ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Вища математика»

ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**і контрольні завдання
з дисципліни «Вища математика»
для студентів 2 курсу спеціальності
«УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ
НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ»
заочної форми навчання**

Харків 1999

Методичні вказівки розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 1 квітня 1999 р., протокол № 8.

Укладач

доц. Р.О.Єфременко

Рецензент

доц. Р.М.Давидов

Передмова

Навчальний план заочної форми навчання для спеціальності "Управління процесами перевезень на залізничному транспорті" містить дисципліну "Теорія імовірності й масового обслуговування", яка вивчається студентами-заочниками на 2 курсі в IV семестрі. Нижче наводяться методичні вказівки і контрольні завдання з теорії масового обслуговування. Складаються вказівки з двох частин. У першій частині даються основні відомості з теорії ланцюгів Маркова, які необхідні для засвоєння теорії масового обслуговування, а також для виконання відповідних завдань контрольної роботи. Наводяться зразки розв'язання прикладів. У другій частині даються стислі положення з теорії масового обслуговування і зразки розв'язання задач, які аналогічні запропонованим у контрольних завданнях.

Методичні вказівки можуть бути корисними також і для студентів 2 курсу факультету УПП денної форми навчання при вивченні ними відповідного розділу вищої математики.

1 Елементи теорії ланцюгів Маркова

Припустимо, що деяка фізична система може перебувати в К різних станах E_1, $E_2,\ldots,E_k$. Змінювання станів системи можуть відбуватися в певні моменти часу $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$, які називаються кроками. В інші моменти часу стан системи змінитися не може. Стан, в якому перебуває система в проміжки часу від t_n до t_{n+1}, називається станом системи через n кроків. Нехай система в деякий початковий момент перебувала в стані E_i, в момент t_1, перейшла в стан E_j, в момент t_2-в стан E_r і так далі. Якщо переходи системи зі стану в стан на кожному кроці відбуваються випадково, то кажуть, що в системі виник випадковий процес із дискретним часом. Цей процес можна описати ланцюжком станів $E_i \to E_j \to E_r \to\ldots$, в які потрапляє система за 1,2,3,... кроків. Випадковий процес називається марковським (марковським ланцюгом), якщо на будь-якому кроці ймовірність переходу системи зі стану E_i в стан E_j залежить від стану E_i, в який потрапила система на попередньому кроці, і не залежить від того, як і коли вона в цей стан потрапила. Іноді стисло цю умову формулюють так: при заданому нинішньому майбутнє не залежить від минулого.

Припустимо, що в марковському ланцюзі ймовірність переходу зі стану в стан на n-му кроці не залежить від номера n. В цьому випадку ланцюг називається однорідним або стаціонарним.

Можливі переходи системи зі стану в стан зручно зображати за допомогою геометричної схеми, так званого розміченого графу станів. На цій схемі стани зображаються квадратиками або кружечками, а можливі переходи – стрілками. Біля стрілок пишуть ймовірності відповідних переходів. На рисунку 1 зображено граф станів із трьома станами. Петлі біля першого та другого станів указують на можливість залишитися системі в цих станах при черговому кроці. Відсутність стрілки свідчить про неможливість відповідного переходу.

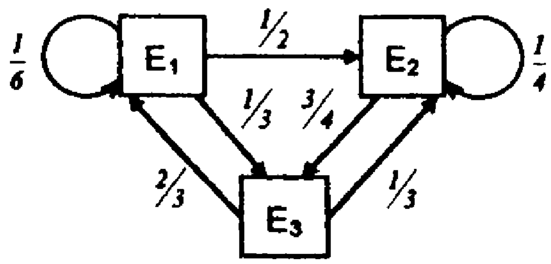

Рисунок 1

Позначимо через p_{ij} ймовірність переходу зі стану E_i в стан E_j за один крок. Ймовірності p_{ij} називаються перехідними ймовірностями. Зазначимо, що ймовірність p_{ij} - це ймовірність залишитися системі в стані E_j. Ймовірності p_{ij} утворюють квадратну матрицю:

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

яка називається матрицею перехідних ймовірностей. У неї k - число можливих станів системи. Для прикладу випишемо матрицю перехідних ймовірностей марковського ланцюга, розмічений граф якого зображено на рисунку 1:

$$P=\begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $p_{ij}(n)$ ймовірність переходу зі стану E_i в стан E_j за n кроків. Ясно, що $p_{ij}(1) = p_{ij}$. Складемо матрицю з перехідних ймовірностей за n кроків:

$$P(n)=\begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \dots & p_{2k}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(n) & p_{k2}(n) & \dots & p_{kk}(n) \end{pmatrix}.$$

Обидві матриці P та P(n) мають однакові властивості:

1) усі елементи обох матриць задовольняють нерівностям

$$0 \le p_{ij} \le 1 \ ;$$

2) сума елементів будь-якого рядка матриць дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,\dots,k \ .$$

Залежність між матрицями P та P(n) подається формулою

$$P(n) = P^n,$$

яка дозволяє знаходити ймовірності переходу за n кроків, якщо відомі ймовірності переходу за один крок.

Приклад 1. Дана матриця P перехідних ймовірностей ланцюга Маркова зі стану i (i = 1, 2) в стан j (j = 1, 2) за один крок:

$$P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю P(2) переходу системи зі стану в стан за два кроки.

Розв'язання.

$$P(2) = P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,6) & (0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,4) \\ (0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,6) & (0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Нехай, на відміну від розглянутого вище, фізична система може переходити зі стану в стан не в певні моменти часу, а в довільний момент часу. Змінювання станів відбуваються випадково і миттєво (стрибково). Тоді випадковий процес (ланцюг), який при цьому виникає, називається ланцюгом з неперервним часом. Цей процес називається марковським, якщо розвивання процесу після деякого моменту часу t залежить лише від стану, в якому система перебуває в момент t, і не залежить від того, як і коли вона в цей стан потрапила.

Припустимо, що в момент t система перебуває в деякому стані E_i. Розглянемо ймовірність того, що при цьому вона в момент $t + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ опиниться в іншому стані E_j. Якщо ця ймовірність залежить лише від Δt (та від станів E_i і E_j) і не залежить від моменту t, то ланцюг називається однорідним, або стаціонарним. Зміст умови однорідності полягає в тому, що причини, які викликають змінювання станів системи, не змінюються протягом часу.

Поставимо вимогу, щоб процеси з неперервним часом задовольняли умові ординарності стрибків. Зміст цієї умови полягає в тому, що в один і той же момент часу система не може змінити свій стан більше ніж один раз. Математично ця вимога означає, що ймовірність того, що за недовгий проміжок часу Δt система змінить свій стан понад один раз, виявляється при $\Delta t \to 0$ нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж Δt.

Далі розглядаємо лише однорідні та ординарні марковські ланцюги з неперервним часом.

Нехай в якийсь момент часу система перебуває в стані E_i. Позначимо через $p_{ij}(t)$ ймовірність того, що через час t вона опиниться в стані E_j. Ймовірності $p_{ij}(t)$ називаються перехідними ймовірностями за час t. Квадратна матриця з них

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \dots & p_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

називається матрицею перехідних ймовірностей за час t. Її порядок k дорівнює числу можливих станів системи. Матриця P(t) має такі властивості:

1) усі елементи її задовольняють умові

$$0 \le p_{ij}(t) \le 1;$$

2) сума елементів будь-якого рядка матриці дорівнює одиниці;

3) $p_{ij}(0) = p_{ij}(t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & при\ i \ne j, \\ 1 & при\ i=j. \end{cases}$

Припустимо, що перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ однорідного марковського ланцюга є диференційованими функціями змінної t при всіх $t \ge 0$. Позначимо через λ_{ij} значення похідних цих функцій при $t = 0$:

$$P'_{ij}(0) = P'_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lambda_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,k, \quad j = 1,2,\dots,k.$$

Виявляється, що при $i \ne j$ число λ_{ij} дорівнює границі відношення ймовірності переходу $p_{ij}(\Delta t)$ за час Δt зі стану E_i в стан E_j до довжини інтервалу часу Δt при $\Delta t \to 0$, тобто:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad i \ne j.$$

Величина λ_{ij} називається інтенсивністю переходу зі стану E_i в стан E_j.

У випадку, коли i = j, число $-\lambda_{ii}$ визначається як границя відношення ймовірності виходу $1 - p_{ii}(\Delta t)$ за час Δt зі стану E_i до довжини інтервалу часу Δt при $\Delta t \to 0$:

$$-\lambda_{ii} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Число $-\lambda_{ii}$ називається інтенсивністю виходу зі стану E_i.

Складемо з величин λ_{ij} квадратну матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix},$$

яка називається матрицею інтенсивностей переходів. Вона володіє властивостями:

1) усі елементи матриці Λ, крім діагональних, є невід'ємними, тобто $\lambda_{ij} \ge 0$ $(при\ i \ne j)$;

2) усі діагональні елементи є недодатними, тобто $\lambda_{ii} \le 0$;

3) сума всіх елементів будь-якого рядка матриці Λ дорівнює нулю, тобто $\sum_{j=1}^{k}\lambda_{ij}=0$.

На графі станів марковського ланцюга з неперервним часом звичайно біля стрілок, які позначать переходи, вказують інтенсивності цих переходів, а інтенсивності виходів не вказують. Так на рисунку 2 зображено граф станів деякого марковського ланцюга.

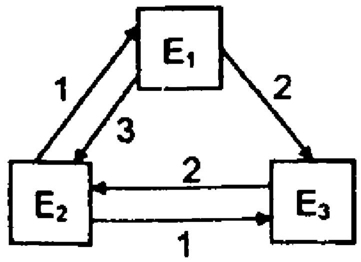

Рисунок 2

Матриця інтенсивностей переходів має вигляд

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Знаючи матрицю інтенсивностей переходів або розмічений граф станів, можна визначити ймовірності станів

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t), \quad \sum_{i=1}^{k} q_i(t)=1,$$

тобто ймовірності $q_i(t)$ знаходження системи відповідно в станах E_i ($i = 1, 2, \dots, k$) в момент часу t. Ці ймовірності є функціями часу t і задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова, яка в матричній формі має вигляд

$$Q'(t)=Q(t)\cdot\Lambda, \qquad (1)$$

де $Q(t)=\left(q_1(t)q_2(t)\dots q_k(t)\right)$ і $Q'(t)=\left(q_1'(t)q_2'(t)\dots q_k'(t)\right)$ є рядковими матрицями; $q_i'(t)$ - похідні ймовірностей станів $q_i(t)$ $\left(i=1,2,\dots,k\right)$, а Λ - матриця інтенсивностей переходів. Рядкову матрицю $Q(t)=\left(q_1(t)q_2(t)\dots q_k(t)\right)$ часто називають розподілом ймовірностей станів системи через час t.

Якщо в початковий момент фізична система перебувала в стані E_i, то систему рівнянь Колмогорова слід розв'язувати при початкових умовах:

$$q_i(0)=1, q_j(0)=0, j\neq i .$$

Розподіл ймовірностей $Q(t)=\left(q_1(t)q_2(t)\ldots q_k(t)\right)$ станів фізичної системи називається стаціонарним, якщо він не змінюється протягом часу, тобто,якщо

$$Q(t)\equiv Q,$$

де $Q=\left(q_1 q_2 \ldots q_k\right)$, $q_i=const$, $i=1,2,\ldots,k$.

Система диференціальних рівнянь Колмогорова в цьому випадку вироджується в систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно q_i, $i=1,2,\ldots,k$ і в матричній формі набуває вигляду

$$Q\cdot\Lambda=0 .$$

Отже, для отримання стаціонарного розподілу треба розв'язати цю систему рівнянь. Рівняння цієї системи не в матричній формі зручно виписувати безпосередньо за графом станів відповідно за таким правилом:

для стаціонарного розподілу сума добутків $\lambda_{ij}\cdot q_i$, $i\neq j$ для стрілок, які виходять зі стану E_i дорівнює сумі добутків $\lambda_{ij}\cdot q_j$, $i\neq j$ для стрілок, які входять у стан E_i.

Зазначимо, що головний визначник системи завжди дорівнює нулю, а це свідчить про невизначеність системи. Для того, щоб надати їй визначеність, треба будь-яке з її рівнянь замінити умовою

$$q_1+q_2+\ldots+q_k=1 .$$

Приклад 2. Задана матриця

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-5 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

інтенсивностей переходів неперервного ланцюга Маркова. Скласти розмічений граф станів, відповідний матриці Λ, виписати систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів, знайти стаціонарний розподіл ймовірностей.

Розв'язання. Граф повинен мати 3 стани; E_1, E_2, та E_3. З матриці Λ знаходимо інтенсивності переходів $\lambda_{ij}>0$, $i\neq j$ і відмічаємо поряд з відповідними стрілками (рисунок 3).

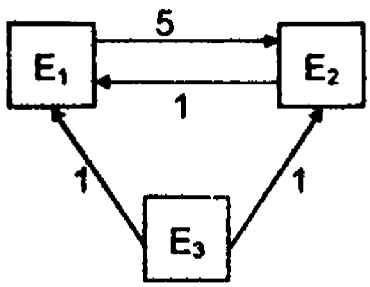

Рисунок 3

Маємо $\lambda_{12} = 5$, з'єднаємо стани E_1 і E_2 стрілкою, напрямленою від E_1 до E_2, відмічаючи інтенсивність переходу поряд зі стрілкою; $\lambda_{13} = 0$, отже стани E_1 і E_3 стрілкою не з'єднуємо і так далі. Нагадуємо, що діагональні елементи λ_{ii} матриці Λ визначаються з умови, що сума елементів будь-якого рядка матриці дорівнює нулю, і тому $\lambda_{ii} \le 0$.

Складаємо рівняння Колмогорова.

Припустимо $Q(t) = \left(q_1(t)q_2(t)q_3(t)\right)$,

$$Q'(t) = \left(q_1'(t)q_2'(t)q_3'(t)\right),$$

тоді згідно з формулою (1) матимемо

$$\left(q_1'(t)q_2'(t)q_3'(t)\right) = \left(q_1(t)q_2(t)q_3(t)\right)\cdot\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Помножуючи матриці в правій частині матричного рівняння і прирівнюючи елементи отриманої матриці відповідним елементам рядкової матриці в лівій частині, одержимо

$$\begin{cases} q_1'(t) = -5q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) \\ q_2'(t) = \ \ 5q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) \\ q_3'(t) = \qquad\qquad\qquad -2q_3(t) \end{cases}$$

– це система диференціальних рівнянь Колмогорова.

Для знаходження стаціонарного розподілу достатньо в одержаній системі рівнянь покласти $q_i(t) = q_i$, а похідні $q_i'(t) = 0,\ i = 1,2,3$. Тоді:

$$\begin{cases} -5q_1 + q_2 + q_3 = 0 \\ \ \ 5q_1 - q_2 + q_3 = 0 \\ \qquad\quad -2q_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

З останнього рівняння $q_3 = 0$, тому система набуває вигляду

$$\begin{cases} -5q_1 + q_2 = 0 \\ \ \ 5q_1 - q_2 = 0 \end{cases}$$

Одне з рівнянь, нехай перше, замінимо на умову $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, тобто $q_1 + q_2 = 1$ (оскільки $q_3 = 0$) і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ 5q_1 - q_2 = 0 \end{cases}$$

Звідси $q_1 = \frac{1}{6}, q_2 = \frac{5}{6}$, отже, стаціонарний розподіл такий:

$$Q = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0\right).$$

Зазначимо, що для відшукання стаціонарного розподілу ми одержали б таку ж саму систему, якщо б скористалися наведеним вище правилом. Дійсно, для стану E_1 маємо $5q_1 = 1 \cdot q_2 + 1 \cdot q_3$, для стану E_2 – $1 \cdot q_2 = 5 \cdot q_1 + 1 \cdot q_3$, для стану E_3 – $1 \cdot q_3 + 1 \cdot q_3 = 0$. Складаючи з цих рівнянь систему, переконаємося, що вона еквівалентна системі (2).

У багатьох практичних випадках важно знати, як поводяться ймовірності $q_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,k$ при $t \to \infty$. Якщо при певних умовах існують граничні ймовірності станів

$$q_i = \lim_{t \to \infty} q_i(t), \; i = 1,2,\ldots,k,$$

які не залежать від того, в якому стані перебувала система в початковий момент, то це означає, що протягом часу в системі установлюється граничний стаціонарний режим, а числа q_i, $i = 1,2,\ldots,k$ при цьому називаються фінальними ймовірностями станів. Набір $Q = (q_1 q_2 \ldots q_k)$ утворює фінальний розподіл ймовірностей.

Вияснимо умови, при яких існують фінальні ймовірності станів. Введемо деякі поняття.

Стан E_i називається несуттєвим, якщо знайдеться такий стан E_j, що з E_i до E_j перейти можна, а з E_j до E_i – не можна. Стан E_i називається суттєвим, якщо він не є несуттєвим. Наприклад, для системи, граф станів якої зображено на рисунку 3 стан E_3 несуттєвий (тому, що з нього можна перейти в стан E_1 або E_2, але повернутися назад не можна), стани E_1 та E_2 – суттєві.

Суттєві стани E_i і E_j називаються сполученими, якщо з E_i можна попасти в E_j і з E_j в E_i теж. На рисунку 3 стани E_1 і E_2 – сполучені.

Якщо E_i – несуттєвий стан, то

$$\lim_{t \to \infty} q_i(t) = 0.$$

Зміст цього ствердження полягає в тому, що в решті-решт система вийде з несуттєвого стану E_i і більше до нього не повернеться.

Щоб ланцюг (процес) зі скінченним числом станів мав єдиний стаціонарний розподіл ймовірностей, який збігається з фінальним, необхідно і достатньо, щоб усі його суттєві стани сполучалися поміж собою.

У розглянутому вище прикладі 2 стани E_1 і E_2 є суттєвими сполученими станами, E_3 – несуттєвий стан. Отже, фінальний розподіл ймовірностей станів збігається зі стаціонарним і має вигляд $q_1 = \frac{1}{6}, q_2 = \frac{5}{6}, q_3 = 0$.

Процесом загибелі та розмноження називається марковський ланцюг, граф станів якого зображено на рисунку 4.

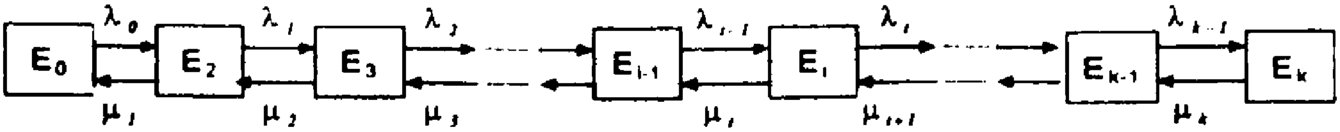

Рисунок 4

Тут $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ - інтенсивності переходів системи зі стану в стан зліва направо; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ - інтенсивності переходів справа наліво. Очевидно, всі стани E_0, E_1,...,E_k є суттєвими, сполученими станами, тому існує фінальний розподіл ймовірностей станів, який має вигляд

$$q_0 = \left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \ldots \mu_k}\right]^{-1},$$

$$q_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} q_0,\ q_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} q_0,\ \ldots,\ q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} q_0,\ \ldots,\ q_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}. \qquad (3)$$

2 Елементи теорії масового обслуговування

Математичний апарат для вивчення закономірностей функціонування систем, які задовольняють масовий попит, та утворення черг у такого роду системах, називається теорією масового обслуговування (ТМО).

Методи ТМО широко застосовуються на транспорті для розрахунку раціональної організації подачі вагонів під розвантаження та навантаження, для розрахунку потужностей пунктів поточного ремонту вагонів, для вибору раціональної кількості касових апаратів на вокзалах та станціях метрополітену. Тому сучасному інженеру залізничного транспорту необхідно знати основи ТМО.

Заявкою (вимогою) назвемо попит на задоволення будь-якої потреби. Далі вважаємо всі заявки однотипними. Задоволення попиту назвемо обслуговуванням заявки.

Системою масового обслуговування (СМО) називається кожна система, яка призначається для обслуговування деяких заявок, які прибувають до неї у випадкові моменти часу. Обладнання, яке безпосередньо обслуговує заявку, називається каналом обслуговування. СМО може містити одне таке обладнання, тоді вона називається одноканальною. Якщо СМО містить декілька таких обладнань, то вона називається багатоканальною.

Прибуття заявки до СМО назвемо подією. Послідовність подій, які полягають у прибутті заявок до СМО, назвемо вхідним потоком заявок. Послідовність подій, які полягають у виході заявок із СМО, назвемо вихідним потоком заявок.

Залежно від поведінок заявки в СМО розрізняють СМО з відмовами і СМО з чергою (або очікуванням). У СМО з відмовами заявка, яка прибула в момент зайнятості всіх каналів, отримує відмову і покидає СМО. У СМО з чергою (або очікуванням) заявка, яка прибула в момент зайнятості всіх каналів стає в чергу і очікує звільнення одного з каналів обслуговування.

Можливі СМО змішаного типу. Наприклад, СМО з обмеженою чергою. У такій СМО заявка стає в чергу при зайнятості всіх каналів, якщо черга невелика, скажімо, не досягнула довжини m. Якщо всі m місць у черзі зайняті, заявка покидає СМО. До СМО змішаного типу належать СМО з обмеженим часом очікування. Заявка, яка прибула в момент зайнятості всіх каналів, стає в чергу, але може вийти із СМО необслугованою, якщо час очікування занадто великий.

СМО з чергою (або з очікуванням) можуть бути відкритого та замкнутого типу. У відкритих СМО інтенсивність потоку заявок, що до неї прибуває , не залежить від стану СМО, оскільки кількість заявок, що надходять, є практично необмеженою. Прикладами таких СМО є вокзальні каси, метрополітен, телемайстерні великих міст і так далі. У СМО з чергою замкненого типу обслуговується обмежена кількість заявок, тому інтенсивність потоку заявок суттєво залежить від стану системи. Прикладами таких СМО є різні ремонтні системи в автопарках, цехах і так далі.

СМО з чергою та змішаного типу розрізняються також за дисципліною обслуговування: чи обслуговуються заявки в порядку прибуття або у випадковому порядку, або існують заявки, які обслуговуються позачергово (СМО з пріоритетом).

Введемо поняття найпростішого потоку заявок.

Розглянемо вхідний потік заявок у СМО як послідовність точок t_1, t_2, ..., t_i, ... - моментів прибуття заявок на осі часу ot (рисунок 5). Тут t_0 - початковий момент.

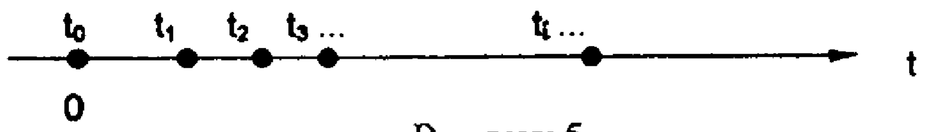

Рисунок 5

Потік заявок назвемо найпростішим, якщо він задовольняє трьом умовам.

1 Відсутність післядії. Ця умова означає, що заявки прибувають до СМО незалежно одна від одної, тобто прибуття заявки після моменту часу t не залежить від того, коли і в якій кількості з'являлися вони до моменту t.

2 Стаціонарність. Ця умова означає, що ймовірність прибуття деякої кількості заявок до СМО за час Δt залежить лише від довжини Δt інтервалу $[t;t+\Delta t]$ і не залежить від початку t відліку цього інтервалу на осі часу ot. Якщо виконується умова стаціонарності, то можна казати про середнє число заявок, які прибувають до СМО за одиницю часу, наприклад, за одну годину, не указуючи, за яку саме годину.

3 Ординарність. Ця умова означає, що одночасне прибуття до СМО двох і більше заявок є малоймовірним, тобто ймовірність появи за нескінченно малий час Δt більше однієї заявки є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж Δt.

Таким чином, якщо потік найпростіший, то випадкові моменти часу t_i ($i = 1, 2, \ldots$) прибуття заявок до СМО розподілені на осі часу зі середньою щільністю λ (стаціонарність); ці точки потрапляють в інтервали, які не перетинаються, незалежно одна від одної (немає післядії); заявки надходять поодинці (ординарність). Величина λ називається інтенсивністю потоку заявок і визначає середню кількість (математичне сподівання кількості) заявок, які прибувають за одиницю часу.

Виявляється, що у випадку найпростішого потоку ймовірність $P_k(t)$ прибуття до СМО k заявок протягом часу t обчислюється за формулою:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad (k \geq 0), \tag{4}$$

тобто ймовірності $P_k(t)$ розподілені за законом Пуассона з параметром λt. Тому існує інша назва найпростішого потоку – пуассонівський потік.

Позначимо через T інтервал часу між появами двох послідовних заявок. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини T

$$F(t) = P(T < t) = 1 - p_0(t),$$

де $P(T < t)$ - ймовірність того, що випадкова величина T прийме значення менше ніж t; $p_0(t)$ - ймовірність протилежної події (тобто за час t до СМО не надійшла жодна заявка). За формулою (4)

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t},$$

звідки $$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ (t > 0).$$

Знайдемо щільність розподілу випадкової величини T:

$$f(t) = F'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \ (t > 0).$$

З двох останніх формул бачимо, що випадкова величина T розподілена за показниковим законом, тому її математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення мають вигляд:

$$M(T) = \frac{1}{\lambda}, \ D(T) = \frac{1}{\lambda^2}, \ \sigma = \sqrt{D(T)} = \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

Таким чином, інтервал часу T між двома послідовними заявками в найпростішому потоці має показниковий розподіл з математичним сподіванням $\frac{1}{\lambda}$, де λ – інтенсивність потоку.

Для завдання СМО необхідно указати імовірнісні характеристики часу обслуговування однієї заявки. Позначимо цей час через $T_{обсл}$. Величина $T_{обсл}$ є випадковою. У багатьох задачах теорії масового обслуговування закон розподілу часу обслуговування вважається показниковим, тобто функція розподілу

$$F(t) = P(T_{обсл} < t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Параметр цього розподілу μ є величиною оберненою до середнього часу обслуговування, тобто

$$\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} . \qquad (6)$$

Часто μ називають інтенсивністю потоку обслуговування. При цьому під потоком обслуговування розуміють потік заявок, які обслуговуються одна за одною єдиним неперервно зайнятим каналом. Якщо $T_{обсл}$ є випадковою величиною, яка має показниковий розподіл, то потік обслуговування є найпростішим.

У випадку, коли вхідний потік та всі потоки обслуговування є найпростішим, процес, який протікає в СМО, є марковським випадковим процесом (ланцюгом) із дискретними станами і неперервним часом. Тому СМО, в якій всі потоки найпростіші, називають марковською СМО.

Таким чином, припущення про показниковий розподіл часу обслуговування та інтервалу часу між двома послідовними прибуттями заявок грає виключну роль у теорії масового обслуговування, оскільки спрощує аналітичне дослідження СМО, зводячи його до дослідження ланцюгів Маркова.

Приклад 3. Автоматизована система управління (АСУ) продажем залізничних квитків складається з двох ЕОМ, які працюють паралельно. При пошкодженні однієї ЕОМ АСУ продовжує нормально функціонувати за рахунок роботи іншої ЕОМ. Потік відмов кожної ЕОМ найпростіший. Середній час безвідмовної роботи однієї ЕОМ дорівнює 10 діб. Пошкоджену ЕОМ зразу починають ремонтувати. Час ремонту ЕОМ має показниковий розподіл і в середньому складає дві доби. У початковий момент обидві ЕОМ справні. Знайти середню продуктивність АСУ, якщо при справності хоча б однієї ЕОМ її продуктивність дорівнює 100%, а при відмові обох ЕОМ продаж квитків виконується вручну, забезпечуючи 30% загальної продуктивності АСУ.

Розв'язання. Позначимо стани АСУ за числом ЕОМ, які вийшли з ладу: E_0 – обидві ЕОМ справні; E_1 – одна справна, одна ремонтується; E_2 – обидві ремонтуються. Оскільки потоки відмов та відновлень ЕОМ є найпростішими, то їхні інтенсивності обчислюються за формулами (5) і (6):

$$\lambda = \frac{1}{M(T)} = \frac{1}{10}\left(\frac{відмова}{доба}\right), \quad \mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{1}{2}\left(\frac{відновлення}{доба}\right).$$

Граф станів зображено на рисунку 6.

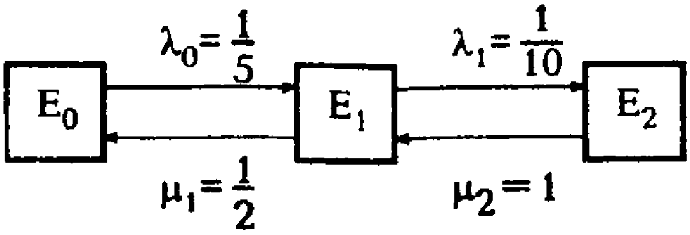

Рисунок 6

Оскільки в стані E_0 працюють обидві ЕОМ, кожна з яких може відмовити з інтенсивністю $\lambda=\frac{1}{10}$, то АСУ переходить зі стану E_0 до стану E_1 з інтенсивністю $\lambda_0=2\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$; перехід $E_1\to E_2$ відбувається з інтенсивністю $\lambda=\lambda=\frac{1}{10}$. Зі стану E_2 в стан E_1 система переходить з інтенсивністю $\mu_2=2\cdot\mu=2\cdot\frac{1}{2}=1$, тому, що відновлюються дві ЕОМ; перехід $E_1\to E_0$ відбувається з інтенсивністю $\mu_1=\mu=\frac{1}{2}$. Одержаний граф порівняємо з графом, побудованим на рисунку 4 для процесу загибелі та розмноження. Отже, в описаній СМО відбувається процес загибелі та розмноження з числом станів k+1=3, оскільки k=2. Скористуємось формулами (3) для обчислювання фінального розподілу ймовірностей

$$q_0=\left[1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1}{\mu_1\cdot\mu_2}\right]^{-1}=\left[1+\frac{0{,}2}{0{,}5}+\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}5\cdot 1}\right]^{-1}=\frac{1}{1{,}44}\approx 0{,}694;$$

$$q_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot q_0\approx\frac{0{,}2}{0{,}5}\cdot 0{,}694\approx 0{,}278;$$

$$q_2=\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1}{\mu_1\cdot\mu_2}\cdot q_0\approx\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}5\cdot 1}\cdot 0{,}694\approx 0{,}028.$$

Додамо $q_0+q_1+q_2=0{,}694+0{,}278+0{,}028\approx 1$, що і слід було чекати, оскільки система може перебувати в одному з трьох можливих станів E_0, E_1, E_2. Середня продуктивність АСУ в стаціонарному режимі дорівнює

$$100\%\cdot(q_0+q_1)+30\%\cdot q_2=100\%(0{,}694+0{,}278)+30\%\cdot 0{,}028=98{,}04\%.$$

Розрахунок показує, що паралельна робота тільки двох ЕОМ забезпечує досить високу (98,04% від номінальної) продуктивність АСУ. Отже, немає необхідності підвищувати продуктивність системи за рахунок приєднання третьої ЕОМ.

Розглянемо показники ефективності систем масового обслуговування. Звичайно в теорії масового обслуговування цікавлять середні характеристики системи, які називають показниками ефективності СМО. До них належать:

A – середнє число заявок, які обслуговуються СМО за одиницю часу, цю характеристику називають абсолютною пропускною спроможністю;

Q – ймовірність обслуговування прибулої заявки, або відносна пропускна спроможність, очевидно, $Q = \frac{A}{\lambda}$;

$P_{відм}$ – ймовірність відмови, тобто ймовірність того, що прибула заявка не буде обслуговувана, $P_{відм}=1-Q$;

$\bar{z}$ – середнє число заявок у СМО (тобто всі заявки, які обслуговуються і чекають у черзі, якщо вона існує);

$\bar{r}$ – середнє число заявок у черзі, якщо вона є;

$\bar{t}_{сист}$ – середній час перебування заявки в СМО, тобто як у черзі, якщо вона є, так і під обслуговуванням;

$\bar{t}_{черг}$ – середній час перебування заявки в черзі;

$\bar{K}$ – середнє число зайнятих каналів.

Вибір показників ефективності СМО залежить від типу СМО. Наприклад, абсолютна пропускна спроможність A, будучи основною характеристикою обслуговування в СМО з відмовами, втрачає сенс для СМО з необмеженою чергою.

Для відкритих СМО справедливі співвідношення:

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda}, \quad \bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \quad \bar{K} = \frac{A}{\mu},$$

де λ – інтенсивність потоку заявок, μ – інтенсивність потоку обслуговування. Ці формули вірні лише в тому випадку, коли вхідний потік заявок і потік обслуговування є стаціонарними.

Спинимося на системах масового обслуговування з найпростішим вхідним потоком і показниковим часом обслуговування.

2.1 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами (задача Ерланга)

Нехай СМО містить K каналів, вхідний потік заявок має інтенсивність λ, потік обслуговування заявки одним каналом має інтенсивність μ. Будемо нумерувати стани СМО за числом зайнятих каналів:

E_0 – усі канали вільні;

E_1 – один канал зайнятий, (K-1) каналів вільні;

. . . .

E_i – i каналів зайняті, (K-i) каналів вільні;

. . . .

$E_к$ – усі канали зайняті.

Розмічений граф станів має вигляд (рисунок 7):

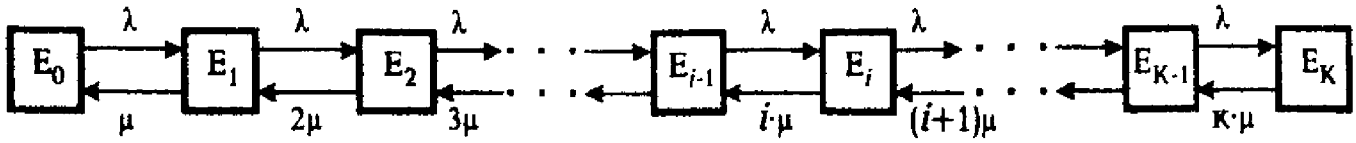

Рисунок 7

Порівнюючи рисунки 4 та 7, приходимо до висновку, що граф на рисунку7 є графом процесу загибелі та розмноження, для якого:

$$\lambda_i = \lambda, \quad \mu_i = i\mu. \tag{7}$$

Тоді фінальний розподіл ймовірностей станів можна обчислити за формулами (3).

Позначаючи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ і враховуючи співвідношення (7), із (3) отримаємо:

$$q_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^K}{K!}\right]^{-1},$$
$$q_1 = \frac{\rho}{1!}\cdot q_0,\ \ q_2 = \frac{\rho^2}{2!}\cdot q_0, \ldots,\ \ q_i = \frac{\rho^i}{i!}\cdot q_0, \ldots,\ \ q_K = \frac{\rho^K}{K!}\cdot q_0. \tag{8}$$

Формули (8) називаються формулами Ерланга. За їх допомогою обчислюються показники ефективності СМО:

$$A = \lambda(1 - q_K),\ \ Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - q_K,\ \ P_{відм} = q_K,\ \ \overline{K} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - q_K), \tag{9}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, ця величина називається коефіцієнтом завантаження системи.

Приклад 4. Диспетчерська служба має 5 ліній зв'язку. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю λ = 0,8 викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає 3 хвилини. Час переговорів розподілений за показниковим законом. Знайти: абсолютну та відносну пропускну спроможність диспетчерської служби, ймовірність відмови, середнє число зайнятих каналів. Визначити, скільки ліній зв'язку повинна мати диспетчерська служба, щоб ймовірність відмови не перевищувала 0,01.

Розв'язання. Знаходимо інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})} = \frac{1}{3} \text{ (розмови за хвилину).}$$

Коефіцієнт завантаження СМО складає $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}8}{1/3} = 0{,}8 \cdot 3 = 2{,}4$.

З формул (8), при К=5, маємо:

$$q_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!}\right]^{-1} \approx \left[1 + \frac{2{,}4}{1} + \frac{5{,}76}{2} + \frac{13{,}824}{6} + \frac{33{,}178}{24} + \frac{79{,}626}{120}\right]^{-1} \approx$$

$$\approx (10{,}629)^{-1} \approx 0{,}094$$

$$q_5 = \frac{\rho^5}{5!} \cdot q_0 \approx \frac{(2{,}4)^5}{5!} \cdot 0{,}094 = \frac{79{,}625}{120} \cdot 0{,}094 \approx 0{,}062 \cdot$$

Знаходимо за формулами (9):

а) абсолютна пропускна спроможність

$A = \lambda(1 - q_5) \approx 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}062) \approx 0{,}8 \cdot 0{,}938 \approx 0{,}750$ (отже, СМО обслуговує в середньому 0,75 заявки за хвилину);

б) відносна пропускна спроможність

$Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - q_5 \approx 1 - 0{,}062 \approx 0{,}938$ (отже, ймовірність обслуговування знов прибулої заявки дорівнює 0,938);

в) ймовірність відмови

$P_{відм} = q_5 \approx 0{,}062;$

г) середнє число зайнятих каналів

$K = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - q_5) \approx 2{,}4 \cdot 0{,}938 \approx 2{,}251$ (отже диспетчерська служба в середньому має половину ліній зв'язку постійно зайнятими).

Оскільки ймовірність відмови даної диспетчерської служби $P_{відм} \approx 0{,}062$ перевищує 0,01, то число ліній зв'язку слід збільшити.

Припустимо, що ліній зв'язку стало 6. Тоді з формул (8) при К=6 отримаємо

$$q_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{6!}\right]^{-1}\approx\left[10{,}629+\frac{(2{,}4)^6}{720}\right]^{-1}\approx[10{,}629+0{,}265]^{-1}\approx$$

$$\approx\frac{1}{10{,}894}\approx 0{,}092;$$

$$q_6=\frac{\rho^6}{6!}\cdot q_0\approx\frac{(2{,}4)^6}{720}\cdot 0{,}0920{,}265\cdot 0{,}092\approx 0{,}024.$$

Отож, при К=6 ймовірність відмов $P_{відм}=q_6\approx 0{,}024$ перевищує 0,01. Виходить, число каналів треба ще збільшити. При К=7 одержимо

$$q_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^6}{6!}+\frac{\rho^7}{7!}\right]^{-1}\approx\left[10{,}894+\frac{(2{,}4)^7}{5040}\right]^{-1}\approx[10{,}894+0{,}091]^{-1}\approx$$

$$\approx\frac{1}{10{,}985}\approx 0{,}091;$$

$$q_7=\frac{\rho^7}{7!}\cdot q_0\approx\frac{(2{,}4)^7}{5040}\cdot 0{,}091\approx 0{,}091\cdot 0{,}091\approx 0{,}008.$$

Отже, при К=7 ймовірність відмови $P_{відм}=q_7\approx 0{,}008$ не перевищує 0,01. Таким чином, для забезпечення потрібної ймовірності відмов кількість ліній зв'язку диспетчерської служби слід збільшити до 7.

2.2 Одноканальна система масового обслуговування з обмеженою чергою

Нехай СМО має єдиний канал обслуговування. Якщо заявка надійшла в систему в момент зайнятості каналу, то вона стає в чергу. Якщо прибула заявка застала канал зайнятим і всі m місць у черзі теж зайняті, то заявка покидає систему необслугованою. Якщо потік заявок до СМО є найпростішим з інтенсивністю λ і час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом з параметром μ то граф станів системи (рисунок 8) є графом процесу загибелі та розмноження. Стани СМО пронумеровані таким чином:

E_0 – канал вільний;

E_1 – канал зайнятий, черги немає;

E_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть у черзі;

. . . .

E_i – канал зайнятий, (i-1) заявка стоїть у черзі;

. . . .

E_{m+1} – канал зайнятий, m заявок стоять у черзі.

Очевидно, що

$$\lambda_i = \lambda, \ \mu_i = \mu. \tag{10}$$

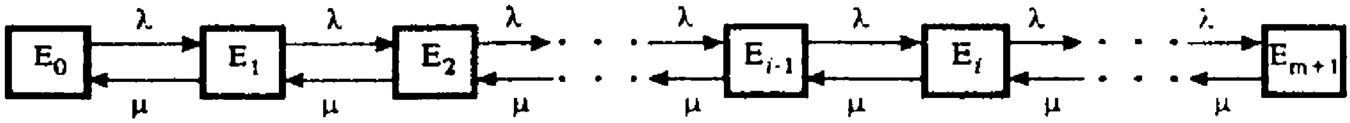

Рисунок 8

Тоді фінальний розподіл ймовірностей станів обчислюється за формулами (3). Позначаючи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ і враховуючи (10), із (3) одержимо:

$$\begin{aligned} &q_0 = \left[1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m+1}\right]^{-1}; \\ &q_1 = \rho \cdot q_0; q_2 = \rho^2 \cdot q_0; \ldots; q_i = \rho^i \cdot q_0; \ldots; q_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot q_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Перша з формул (11) містить геометричну прогресію зі знаменником $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Додаючи (m+2) її членів, отримаємо:

$$q_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, q_i = \rho^i \cdot q_0, 1 \le i \le m+1.$$

За допомогою цих формул обчислюються показники ефективності СМО. З формул (9) маємо

$$A = \lambda \cdot (1 - q_{m+1}), \ Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - q_{m+1}, \ P_{відм} = q_{m+1}.$$

Далі

$$\begin{aligned} &\overline{K} = 1 - q_0, \ \bar{r} = \frac{\rho^2\left[1 - \rho^m \cdot (m + 1 - m \cdot \rho)\right]}{\left(1 - \rho^{m+2}\right) \cdot (1 - \rho)}, \\ &\bar{z} = \overline{K} + \bar{r}, \ \bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda}, \ \bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \end{aligned} \tag{12}$$

2.3 Одноканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

Нехай СМО має один канал обслуговування, до якого надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Час обслуговування розподілений за показниковим законом з параметром μ . Якщо заявки надходять до СМО в момент зайнятості каналу, то вони стають у чергу. Кількість місць у черзі необмежена. Отож, кожна заявка врешті-решт буде обслугованою, тобто

$$P_{відм} = 0,\ Q = 1 - P_{відм} = 1,\ A = Q \cdot \lambda = \lambda\ . \qquad (13)$$

Обчислимо коефіцієнт завантаження СМО: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Фінальний розподіл ймовірностей станів даної СМО існує лише при $\rho < 1$. Цей факт легко пояснити, якщо розглядати дану СМО як граничний випадок одноканальної СМО з обмеженою чергою при прямуванні довжини черги до нескінченності. Тоді фінальний розподіл ймовірностей можна обчислити як границю фінальних ймовірностей (11) при $m \to \infty$. При цьому утворюється нескінченний числовий ряд (див. q_0), який складається з членів геометричної прогресії і який збігається, якщо знаменник прогресії менше 1 (тобто $\rho < 1$), до суми $\frac{1}{1-\rho}$.

Таким чином, фінальні ймовірності станів обчислюються за формулами:

$$q_0 = 1 - \rho,\ \ q_i = \rho^i \cdot (1 - \rho),\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \qquad (14)$$

де q_0 – фінальна ймовірність того, що канал вільний, q_i – фінальна ймовірність того, що канал зайнятий та (i - 1) заявок у черзі.

Переходячи до границі при $m \to \infty$, з формул (12) і (14) одержимо показники ефективності СМО з необмеженою чергою

$$\overline{K} = \rho,\ \ \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho},\ \ \bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho},\ \ \bar{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)},\ \ \bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \qquad (15)$$

Приклад 5. До приймально-відправного парку станції надходить найпростіший потік поїздів із середньою інтенсивністю 3 состава за годину. Одна бригада оглядачів обробляє состав із середньою тривалістю 15 хвилин. Час обробки розподілений за показниковим законом. Визначити: середнє число составів, які очікують обслуговування; середній час перебування состава в парку; середній час простою поїзда під час очікування обробки; середнє число составів у парку.

Розв'язання. Приймально-відправний парк можна розглядати як одноканальну СМО з необмеженою чергою. Інтенсивність потоку заявок λ=3 состава за годину. Інтенсивність потоку обслуговування $\mu = \frac{60}{15} = 4$ состава за годину. Коефіцієнт завантаження парку

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. За формулами (15) знаходимо:

середнє число составів, які очікують обслуговування

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0{,}75)^2}{1-0{,}75} = \frac{0{,}5625}{0{,}25} = 2{,}25 \ \text{состава};$$

середній час перебування состава в парку

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0{,}75}{3\cdot(1-0{,}75)} = 1 \text{ год.};$$

середній час простою поїзда під час очікування обробки

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2{,}25}{3} = 0{,}75 \text{ год.},$$

середнє число составів у парку

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}75}{1-0{,}75} = 3 \text{ состави}.$$

2.4 Багатоканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

Нехай СМО має К каналів обслуговування. Усі потоки є найпростішими. Інтенсивність потоку заявок λ, потоку обслуговування однієї заявки μ. Коефіцієнт завантаження СМО $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Позначимо відношення коефіцієнта завантаження до числа каналів у СМО через $\chi = \frac{\rho}{K}$. Фінальний розподіл імовірностей станів СМО існує лише при $\chi < 1$.

Позначимо через q_i фінальну ймовірність того, що в системі зайняті i каналів ($0<i<K$), а через q_{K+r} – фінальну ймовірність того, що в системі зайняті всі К каналів та r заявок стоять у черзі. При $\chi < 1$ фінальний розподіл ймовірностей станів має вигляд:

$$q_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^K}{K!} + \frac{\rho^{K+1}}{K\cdot K!}\cdot\frac{1}{1-\chi}\right]^{-1},$$
$$q_i = \frac{\rho^i}{i!}\cdot q_0, (1 \le i \le K),\tag{16}$$
$$q_{K+r} = \frac{\rho^{K+r}}{K^r\cdot K!}\cdot q_0, (r \ge 1).$$

Оскільки черга в СМО є необмеженою, то кожна заявка врешті решт буде обслугована, отже справедливі співвідношення (13). Інші показники ефективності СМО обчислюються за формулами:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{K+1}\cdot q_0}{K\cdot K!(1-\chi)^2};\ \bar{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;\ \bar{z} = \bar{r} + \bar{K} = \bar{r} + \rho;\ \bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda};\ \bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.\tag{17}$$

Приклад 6. На сортувальній станції існують дві сортувальні гірки. Вхідний потік поїздів є найпростішим. Середнє число составів, які прибувають щодоби до станції для обробки дорівнює 140. Гірковий технологічний інтервал складає 12 хв., час обслуговування підкоряється показниковому закону розподілу. Знайти показники ефективності роботи сортувальної станції.

Розв'язання. Розглядатимемо сортувальну станцію як СМО: прибулі состави – заявки на обслуговування. Тоді K=2; $\lambda = \dfrac{1}{M(T)}$, де $M(T) = \dfrac{24}{140} \approx 0{,}171$ год. , тобто

$\lambda \approx \dfrac{1}{0{,}171} \approx 5{,}848$ состав/год., $\mu = \dfrac{1}{M(T_{обсл})}$, де $M(T_{обсл}) = 12$ хв. $= 0{,}2$ год.,

тобто $\mu = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$ состав/год.

Обчислимо коефіцієнт завантаження СМО: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \approx \dfrac{5{,}848}{5} \approx 1{,}170$, звідки

$\chi = \dfrac{\rho}{K} \approx \dfrac{1{,}170}{2} \approx 0{,}585$. Оскільки $\chi < 1$, то для даної СМО існує фінальний розподіл ймовірностей станів, який обчислюється за формулами (16):

$$q_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{1-\chi}\right]^{-1} \approx \left[1 + \frac{1{,}17}{1} + \frac{1{,}369}{2} + \frac{1{,}602}{4 \cdot 0{,}415}\right]^{-1} \approx$$

$$\approx [1 + 1{,}17 + 0{,}684 + 0{,}965]^{-1} \approx \frac{1}{3{,}819} \approx 0{,}262.$$

Отже, з ймовірністю 0,262 состав застає сортувальну станцію порожньою (обидві гірки будуть вільними). Обчислимо ймовірність P^* того, що знов прибулий состав застане обидві гірки зайнятими. Очевидно, вона дорівнює сумі ймовірностей таких подій: обидві гірки зайняті і черги немає (q_2), обидві гірки зайняті і один состав у черзі (q_3), обидві гірки зайняті і два состава у черзі (q_4) і так далі. Тоді:

$$P^* = q_2 + q_3 + q_4 + \ldots = 1 - q_0 - q_1 \approx 1 - 0{,}262 - \frac{1{,}17}{1!} \cdot 0{,}262 \approx 0{,}431.$$

За формулами (17) знаходимо показники ефективності роботи СМО:

середнє число составів у черзі на розформування:

$$\bar{r} = \frac{\rho^3 \cdot q_0}{2 \cdot 2!(1-\chi)^2} \approx \frac{(1{,}17)^3 \cdot 0{,}262}{4 \cdot (0{,}415)^2} \approx 0{,}609 \text{ состав.};$$

середнє число поїздів на сортувальній станції:

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho \approx 0{,}609 + 1{,}170 = 1{,}779 \text{ состав.};$$

середній час перебування состава на сортувальній станції:

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda} \approx \frac{1{,}779}{5{,}848} \approx 0{,}304\ год. \approx 18\ хв.;$$

середній час очікування составом розформування:

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{0{,}609}{5{,}848} \approx 0{,}104\ год. \approx 6\ хв..$$

На закінчення розглянемо одноканальну СМО з необмеженою чергою, найпростішим вхідним потоком і довільним розподілом часу обслуговування.

Нехай СМО містить один канал. Потік заявок є найпростішим з інтенсивністю λ. Час обслуговування $T_{обсл}$ розподілений за довільним законом із математичним сподіванням $M[T_{обсл}] = \frac{1}{\mu}$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_{обсл} = \sqrt{D(T_{обсл})}$.

Така система вже не є марковською, оскільки потік обслуговування не є найпростішим, але можна довести, що середнє число заявок, які знаходяться в черзі, і середній час обслуговування обчислюються за формулами:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot (1+v^2)}{2 \cdot (1-\rho)},\ \ \bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2 \cdot (1+v^2)}{2 \cdot \lambda(1-\rho)}, \tag{18}$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коефіцієнт завантаження системи;

$v = \frac{\sigma_{обсл}}{M(T_{обсл})} = \sigma_{обсл} \cdot \mu$ – коефіцієнт варіації часу обслуговування.

Формули (18) називаються формулами Полячека-Хінчіна. Із (18) випливають формули для обчислення інших показників ефективності СМО:

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{K} = \frac{\rho^2 \cdot (1+v^2)}{2 \cdot (1-\rho)} + \rho,\ \ \bar{t}_{сист} = \frac{\rho^2 \cdot (1+v^2)}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \tag{19}$$

Приклад 7. На контейнерну площадку з одним краном прибуває найпростіший потік автомашин із середнім інтервалом між ними 10 хв. Час навантажування-розвантажування в середньому складає 6 хв. Він розподілений за довільним законом. Середнє квадратичне відхилення часу навантажування-розвантажування дорівнює 1 хв. Визначити: середнє число автомашин, які очікують навантажування-розвантажування; середній простій машин під час очікування навантажування-розвантажування; середній час знаходження машин на контейнерній площадці.

Розв'язання. Контейнерну площадку з одним краном можна вважати одноканальною СМО з необмеженою чергою, найпростішим вхідним потоком і довільним розподілом часу обслуговування. Знайдемо параметри СМО:

$$\lambda = \frac{1}{M[T]} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \quad \text{авто} / \text{хв.};$$

$$\mu = \frac{1}{M[T_{обсл}]} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 \quad \text{авто} / \text{хв.};$$

$$\overline{K} = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \approx \frac{0{,}1}{0{,}167} \approx 0{,}599; \quad \nu = \sigma_{обсл} \cdot \mu \approx 1 \cdot 0{,}167 \approx 0{,}167.$$

За формулами (18) та (19) обчислюємо показники роботи СМО:

середнє число автомашин, які очікують навантаження-розвантаження

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot (1+\nu^2)}{2 \cdot (1-\rho)} \approx \frac{(0{,}599)^2 \cdot \left[1+(0{,}167)^2\right]}{2 \cdot (1-0{,}599)} \approx \frac{0{,}358 \cdot 1{,}029}{0{,}802} \approx 0{,}459 \quad \text{авто};$$

середній простій машин під час очікування навантажування-розвантажування

$$\bar{t}_{черг} = \frac{\rho^2 \cdot (1+\nu^2)}{2 \cdot \lambda(1-\rho)} \approx \frac{0{,}459}{0{,}1} = 4{,}59 \approx 4{,}6 \quad \text{хв.},$$

середнє число автомашин на контейнерній площадці

$$\bar{z} = \bar{r} + \overline{K} \approx 0{,}459 + 0{,}599 = 1{,}058 \quad \text{авто};$$

середній час знаходження машин на контейнерній площадці

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{черг} + \frac{1}{\mu} \approx 4{,}59 + 6 \approx 10{,}6 \quad \text{хв.}$$

Завдання до контрольної роботи

Завдання 1

Дана матриця P перехідних ймовірностей ланцюга Маркова зі стану (i=1, 2) в стан j (j=1, 2) за один крок. Знайти матрицю P(2) переходу зі стану в стан j за два кроки.

1 $P=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. 2 $P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$.

3 $P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$. 4 $P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

5 $P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$. 6 $P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$.

7 $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}$. 8 $P=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

9 $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. 10 $P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$.

Завдання 2

Задана матриця Λ інтенсивностей переходів неперервного ланцюга Маркова. Скласти розмічений граф станів, який відповідає матриці Λ; скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів; знайти фінальний розподіл ймовірностей станів.

1 $\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. 2 $\Lambda=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

3 $\Lambda=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 4 & -5\end{pmatrix}$. 4 $\Lambda=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 5\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

5 $\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$. 6 $\Lambda=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

7 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 8 $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 10 $\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3

Прилад складається з m вузлів, які можуть замінювати один одного. Для роботи приладу достатньо, щоб працював хоча б один вузол. При виході з ладу одного з вузлів прилад продовжує нормально функціонувати доти, доки не вийдуть з ладу всі вузли. Потік відмов кожного вузла – найпростіший, середній час безвідмовної роботи одного вузла t годин. При виході з ладу кожен вузол починає одразу ж ремонтуватися. Час ремонту розподілений за показниковим законом і в середньому складає S годин. У початковий момент усі вузли справні.

Знайти середню продуктивність приладу, якщо з виходом з ладу кожного вузла прилад втрачає $\left(\frac{100}{m}\right)\%$ своєї номінальної продуктивності.

1 m = 3, t = 22, S = 8.

2 m = 4, t = 12, S = 2.

3 m = 5, t = 10, S = 5.

4 m = 3, t = 55, S = 5.

5 m = 4, t = 15, S = 3.

6 m = 5, t = 18, S = 2.

7 m = 3, t = 18, S = 3.

8 m = 4, t = 10, S = 5.

9 m = 5, t = 15, S = 5.

10 m = 3, t = 35, S = 7.

Завдання 4

АТС має K ліній зв'язку. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю λ викликів за хвилину. Середній час переговорів складає t хвилин. Час переговорів розподілений за показниковим законом. Знайти: абсолютну та відносну пропускні спроможності АТС; ймовірність того, що всі лінії зв'язку зайняті; середнє число зайнятих ліній зв'язку.

Визначити, скільки ліній зв'язку повинна мати АТС, щоб ймовірність відмови не перевищувала α.

1	$K = 3$,	$\lambda = 0{,}9$,	$t = 2{,}5$,	$\alpha = 0{,}06$.
2	$K = 4$,	$\lambda = 0{,}7$,	$t = 2{,}7$,	$\alpha = 0{,}01$.
3	$K = 5$,	$\lambda = 0{,}8$,	$t = 2{,}9$,	$\alpha = 0{,}05$.
4	$K = 3$,	$\lambda = 0{,}6$,	$t = 3{,}5$,	$\alpha = 0{,}06$.
5	$K = 5$,	$\lambda = 0{,}7$,	$t = 3{,}5$,	$\alpha = 0{,}05$.
6	$K = 4$,	$\lambda = 0{,}8$,	$t = 2{,}2$,	$\alpha = 0{,}01$.
7	$K = 3$,	$\lambda = 0{,}8$,	$t = 2{,}6$,	$\alpha = 0{,}06$.
8	$K = 4$,	$\lambda = 0{,}9$,	$t = 2{,}1$,	$\alpha = 0{,}01$.
9	$K = 3$,	$\lambda = 0{,}7$,	$t = 3{,}1$,	$\alpha = 0{,}06$.
10	$K = 5$,	$\lambda = 0{,}9$,	$t = 2{,}8$,	$\alpha = 0{,}05$.

Завдання 5

На залізничній станції є K касових апаратів. Потік пасажирів, які бажають придбати квиток, є найпростішим з інтенсивністю λ пасажирів за хвилину. Час обслуговування розподілений за показниковим законом. Середній час обслуговування складає t секунд. Визначити: чи існує стаціонарний режим роботи залізничної каси; ймовірність того, що пасажир застане всі апарати зайнятими; середнє число пасажирів у черзі за квитками; середнє число пасажирів у касі; середній час перебування пасажира в черзі; середній час перебування пасажира в касі.

1	$K = 5$,	$\lambda = 58$,	$t = 4{,}2$.
2	$K = 3$,	$\lambda = 62$,	$t = 2{,}2$.
3	$K = 4$,	$\lambda = 55$,	$t = 3{,}5$.
4	$K = 5$,	$\lambda = 50$,	$t = 5{,}1$.
5	$K = 3$,	$\lambda = 68$,	$t = 2{,}5$.
6	$K = 3$,	$\lambda = 58$,	$t = 2{,}8$.
7	$K = 5$,	$\lambda = 63$,	$t = 4{,}3$.
8	$K = 4$,	$\lambda = 65$,	$t = 2{,}7$.
9	$K = 5$,	$\lambda = 60$,	$t = 3{,}8$.
10	$K = 3$,	$\lambda = 55$,	$t = 3{,}1$.

Список літератури

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 1977.-366с.
2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики .-М.: Высшая школа, 1979.-334 с.
3 Венцель Е.С. Исследование операций. -М.: Наука, 1988.-208 с.

ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і контрольні завдання
з дисципліни «Вища математика»
для студентів 2 курсу спеціальності
«УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ
НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ»
заочної форми навчання

Відповідальний за випуск Єфременко Р.О.

Редактор Дмитроченко Л.І.

Підписано до друку 26.04.99 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,75. Обл.-вид.арк. 2,0.

Замовлення № 16. Тираж 300 Ціна

Друкарня ХарДАЗТу,
310050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7