше.

Приклад 2. Нехай експеримент полягає в тому, що підкидають кубик з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 на кожній грані.

Очевидно, що поява будь-якої з цих цифр на верхній грані рівно можлива тому, що гральний кубик має симетричні грані.

Ці приклади свідчать про те, що кожній випадковій події можна поставити у відповідність ***число*** , яке буде тим більшим, чим більше буде можливість появи цієї події.

2.1.4.1 Означення

Ймовірністю випадкової події називається чисельна міра степеня об'єктивної можливості даної події. Ймовірність позначається так: P(A).

Нехай далі простір елементарних подій деякого експерименту Ω є скінченою множиною

$$\Omega = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\},$$

тобто є тільки „n" можливих результатів випробування, у цьому випадку множину Ω називають повною групою подій (або докладніше: повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування).

Нехай кожна елементарна подія має свою ймовірність $P(E_1)$, $P(E_2)$,..., $P(E_n)$ і нехай подія А, якій сприяють елементарні події $A=(E_1, E_2, \dots, E_к)$.

Означення. ***Ймовірністю події А називають суму ймовірностей елементарних подій, сприятливих для події А***

$$P(A)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_к)$$

За означенням, ймовірність вірогідної події G вважається рівною 1, а ймовірність неможливої події U – 0:

$$P(G) = 1; \quad P(U) = 0.$$

Очевидно, що сума усіх елементарних подій даного експерименту є подією вірогідною

$$G= E_1+E_2+\ldots+E_n$$

тому, що в результаті експерименту обов'язково відбувається хоча б одна з елементарних подій.

Крім того, усі елементарні події сприяють появі події G, і тому

$$1=P(G)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_n).$$

Висновок: Сума ймовірностей елементарних подій даного експерименту дорівнює 1 (або: сума ймовірностей повної групи подій дорівнює 1):

$$\sum_{k=1}^{n} P(E_k) = 1.$$

Звідси випливає, що ймовірність будь-якої події А задовольняє нерівності

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Таким чином, для визначення ймовірності події треба визначити ймовірності елементарних подій даного експерименту; але, у загальному випадку визначити ймовірності елементарних подій дуже складно.

Ці труднощі можна обминути, якщо елементарні події виявляються рівноможливими, тому що в цьому випадку ми можемо вважати, що їх ймовірності рівні між собою $P(E_i)=p$ (i=1, 2, ... , n).

Але тоді з формули $\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$ випливає рівність

$$p \cdot n=1, \text{ тобто } p=1/n.$$

2.1.4.2 Класичне означення ймовірності

Нехай тепер відомо, що події А сприяють „m" елементарних подій. Тоді

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) = m \cdot p = \frac{m}{n},$$

тобто

P(A) = m/n.

Класичною ймовірністю події А називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для події А, до числа всіх рівно можливих і попарно несумісних результатів випробування.

(Ймовірністю події А називається відношення числа елементарних подій, сприятливих для А до загального числа усіх рівноможливих елементарних подій).

Зауваження. Класичне означення ймовірності справедливе лише в тому випадку, коли, по-перше, простір елементарних подій Ω є дискретним і, по-друге, елементарні події рівноможливі.

Приклад 1. Експеримент полягає в тому, що підкидають дві монети. Подія А – хоча б на одній з них випадає герб догори.

Простір елементарних подій складається з чотирьох точок: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ.

Сприятливими для події А будуть елементарні події: ГГ, ГЦ, ЦГ, тобто n=4, m=3, отже ймовірність події А дорівнює:

P(A)=m/n=3/4.

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випадає на верхній грані кубика, при одному підкиданні буде: а)парним (подія А); б) кратним числу 3 (подія В).

Простір елементарних подій даного експерименту складається з 6 точок: $\Omega = \{E_1, E_2, \cdots, E_6\}$, де E_i - елементарна подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає „і" очок. Сприятливі елементарні події для події А =(E_2, E_4, E_6), для події В =(E_3, E_6). Таким чином,

P(A) = 3/6 = 1/2 ; P(B) = 2/6 = 1/3.

2.1.4.3 Геометрична ймовірність

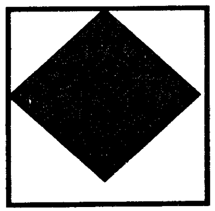
Для того щоб звільнитися хоча б від одного з обмежень (дискретність простору елементарних подій та їх рівноможливість), при яких справедливе класичне означення ймовірності, розглянемо геометричну ймовірність, для якої залишається лише рівна можливість елементарних подій.

Розглянемо на площині область - квадрат G і на ній підобласть - ромб g, та розглянемо експеримент, який полягає в тому, що на область G кидаємо точку. Подія А – попадання точки в ромб g.

Простір елементарних подій даного експерименту можна вважати неперервним, якщо кожній точці, яка падає, поставити у відповідність геометричну точку, яка належить квадрату G і збігається з точкою падіння. При такому тлумаченні простір елементарних подій буде збігатися з множиною точок квадрата G, а сукупність сприятливих елементарних подій для події А – з множиною точок ромба g.

При цих умовах ймовірністю події А називають відношення площі ромба g до площі квадрата G

$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}.$$



Означення. ***Геометричною ймовірністю події А*** називається відношення міри області сприятливих для події А елементарних подій до міри всієї області елементарних подій даного експерименту.

2.1.4.4 Статистична ймовірність

Нехай деякий експеримент відбувається N разів і при цьому в M випробуваннях з'явилась подія А; відношення

M/N =W

називають ***частотою настання події А в серії з N випробувань.***

Теорія ймовірностей має справу лише з такими подіями, для яких має місце властивість ***стійкості*** частот.

Ця властивість полягає в тому, що частота події A при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота появи герба буде мало відрізнятись від 0,5; так К. Пірсон підкидав монету 24000 разів і при цьому 12012 разів випав герб; відношення 12012/24000 відрізняється від 0,5 лише на 0,0005.

Число, навколо якого групуються частоти події A при великій кількості випробувань, називають *статистичною ймовірністю* події A.

Зауваження. Означення статистичної ймовірності виявляється незручним за двох причин: в цьому означенні нічого не говориться про те наскільки великим повинно бути число випробувань і наскільки може відхилятися частота від ймовірності при даному N.

Р.Мізес дав означення **ймовірності як границі послідовності частот**

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{M}{N}.$$

На основі цього означення можна здійснити побудову теорії ймовірностей, але при побудові строгої математичної теорії на цьому шляху виникають значні труднощі.

Задача про зустріч

Дві особи A і B домовились зустрітися в певному місці, причому кожен з них приходить туди незалежно від іншого у випадковий момент між 12 і 13 годинами. Той, хто приходить першим, чекає 20 хвилин і, якщо другий за цей час не прийде, перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Позначимо моменти приходу A і B відповідно через „x” і “y”. Тоді за простір елементарних подій природно взяти квадрат Ω у площині координат XOY

$$\Omega=\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$$

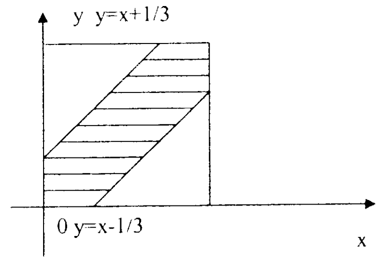
Згідно з умовою, A і B зустрінуться тоді і тільки тоді, коли $|y-x|\le\frac{1}{3}$ (різниця між моментами приходу не перевищує 20 хвилин); це означає, що зустрічі (подія C) відповідають точки квадрата, для яких виконується зазначена нерівність:

$$C=\left\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, |y-x|\le\frac{1}{3}\right\}.$$

Нерівність $|y-x|\le\frac{1}{3}$ еквівалентна нерівності $x-\frac{1}{3}\le y\le x+\frac{1}{3}$, тобто заштрихована область на рисунку.

Отже, шукана ймовірність за формулою геометричної ймовірності дорівнює

$$P(C)=\frac{S_C}{S_{kv}}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{1}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.$$



2.1.5 *Теорема додавання*

На практиці зустрічаються випадки, коли безпосередньо визначити ймовірність події важко, але можна виразити дану подію через деякі інші події, для яких ймовірність обчислюється простіше.

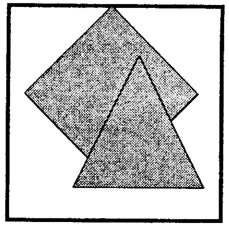
Тому важливо знати, як саме виразити ймовірність однієї події через ймовірності зв'язаних з нею подій. Цей зв'язок міститься у теоремах додавання і множення.

Теорема додавання

Якщо дві події A і B мають ймовірності P(A) і P(B), тоді ймовірність їх суми A+B дорівнює сумі їх ймовірностей мінус ймовірність їх добутку

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A·B).

Доведення цього твердження можна розглянути на схемі (діаграмі) Ейлера – Венна.



Нехай експеримент полягає в тому, що точка попадає на квадрат. Подія А – попадання у ромб, подія В – попадання точки у трикутник. Подія А+В відбудеться, якщо точка потрапить у зафарбовану фігуру. За формулою геометричної ймовірності

$$P(A+B)=\frac{S_A+S_B-S_{AB}}{S_{kv}}=\frac{S_A}{S_{kv}}+\frac{S_B}{S_{kv}}-\frac{S_{AB}}{S_{kv}}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Наслідок 1. Якщо події А і В ***несумісні***, тоді ймовірність їх суми дорівнює сумі їх ймовірностей.

Дійсно, $A\cdot B=U$ - подія неможлива і тому P(A·B) = 0 і

P(A+B) = P(A)+P(B).

Наслідок 2. Ймовірність суми будь-якого числа попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Наслідок 3. Сума ймовірностей двох протилежних подій завжди дорівнює одиниці

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Дійсно, якщо A і $\bar{A}$ протилежні події, тоді їх сума $A+\bar{A}=G$ подія вірогідна, і тому $P(A+\bar{A})=P(G)=1$, крім того A і $\bar{A}$ несумісні події і тому $P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$. Таким чином, $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Приклад. 3 урни, в якій містяться 10 червоних, 5 зелених і 15 білих куль навмання витягується одна куля. Нехай подія А – поява червоної кулі, подія В – поява зеленої кулі. Знайти ймовірність появи кольорової кулі.

Подію С – появу кольорової кулі можна розглядати як суму двох подій А і В, а саме C=A+B. Але тоді (А і В несумісні)

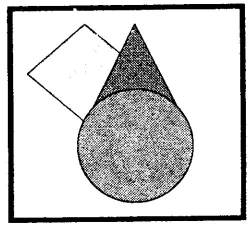
P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B).

Обчислюючи ймовірності доданків за формулою класичної ймовірності, отримуємо P(A)=10/30=1/3; P(B)=5/30=1/6; P(C)=1/3+1/6=1/2.

Можна застосувати і такий спосіб: якщо С – поява кольорової кулі, тоді $\bar{C}$ - протилежна подія, тобто поява не кольорової (білої) кулі, причому $P(\bar{C})=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. Але тоді $P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Наслідок 4. Теорема додавання для трьох подій А, В, С має вигляд

P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) – P(A·B) – P(A·C) – P(B·C)+P(A·B·C).



На цьому рисунку подія А – це попадання точки, яка кидається на квадрат у ромб, подія В – у трикутник, подія С – у коло.

Остання теорема поширюється на випадок суми будь-якого числа довільних подій.

2.1.6 Залежні та незалежні події. Теорема множення

Означення 1. Нехай А і В дві події. Кажуть, що подія В не залежить від події А, якщо ймовірність події В не залежить від того відбулась чи не відбулась подія А.

Приклад 1. Два стрільця виконують по одному пострілу по мішені. Нехай – А – подія, яка полягає в тому, що влучає перший стрілець, подія В – влучає другий стрілець.

Очевидно, що подія В не залежить від події А.

Приклад 2. На екзамені є 5 білетів. Перший студент знає відповіді на перші 4 білета.

Нехай – А – подія, яка полягає в тому, що перший студент успішно складе іспит. Нехай – В – подія, яка полягає в тому, що інший студент зайшов в аудиторію і витягнув білет №3.

Якою буде ймовірність події A в двох випадках, а саме: якщо подія B не відбулась, або подія B вже відбулась?

Якщо подія B ще не відбулась, тоді $P(A)=4/5$, а при умові, що подія B відбулась – $P(A)= 3/4$.

Означення 2. Умовною ймовірністю події B називають ймовірність цієї події при умові, що відбулась подія A, і позначають її так:

$$P_A(B) = P(A/B).$$

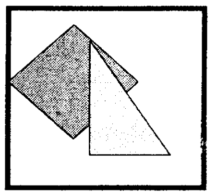
Зауваження. Якщо подія B не залежить від події A, справедлива рівність $P_A(B) = P(B)$.

Теорема множення

Ймовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірності події A на умовну ймовірність події B при умові, що подія A відбулась

$$\underline{P(A\cdot B) = P(A)\cdot P_A(B)}.$$

Розглянемо доведення цієї формули на діаграмі Ейлера-Венна.



Нехай експеримент полягає в тому, що на квадрат кидаємо точку. Подія A – точка потрапляє в ромб, подія B – точка потрапляє в трикутник.

Очевидно, що подія $A\cdot B$ полягає в тому, що точка потрапляє в область, спільну для ромба і трикутника (їх переріз). Можна записати за формулою геометричної ймовірності

$$P(A\cdot B) = \frac{S_{AB}}{S} = \frac{S_{AB}}{S}\cdot\frac{S_A}{S_A} = \frac{S_A}{S}\cdot\frac{S_{AB}}{S_A},$$

але відношення $\frac{S_{AB}}{S_A}$ можна розглядати як геометричну ймовірність події B при умові, що подія A вже відбулась, тобто

$$P(A\cdot B) = \frac{S_A}{S}\cdot\frac{S_{AB}}{S_A} = P(A)\cdot P_A(B).$$

Наслідок 1. Для добутку двох подій має місце переставний закон, тобто $A\cdot B = B\cdot A$, тому справедлива рівність

$P(A)\cdot P_A(B) = P(A\cdot B) = P(B\cdot A) = P(B)\cdot P_B(A)$, тобто

$$\mathbf{P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A).}$$

Наслідок 2. Якщо подія B не залежить від події A, тоді $P_A(B) = P(B)$ і тому,

$$\mathbf{P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).}$$

Наслідок 3. Якщо подія B не залежить від події A, тоді і подія A не залежить від події B.

Дійсно, якщо $P_A(B) = P(B)$, то $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P_A(B) = P(A)\cdot P(B) = P(B\cdot A) = \mathbf{P(B)\cdot P_B(A)}$, звідки $P_B(A) = P(A)$ при умові, що $P(B)>0$.

Зауваження. Користуючись наслідками 2 і 3 можна визначати незалежність двох подій таким чином: дві події A і B називаються незалежними одна від другої, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей

$$\mathbf{P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).}$$

Наслідок 4. Ймовірність добутку системи довільних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ обчислюється за формулою

$$\mathbf{P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)} = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}(A_n).$$

Поняття незалежності можна поширити на сукупність n – подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, а саме: події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо кожна з них не залежить від усіх інших.

Наслідок 5. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні у сукупності, ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A_1\cdot A_2\cdots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n),$$

або

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Зауваження. Можна сформулювати інше означення незалежності подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ у сукупності, а саме: події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Приклад 1. Підкидається двічі гральний кубик. Розглядаємо події: А – подія, коли випадає 6 після першого підкидання; В – подія, коли випадає 6 після другого підкидання.

Очевидно, події А і В незалежні і тому P(A) =1/6 ; P(B) = 1/6,

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36.$$

Приклад 2 . З колоди карт витягують навмання дві карти. Подія А – перша карта туз, подія В – друга карта – дама. Знайти ймовірність того, що обидві події А і В відбудуться одночасно, тобто знайти ймовірність добутку двох подій А і В:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 4/36 \cdot 4/35 = 4/315.$$

2.1.7 Ймовірність появи принаймні однієї події

Нехай задані „n" сумісних , але незалежних у сукупності, подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Треба визначити ймовірність появи принаймні (хоча б) однієї з цих подій.

Позначимо через В подію, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A_i , а через D – подію, яка полягає в тому, що не відбувається жодна з подій A_i, тобто

$$D = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n} .$$

Очевидно, подія D буде протилежною для події В : $D = \overline{B}$. Із відомої формули $P(B) + P(\overline{B}) = 1$ випливає

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}),$$

тому що події A_i незалежні, будуть незалежними і події $\overline{A_i}$. Крім того відомо, що $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$.

Таким чином, справедлива рівність

$$P(B) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdots [1 - P(A_n)].$$

Зауваження. У частинному випадку, коли $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$,

$$\mathbf{P(B)=1-(1-p)^n} ,$$

або, якщо позначити ймовірність протилежної події через q=1-p, то

$$\mathbf{P(B)= 1-q^n}.$$

2.1.8 Аксіоматичні основи теорії ймовірностей

Найбільш поширеною у сучасній теорії ймовірностей є система аксіом, запропонована у 1929 році А.М. Колмогоровим.

Основним поняттям аксіоматики Колмогорова є поняття простору елементарних подій.

Простір елементарних подій Ω - це довільна множина.

Нехай S – деяка система підмножин множини Ω, яка задовольняє таким умовам:

1) $\Omega \in S$;

2) з того, що $A, B \in S$, випливає, що $A \cup B \in S \; (A + B \in S)$;

3) з того, що $A \in S$, випливає, що $\overline{A \in S}$. (Звідси, зокрема, випливає , що порожня множина належить S , $A \cdot B \in S$);

4) якщо $\{A_n\}$ - послідовність множин із S, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Якщо задану множину Ω і систему підмножин S, яка задовольняє умовам 1) – 4), то говорять, що задано вимірний простір $\langle \Omega, S \rangle$. При цьому елементи S називають подіями, а всі інші підмножини Ω , що не належать S, не є подіями.

Введемо тепер поняття ймовірності події.

Нехай задано вимірний простір $\langle \Omega, S \rangle$, тобто простір елементарних подій Ω і систему S підмножин Ω, тобто подій.

Подію Ω називають вірогідною, $\varnothing$ – неможливою, $\overline{A}$ - протилежною для події А.

Означення. Ймовірністю називається числова функція P(A) , яка зазначена на системі S вимірного простору $\langle \Omega, S \rangle$ і має такі властивості :

Аксіома 1. $P(A) \geq 0$ для всіх $A \in S$,

Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$;

Аксіома 3. Якщо події A_1, A_2, … попарно несумісні, тобто $A_i \cdot A_j = \varnothing \ (i \neq j)$, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Вимірний простір, у якому визначено ймовірність, називається ***імовірнісним простором*** і позначається $\langle \Omega, S, P \rangle$.

Розглянемо деякі властивості ймовірності, які випливають з аксіом 1 – 3.

1 Імовірність події $\overline{A}$, протилежної події A, дорівнює $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Оскільки $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, то, за аксіомами 2 і 3:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

2 $P(\varnothing) = 0$.

Дійсно, $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

3 Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

З очевидної рівності $B = A \cup \overline{A} \cdot B$, маємо за аксіомами 3 та 1:

$$P(B) = P(A \cup \overline{A} \cdot B) = P(A) + P(\overline{A} \cdot B) \geq P(A).$$

Наслідок. Для будь-якої події $A \in S$ завжди $P(A) \leq 1$, тому що $A \in \Omega$.

4 **Теорема додавання**. Якщо A, B довільні події, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Справді, маємо такі очевидні рівності $A \cup \overline{A} \cdot B$, $B = A \cdot B \cup \overline{A} \cdot B$, причому доданки у правих частинах несумісні. Тому за аксіомою 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cdot B), \quad P(B) = P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B).$$

Різниця цих рівностей дає

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cdot B),$$

або

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

5 **Теорема неперервності.** Нехай дано послідовність подій A_1, A_2, … , A_n, … таку, що $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_n > \ldots$ і $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Тоді

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

Для доведення зазначимо, що для будь-якого „n” виконується рівність

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \cdot \overline{A_{k+1}} \cup A,$$

причому всі доданки в цій сумі попарно несумісні. Тому за аксіомою 3 маємо: $P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \cdot \overline{A_{k+1}}) + P(A)$, звідки

$$P(A_n) - P(A) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \cdot \overline{A_{k+1}}) \quad (*)$$

Зокрема, при n=1 з цієї рівності одержимо:

$$P(A_1) - P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cdot \overline{A_{k+1}}),$$

причому ряд в правій частині збігається. Згідно з формулою (*), різниця $P(A_n)$-$P(A)$ є залишком цього ряду і тому

$$\lim_{n \to \infty} [P(A_n) - P(A)] = 0.$$

2.1.9 Формула повної ймовірності

Нехай маємо „n” несумісних подій H_1, H_2, … ,H_n, які є можливими результатами випробувань, таких, що $P(H_i)>0$ і $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$ (тому що вони складають повну групу подій).

Нехай подія A може відбутися лише сумісно з однією із подій H_1, H_2, … ,H_n.

Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ називають **гіпотезами.**

Треба відшукати ймовірність події A, якщо відомі ймовірності гіпотез $P(H_i)>0$ $i=1,2,\dots,n$ та умовні ймовірності події A при умові, що відбувається кожна із гіпотез : $P_{H_i}(A)$.

Подію A можна записати у вигляді суми

$$A=H_1 \cdot A+H_2 \cdot A+\dots+H_n \cdot A.$$

За умовою гіпотези H_i несумісні і тому будуть несумісними і події $H_i \cdot A$, а тоді ймовірність суми дорівнює сумі ймовірностей

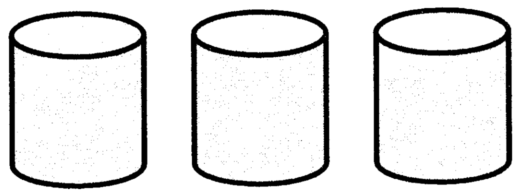
$$P(A)=P(H_1 \cdot A)+P(H_2 \cdot A)+\dots+P(H_n \cdot A).$$

Далі застосовуємо теорему множення до кожного доданку правої частини рівності і отримуємо формулу **повної ймовірності**

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\dots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).$$

Приклад._ Маємо три однакові непрозорі урни. В першій урні містяться 4 чорних і 3 білих кулі; у другій – 2 чорні і 5 білих куль; в третій – 5 чорних і 10 білих куль.



4 ч, 3 б   2 ч, 5 б   5 ч, 10 б

Експеримент полягає в тому, що навмання витягується куля із будь- якої урни.

Обчислити ймовірність **події A**, яка полягає в тому, що **витягнута куля буде білою**.

Розглянемо гіпотези:

H_1 – куля витягується з першої урни;
H_2 - куля витягується з другої урни;
H_3 - куля витягується з третьої урни.

Події H_1, H_2, H_3 – рівно можливі і складають повну групу подій, і тому $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$.
Умовні ймовірності події A дорівнюють

$$P_{H_1}(A)=\frac{3}{7}\ ,\quad P_{H_2}(A)=\frac{5}{7}\ ,\quad P_{H_3}(A)=\frac{10}{15}.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{15}=\frac{1}{3}\cdot\frac{38}{21}=\frac{38}{63}.$$

2.1.10 Формули Байєса

Нехай в умовах попереднього підрозділу (2.1.9) відомо, що подія A відбулась, і треба визначити умовну ймовірність кожної гіпотези відносно події A ($P_A(H_i)$), якщо відомі ймовірності гіпотез до експерименту $P(H_i)$ і умовні ймовірності події A відносно кожної з гіпотез $P_{H_i}(A)$.

Розглянемо ймовірність добутку $H_i \cdot A$, тобто $P(H_i \cdot A)$, і застосуємо теорему множення, а саме:

$$P(H_i\cdot A)=P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=P(A)\cdot P_A(H_i).$$

З підкресленої рівності випливає, що шукана умовна ймовірність $P_A(H_i)$ дорівнює

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Якщо далі застосувати формулу повної ймовірності для визначення ймовірності P(A), тоді ми отримаємо формулу, яку називають формулами Байєса

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}\ ,\quad (i=1,2,\dots,n).$$

Зауваження. Формулам Байєса можна дати таке тлумачення: нехай подія A може відбуватися в різних умовах, щодо характеру яких можна висловити „n" припущень (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Ймовірності цих гіпотез $P(H_k)$ нам відомі; ці ймовірності часто називають **апріорними** (від латинського „a priori" – до випробування). Відомі також умовні ймовірності $P_{H_k}(A)$ події A при різних гіпотезах.

Здійснюється експеримент, в результаті якого може настати або не настати подія A.

Якщо при цьому подія A настала, то ми можемо переоцінити ймовірність кожної з гіпотез, знайшовши за формулами Байєса нові значення ймовірностей гіпотез $P_A(H_k)$. Ці нові ймовірності називають **апостеріорними** ймовірностями гіпотез (від латинського „a posteriori" – після випробування).

Приклад. Експеримент полягає в тому, що два стрільці незалежно один від іншого стріляють по мішені один раз.

Ймовірність попадання у першого стрільця $p_1=0,8$, у другого – $p_2=0,4$. Після пострілів виявилось одне попадання у мішень.

Знайти ймовірність того, що влучив саме перший стрілець.

Розв'язання. Позначимо через A - подію, яка полягає в тому, що в мішень влучив один постріл.

Розглянемо такі чотири гіпотези:

	Перший стрілець	Другий стрілець
H_1	+ (влучив)	+ (влучив)
H_2	+	— (не влучив)
H_3	—	+
H_4	—	—

Визначимо ймовірності гіпотез. З цією метою позначимо через B подію, яка полягає в тому, що влучає у мішень перший стрілець, а через C – влучає у мішень другий стрілець. Тоді

$$H_1 = B\cdot C,\quad H_2 = B\cdot\overline{C},\quad H_3 = \overline{B}C,\quad H_4 = \overline{B}\cdot\overline{C};\ P(B)=0{,}8;\quad P(C)=0{,}4$$

і відповідні ймовірності такі:

$$P(H_1) = P(B\cdot C) = P(B)\cdot P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}32,$$
$$P(H_2) = P(B\cdot\overline{C}) = P(B)\cdot P(\overline{C}) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48,$$
$$P(H_3) = P(\overline{B}C) = P(\overline{B})\cdot P(C) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08,$$
$$P(H_4) = P(\overline{B}\cdot\overline{C}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}12.$$

Умовні ймовірності дорівнюють:

$$P_{H_1}(A)=0;\quad P_{H_2}(A)=1;\quad P_{H_3}(A)=1;\quad P_{H_4}(A)=0.$$

За формулою Байєса шукана ймовірність така:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) + P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)} =$$
$$\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}32\cdot 0 + 0{,}48\cdot 1 + 0{,}08\cdot 1 + 0{,}12\cdot 0} = \frac{0{,}48}{0{,}56} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}.$$

2.1.11 Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі

Нехай відбуваються послідовні незалежні випробування, в кожному з яких може настати або не настати певна подія A; настання події A будемо далі для скорочення називати „успіхом". Ймовірність успіху в кожному випробуванні вважаємо однаковою і рівною „p" ($0<p<1$).

Такі випробування називають **послідовними незалежними випробуваннями** або **випробуваннями Бернуллі.**

Прикладами випробувань Бернуллі можуть бути послідовні кидання монети (успіх – наприклад, випадає герб); послідовні підкидання грального кубика (успіх – випадає певна грань); витягування кулі із урни, в якій містяться кулі чорного та білого кольору (успіх – поява білої кулі). В цьому прикладі, для збереження незалежності наступного випробування від попереднього, треба перед наступним випробуванням перемішувати кулі в урні.

В кожному з цих прикладів ймовірність успіху при будь-якому випробуванні не залежить від того, скільки було успіхів у попередніх випробуваннях (в першому прикладі $p=1/2$, в другому – $p=1/6$).

Задача Бернуллі формулюється так:

треба знайти ймовірність того, що в серії із „n" послідовних незалежних випробувань число успіхів буде дорівнювати "к". Цю ймовірність позначають так

$$\mathbf{P_n(k)}.$$

Введемо такі позначення: $P(A)=1-p;\quad P(\overline{A})1-P(A)=1-p=q.$
Позначимо далі через A_i (i=1,2,...,n) подію, яка полягає в тому, що " в і-му випробуванні настала подія А"; зрозуміло, що $P(A_i)=P(A)=p$, $P(\overline{A_i})=1-p=q$.

Для обчислення $P_n(к)$ знайдемо спочатку ймовірність того, що подія А настане при певних „к" випробуваннях, наприклад, при першому, другому,..., к-му, а при всіх інших не настане. Оскільки випробування незалежні, то цю ймовірність легко обчислити за теоремою множення:

$$P(A_1\cdot A_2\cdots A_k\cdot\overline{A_{k+1}}\cdot\overline{A_{k+2}}\cdot\dots\cdot\overline{A_n})=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_k)\cdot P(\overline{A_{k+1}})\cdots P(\overline{A_n})=p^k\cdot q^{n-k}.$$

Але, „к" випробувань, при яких настає подія А , з „n" випробувань можна вибрати C_n^k способами і для кожного такого вибору ймовірність „к" успіхів саме при вибраних випробуваннях дорівнює $p^n\cdot q^{n-k}$. Тому, за теоремою додавання,

$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ - формула Бернуллі.

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=1$ тому, що події (к=0), (к=1),...,(k=n) попарно несумісні і, при кожній серії з "n" послідовних незалежних випробувань одна з них обов'язково настає, тому їх сума є вірогідною подією, інакше:

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1.$$

2.1.12 Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі

Розглянемо серію з „n" випробувань Бернуллі із заданою ймовірністю успіху "р", і дослідимо ймовірність „к" успіхів $P_n(k)$ як функцію аргументу „к" (к=0,1,2,...,n).

Знайдемо спочатку відношення двох послідовних значень цієї функції. Оскільки,

$$P_n(k+1)=\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)](n-k)}{(k+1)!}p^{k+1}\cdot q^{n-k-1};$$

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}p^k\cdot q^{n-k},$$

то

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q},\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

Звідси видно, що це відношення спадає при зростанні „к" (бо чисельник зменшується, а знаменник збільшується).

Знайдемо, при яких „к" це відношення більше, дорівнює і менше за одиницю:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}\supset 1\ \Rightarrow\ (n-k)p\supset(k+1)q,\Rightarrow\ np-q\supset k(p+q)=k.$$

Отже,

$$P_n(k+1)\supset P_n(k),\ \Leftarrow\ k\subset np-q, \qquad (2.1)$$

$$P_n(k+1)=P_n(k),\ \Leftarrow\ k=np-q, \qquad (2.2)$$

$$P_n(k+1)\subset P_n(k),\ \Leftarrow\ k\supset np-q, \qquad (2.3)$$

Як бачимо, величина $P_n(k)$ при зростанні „к" спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при якому „к" досягається максимум. Можливі два випадки:

1) **np-q** - дробове число. Тоді число **np-q+1 = np+p** також дробове і існує єдине ціле число "$к_0$", що задовольняє умові np-q <k_0<np+p.

Покажемо, що „$к_0$" – найімовірніше число успіхів, тобто, що $P_n(k)$ досягає найбільшого значення при $к=к_0$.

Дійсно, оскільки k_0-1<np-q, то , згідно зі співвідношенням (2.1), $P_n(k_0)>P_n(k_0-1)$, а оскільки k_0>np-q , то із співвідношення (2.3) випливає $P_n(k_0+1)<P_n(k_0)$. Таким чином,

$$P_n(k_0)>P_n(k)$$

при усіх $k\neq k_0$, тобто „ $к_0$" – найімовірніше число успіхів.

2) p-q - ціле число. Позначимо np-q=k_1, тоді k_1+1= = np-q+1=np+p. Згідно зі співвідношенням (2.2), $P_n(k_1+1)=P_n(k_1)$. Оскільки k_1-1<np-q, то із співвідношення (2.1) отримаємо $P_n(k_1)>P_n(k_1-1)$, а оскільки k_1+1>np-q, то, згідно з (2.3), $P_n(k_1+2)<P_n(k_1+1)$.

Таким чином, у цьому випадку є два найімовірніших значення **$к = к_1$ і $к = к_1 + 1$** .

Отже, можна зробити загальний ***висновок***.

Найімовірніше число успіхів „$к_0$" задовольняє нерівності

$$np - q \le k_0 \le np + p\,; \tag{2.4}$$

якщо **np-q** – не ціле, то є єдине таке значення "$к_0$"; якщо np-q - ціле, то таких значень два.

Зауваження. Нерівність (2.4) можна записати так :

$$p - \frac{q}{n} \le \frac{k_0}{n} \le p + \frac{p}{n}, \tag{2.5}$$

k_0/n – це найімовірніша частота успіхів, тобто найімовірніша частота появи події А ; з нерівності (2.5) випливає, що при великих „n" виконується наближена рівність

$$\frac{k_0}{n} \cong p.$$

Ця рівність відповідає нашому уявленню про ймовірність, що це число біля якого групуються частоти появи події А .

Приклад. Гральний кубик підкидають 35 разів. Яке найімовірніше число появ грані з одиницею?
N=35, p=1/6, q-5/6, тому np-q=35·1/6 -5/6 = 5 і найімовірніших значень два : 5 і 6.

РОЗДІЛ 2.2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.2.1 Основні означення

Означення 1. ***Випадковою величиною*** (ВВ) називається величина, яка в результаті експерименту може приймати різні значення, причому наперед не відомо які саме.

Випадкові величини поділяються на ***дискретні*** та ***неперервні.***

Означення 2. Випадкова величина називається ***дискретною***, якщо значення, які вона може набувати у результаті випробувань, будуть ізольованими (із означення випливає, що множина значень дискретної випадкової величини буде або скінченною або зчисленою).

Зауважимо, що множина називається **зчисленою,** якщо її елементи можна перенумерувати (тобто зчислена множина – це послідовність).

Означення 3. Випадкова величина називається ***неперервною***, якщо її значення заповнюють деякий суцільний проміжок.

Приклад 1. Нехай експеримент полягає в тому, що по цілі роблять 5 пострілів. Випадкова величина – кількість влучень у ціль.
Випадкова величина може прийняти такі значення : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Приклад 2. Підкидається 4 рази гральний кубик. На фоні цього експерименту можна розглянути таку випадкову величину – відносну частоту випадання 3 : 0/4; 1/4; 2/4; 3/4; 4/4.

Приклад 3. Нехай на відрізок [a,b] числової осі кидається точка. Розглядається випадкова величина – абсциса точки падіння.

У перших двох прикладах випадкова величина дискретна, в третьому – неперервна.

Будемо позначати випадкову величину літерою **X**, її значення – $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Наприклад, кількість влучень після трьох пострілів по мішені – це **X,** а її значення : $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

2.2.2 Ряд розподілу

Розглянемо дискретну випадкову величину (ДВВ) **X** і нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення цієї величини.

Розглянемо події, які полягають в тому, що ДВВ **X** приймає значення **X=** x_1, **X=**x_2, ... , **X=**x_n, і позначимо ймовірності цих подій $P(X=x_1)=p_1$. $P(X=x_2)=p_2$, ... , $P(X=x_n)=p_n$.

Очевидно, що визначені події несумісні, тому що у результаті одного випробування відбувається лише одна з цих подій. Крім того, ці події є єдино можливими, тому що ДВВ не приймає інших значень. Тому справедлива рівність

$$p_1+p_2+\dots+p_n=1.$$

Множина значень ДВВ і множина ймовірностей їх появ повністю визначають поведінку ДВВ

Означення 4. Розподілом випадкової величини називають будь-яке співвідношення, яке з'єднує між собою значення випадкової величини з їх ймовірностями.

Означення 5. Розподіл дискретної випадкової величини (ДВВ) можна записати у вигляді таблиці, в першому рядку якої розташовані значення випадкової величини, а у другому – ймовірності появ цих значень

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Таку таблицю будемо називати ***рядом розподілу***.

Приклад. Нехай підкидається гральний кубик. ВВ – число очок на верхній грані. Її ряд розподілу такий:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2.2.3 Функція розподілу та її властивості

У випадку, коли випадкова величина є неперервною, ряд розподілу для неї не можна записати за двох причин:

1) кількість значень, які приймає випадкова величина є нескінченною;

2) ймовірність появи кожного значення дорівнює нулю, тому що значень нескінченна множина, а сума їх ймовірностей повинна дорівнювати одиниці.

У випадку неперервної випадкової величини (НВВ) замість ймовірності кожного значення розглядають подію, яка полягає в тому, що випадкова величина **X** приймає значення, яке менше деякого числа „x" і обчислюють її ймовірність

$$P(X<x).$$

Очевидно, ця ймовірність є функцією аргументу „x" і цю функцію називають ***функцією розподілу*** неперервної випадкової величини і позначають її так:

$$\mathbf{F(x)=P(X<x).}$$

Означення. Функцією розподілу F(x) неперервної випадкової величини **X** називається ймовірність того, що випадкова величина **X** приймає значення менше за „x".

Зауважимо, що іноді F(x) називають ***інтегральною функцією розподілу.***

Властивості F(x)

1 Функція розподілу F(x) є монотонно зростаючою функцією, тобто із $x_1>x_2$ випливає, що $F(x_1)>F(x_2)$.

Дійсно, із події $B=(X<x_1)$ обов'язково випливає подія $A=(X<x_2)$, тобто ймовірність події A : $P(A)=P(X<x_2)=F(x_2)$ не може бути менше за ймовірність події B : $P(B)=P(X<x_1)=F(x_1)$. Таким чином, $F(x_2)>F(x_1)$, якщо $x_2>x_1$.

2 $F(+\infty)=P(X\le+\infty)=1$, тому що подія $X\le+\infty$ є вірогідною (випадкова величина X обов'язково прийме якесь значення).

3 $F(-\infty)=P(X\le-\infty)=0$.

4 F(x) неперервна зліва, тобто $\lim\limits_{y\uparrow x} F(y)=F(x-0)=F(x)$.

Таким чином, функція розподілу неперервної випадкової величини змінюється від 0 до 1, коли „x" змінюється вздовж всієї числової осі від $-\infty$ до $+\infty$.

Зауваження. Функцію розподілу можна розглядати і для дискретної випадкової величини. В цьому випадку F(x) є розривною функцією і її точки розриву збігаються зі значеннями дискретної випадкової величини, а величини стрибків у точках розриву дорівнюють ймовірностям відповідних значень випадкової величини.

Приклад. Нехай ряд розподілу дискретної випадкової величини X такий:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Для побудови функції розподілу розглядаємо проміжки

$-\infty<x\le 0$ F(x)=P(X<x)=P(X<0)=0,

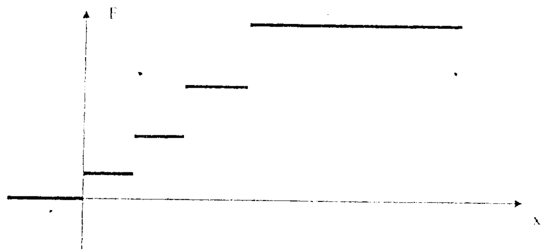
$0<x\le 1$ F(x)=P(X<x)=P(x=0)=p_1=0,1,

$1<x\le 2$ F(x)=P(X<x)=P(X=0 або X=1)=p_1+p_2=0,1+0,2=0,3,

$2<x\le 3$ F(x)=P(X<x)=P(X=0 або X=1 або X=2)=$p_1+p_2+p_3$= =0,1+0,2+0,3=0,6,

$x>3$ F(x)=P(X<x)=P(X=0 або X=1 або X=2 або X=3)= =$p_1+p_2+p_3+p_4$=1.

Графік функції розподілу F(x) має вигляд:



2.2.4 *Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал*

З геометричної точки зору, випадкову величину X можна розглядати як координату „x" випадкової точки на числовій осі, і тому функцію розподілу F(x)=P(X<x) можна розглядати як ймовірність попадання випадкової точки X лівіше точки „x".

Нехай треба визначити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α,β): $P(\alpha \le X \le \beta)$. Для цього розглянемо такі події:

подія A полягає в тому, що випадкова величина X приймає значення менші за α, тобто A=X<α ;

подія B полягає в тому, що X приймає значення менші за β, тобто B=X<β;

подія C полягає в тому, що X приймає значення в інтервалі (α,β):

$C = \alpha \le X \le \beta$.

Очевидно, події A і C несумісні і їх сума дорівнює B=A+C. Тоді

$$P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C)$$

або

$$P(X<\beta)=P(X<\alpha)+P(\alpha \le X \le \beta),$$

із цієї рівності випливає, що

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(X<\beta) - P(X<\alpha) = F(\beta)-F(\alpha).$$

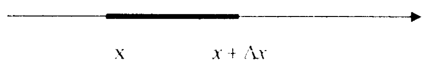
Таким чином, ймовірність попадання випадкової величини у проміжок дорівнює

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta)-F(\alpha).$$

Зауваження. Із цієї рівності випливає перша властивість функції розподілу, а саме: функція розподілу є функцією монотонно зростаючою.

2.2.5 *Щільність ймовірності*

Розглянемо на числовій осі фіксовану точку „x" , довільний додатній приріст Δx>0 , розглянемо інтервал ($x, x+\Delta x$) і визначимо ймовірність попадання випадкової величини X у цей інтервал $P(x \le X \le x+\Delta x)$



Означення. ***Щільністю ймовірності*** випадкової величини X в точці „x" називають границю відношення ймовірності попадання випадкової величини X в інтервал $(x, x+\Delta x)$ до довжини цього інтервалу при умові, що довжина інтервалу $\Delta x \to 0$.

Позначається щільність так:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

Таким чином, щільність ймовірності дорівнює похідній від функції розподілу

$$f(x)=F'(x). \qquad (*)$$

Іноді щільність ймовірності f(x) називають **диференціальним законом розподілу.**

Функція F(x) по відношенню до f(x) є її **первісною.**

Обчислимо далі визначений інтеграл

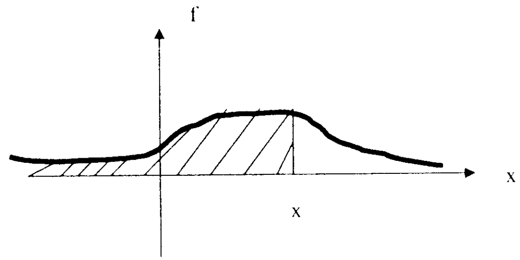
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \Big|_{\alpha}^{\beta} \int f(x)dx = \Big|_{\alpha}^{\beta} F(x) = F(\beta)-F(\alpha) = P(\alpha \le X \le \beta),$$

тобто

$$\boxed{P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$

Функцію розподілу F(x) можна виразити через щільність f(x) за означенням, а саме:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$



З геометричної точки зору значення F(x) дорівнюють площі заштрихованої криволінійної трапеції, яка обмежена віссю OX і графіком щільності y=f(x).

Властивості щільності ймовірності

1) $f(x) \ge 0$ (тому, що $f(x) = F'(x)$, а функція $F(x)$ монотонно зростає)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$.

Рівність

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

називають **умовою нормування**. З геометричної точки зору умова нормування означає, що площа нескінченної криволінійної трапеції, обмеженої віссю OX і графіком щільності ймовірності y=f(x), завжди дорівнює одиниці.

Зауваження. Неперервні випадкові величини, для яких існує щільність ймовірності f(x), називаються **абсолютно неперервними.**

2.2.6 Числові характеристики випадкових величин

2.2.6.1 Математичне сподівання випадкової величини

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину X , для якої відомий її ряд розподілу

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Означення 1. ***Математичним сподіванням*** (МС) дискретної випадкової величини X називається сума добутків можливих значень випадкової величини на їх ймовірності

$$\boxed{M(X)=m_x=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Зауваження. МС дискретної випадкової величини тісно пов'язане з середнім арифметичним спостережених значень випадкової величини.

Дійсно, нехай провадяться N іспитів і нехай випадкова величина X прийняла значення x_1 $к_1$ разів, значення x_2 – $к_2$ разів, ..., x_n –k_n .

Середнє арифметичне цих значень має вигляд **:**

$$\overline{m_X} = \frac{x_1k_1 + x_2k_2 + \cdots + x_nk_n}{N} = x_1\frac{k_1}{N} + x_2\frac{k_2}{N} + \cdots + x_n\frac{k_n}{N},$$

де

$$N = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Дроби $\frac{k_1}{N}, \frac{k_2}{N}, \ldots, \frac{k_n}{N}$ виявляються частотами настання подій, які полягають в тому, що випадкова величина X приймає значення $X=x_1$, $X=x_2$, ... , $X=x_n$, тобто

$$k_i/N=w_i.$$

Таким чином, середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини X дорівнює **:**

$$\overline{m_X} = x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n$$

Але при великій кількості N випробувань відносна частота $w_i=k_i/N$ наближено дорівнює ймовірності $w_i \approx p_i$, тобто у цьому випадку середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини наближається до математичного сподівання випадкової величини.

Означення 2. Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, щільність якої дорівнює f(x), обчислюється за формулою

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

2.2.6.2 Властивості математичного сподівання

1 Математичне сподівання сталої величини „C" дорівнює саме цій сталій величині M(C)=C.

Дійсно, ряд розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	C
P	1

і тому $M(C)=C\cdot 1=C$.

2 Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(cX) = cM(X).$$

Дійсно, якщо X має ряд розподілу

X	x_1	x_2	...	$x_к$
P	p_1	p_2	...	$p_к$

тоді випадкова величина „cX" має ряд розподілу

cX	cx_1	cx_2	...	$cx_к$
P	p_1	p_2	...	$p_к$

і тоді

$$M(cX)=cx_1p_1+cx_2p_2+\ldots+x_кp_к=c(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_кp_к)=cM(X).$$

3 Математичне сподівання суми двох випадкових величин X+Y дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$\boxed{M(X+Y)=M(X)+M(Y)}$$

4 Математичне сподівання суми системи випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_к$ дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_к)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_к).$$

Наслідок: Якщо випадкова величина Z є лінійною комбінацією „к" випадкових величин, а саме:

$$Z=a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_kX_k+b,$$

тоді математичне сподівання лінійної функції дорівнює саме тій лінійній функції її математичних сподівань

$$M(Z) = M(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{k} a_i M(X_i) + b.$$

5 Означення. Випадкова величина X називається незалежною від випадкової величини Y, якщо закон розподілу випадкової величини X не залежить від того, які саме значення приймає випадкова величина Y.

Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$\boxed{M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)}$$

6 Означення. Система випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_к$ називається незалежною у сукупності, якщо закон розподілу кожної не залежить від значень, які приймають інші випадкові величини.

Математичне сподівання добутку незалежних у сукупності випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(\prod_{i=1}^{k} X_i) = \prod_{i=1}^{k} (M(X_i)).$$

Зауваження 1. Якщо випадкові величини залежні, тоді властивості 5 і 6 не виконуються.

Зауваження 2. Перелічені властивості мають місце і для неперервних випадкових величин.

2.2.7 *Дисперсія випадкової величини*

2.2.7.1 Означення дисперсії випадкової величини X

Математичне сподівання випадкової величини X можна розглядати як центр розсіювання значень випадкової величини. Щоб повністю охарактеризувати випадкову величину, потрібно ввести ще одну числову характеристику, яка визначає величину розкидання значень випадкової величини навколо центра розсіювання. Такою характеристикою є дисперсія.

Нехай X випадкова величина і m_X – її математичне сподівання.

Розглянемо різницю $X\text{-}m_X= X^0$, тобто нову випадкову величину, яку називають ***центрованим значенням*** випадкової величини X.

Таким чином, X^0 – **відхилення** випадкової величини X від її центру розсіювання (математичного сподівання).

Щоб підрахувати середнє відхилення випадкової величини обчислимо математичне сподівання X^0 :

$M(X^0)=M(X - m_X)=M(X) - m_X=0.$

Отже, очікуване середнє відхилення випадкової величини дорівнює нулю.

Приклад. Розглянемо дві дискретні випадкові величини із заданими рядами розподілу

X	-1	1			Y	-0,1	0,1
P	0,5	0,5			P	0,5	0,5

Очевидно, що M(X)=0 , M(Y)=0. Такий результат стався тому, що відхилення мають різні знаки і тому при складанні дають нуль. Щоб уникнути цього, розглядають квадрати відхилень.

Означення. ***Дисперсією*** випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата центрованого значення випадкової величини, або ***дисперсією*** випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$\boxed{D(X)=D_X=M[(X^0)^2]=M[(X - m_X)^2]}$$

Перетворимо вираз для дисперсії :

$D(X)=M[(X^0)^2]=M[(X - m_X)^2] =M[X^2\text{-}2Xm_X +m_X^2] =M[X^2] - 2m_XM(X)+m_X^2= =M(X^2) - m_X^2.$

1 Таким чином,

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - m_X^2}$$

дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання.

2 Якщо X дискретна випадкова величина з рядом розподілу

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

і математичним сподіванням m_X, тоді випадкова величина $(X - m_X)^2$ має ряд розподілу

$(X\text{-}m_X)^2$	$(x_1\text{-}m_X)^2$	$(x_2\text{-}m_X)^2$	...	$(x_k\text{-}m_X)^2$
P	p_1	p_2	...	p_k

а її дисперсія дорівнює

$$D(X) = D_X = M[(X - m_X)^2] = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_X)^2 \cdot p_i .$$

3 Дисперсія неперервної випадкової величини X обчислюється за формулами

$$\boxed{D_X = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_X)^2 f(x)dx}$$

або

$$\boxed{D_X = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx - (m_X)^2}$$

2.2.7.2 Властивості дисперсії

1 Дисперсія будь-якої випадкової величини **невід'ємна**.

2 Дисперсія сталої величини „C" дорівнює нулю D(C) = 0. Дійсно,

$$D(C) = M[(C\text{-}m_C)^2] = M[(C\text{-}C)^2] = M(0) = 0.$$

3 Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата

$$D(cX) = c^2D(X).$$

Дійсно,

$$D(cX) = M(c^2X^2) - M^2(cX) = c^2\{M(X^2) - M^2(X)\} = c^2D(X).$$

4 Замість дисперсії часто розглядають квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{D_X}.$$

Величину $\sigma(X) = \sigma_X$ називають ***середнім квадратичним відхиленням*** або ***стандартом***. Як і дисперсія, так і середнє квадратичне відхилення, є мірою розсіяння (розкиданості) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Має місце рівність:

$$\sigma(cX) = \sqrt{D(cX)} = \sqrt{c^2D(X)} = |c|\sqrt{D(X)} = |c|\sigma(X),$$

$$\boxed{\sigma(cX) = |c|\sigma(X)}$$

5 Дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій

$$\boxed{D(X+Y) = D(X)+D(Y)\,; \qquad D(X-Y) = D(X)+D(Y).}$$

Дійсно, маючи на увазі, що $X^0+Y^0=(X+Y)-(m_X+m_Y)$, обчислимо

$$D(X+Y) = M[(X^0+Y^0)^2] = M[(X^0)^2+2X^0Y^0+(Y^0)^2] =$$
$$=M[(X^0)^2]+2M(X^0)M(Y^0)+M[(Y^0)^2] = M[(X^0)^2]+M[(Y^0)^2] = D(X)+D(Y),$$

тому що $M(X^0)=M(Y^0)=0$.

6 Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює

$$\boxed{D(X\cdot Y) = D(X)\cdot D(Y) + m_X^2\cdot D(Y) + m_Y^2D(X).}$$

<u>Доведення:</u> за формулою пункту 1 с. 49

$$D(X\cdot Y) = M(X^2\cdot Y^2) - M^2(X\cdot Y) = M(X^2)M(Y^2) - m_X^2\cdot m_Y^2\,;$$

але із рівностей

$$D(X) = M(X^2) - m_X^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - m_Y^2,$$

випливає, що

$$M(X^2) = D(X) + m_X^2\,; \quad M(Y^2) = D(Y) + m_Y^2,$$

тобто

$$D(X\cdot Y) = [D(X) + m_X^2]\cdot[D(Y) + m_Y^2] - m_X^2\cdot m_Y^2 =$$
$$= D(X)\cdot D(Y) + m_X^2D(Y) + m_Y^2D(X) + m_X^2m_Y^2 - m_X^2m_Y^2 =$$
$$= D(X)\cdot D(Y) + m_X^2D(Y) + m_Y^2D(X).$$

Наслідок. Якщо кожна з випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_к$ не залежить від суми попередніх, то

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_k) = D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_k),$$

$$\boxed{D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} D(X_i)}$$

7 Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_к$ попарно незалежні, то

$$\boxed{D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} D(X_i)}$$

2.2.8 Моменти різних порядків та інші числові характеристики

Крім математичного сподівання і дисперсії, в теорії ймовірностей та її застосуваннях використовують також інші числові характеристики.

Означення 1. Нехай $k \geq 0$ - ціле, „а" – дійсне число. ***Моментом к-го порядку*** випадкової величини X відносно точки „а" називається число (якщо воно існує)

$$\boxed{\nu_k(a) = M\left[(X-a)^k\right]}$$

Якщо a=0, то момент називається ***початковим***; початковий момент к-го порядку позначатимемо через ν_k. Очевидно, що $\nu_1 = M(X)$.

Означення 2. ***Центральним моментом*** називається момент відносно точки a=M(X); центральний момент к-го порядку позначатимемо через μ_k.

Легко помітити, що $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Між центральними і початковими моментами існує простий зв'язок. Справді,

$$\mu_k = M\left[(X - \nu_1)^k\right].$$

Розкриваючи вираз у правій частині, дістаємо, наприклад, для перших чотирьох моментів,

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Ці моменти широко використовуються у статистиці.

Якщо f(x) - диференціальна функція розподілу (щільність ймовірності) неперервної випадкової величини, то, очевидно, її початкові і центральні моменти дорівнюють відповідно

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x)dx.$$

У випадку дискретної випадкової величини мають місце рівності

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i.$$

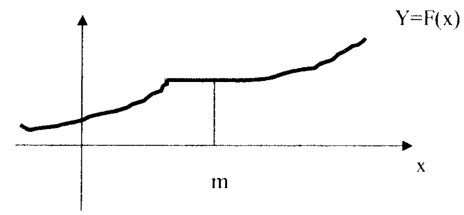
Розглянемо ще кілька числових характеристик, які використовуються в теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Означення 3. ***Медіаною*** розподілу F(x) називають таке значення аргументу x=m, для якого виконується нерівність

$$F(m) \le \frac{1}{2} \le F(m+0)$$

(таке значення „m" завжди існує, бо функція F(x) монотонно зростає від 0 до 1).

Якщо, зокрема, F(x) неперервна, то існує принаймні одне значення x=m, для якого F(m)=1/2 (за теоремою про проміжне значення неперервної функції). Якщо крива y=F(x) має з прямою y=1/2 спільний відрізок, то абсцису кожної точки цього відрізка можна взяти за медіану даного розподілу.



Аналогічно до поняття медіани для довільного числа 0<p<1 визначають ***квантіль розподілу порядку „p"***.

Так, якщо функція розподілу F(x) неперервна, то квантіль порядку „p" – це корінь рівняння F(x)=p.

Очевидно, медіана – це квантіль порядку 1/2.

Якщо для розподілу відомі кванті лі для кількох значень „p", то вони дають певне уявлення про характер розподілу .(На практиці часто користуються квантілями для p=0,1; 0,2; ... ; 0,9 –їх називають **децилями,** - та p=1/4; p=3/4 – їх називають **квартилями**).

Означення 4. Якщо випадкова величина є неперервною і має щільність розподілу f(x), то ***модою розподілу*** називається кожне значення „x", при якому f(x) має максимум.

Особливо часто зустрічаються розподіли, що мають **єдину моду** (такі розподіли називають <u>унімодальними</u>).

Означення 5. Неперервна випадкова величина X називається симетричною відносно точки „a", якщо її щільність розподілу задовольняє умові

$$f(a+x)=f(a-x),$$

тобто, якщо графік щільності розподілу симетричний відносно прямої x=a.

Якщо випадкова величина X симетрична відносно точки a=M(X), то кожний її центральний момент непарного порядку (якщо він існує) дорівнює нулю

$$\mu_{2k+1} = M\left[(X - m_X)^{2k+1}\right] = 0.$$

(Інтеграл від непарної функції в симетричних границях).

Тому кожний відмінний від нуля центральний момент непарного порядку характеризує степінь **асиметрії** розподілу.

Найпростішою з таких характеристик є μ_3, але, для зручності, замість цієї величини розглядають безрозмірну величину

$$\boxed{\gamma = \frac{\mu_3}{(D_X)^{3/2}}},$$

Цю величину називають ***коефіцієнтом асиметрії***.

Приклад. Кидають два гральних кубика. Нехай X – сума очок на верхніх гранях обох кубиків. Знайти M(X) і D(X).

Спочатку складемо ряд розподілу випадкової величини X

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$M(X)=1/36\cdot(2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot4+10\cdot3+11\cdot2+12\cdot1) =252/36 = 7$.

Можна обчислити математичне сподівання простіше: розглянемо випадкову величину $X=X_1+X_2$, де X_1 –кількість очок на першому кубику, X_2 – на другому. Тоді $M(X)=M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)= 21/6 +21/6 = 7$.

$D(X)=D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\cdot1/6\cdot\{(1-7/2)^2+(2-7/2)^2+(3-7/2)^2+(4-7/2)^2+$
$+(5-7/2)^2+(\text{^}-7/2)^2\}=1/3\cdot\{(-5/2)^2+(-3/2)^2+(-1/2)^2+(1/2)^2+(3/2)^2+(5/2)^2\}=35/6$.

2.2.9 *Числові характеристики системи двох випадкових величин*

Нехай задана система двох випадкових величин X і Y. Важливими числовими характеристиками для кожної з них є математичне сподівання і дисперсія. Але цих характеристик недостатньо для повного визначення системи X,Y тому, що вони не враховують зв'язків, які існують між X і Y.

Тому введемо ще одну числову характеристику вже для системи випадкових величин X,Y.

Нехай m_X , m_Y математичні сподівання випадкових величин X,Y відповідно, а $X^0=X-m_X$, $Y^0=Y-m_Y$ – їх центровані значення.

Означення 1. ***Коваріацією*** (або ***кореляційним моментом***) системи двох випадкових величин X,Y називається математичне сподівання добутку їх центрованих значень

$$\boxed{Cov(X,Y)=K_{XY}= M(X^0\cdot Y^0)}$$

або математичне сподівання добутку відхилень випадкових величин X,Y від своїх математичних сподівань

$$\boxed{K_{XY}=M[(X-m_X)\cdot(Y-m_Y)]},$$

У частинному випадку X=Y кореляційний момент дорівнює дисперсії випадкової величини X:

$$\boxed{K_{XX}=M[(X-m_X)^2]}.$$

Для неперервних випадкових величин кореляційний момент дорівнює

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int (x - m_X)(y - m_Y)p(x,y)dxdy.$$

Означення 2. Дві випадкові величини X і Y називаються ***некорельованими*** , якщо $K_{XY}=0$.

Зауваження. Якщо випадкові величини незалежні, тоді $K_{XY}=0$. Дійсно,

$$K_{XY}=M[(X-m_X)(Y-m_Y)]=M(X-m_X)\cdot M(Y-m_Y)=0.$$

Отже, дві незалежні випадкові величини X і Y обов'язково некорельовані.

Але обернене твердження не є вірним тому, що існують некорельовані але залежні між собою випадкові величини.

Обчислимо математичне сподівання добутку і дисперсію суми або різниці двох довільних випадкових величин. З цією метою знайдемо їх кореляційний момент:

$K_{XY}= M[(X-m_X)(Y-m_Y)]=M[XY-m_XM(Y)-m_YM(X)+m_Xm_Y]=M(XY)-m_Xm_Y$,

звідки

$$\boxed{M(XY)=m_Xm_Y+K_{XY}}$$

Аналогічно,

$$\boxed{\begin{aligned} D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2K_{XY} \\ D(X-Y)&=D(X)+D(Y)-2K_{XY}\end{aligned}}$$

2.2.10 Коефіцієнт кореляції та його властивості

Означення. ***Коефіцієнтом кореляції*** між випадковими величинами X і Y називається число

$$\boxed{\rho=\rho_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X\cdot D_Y}}}$$

Теорема 1. Для будь-яких випадкових величин X і Y справедлива нерівність

$$-1\le\rho_{XY}\le 1.$$

Доведення.

Для доведення теореми досить встановити нерівність, яка є окремим випадком відомої нерівності Коші-Буняковського

$$[K_{XY}]^2\le D_X\cdot D_Y\,.$$

Оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини завжди невід'ємне, то при будь-якому дійсному „t" виконується нерівність

$$M[t(X-m_X)-(Y-m_Y)]^2\ge 0\,,$$

звідки, розкриваючи дужки, отримаємо

$$t^2D_X-2tK_{XY}+D_Y\ge 0\,.$$

У лівій частині цієї нерівності розташований квадратний тричлен відносно аргументу „t", який буде невід'ємним при всіх дійсних „t" тоді і лише тоді, коли його дискримінант не є додатнім, тобто

$$K^2_{XY}-D_X\cdot D_Y\le 0\,,$$

що і доводить теорему.

Теорема 2. Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y дорівнює (+1) або (-1), коли X і Y зв'язані між собою лінійною залежністю Y=aX+b ; при цьому

$$\rho_{XY}=\begin{cases}+1\,,\ a>0\\ -1\,,\ a<0\end{cases}$$

Доведення. Нехай Y=aX+b.
Тоді $m_Y=am_X+b$, $X^0=X-m_X$, $Y^0=Y-m_Y=(aX+b)-(am_X+b)=a(X-m_X)=aX^0$.

Далі обчислюємо кореляційний момент

$$K_{XY}=M(X^0\cdot Y^0)=M(X^0\cdot aX^0)=aM(X^{02})=aD_X=a\sigma^2_X\ ;$$

$$\sigma_Y=\sqrt{D_Y}=\sqrt{M(Y^{02}}=\sqrt{M\left(a^2X^{02}\right)}=\sqrt{a^2D_X}=|a|\sigma_X\,.$$

Тоді коефіцієнт кореляції дорівнює

$$\rho_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{a\sigma_X^{\ 2}}{|a|\sigma_X\cdot\sigma_X}=\frac{a}{|a|}\,,$$

тобто

$$|\rho_{XY}|=\left|\frac{a}{|a|}\right|=1$$

і якщо a>0, то $\rho_{XY}=1$, a<0 - $\rho_{XY}=-1$.

Зауваження 1. З теорем 1 і 2 випливає, що коефіцієнт кореляції ρ_{XY} у певному розумінні можна розглядати як характеристику зв'язку між випадковими величинами X і Y; для незалежних величин $\rho_{XY}=0$, а для зв'язаних лінійною залежністю і тільки для них $|\rho_{XY}|=1$. Якщо $\rho_{XY}\ne 0$, то кажуть, що між випадковими величинами X і Y є кореляційний зв'язок, при цьому чим ближче $|\rho_{XY}|$ до 1, тим „тіснішим" є зв'язок між X і Y.

Зауваження 2. У випадку системи із „n" випадкових величин X_1, X_2, … , X_n є кореляційна матриця

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n}\\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n}\\ \approx\approx & \approx\approx & \approx\approx & \approx\approx\\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn}\end{pmatrix},$$

де

$$K_{ii}=M\left(X_i^{\,0}\cdot X_i^{\,0}\right)=D(X_i)\,,\quad (i=1,2,\cdots,n);\quad K_{ij}=M\left(X_i^{\,0}\cdot X_j^{\,0}\right),\quad (i\ne j).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.
2 Гмурман В.Е. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. - М: Высшая школа, 1990.

І.В.Ковалішина

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій

Частина 1

Комбінаторика. Події. Ймовірність. Випадкові величини

Відповідальний за випуск Ковалішина І.В.

Редактор Дмитроченко Л.І.

Підписано до друку 23.02.04 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 3,5. Обл.-вид.арк. 3,75.
Замовлення № 230 Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.
Друкарня УкрДАЗТу.
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7