УКРАЪНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЗАБЕЛІНА Л.М.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

(МУ №3448)

Методичні вказівки і завдання

до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика”
для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання

Харків 1999

Вступ

Данні методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики - інтегральному численню. Робота містить програму, розв'язки типових прикладів та варіанти контрольних робіт для заочників загальнотехнічних спеціальностей.

Розділ програми курсу вищої математики

1. Первісна функція та невизначений інтеграл.
2. Основні методи інтегрування: заміна змінної та метод інтегрування частинами.
3. Інтегрування раціональних функцій.
4. Інтегрування ірраціональних і трансцендентних функцій.
5. Визначений інтеграл.
6. Основні властивості визначеного інтеграла.
7. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Формула Ньютона -Лейбніца.
8. Оновні методи обчислення визначеного інтеграла.
9. Чисельні методи обчислення інтегралів.
10. Невласні інтеграли.
11. Застосування визначеного інтеграла.

Первісна функція і невизначений інтеграл

Функція F називається <u>первісною</u> для функції f на проміжку X якщо $\forall x \in X$ $F'(x) = f(x)$, або, що теж саме $dF(x) = f(x)dx$.

Якщо F - первісна для функції f на деякому проміжку X то $F(x)+C$, де C - довільна стала, також є первісною для цієї функції.

Множину всіх первісних для функції f на проміжку X називають <u>невизначеним інтегралом</u> і позначають $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$, або $\int F'(x)dx = F(x) + C$.
3. $\int \left(\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)\right)dx = \alpha \int f_1(x)dx + \beta \int t_2(x)dx$, де α і β - довільні дійсні числа.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + c$.
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

14. $\int shx\, dx = chx + C$.

15. $\int chx\, dx = shx + C$.

16. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

17. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Основні методи інтегрування

1. Зведення інтегралу до алгебраїчної суми табличних за допомогою тотожних перетворень.

Приклад №1. $\int \frac{2x^2+5}{x^2(x^2+5)}dx = \int \frac{x^2+x^2+5}{x^2\cdot(x^2+5)}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2(x^2+5)} + \frac{x^2+5}{x^2(x^2+5)}\right)dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{x^2+5} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x^2+5} + \int x^{-2}dx = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\frac{x}{\sqrt{5}} - x^{-1} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x} + C.$$

2. Метод підстановки (заміна змінної).

Якщо підінтегральну функцію можна подати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких є похідна від другої, або частини другої, тоді ту функцію, від якої є похідна, треба замінити на іншу.

Приклад № 2. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left|(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right|$

Поклавши $\sqrt{x} = t$; $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, дістанемо

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int\cos t dt = 2\sin t + c = 2\sin\sqrt{x} + c$$

3. Метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами:

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du.$$

Метод інтегрування частинами у шуканому інтегралі застосований вірно, якщо $\int \upsilon du$ не складніший, ніж $\int u d\upsilon$.При обчисленні інтегралів розумне поєднання різних методів.

Приклад №3. $\int\frac{x^2 arctgx}{x^2+1}\,dx$.

Доцільно спочатку виконати елементарні перетворення:

$$\int\frac{(x^2+1-1)arctgx}{x^2+1}dx=\int\left(\frac{(x^2+1)arctgx}{x^2+1}-\frac{arctgx}{x^2+1}\right)dx=\int arctgx\,dx-\int\frac{arctgx}{x^2+1}dx=$$

$$=\int arctgx\,dx-\int arctgx\frac{1}{x^2+1}dx$$

Перший інтеграл проінтегруємо частинами, а другий за допомогою заміни змінної. Для першого інтегралу:

$$u=arctgx \qquad du=\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$d\upsilon=dx \qquad \upsilon=x$$

Для другого: $arctgx=t$ $\qquad \frac{1}{x^2+1}dx=dt$

Дістанемо

$$\int\frac{x^2arctgx}{x^2+1}dx=xarctgx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int tdt=\begin{vmatrix}x^2+1=z\\2xdx=dz\end{vmatrix}=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}-\frac{t^2}{2}=$$

$$xarctgx-\frac{1}{2}\ln|z|-\frac{arctg^2x}{2}+c=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{2}arctg^2x+c$$

Перевіримо диференціюванням:

$$\left(xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{2}arctg^2x+c\right)'=x'arctgx+x(arctgx)'-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'-$$

$$-\frac{1}{2}2arctgx(arctgx)'=arctgx+x\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-arctgx\frac{1}{x^2+1}=arctgx-\frac{arctgx}{x^2+1}=$$

$$=arctgx\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}arctgx=\frac{x^2arctgx}{x^2+1}.$$

Отримали підінтегральну функцію, тобто інтегрування здійснено правильно.

<u>Приклад № 4.</u> $\int e^{3x}\cos2x\,dx=\begin{vmatrix}u=e^{3x} & du=3e^{3x}dx\\dv=\cos2x\,dx & v=\frac{1}{2}\sin2x\end{vmatrix}==\frac{1}{2}e^{3x}\sin2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin2x\,dx$

$\int\upsilon\,d\,u$ не складніший, ніж $\int ud\upsilon$, тобто метод інтегрування частинами застосований вірно. Для $\int\upsilon du$ застосуємо ще раз інтегрування частинами.

$$u=e^{3x} \qquad du=3e^{3x}dx$$

$$d\,v=\sin2x\,dx \qquad v=-\frac{1}{2}\cos2x$$

$$\int e^{3x}\cos2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin2x-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos2x\,dx\right)=\frac{1}{2}e^{3x}\sin2x+$$

$$+\frac{3}{4}e^{3x}\cos2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\cos2x\,dx$$

Отримали початковий інтеграл з коефіцієнтом. Розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу.

$$\int e^{3x}\cos2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin2x+\frac{3}{4}e^{3x}\cos2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\cos2x\,dx$$

$$\int e^{3x}\cos2x\,dx+\frac{9}{4}\int e^{3x}\cos2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin2x+\frac{3}{4}e^{3x}\cos2x$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{4}{13}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x\right) + C$$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = e^{3x}\left(\frac{2}{13}\sin 2x + \frac{3}{13}\cos 2x\right) + C$$

Окремо треба розглянути інтегрування раціональних дробів, тобто тих, у яких у чисельнику і знаменнику многочлени.

Задача інтегрування раціональних дробів зводиться до розв'язку таких задач:

а) якщо дріб неправильний, то необхідно виділити цілу частину за допомогою ділення чисельника на знаменник;

б) розкласти знаменник на незвідні множники;

в) представити дріб у вигляді суми елементарних дробів;

г) проінтегрувати елементарні дроби вигляду

$$\frac{A}{x-a};\quad \frac{A}{(x-a)^m};\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m};$$

де m=2,3,....., p^2-4q<0.

<u>Приклад №5.</u> $\int \frac{x^5dx}{x^4-16}$

Підінтегральна функція - неправильний дріб. Виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^4-16 \\ \cline{2-2} -\ x^5-16x & x \\ \hline 16x & \end{array}$$

Отже: $\frac{x^5}{x^4-16} = x + \frac{16x}{x^4-16}$

$$x^4-16=(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\int\frac{x^5dx}{x^4-16} = \int x\,dx + \int\frac{16x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}dx$$

Подамо дріб $\frac{x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$ у вигляді суми елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{16x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Звівши до спільного знаменника, запишемо рівність чисельників;

$$16x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)$$

Два многочлени тотожно рівні тоді, коли є рівні коефіцієнти при невідомих в однакових степенях. Складаємо систему;

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=0 \\ x^2 & 2A-2B+D=0 \\ x & 4A+4B-4C=1 \\ x^0 & 8A-8B-4D=0 \end{array}$$

Розв'язавши яку, дістанемо: $A=1;\quad B=1;\quad C=-2;\quad D=0.$

Таким чином

$$\int \frac{x^5dx}{x^4-1} = \int x\,dx + \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{-2x}{x^2+4} \right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} =$$

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \ln|x+2| - \ln\left|x^2+4\right| + c$$

Ефективним методом інтегрування нераціональних і трансцендентних функцій є метод раціоналізації за допомогою підстановки.

Приклад №6 $\int \frac{\sqrt[3]{2x+5}}{1+\sqrt{2x+5}}dx = \left| \begin{array}{l} 2x+5=t^6 \\ 2dx = 6t^5dt \\ dx = 3t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{1+t^3}3t^5dt = 3\int \frac{t^7}{t^3+1}dt$

Отримали неправильний раціональний дріб.

$$\begin{array}{r|l} t^7 & t^3+1 \\ \cline{2-2} -\underline{t^7+t^4} & t^4-t \\ -t^4 & \\ \underline{-t^4-t} & \\ t & \end{array}$$

$$3\int \frac{t^7dt}{t^3+1} = 3\int \left(t^4 - t + \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} \right)dt = 3\int t^4dt - 3\int t\,dt + \int \frac{3t\,dt}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

$$\frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & A+B=0 \\ t & -A+B+C=1 \\ t^0 & A+C=0 \end{array}$$

$A=-1;;\quad B=1;;\quad C=1.$

$$\int \frac{\sqrt[3]{2x+5}}{1+\sqrt{2x+5}}dx = 3\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^2}{2} + \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1} \right)dt = \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5\ )^5} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{(2x+5)^2} -$$

$$-\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt = \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} - \ln|t+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2t-1+3}{t^2-t+1}dt =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5\ )^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} - \ln\left|\sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} =$$

$$\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} - \ln\left|\sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} - \ln\left|\sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{2x+5} - \sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+5)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} - \ln\left|\sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{2x+5} - \sqrt[6]{2x+5}+1\right| + \sqrt{3}arctg\frac{2\sqrt[6]{2x+5}-1}{\sqrt{3}} + c$$

Приклад №7 $\int \frac{dx}{\sin x+3}=\left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ x=2arctgt \\ dx=\frac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1}\end{array}\right|=\int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+3}\cdot\frac{2dt}{t^2+1}=\int\frac{2dt}{2t+3t^2+3}=$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+1}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+1}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}arctg\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3t+1}{\sqrt{8}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{8}}+c$$

Приклад№8.

$$\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\ dx=2\cos tdt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{\left(4-4\sin^2\right)^3}}{4\sin^2 t}2\cos tdt=\int\frac{\left(\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}\right)^3}{4\sin^2 t}2\cos tdt=$$

$$\int\frac{(2\cos t)^3\cos t}{2\sin^2 t}dt=4\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=4\int\frac{\left(1-\sin^2 t\right)^2}{\sin^2 t}dt=$$

$$=4\int\frac{1-2\sin^2 t+\sin^4 t}{\sin^2 t}dt=4\int\frac{dt}{\sin^2 t}-8\int dt+4\int\sin^2 tdt=-4ctgt+8t+4\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$-4ctgt-8t+2\int(1-\cos 2t)dt=-4ctgt-8t+2t-\sin 2t+c=-4ctgt-6t-2\sin t\cos t+C$$

Врахувавши, що

$\sin t=\frac{x}{2}$; $t=\arcsin\frac{x}{2}$; $\cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$; $ctgt=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$;

$$\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^2}dx=-\frac{4}{x}\sqrt{4-x^2}-\arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{1}{4}x\cdot\sqrt{4-x^2}+c==-\frac{4}{x}\sqrt{4-x^2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}-$$

$$6\arcsin\frac{x}{2}+c$$

Визначений інтеграл

Формула Ньютона–Лейбніца зв’язує визначений і невизначений інтеграли:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a);$$

Де *F(x)* є будь - яка первісна для функції $f(x)$.

Приклад №9.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{\cos^2 x\sin^4 x}=\left|\begin{array}{l}\textit{Здійснемо заміну}\\ tgx=t;\quad \cos^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2x};\quad \sin^2 x=\dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}\\ x=arctgt;\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \textit{Нові границі будуть}\\ tн=tg\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt3}\\ tв=tg\dfrac{\pi}{3}=\sqrt3\end{array}\right|$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}\cdot\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{dt}{t^2+1}=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^4}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}t^{-4}dt+2\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}t^{-2}dt+$$

$$+\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}dt=\left(-\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}=-\frac{1}{9\sqrt3}-\frac{2}{\sqrt3}+\sqrt3-\left(-\frac{3\sqrt3}{3}+2\sqrt3+\frac{1}{\sqrt3}\right)==-\frac{1}{9\sqrt3}-\frac{2}{\sqrt3}+$$

$$+\sqrt3+\sqrt3+2\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}=4\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{1}{9}+2+1\right)=4\sqrt3-\frac{28}{9\sqrt3}=4\sqrt3-\frac{28\sqrt3}{27}=\frac{80\sqrt3}{27}$$

$$=4\sqrt3-\frac{28}{9\sqrt3}=4\sqrt3-\frac{28\sqrt3}{27}=\frac{80\sqrt3}{27};$$

Чисельні методи обчислення інтегралів

Оскільки інтеграли від деяких функцій не є елементарними функціями, а також первісні знайти дуже важко, для обчислення визначених інтегралів використовують чисельні методи.

Однією з основних формул чисельного інтегрування є формула Сімпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left(y_0+y_n+4\left(y_1+y_2+\ldots..+y_{n-1}\right)+2\left(y_2+y_4+\ldots..+y_{n-2}\right)\right),$$

де n – парне, $h=\dfrac{в-a}{n}$.

Приклад №9. Обчислити $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^3+30dx}$, поділивши відрізок на 10 частин.

$n=10;\qquad h=\dfrac{7-(-3)}{10}=\dfrac{10}{10}=1$

$x_0=a=-3;\qquad y_0=\sqrt{(-3)^3+30}=\sqrt{-27+30}=\sqrt3\approx1{,}73205$

$x_1=-3+h=-2;\qquad y_1=\sqrt{(-2)^3+30}=\sqrt{22}\approx4{,}69041$

$x_2 = -2 + h = -1;$ $\quad y_2 = \sqrt{(-1)^3 + 30} = \sqrt{29} \approx 5{,}38516$

$x_3 = -1 + h = 0;$ $\quad y_3 = \sqrt{0 + 30} = \sqrt{30} \approx 5{,}47722$

$x_4 = 0 + h = 1;$ $\quad y_4 = \sqrt{1 + 30} = \sqrt{31} \approx 5{,}56776$

$x_5 = 1 + h = 2;$ $\quad y_5 = \sqrt{2^3 + 30} = \sqrt{38} \approx 6{,}16441$

$x_6 = 2 + h = 3;$ $\quad y_6 = \sqrt{3^3 + 30} = \sqrt{57} \approx 7{,}54983$

$x_7 = 3 + h = 4;$ $\quad y_7 = \sqrt{4^3 + 30} = \sqrt{94} \approx 9{,}69536$

$x_8 = 4 + h = 5;$ $\quad y_8 = \sqrt{125 + 30} = \sqrt{155} \approx 12{,}44989$

$x_9 = 5 + h = 6;$ $\quad y_9 = \sqrt{6^3 + 30} = \sqrt{246} \approx 15{,}68439$

$x_{10} = 6 + h = 7;$ $\quad y_{10} = \sqrt{7^3 + 30} = \sqrt{373} \approx 19{,}31321$

$$\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 30}\,dx \approx \frac{1}{3}(1{,}73205 + 19{,}31321 + 4(4{,}69041 + 5{,}47722 + 6{,}16441 + 9{,}69536 + 15{,}68439) +$$

$$+ 2(5{,}38516 + 5{,}56776 + 7{,}54983 + 12{,}44989) = \frac{1}{3}(21{,}04526 + 4 \cdot 41{,}71179 + 2 \cdot 30{,}95264) =$$

$$= \frac{1}{3}(21{,}04526 + 166{,}84716 + 61{,}90528) \approx 83{,}2659.$$

Невласні інтеграли

1. Інтеграли з нескінченними границями інтегрування. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;+\infty]$, то за визначенням

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо існує границя правої частини, то кажуть, що $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігається, якщо границя не існує, то невласний інтеграл розбігається.

Аналогічно означаються невласні інтеграли на проміжках $(-\infty; a)$; $(-\infty; \infty)$.

Приклад № 11 Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \lim_{в \to +\infty} \int_0^{в} \frac{dx}{x^2 - 4 + 8} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{в} \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \lim_{в \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x-2}{2} \Bigg|_0^{в} = = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{b \to \infty} \left(arctg \frac{b-2}{2} - arctg 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4} \left(arctg \frac{‰ - 2}{2} - arctg 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Інтеграли від необмежених функцій. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; в)$ та $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то за визначенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to +0} \int_a^{b-x} f(x)dx.$$

Якщо існує границя правої частини, то невласний інтеграл збігається, якщо ні - розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$

Коли функція $f(x)$ необмежена в околі точки $c \in (a;b)$, то під інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ розуміють суму двох інтегралів

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

за умови, що кожен з них збігається.

Приклад № 12. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}}$

$f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}}$ неперервна на $[-2;-1)\cup(-1;0]$ і необмежена в околі точки $x=-1$:

$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\alpha\to+0}\int_{-2}^{-1-\alpha}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}} + \lim_{\beta\to+0}\int_{-1+\beta}^{0}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\int_{-2}^{-1-\alpha}(x+1)^{\frac{4}{3}}d(x+1) + \lim_{\beta\to+0}\int_{-1+\beta}^{0}(x+1)^{\frac{4}{3}}d(x+1) = -3\lim_{\alpha\to+0}(x+1)^{\frac{-1}{3}}\Big|_{-2}^{-1-\alpha} -$$

$$-3\lim_{\beta\to+0}(x+1)^{\frac{-1}{3}}\Big|_{-1-\beta}^{0} = -3\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{-\alpha}}+1\right) - 3\lim_{\beta\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\beta}}+1\right).$$

Оскільки $\lim_{\alpha\to+0}, \frac{1}{\sqrt[3]{-\alpha}} = -\infty$, то $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+1}}$ - розбігається.

Приклади застосування визначеного інтеграла

1. Обчислення площ плоских фігур

Фігура, обмежена кривою $y=f(x)$, де функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;в]$, прямими $x=a$, $x=в$ і віссю ox,називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції визначається за формулою

$$S = \int_a^в f(x)dx$$

За площу фігури, обмеженої кривими $y=f(x)$ і $y=g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a;в]$, прямими $x=a$, $x=в$ і віссю ox слід прийняти число

$$S = \int_a^в |f(x)-g(x)|dx .$$

Якщо замкнена крива задана параметрично рівнянням $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, де $\varphi(t)$; $\psi(t)$ - неперервнодиференційовані функції на відрізку $[\alpha;\beta]$, за винятком скінченого числа точок, тоді площа фігури може бути обчислена за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta \varphi\ (t)\cdot\psi\,'(t)dt$$

Сектором кривої $\rho=\rho(\varphi)$ назвемо фігуру, обмежену кривою $\rho=\rho(\varphi)$ в колярних координатах та двома полярними радіусами, проведеними під кутами α і β.

Площа такого сектора, обчисляється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

Приклад № 11.Обчіслити площу петлі листа Декарта $x^3+y^3=3axy$.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$:

$$\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi=3a\rho^2\cos\varphi\ \sin\varphi$$

$$\rho=\frac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi},\ \text{якщо}\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

Знайдемо площу:

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2}d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi d\varphi}{\cos^6\varphi\left(1+tg^3\varphi\right)^2}=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{tg^2\varphi}{\left(1+tg^3\varphi\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

$$==\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1+tg^3\varphi\right)^2}\cdot\frac{3tg^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi=\left|\begin{array}{ll} 1+tg^3\varphi=z;\quad \varphi=0 & \varphi=\frac{\pi}{2}; \\ & tg\frac{\pi}{2}=\infty; \\ \frac{3tg^2\varphi}{\cos^2}d\varphi=dz;\quad z=1; & z=\infty \end{array}\right|==\frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^2}.$$

Отримали невласний інтеграл. Обчислимо його:

$$\frac{3a^2}{2}\int_1^{\infty}\frac{dz}{z^2}=\frac{3a^2}{2}\lim_{в\to\infty}\int_1^{в}\frac{dz}{z^2}-\frac{3a^2}{2}\lim_{в\to\infty}\frac{1}{z}\Bigg|_1^{в}=-\frac{3a^2}{2}\left(\lim_{в\to\infty}\frac{1}{в}-1\right)=\frac{3a^2}{2}$$

$$S=\frac{3a^2}{2}$$

2. Обчислення об'ємів тіл.

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою $y=f(x)$, де функція f неперервна на $[a;в]$, прямими $x=a;\quad x=в$ і віссю ox, обертається навколо осі ox. Тоді об'єм тіла будемо обчислювати за формулою

$$V=\pi\int_a^{в}f^2(x)dx\ .$$

Якщо обертається навколо осі oy, то за формулою

$$V=2\pi\int_a^{в}x\left|f(x)\right|dx\ ,\ (a\ge 0).$$

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та двома полярними радіусами $\varphi=\alpha$; $\varphi=\beta$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання дорівнює: $V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi$.

3.Обчіслення довжини кривих.

Якщо крива на відрізку $[a;в]$ є графіком неперервнодиференційовної функції $y=f(x)$, то довжина кривої знаходиться за формулою

$$L=\int_a^в \sqrt{1+\left(f\ '(x)\right)^2}dx$$

Для функції заданої параметрично рівняннями $x=\varphi(t);\ \ y=\psi(t)$

$$L=\int_a^в \sqrt{\left(\varphi\ '(t)\right)^2+\left(\psi\ '(t)\right)^2}\cdot dt$$

Довжина кривої в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$; $\alpha\le\varphi\le\beta$:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^{\,2}(\varphi)+\left(\rho\ '(\varphi)\right)^2}d\varphi .$$

<u>Приклад № 12.</u> Знайти довжину циклоїди $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a .$$

Рекомендована література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. -М.; Наука, 1970-1985. т.1
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. -М.: Наука ,1969.
3. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа (Под редакцией А.В. Ефимова и П.Б. Демидовича -М.; Наука 1981; 1986.
4. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. Ряди. -К.; Вища школа, 1995.
5. Шкіль М.І. Математичний аналіз. -К; Вища школа, 1994. ч.1.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. -М.: Наука, 1980;1988.
7. Минорский В.П.Сборник задач по высшей математике.-М: Наука ,1987.
8. Данко П.Е., Попов А.Г. ,Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.:Высшая школа, 1980.

Завдання I

Знайти невизначені інтеграли. У перших трьох прикладах результати перевірити за допомогою диференціювання.

1.а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{5-2\cos x}}$; б) $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{x^3-x^2+9x-9}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$; д) $\int ctg^3 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$;

2.а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}dx$; б) $\int x^2 e^{3x}dx$; в) $\int \frac{2x^4-1}{x^3-2x^2+9x-18}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$; д) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$;

3.а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int arctg\frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{3x^4+1}{x^3+x^2+9x+9}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; д) $\int tg^4\frac{x}{2}dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$;

4.а) $\int 5^{3\sin 2x}\cos 2x\,dx$; б) $\int x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx$; в) $\int \frac{4x^4+1}{x^3-x^2+8x-8}dx$;

г) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$; е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$;

5.а) $\int e^{t^2-6t}(t-3)dt$; б) $\int \sin(\ln x)dx$; в) $\int \frac{x^5 dx}{x^3+2x^2+9x+18}$;

г) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; е) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

6.а) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$; б) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{x^3+x^2+8x+8}$;

г) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$;

7.а) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int x^2\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{x^3-2x^2+2x-4}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$; д) $\int \sin^2 x\cos 2x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$;

8.а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x^3\sin x\,dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{x^3-2x^2+5x-10}$;

г) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x+2}\right)\sqrt{x+2}}$; д) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$; е) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

9.а) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}}dx$; в) $\int \frac{3x^4-1}{x^3+2x^2+5x+10}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x-3}}{1+\sqrt[3]{x-3}}dx$; д) $\int \frac{dx}{3\sin+4\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

10.а) $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx;$ б) $\int \left(x^2-1\right)e^{-x}dx;$ в) $\int \frac{x^4+3}{x^3-2x^2+6x-12}dx;$

г) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx;$ д) $\int tg^4 3x\,dx;$ е) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx;$

11.а) $\int \frac{\ln^3 x+3}{x\ln x}dx;$ б) $\int x^2 arctgx\,dx;$ в) $\int \frac{3x^4+2}{x^3+2x^2+6x+12}dx;$

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{3x+2}};$ д) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x};$ е) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}};$

12)а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}};$ б) $\int \cos(\ln x)dx;$ в) $\int \frac{x^5dx}{x^3-3x^2+5x-15};$

г) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx;$ д) $\int \frac{dx}{\cos^4 x};$ е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}};$

13.а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx;$ б) $\int x\ln^2 x\,dx;$ в) $\int \frac{x^3+3}{x^3+3x^2+5x+15}dx;$

г) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx;$ д) $\int \frac{dx}{5+3\cos x};$ е) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}};$

14)а) $\int \frac{\left(e^x+1\right)e^x}{e^{2x}+4}dx;$ б) $\int x^2 3^x\,dx;$ в) $\int \frac{x^4+7}{x^3-3x^2+6x-18}dx;$

г) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}};$ д) $\int \sin^5 x\cos x\,dx;$ е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}};$

15.а) $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx;$ б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx;$ в) $\int \frac{x^4dx}{x^3+3x^2+6x+18};$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)};$ д) $\int \frac{dx}{3-5\cos x};$ е) $\int \frac{x^2dx}{\left(4+x^2\right)^2};$

16.а) $\int \frac{e^x dx}{e^x+5};$ б) $\int \cos 3x\,e^{2x}dx;$ в) $\int \frac{x^4dx}{x^3+x^2+4x+4};$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}};$ д) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx;$ е) $\int \sqrt{4-x^2}dx;$

17 а) $\int x^2e^{x^3}dx;$ б) $\int e^{-x}\sin 5x\,dx;$ в) $\int \frac{x^4+3}{x^3-2x^2+4x-8}dx;$

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{2x+5}};$ д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x};$ е) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx;$

18.а) $\int \frac{x+arctgx}{1+x^2}dx;$ б) $\int x\sin 2x\,dx;$ в) $\int \frac{x^5}{x^3+2x^2+4x+8}dx;$

г) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx;$ д) $\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx;$ е) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}};$

19.а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3 x};$ б) $\int x^3\ln x\,dx;$ в) $\int \frac{x^4+3}{x^3-x^2+5x-5}dx;$

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}};$ д) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^3\frac{x}{4}dx;$ е) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx;$

20.а) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+x^{10}}}$; б) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; в) $\int \frac{x^5dx}{x^3-x^2+5x-5}$;

г) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x}-1}dx$; д) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$; е) $\int \frac{x^3xd}{\sqrt{1-x^2}}$;

21.а) $\int t\cdot\sqrt[3]{5+t^2}dt$; б) $\int \arcsin\sqrt{x}dx$; в) $\int \frac{x^4}{x^3+x^2+5x+5}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^2 x}$; е) $\int x^3\sqrt{4-x^2dx}$;

22.а) $\int x^2\sqrt[5]{5-x^3dx}$; б) $\int \arccos\sqrt{x}dx$; в) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+6x-6}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x-3}}{1+\sqrt[3]{x-3}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$;

23.а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)arctgx}}$; б) $\int (1-\ln x)^2dx$; в) $\int \frac{2x^4+7}{x^3+x^2+6x+6}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$;

24.а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$; б) $\int x\,arctgx\,dx$; в) $\int \frac{x^4+5}{x^3-x^2+4x-4}dx$;

г) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$;

25.а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{x^4+7}{x^3+3x^2+x+3}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}+\sqrt[3]{3x-1}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$; е) $\int \frac{x^2dx}{(9-x^2)^2}$;

26.а) $\int \frac{\sin 3x\,dx}{7-5\cos 3x}$; б) $\int \frac{\ln x}{x^5}dx$; в) $\int \frac{x^4dx}{x^3-3x^2+x-3}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}+1}dx$; д) $\int \frac{dx}{5+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$;

27.а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3+tgx)}$; б) $\int \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}dx$; в) $\int \frac{x^5dx}{x^3+2x^2+x+2}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x+3}-1}dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos x+4}$; е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$;

28.а) $\int \frac{\sqrt{arctgx}\,dx}{1+x^2}$; б) $\int \ln(1+x^2)dx$; в) $\int \frac{x^4+3}{x^3-2x^2+x-2}dx$;

г) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt{x-4}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$; е) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

29)а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$; б) $\int x^3\sin^2 x\,dx$; в) $\int \frac{x^4dx}{x^3+x^2+3x+3}$;

г) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$;

30.а) $\int 2^{arctg 2x}\frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int (x^2+1)e^{3x}dx$; в) $\int \frac{x^5 dx}{x^3-x^2+3x-3}$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x+1}}dx$; д) $\int \frac{\sin x}{5+\sin x}dx$; е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

Завдання II

За допомогою формули Ньютона - Лейбніца, обчислити інтеграли:

1)а) $\int_1^8 \frac{7}{2}x\sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int_0^{\pi^2/16} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int_0^1 x e^{3x}dx$;

2.а) $\int_0^8 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)dx$ б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$; в) $\int x\ln(1+x^2)dx$;

3.а) $\int_1^4 \left(2x-\frac{9}{2}\sqrt{x}-\frac{8}{x^2}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/4} e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$; в) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

4.а) $\int_1^3 2^x(2^x+1)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int_0^1 x\,arctgx\,dx$;

5.а) $\int_0^3 (\cos x-5^x)dx$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\cos t}\sin t\,dt$; в) $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx$;

6.а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} ctg^2 x\,dx$; б) $\int_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^3 dx}{(1-x^4)^2}dx$; в) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$;

7.а) $\int_0^{\pi/4} (e^{-x}-tg^2 x)dx$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x}+l dx$; в) $\int_0^{0.5} \arcsin x\,dx$;

8 а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x\cos 7x\,dx$ б) $\int_0^{\pi/2} 12^{\sin x}\cos x\,dx$ в) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$

9 а) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ б) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ в) $\int_{-\pi}^{\pi} (x+1)\cos 2x\,dx$

10 а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ в) $\int_0^1 arctgx\,dx$

11 а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ б) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}dx$ в) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$

12 а) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ в) $\int_2^3 (3-x)e^x dx$

13 а) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\cos 7x\,dx$ б) $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{3^x\,dx}{1+9^x}$ в) $\int_{-2}^{2} (1-x)\sin\pi x\,dx$

14 а) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\sin 4x\,dx$ б) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$ в) $\int_{-1}^{0} \arccos x\,dx$

15 а) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ б) $\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ в) $\int_{1}^{e^2} \ln^2 x\,dx$

16 а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} tg^2 x\,dx$ б) $\int_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ в) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{6x}{\sin^2 x}dx$

17 а) $\int_{0}^{\pi/4} \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ б) $\int_{15}^{99} \frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}$ в) $\int_{1}^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x\,dx$

18 а) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+6x+10}$ б) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ в) $\int_{0}^{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$

19 а) $\int_{-1.5}^{0} \frac{dx}{4x^2+9}$ б) $\int_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$ в) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2-x)\sin 3x\,dx$

20 а) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\sin 3x+\cos\frac{x}{3}\right)dx$ б) $\int_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ в) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$

21 а) $\int_{0}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_{1}^{2} \frac{2^x\,dx}{1-4^x}$ в) $\int_{0}^{5} x e^x\,dx$

22 а) $\int_{1}^{4} \left(2x+\frac{9}{2}\sqrt{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx$ б) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{ctgx}}$ в) $\int_{0}^{3} \ln(x+3)dx$

23 а) $\int_{1}^{2} \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$ б) $\int_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{1+x^3}$ в) $\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$

24 а) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)dx$ б) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}}$ в) $\int_{0}^{1} x e^{2x}\,dx$

25 а) $\int_{0}^{16} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ б) $\int_{0}^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$ в) $\int_{0}^{1} \arcsin^2 x\,dx$

26 а) $\int_{-3/2}^{0} (4+6x)^3\,dx$ б) $\int_{0}^{\pi/4} 7^{\sin 2x}\cos 2x\,dx$ в) $\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\,dx$

27 а) $\int_{\pi}^{0} \sin\frac{5x-\pi}{4}dx$ б) $\int_{9}^{16} \frac{3^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}dx$ в) $\int_{1}^{2} x\ln(x+1)dx$

28 а) $\int_{1}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ б) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$ в) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$

29 а) $\int_{-7}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ б) $\int_{1}^{9} \frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$ в) $\int_{1}^{e} \sqrt[4]{x}\ln x\,dx$

30 а) $\int_{8}^{7} \sqrt{t-7}\,dt$ б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$ в) $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx$

Завдання III.

Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, за формулою Сімпсона, поділив відрізок $[a;в]$ на 10 частин. Усі проміжні обчислення виконувати з трьома знаками після коми:

1) $\int_1^2 \sqrt[3]{3+x^2}\,dx$

2) $\int_0^1 \sqrt{1+2x^3}\,dx$

3) $\int_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2}\,dx$

4) $\int_{0.1}^{1.1} \sqrt{4-x^3}\,dx$

5) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$

6) $\int_{0.6}^{1.6} \sqrt{x+x^3}\,dx$

7) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

8) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

9) $\int_{0.2}^{1.2} \sqrt{3-x^3}\,dx$

10) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

11) $\int_{1.3}^{2.3} \sqrt{5+x^3}\,dx$

12) $\int_{0.3}^{1.3} \sqrt{3+2x^3}\,dx$

13) $\int_0^1 \sqrt[3]{4+3x^2}\,dx$

14) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16}\,dx$

15) $\int_{-1}^0 \sqrt{x^3+2}\,dx$

16) $\int_0^{10} \sqrt{3x^3+2}\,dx$

17) $\int_{-3}^7 \sqrt[3]{x^2+5}\,dx$

18) $\int_{-6}^4 \sqrt[3]{2x^2+4}\,dx$

19) $\int_{-1}^9 \sqrt{4x^3+7}\,dx$

20) $\int_{0.9}^{1.9} \sqrt{3x^3+2}\,dx$

21) $\int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3}\,dx$

22) $\int_{-1}^0 \sqrt{3x^3+5}\,dx$

23) $\int_{-1}^1 \sqrt{9+2x^3}\,dx$

24) $\int_{0.5}^{1.5} \sqrt{x^3+2}\,dx$

25) $\int_{-1}^9 \sqrt{4x^3+14}\,dx$

26) $\int_{1.2}^{2.2} \sqrt{x^3+7}\,dx$

27) $\int_{-2}^0 \sqrt[3]{3x^2+5}\,dx$

28) $\int_{-3}^7 \sqrt{3x^4+2}\,dx$

29) $\int_{-5}^5 \sqrt{x^4+2}\,dx$

30) $\int_{-2}^0 \sqrt{x^4+5}\,dx$

Завдання IV.

Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

1) $\int_0^\infty x e^{-3x}\,dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$

4) $\int_{-\infty}^\infty x e^{x}\,dx$

5) $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

6) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

7) $\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{x\,dx}{x^4+9}$

8) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$

9) $\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$

10) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

11) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$

12) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$

13) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+10}$

14) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

15) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^5 x}$

16) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

17) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$

18) $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

19) $\int_1^\infty x e^{-x^2}\,dx$

20) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+6x+10}$

21) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$

22) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

23) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

24) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

25) $\int_0^1 x\ln x\,dx$

26) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

27) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+2)^2}$

28) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

29) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

30) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Завдання V

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. а) $y=4x-x^2$; $x=2$; $y=0$. б) $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$

2. а) $y=2\sqrt{x}$; $x=0$; $y=6$ б) $\begin{cases} x=7\cos^3 t \\ y=7\sin^3 t \end{cases}$

3) $y=x^2-2x+3$; $y=3x-1$; б) $\rho=4\cos 3\varphi$

4) $y=4x-x^2$; $y=x$ б) $\rho=3\cos 2\varphi$

5) $y=6/x$; $y+x=7$; б) $\rho=2(1-\cos\varphi)$

6) $2x-y+1=0$; $y=-x^2+4$ б) $\rho^2=2\sin 2\varphi$

7) $y^2=9-x$; $y^2=x+1$; б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$; $0\le t\le 2\pi$

8) $xy=4$; $x+y=5$ б) $\rho=2(1+\cos\varphi)$

9) $y=x^3$; $y=4x$; б) $\rho=2\sin 3\varphi$

10) $y=\frac{2}{1+x^2}$; $y=x^2$ б) $\rho=2+\cos\varphi$

11) $y^2=16-8x$; $y^2=24x+48$; б) $\rho=4\sin^2\varphi$

12) $y=e^{-2x}$; $x=-\frac{1}{2}$; $x=1$; $y=0$ б) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$

13) $x=\sqrt{y}$; $y=1$; $y=4$; $x=0$; б) $\rho=3\sin 4\varphi$

14) $y=e^x-1$; $x=2$; $y=0$ б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

15) $y=5-x^2$; $y=x-1$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$

16) $xy=3$; $x+y=4$ б) $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$

17) $y=\frac{1}{2}x^2$; $4x-2y+5=0$; б) $\rho=3\cos\varphi$

18) $y=3x-x^2$; $5x-y-8=0$ б) $\begin{cases} x=5\cos^2 t \\ e=5\sin^2 t \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

19) $y=\frac{x^2}{2}$; $y=\frac{1}{x^2+1}$; б) $\rho=3\sin\varphi$

20) $y=\ln x$; $x=e$; $x=e^2$; $y=0$ б) $\rho=5(1+\cos\varphi)$

21) $y^2=4x$; $x^2=4y$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$

22) $y=x^2+2x$; $y-x=2$ б) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=3+\sin t \end{cases}$

23) $x^2+y^2=8$; $y^2=2x$; $x\ge 0$; б) $\rho^2=4\cos 2\varphi$

24) $y=-4x^3$; $y=-x$ б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3+\sin t \end{cases}$

25) $x^2+y^2=2$; $y=x^2$; $y\ge 0$; б) $\rho=4\sin\varphi$

26)$y^2=9x$; $y=x$ б) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2+\sin t \end{cases}$

27)$y=\cos x$ $y=x-\frac{\pi}{2}$; $x=0$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3+2\sin t \end{cases}$

28)$y=x^3$; $y=1$; $y=8$; $x=0$ б) $\rho^2=9\cos 2\varphi$

29)$y=x^2$; $x=y^2$; б) $\rho=3+\cos 4\varphi$

30)$y=2x^2$; $y=x^3$ б) $\rho=1-\cos 4\varphi$

Завдання VI

Знайти довжину дуги кривої

1. $y=1-\ln\cos x$; $0\le x\le\frac{\pi}{6}$
2. $\rho=6\cos^3\left(\varphi/4\right)$; $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
3. $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t); \\ y=2(\sin t-t\cos t); \end{cases}$ $0\le t\le\pi$
4. $y^2=(x+1)^3$; $1<x<4$
5. $\begin{cases} y=5\sin^2 t; \\ x=5\cos^2 t; \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$
6. $\begin{cases} x=9(t-\sin t); \\ y=9(1-\cos t); \end{cases}$ $4\pi\le t\le 6\pi$
7. $\rho=3\cos\varphi$
8. $y^2=x^3$ $0\le x\le 4$
9 $\begin{cases} x=4\cos^3 t; \\ y=4\sin^3 t; \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
10. $e=l^{\frac{x}{2}}+l^{-\frac{x}{2}}$ $0\le x\le 2$
11. $\begin{cases} x=7(t-\sin t); \\ y=7(1-\cos t); \end{cases}$ $2\pi\le t\le 4\pi$
12 $\rho=5\sin\varphi$
13. $y^2=(x-1)^3$ $2\le x\le 5$
14. $\rho=5(1+\cos\varphi)$
15. $\rho=4\cos\varphi$
16. $y=\ln\sin x$ $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$
17. $y=\ln x$
$\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$
18. $\rho=5(1-\cos\varphi)$
19. $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-4t+2 \end{cases}$ $0\le t\le 1$
20. $\begin{cases} x=t^2-t+1 \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$ $0\le t\le 1$
21. $\rho=\sin^3\left(\varphi/3\right)$ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
22. $\rho=3(1-\cos\varphi)$
23. $\begin{cases} x=8t^3 \\ y=6t^2-3t^4 \end{cases}$ $0\le t\le\sqrt{2}$
24. $\rho=4(1+\cos\varphi)$
25. $\begin{cases} x=6-3t^2 \\ y=4t^3 \end{cases}$ $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$
26. $y=2\left(\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^x-1}\right)$ $0\le x\le 2$
27. $\rho=\frac{2}{1+\cos\varphi}$ $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
28. $\begin{cases} x=\frac{2-t}{2+t} \\ y=\frac{t}{2+t} \end{cases}$ $1\le t\le 2$
29. $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2$
30. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ $0\le x\le\frac{9}{16}$

Завдання VII

Обчислити об’єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої лініями, навколо вказанної осі.

1. $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t) \end{cases}$; ox
2. $y^2=4-x$; $x=0$; oy
3. $y^2=x$; $x^2=y$; ox

4. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ oy

5. $y^2 = (x-1)^3;\quad x = 2;\quad ox$

6. $y = \sin x;\quad y = 0;\quad ox$

7. $y^2 = 4x;\quad x^2 = 4y;\quad ox$

8. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases};\quad oy$

9. $y = x^2;\quad 8x = y^2;\quad oy$

10. $\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases};\quad oy$

11. $y = e^x;\quad x = 0;\quad y = 0;\quad x = 1;\quad ox$

12. $y^2 = 4 x/3;\quad x = 3;\quad ox$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases};\quad oy$

14. $y = 2x - x^2;\quad y = 0;\quad ox$

15 $xy = 4;\quad 2x + y - 6 = 0;\quad ox$

16. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases};\ ox$

17. $\rho = 2\cos\varphi;$ полярна вісь.

18. $y = 2 - x^2;\quad y = x^2;\quad ox$

19. $y = -x^2 + 8;\quad y = x^2;\quad ox$

20. $y = x^3;\quad x = 0;\quad y = 8;\quad oy$

21. $2y = x^2;\quad 2x + 2y - 3 = 0;\quad ox$

22. $y = x - x^2;\quad y = 0;\quad ox$

23. $y = 2 - x^2/2;\quad x + y = 2;\quad oy$

24. $x^2 = 4 + y;\quad y = 2;\quad oy$

25. $y = x^2/2;\quad y = 3/2;\quad oy$

26. $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi};$ полярна вісь

27. $y = \sqrt{x};\quad y = x;\quad ox$

28. $y = x^3/3;\quad -1 \le x \le 1;\quad ox$

29. $y^2 = 4 + x;\quad x = 2;\quad ox$

30. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases};\quad 0 \le t \le 2\pi;\quad ox$