№1545

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання з дисципліни
«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Харків – 2012

Завдання і методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 11 жовтня 2010 р., протокол № 2.

Методичні вказівки призначені для студентів загально-технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Укладачі:

старші викладачі О.В. Рибачук, Ю.С. Шувалова

Рецензент

проф. Ю.В. Куліш

ВСТУП

Ці методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики – диференціальному численню функцій декількох змінних і його застосуванням. Методичні вказівки містять у мінімальному обсязі виклад вузлових розділів теми, який може бути використаний для першого ознайомлення з матеріалом перед читанням підручника. Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. Приклади з розгорнутими поясненнями допоможуть при виконанні контрольних (розрахунково-графічних) робіт. Корисно для закріплення навичок, крім свого варіанта, виконати завдання ще одного варіанта.

Методичні вказівки також містять список навчальної літератури і завдання контрольної роботи. Номер варіанта контрольної роботи видається викладачем. Залік контрольних (розрахунково-графічних) робіт згідно з навчальною програмою є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики. Робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не зараховується.

ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Нехай D – довільна множина точок на площині $\mathbf{R}^2$. Якщо кожній точці $P \in D$ поставлено у відповідність за деяким правилом "f" число z, то говорять, що на множині D ***задана функція*** $z = f(P)$. Оскільки кожна точка однозначно визначається своїми координатами, то $z = f(x;y)$, $D \in \mathbf{R}^2$, і ми приходимо до поняття ***функції двох змінних***. Множина D називається ***областю визначення функції***, а x, y – ***незалежними змінними***.

Аналогічно визначається поняття функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$ (якщо $D \in \mathbf{R}^3$).

Функція двох змінних $z = f(x;y)$ має геометричне зображення – ***графік***, який складається з усіх точок $(x;y;z) \in \mathrm{R}^3$ таких, що $(x;y) \in D$, а $z = f(x;y)$. Як правило, графік функції – деяка поверхня (рисунок 1). Функція повністю визначається своїм графіком.

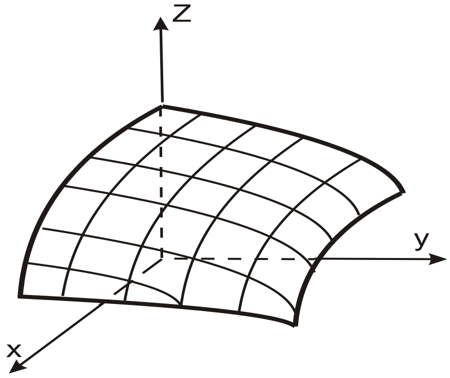

Рисунок 1

Приклади:

а) графіком функції $f(x, y) = ax + by + c$ буде площина $z = ax + bx + c$;

б) графіком функції $f(x, y) = x^2 + y^2$ буде параболоїд $z = x^2 + y^2$ (рисунок 2);

в) графіком функції $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ буде поверхня порожнина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рисунок 3);

г) графіком функції $f(x, y) = y^2 - x^2$ буде сідло (гіперболічний параболоїд) $z = y^2 - x^2$ (рисунок 4).

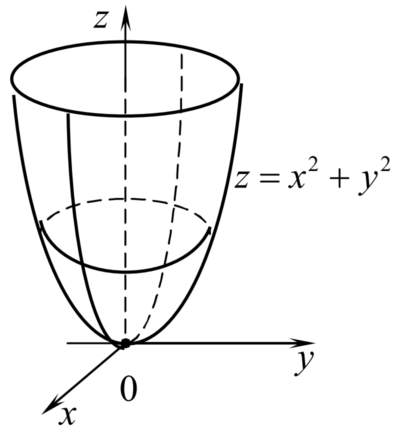

Рисунок 2

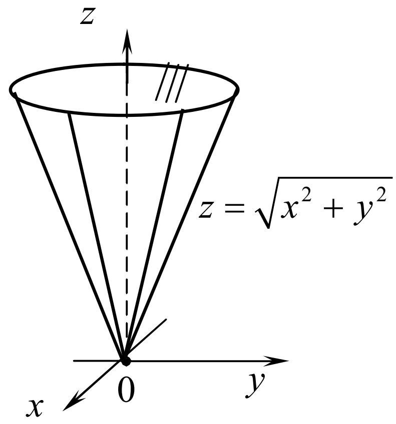

Рисунок 3

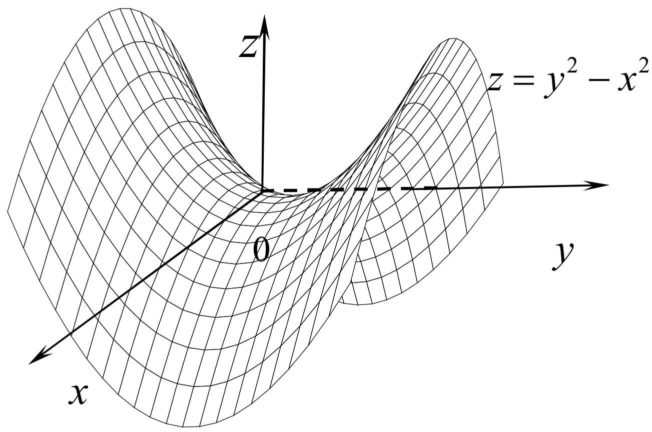

Рисунок 4

ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $z = f(P) = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки P_0.

Околом точки $P_0(x_0; y_0) \in \mathrm{R}^2$ називається будь-яке коло з центром у точці P_0, а ***околом точки*** $P_0(x_0; y_0; z_0) \in \mathrm{R}^3$ – будь-яка куля радіуса δ з центром у точці P_0.

Позначимо через $\rho(P_0;P)$ відстань між точками $P_0(x_0;y_0)$ та $P(x;y)$,

$$\rho(P_0;P)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,.$$

Говорять, що ***точка P наближається до точки*** P_0 $(P\to P_0)$, якщо в процесі зміни координат точки $P(x;y)$ $\rho(P_0;P)\to 0$, що можливо тоді і тільки тоді, коли одночасно $x\to 0,\ y\to 0$.

Число В називається ***границею*** функції $z=f(P)$ при $P\to P_0$

$$B=\lim_{P\to P_0} f(x;y)=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x;y),$$

якщо $|B-F(P)|\to 0$, *коли* $\rho(P_0;P)\to 0$.

Функція $z=f(x;y)$ називається ***неперервною в точці P_o***, якщо визначено значення $f(P_0)=f(x_0;y_0)$ і

$$\lim_{P\to P_0} f(x;y)=f(x_0;y_0).$$

Функція називається ***неперервною в області*** $D\subset \boldsymbol{R^2}$, якщо вона неперервна в кожній точці області D.

Визначення границі та неперервності функції декількох змінних аналогічні цим поняттям для функції однієї змінної. Тому справедливі всі правила граничного переходу та всі елементарні функції декількох змінних неперервні у своїх природних областях визначення. Отже, можна переходити до границі під знаком функції, якщо ця функція елементарна і визначена в деякому околі граничної точки.

Приклади:

а) $\lim\limits_{x\to 0,\,y\to 1}\dfrac{(x+1)\ln(x+2y)}{\cos(xy)}=\dfrac{(0+1)\ln 2}{\cos 0}=\ln 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0,\,y\to 0}\dfrac{1}{x^2+y^2}=+\infty$.

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Нехай $z = f(x;y)$ – функція двох змінних. Зафіксуємо одну із змінних, наприклад *y*, а другій надамо приріст Δx. ***Частинним приростом*** функції за змінною *x* називається величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$. Аналогічно визначається частинний приріст за змінною у: $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y)$.

Якщо приріст отримують обидві незалежні змінні, то різниця $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ називається ***повним приростом*** функції.

Частинною похідною від функції двох змінних $z = f(x;y)$ ***за змінною x*** (позначається $z_x' = f_x'$ або $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$) називається границя (якщо вона існує та скінченна) відношення частинного приросту функції за змінною х до приросту цієї змінної Δx при умові $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

тобто похідна цієї функції, обчислена в припущенні, що інша змінна у фіксована.

Аналогічно визначається ***частинна похідна за y*** (*x* вважаємо фіксованим):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Приклади:

а) $z = x^2 + 3xy - 4y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_x'\Big|_{y=const} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y=const} = (x^2)_x' + 3y(x)_x' + (4y^2)_x' = 2x + 3y\cdot 1 + 0 = 2x + 3y,$$

$$z_y'\Big|_{x=const} = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=const} = (x^2)_y' + 3x(y)_y' + (4y^2)_y' = 0 + 3x\cdot 1 + 8y = 3x + 8y.$$

б) знайти частинні похідні функцій $z = 5^{xy^3} + \frac{7}{x^2}$ у точці $(1;-1)$.

$$z_x' \Big|_{y=const} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = \left(5^{xy^3}\right)_x' + \left(\frac{7}{x^2}\right)_x' = 5^{xy^3} \cdot \ln 5 \cdot y^3 - \frac{14}{x^3};$$

$$z_x'(1;-1) = 5^{-1}\ln 5(-1) - 14 = -\frac{\ln 5}{5} - 14;$$

$$z_y'\Big|_{x=const} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = \left(5^{xy^3}\right)_y' + \left(\frac{7}{x^2}\right)_y' = 5^{xy^3} \cdot \ln 5 \cdot 3xy^2;$$

$$z_y'(1;-1) = \frac{3\ln 5}{5};$$

в) знайти частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^3}$.

$$z_x' \Big|_{y=const} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}, \qquad z_y'\Big|_{x=const} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}$$

Частинні похідні функцій більш ніж двох змінних обчислюються в припущенні, що всі змінні фіксовані, окрім однієї, за якою і обчислюється похідна.

Приклад: $u = \dfrac{x^2\sqrt{y}}{z} \Rightarrow$

$$u_x' \Big|_{\substack{y=const,\\ z=const}} = \left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right)_x' = \frac{\sqrt{y}}{z}\left(x^2\right)_x' = \frac{2x\sqrt{y}}{z},$$

$$u_y' \Big|_{\substack{x=const,\\ z=const}} = \left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right)_y' = \frac{x^2}{z}(\sqrt{y})_y' = \frac{x^2}{2z\sqrt{y}},$$

$$u_z' \Big|_{\substack{y=const,\\ x=const}} = \left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right)_z' = x^2\sqrt{y}(z^{-1})_z' = -x^2\sqrt{y}\,z^{-2} = \frac{-x^2\sqrt{y}}{z^2}.$$

ДИФЕРЕНЦІАЛ

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в околі точки $P_0(x;y)$, точка $P(x+\Delta x; y+\Delta y)$ лежить в цьому околі та $\rho = \rho(P_0;P)$ – відстань між точками P_0 і P.

Якщо повний приріст $\Delta f = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ функції $z = f(x;y)$ між точками P_0 та P може бути подано у вигляді

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(\rho)\rho,$$

де $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ обчислюються в точці P_0, а $\varepsilon(\rho)$– нескінченно мала, коли $\rho \to 0$ (тобто коли $P \to P_0$), то функція $f(x;y)$ називається ***диференційовною*** в точці P_0, а вираз

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (1)$$

називається повним ***диференціалом*** функції $f(x;y)$.

Оскільки прирости незалежних змінних x, y збігаються з їх диференціалами $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

ТЕОРЕМА. *Достатня умова диференційовності.*
Якщо функція $z = f(x;y)$ має в деякій області $D \subset \mathrm{R}^2$ неперервні частинні похідні $z_x{}' = f_x{}'(x;y)$ й $z_y{}' = f_y{}'(x;y)$, то вона в цій області диференційовна.

Такі функції називаються ***неперервно диференційовними***.

Для функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$ повний диференціал дорівнює

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\,. \qquad (2)$$

Приклади: Знайти повний диференціал функції:
а) $u = (x^3 + 2x^2 y - 3y)\sin z$.

Обчислимо частинні похідні

$$u'_x = (3x^2 + 4xy)\sin z, \quad u'_y = (2x^2 - 3)\sin z, \; u'_z = (x^3 + 2x^2 y - 3y)\cos z .$$

Частинні похідні неперервні при всіх (*x; y; z*), тому за достатньою умовою диференційовності функція диференційовна в кожній точці площини і її повний диференціал за формулою (2) дорівнює:

$$du = (3x^2 + 4xy)\sin z dx + (2x^2 - 3)\sin z dy + (x^3 + 2x^2 y - 3y)\cos z dz.$$

б) $z = \log_2(4x - 2y)$.

Обчислимо частинні похідні

$$z'_x = \frac{4}{(4x-2y)\ln 2}; \; z'_y = \frac{-2}{(4x-2y)\ln 2}.$$

Повний диференціал $dz = \dfrac{4dx - 2dy}{(4x-2y)\ln 2}$.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА У НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ

Для диференційовної в точці $Ì_0(x_0; y_0)$ функції $f(x, y)$ існує наближена рівність

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0) \;\; \Leftrightarrow f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) \qquad (3)$$

Приклади:

а) обчислити наближено $1.02^{4.05}$.

Розглянемо функцію $z = x^y$ та обчислимо її частинні похідні

$$z'_x = yx^{y-1}, \; z'_y = x^y \ln x .$$

Обчислимо значення $z = x^y$ та її частинних похідних у точці A(1;4)

$$z(A) = 1^4 = 1, \; z'_x(A) = 4 \cdot 1^3 = 4, \; z'_y(A) = 1^4 \ln 1 = 0 .$$

Отже, використовуючи формули (3), (1) та вважаючи прирости $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,05$, маємо

$$1,02^{4,05} = f\left(1,02;\ 4,05\right) \approx 1 + 4 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,05 = 1,08.$$

б) для функції $z = 2x^2 + xy - 5y^2 + 7y$ обчислити наближене значення $\overline{z}_1$ функції в точці $B(1,01;-2,97)$, спираючись на значення z_0 функції в точці $A(1;-3)$, замінивши приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом.

Обчислимо частинні похідні

$$z'_x = 4x + y,\ z'_y = x - 10y + 7.$$

Обчислимо значення функції z_0 та значення частинних похідних у точці А

$$z(A) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3)^2 + 7 \cdot (-3) = 2 - 3 - 45 - 21 = -67,$$
$$z'_x = 4 \cdot 1 - 3 = 1,\ z'_y = 1 - 10 \cdot (-3) + 7 = 38.$$

Оскільки прирости незалежних змінних при переході від точки А до точки В дорівнюють $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$, то за формулами (1) та (3) маємо

$$\overline{z}_1 = z(B) \approx -67 + 1 \cdot 0,01 + 38 \cdot 0,03 = -65,85.$$

Зауваження. Усі вимірювання фізичних величин пов’язані з похибками. Припустимо, що величини x та y виміряні з максимальними абсолютними похибками δx і δy відповідно. Це означає, що в експерименті отримані такі результати: $x = x_0 \pm \delta x,\ y = y_0 \pm \delta y$. Потрібно за цими даними отримати формулу для обчислення максимальної абсолютної похибки при непрямому вимірюванні величини $f\left(x, y\right)$. Припустимо, що Δx і Δy істинні похибки при вимірюванні величин x і y. Оскільки $\left|\Delta x\right| \le \delta x,\quad \left|\Delta y\right| \le \delta y$, то

$$\left|\Delta f\left(x_0, y_0\right)\right| \approx \left|df\left(x_0, y_0\right)\right| \le \left|f'_x\left(x_0, y_0\right)\right|\left|\Delta x\right| + \left|f'_y\left(x_0, y_0\right)\right|\left|\Delta y\right| \le$$
$$\le \left|f'_x\left(x_0, y_0\right)\right|\delta x + \left|f'_y\left(x_0, y_0\right)\right|\delta y$$

і природно визначати ***максимальну абсолютну похибку*** величини $f\left(x, y\right)$ таким чином:

$$\delta f = \left|f'_x\left(x_0, y_0\right)\right|\delta x + \left|f'_y\left(x_0, y_0\right)\right|\delta y .$$

Отже, при непрямому вимірюванні величини $f\left(x, y\right)$ маємо

$$f\left(x, y\right) = f\left(x_0, y_0\right) \pm \delta f .$$

ПОХІДНІ СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

✓ Нехай $z = f(u;v)$, де $u = u(x),\ v = v(x)$, тобто $z = f(u(x);v(x)) = g(x)$ – складна функція однієї змінної x. Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} . \tag{4}$$

Приклад

а) $z = (\sin x)^{tgx} = u^v$, де $u = \sin x,\ v = \operatorname{tg} x$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

$\frac{\partial z}{\partial u} = (u^v)'_u = vu^{v-1}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = (u^v)'_v = u^v \ln u$, за формулою (4) маємо

$$\frac{dz}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right) =$$

$$= (\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\cos x + \ln(\sin x)\frac{1}{\cos^2 x}\right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(1 + \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\right).$$

✓ Нехай $z = f(u;v)$, де $u = u(x;y),\ v = v(x;y)$, тобто $z = f(u(x;y);v(x;y)) = g(x;y)$ – складна функція двох змінних. Тоді її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} . \tag{5}$$

Приклади. Знайти частинні похідні складних функцій:

а) $z = \sin xy \cos\frac{y}{x} = \sin u \cos v$, де $u = xy,\ v = \frac{y}{x}$. Обчислимо $\frac{\partial z}{\partial x}$.

За першою з формул (5) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\sin u\cdot\cos v)'_u\frac{\partial u}{\partial x}+(\sin u\cdot\cos v)'_v\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=\cos u\cdot\cos v\cdot y-\sin u\cdot\sin v(-yx^{-2})=y\cdot\cos xy\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin xy\sin\frac{y}{x}.$$

Обчисліть $\partial z/\partial y$ самостійно.

б) $z=x^3+2y^2$, де $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$;

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=3x^2\cdot v+4y\cdot\frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=3x^2\cdot u+4y\left(-\frac{u}{v^2}\right),\text{ де } x=uv,\ y=\frac{u}{v}.$$

в) $z=\ln\left(3y+2x^2\right)$, де $x=u^2$, $y=\frac{1}{1-u}$;

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du}=\frac{4x}{3y+2x^2}\cdot 2u+\frac{3}{2x^2+3y}\cdot\frac{1}{\left(1-u\right)^2},\text{ де } x=u^2,$$

$$y=\frac{1}{1-u};$$

г) $z=arctg\sqrt{x}$, де $x=u^2-v^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{u}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-v}{\sqrt{x}\left(1+x\right)},\text{ де } x=u^2-v^2.$$

✓ Формули (4), (5) легко розповсюджуються на випадки функцій більш ніж двох змінних. Наприклад, якщо $z=f(u;v;w)$, де $u=u(x),\ v=v(x),\ w=w(x)$, тоді

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо функцію $z = f(x;y)$. Її частинні похідні $z_x' = f_x'(x;y)$ й $z_y' = f_y'(x;y)$ самі є функціями двох змінних.

Частинні похідні від частинних похідних називаються ***частинними похідними другого порядку***. Функція двох змінних має, таким чином, чотири частинні похідні другого порядку:

повторні похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y$,

змішані похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x.$$

Приклад:

$$z = x^2 y + 4xy^2 + x^2 - y + 5 \Rightarrow$$

$$z_x' = 2xy + 4y^2 + 2x,\ z_y' = x^2 + 8xy - 1;\ z''_{xx} = 2y + 2,\ z''_{yy} = 8x,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 2x + 8y,\ z''_{yx} = (z'_y)'_x = 2x + 8y.$$

Частинні похідні z''_{xy} та z''_{yx} виявилися рівні, що відбулося зовсім не випадково.

ТЕОРЕМА. Якщо функція $z = f(x;y)$, її перші похідні z'_x, z'_y та змішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в деякій області, то змішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} в цій області рівні.

<u>Наслідок.</u> Результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання (наприклад $z'''_{xyy} = z'''_{yxy} = z'''_{yyx}$), якщо всі виникаючі при обчисленнях похідні неперервні.

ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ

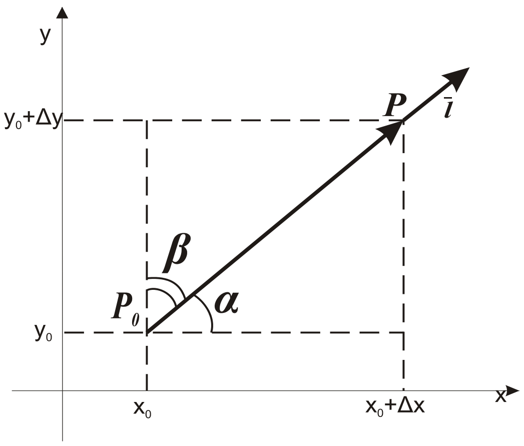

Рисунок 5

Нехай $z=f(P)$ – функція двох змінних, що диференціюється в околі точки $P_0(x_0;y_0)$, $\vec{l}=\left(l_x;l_y\right)$ – вектор, що задає деякий напрямок, $P(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ – точка на цьому напрямку (така, що вектор $\overrightarrow{P_0P}$ колінеарний вектору $\vec{l}$ (рисунок 5)).

Очевидно, що $\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\cos\beta$, де $\rho=\rho(P_0;P)=\left|\overline{P_0P}\right|$, а $\cos\alpha=\dfrac{l_x}{|\vec{l}\,|}$, $\cos\beta=\dfrac{l_y}{|\vec{l}\,|}$ – напрямні косинуси вектора, тобто косинуси кутів між вектором $\vec{l}$ і осями координат Ox і Oy відповідно.

Величина $\Delta_l z=f(P)-f(P_0)=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ називається ***приростом функції в даному напрямку***. Границя відношення цього приросту до величини переміщення $\Delta l=\rho$ при умові $\Delta l\to 0$ називається ***похідною за напрямком*** $\vec{l}$ та позначається $\partial z/\partial l$,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)}{\Delta l}.$$

Нескладно одержати більш зручні формули для обчислення похідної за напрямком, а саме: для функції двох змінних $z=f(x;y)$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta; \qquad (6)$$

для функції трьох змінних $u=f(x;y;z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (7)$$

де напрямні косинуси тривимірного вектора $\vec{l} = \left(l_x; l_y; l_z\right)$ відповідно рівні

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}\,|}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}\,|}, \ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}\,|}. \tag{8}$$

Похідна за напрямком характеризує швидкість зміни функції в даному напрямку $\vec{l}$.

Приклади. Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ та обчислити її значення в точці А:

а) $z = \arccos(x^2 - 2y)$, $\vec{l} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $P_0(4;8)$.

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l} = (1;-3)$.

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}\,|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}\,|} = \frac{-3}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Обчислимо частинні похідні $z = \arccos(x^2 - 2y)$.

$z'_x = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2-2y)^2}}$, $z'_y = \dfrac{2}{\sqrt{1-(x^2-2y)^2}}$. За формулою (6) похідна за напрямком

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2-2y)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{1-(x^2-2y)^2}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2x+6}{\sqrt{1-(x^2-2y)^2}}.$$

Обчислимо її значення у точці $P_0(4;8)$

$$\frac{\partial z}{\partial l}(P_0) = -\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2\cdot 4+6}{\sqrt{1-(4^2-2\cdot 8)^2}} = -\frac{14}{\sqrt{10}}.$$

б) $u = xy - 2y + \sqrt{xz^3}$, $\vec{l} = (-3;4;0)$, $P_0(1;2;0)$.

Обчислимо модуль вектора

$$|\vec{l}\,| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5.$$

За формулами (8) маємо $\cos\alpha = -3/5, \cos\beta = 4/5, \cos\gamma = 0/5$.

Обчислимо частинні похідні

$$u_x' = y + \sqrt{z^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, u_y' = x - 2, u_z' = \sqrt{x} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{z}\ .$$

За формулою (7) маємо похідну за напрямком

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left(y + \frac{\sqrt{z^3}}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{-3}{5} + (x-2) \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{2}\sqrt{xz} \cdot 0 = -\frac{3}{5}\left(y + \frac{\sqrt{z^3}}{2\sqrt{x}} \right) + \frac{4(x-2)}{5}$$

та її значення в точці $P_0(1;2;0)$

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial l} = -\frac{3}{5}\left(2 + \frac{\sqrt{0}}{2\sqrt{1}} \right) + \frac{4(1-2)}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} = -2\ .$$

Оскільки $\partial u / \partial l < 0$, то функція в напрямку $\vec{\boldsymbol{l}}$ спадає.

ГРАДІЄНТ

Градієнтом функції $\operatorname{grad} z$ (або $\vec{\nabla} z$) кількох змінних називається вектор, координати якого є частинними похідними за відповідними незалежними змінними.

Таким чином, для функції двох змінних $z = f(x;y)$

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right), \tag{9}$$

а для функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right). \tag{10}$$

Говорять, що в області $G \subset \mathrm{R}^n$ (n=2, 3) ***задано векторне поле***, якщо в кожній точці $P \in G$ заданий вектор $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(P)$ (тобто задана вектор-функція декількох змінних). Отже, будь-яка диференційована в області *G* скалярна функція (скалярне поле) $u=u(P)$ породжує в цій області векторне поле $\vec{\boldsymbol{F}}(p) = \operatorname{grad} u(P)$. Функція $u(P)$ називається ***потенціалом векторного поля***

$\vec{F} = \mathrm{grad}\, u$, а саме векторне поле $\vec{F}$ називається ***потенційним полем***.

ТЕОРЕМА. Похідна за напрямком дорівнює проекції градієнта на цей напрямок $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{ï ð}_{\bar{l}}\, \mathrm{grad}\, u$.

Наслідок. Похідна за напрямком максимальна у напрямку градієнта, тобто градієнт спрямований у бік найскорішого зростання функції, і в цьому напрямку $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\mathrm{grad}\, u|$.

ТЕОРЕМА

1) Градієнт функції двох змінних $z = f(x;y)$ в кожній точці $P_0(x_0;y_0)$ перпендикулярний до лінії рівня даної функції, що проходить через цю точку (якщо $\mathrm{grad}\, u(P_0) \neq 0$).

2) Градієнт функції трьох змінних $u = f(x;y;z)$ в кожній точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярний до поверхні рівня даної функції, що проходить через цю точку (якщо $\mathrm{grad}\, u(P_0) \neq 0$).

Наслідок. Похідна за напрямком $\vec{l}$, який дотичний до лінії рівня, дорівнює нулю.

Приклади. Знайти градієнт функції в точці М:

а) $z = (13+2y)^x, M(3;-6)$.

Обчислимо частинні похідні

$$z'_x = (13+2y)^x \ln(13+2y),\ z'_y = 2x(13+2y)^{x-1}.$$

За формулою (9) маємо

$$\mathrm{grad}\, z = (13+2y)^x \ln(13+2y)\vec{i} + 2x(13+2y)^{x-1}\vec{j}.$$

Обчислимо значення градієнта в точці М(3;-6)

$$\mathrm{grad}\, z = (13+2\cdot(-6))^3 \ln(13+2\cdot(-6))\vec{i} + 2\cdot 3(13+2\cdot(-6))^{3-1}\vec{j} = 0 + 6\vec{j} = 6\vec{j}.$$

б) $u = \ln(xy) + x\arcsin z$, $M(2;-1;0)$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{xy}\cdot y + \arcsin z = \frac{1}{x} + \arcsin z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy}\cdot x = \frac{1}{y}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}$. За формулою (10) маємо

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{x} + \arcsin z \right) \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{1}{y} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} .$$

Обчислимо значення градієнта в точці $M(2;-1;0)$:

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{1}{2} + \arcsin 0 \right) \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{1}{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{2}{\sqrt{1 - 0^2}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = 0{,}5\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}} + 2\vec{\boldsymbol{k}} .$$

НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Розглянемо рівняння

$$F(x;y;z) = 0 . \tag{11}$$

Якщо для всіх (x;y) з деякої множини $D \subset \mathrm{R}^2$ існує така функція (не обов'язково єдина), при підстановці якої в (11) ця рівність виконується тотожно в D, то говорять, що рівняння (11) ***визначає на множині D неявну функцію*** $z = z(x;y)$.

Приклад. Рівняння $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ визначає неявно дві неперервні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ òà $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ (або одну двозначну функцію $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$) з областями визначення кожної $D = \mathrm{R}^2$.

Проте отримати явну залежність $z = z(x;y)$ з рівняння вигляду (11) не завжди можливо, до того ж воно може і не визначати ніякої функції. Тому важливо знать умови, які б гарантували існування такої неявно заданої функції $z = z(x;y)$.

ТЕОРЕМА. *Про існування неявної функції.*

Нехай функція $F(x;y;z)$ та її частинні похідні $F_x^{'}(x;y;z)$, $F_y^{'}(x;y;z)$, $F_z^{'}(x;y;z)$ неперервні в околі точки M_0. Якщо

$$F(x;y;z) = 0 \text{ та } F_z^{'}(x_0;y_0;z_0) \neq 0,$$

то рівняння

$$F(x;y;z) = 0$$

має єдиний неперервний розв’язок $z = \varphi(x;y)$ у деякому $\delta -$околі точки $P_0(x_0;y_0)\in \mathrm{R}^2$ такий, що $\varphi(x_0;y_0)=z_0$. Функція $\varphi(x;y)$ також має неперервні частинні похідні.

Зауважимо, що якщо в точці M_0 похідна $F_z^{'}(x_0;y_0;z_0)=0$, а, наприклад, $F_y^{'}(x_0;y_0;z_0)\neq 0$, то рівняння $F(x;y;z)=0$ може не визначати z як функцію x та y, але визначає y як функцію x та z.

Зазначимо, що теорема не вказує метод знаходження цієї неявної функції, а тільки стверджує, що така функція існує. Проте виявляється, що частинні похідні $z_x{}'$ і $z_y{}'$ цієї невідомої функції можуть бути обчислені.

Нехай умови теореми про існування неявної функції виконані, і рівняння $F(x;y;z)=0$ визначає деяку функцію $z=z(x;y)$. Підставляючи її в рівняння (11), отримаємо тотожність

$$F(x;y;z(x;y))=0,$$

справедливу при всіх (x; y) з деякого околу точки P_0. Продиференціюємо обидві частини цієї тотожності за змінною x, використовуючи правило диференціювання складної функції.

$$F_x^{'}\cdot x_x{}'+F_y^{'}\cdot y_x{}'+F_z^{'}\cdot z_x{}'\equiv 0\Rightarrow F_x^{'}+F_z^{'}\cdot z_x{}'\equiv 0\Rightarrow \quad z_x{}'=\frac{-F_x^{'}}{F_z^{'}}. \qquad (12)$$

Аналогічно визначається і частинна похідна $z_y{}'$:

$$F_y^{'}\cdot y_x{}'+F_y^{'}\cdot y_y{}'+F_z^{'}\cdot z_y{}'\equiv 0\Rightarrow F_y^{'}+F_z^{'}\cdot z_y{}'\equiv 0\Rightarrow \quad z_y{}'=\frac{-F_y^{'}}{F_z^{'}}\ . \qquad (13)$$

Ці формули виражають частинні похідні неявної функції $z=z(x;y)$ через похідні заданої функції $F(x;y;z)$. При $F_z^{'}(x_0;y_0;z_0)=0$ ці формули втрачають сенс.

Зауваження. У разі, коли рівняння $F(x;z)=0$ неявно визначає функцію однієї змінної, що диференціюється, можна, діючи аналогічно, обчислити звичайну похідну $z'(x)=\frac{-F_x^{'}}{F_z^{'}}$, якщо $F_z^{'}\neq 0$.

Приклад. Знайдемо частинні похідні функції z, заданої рівнянням $F(x;y;z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

У цьому прикладі можна знайти явний вираз функції і перевірити правильність отриманих результатів. Пропонуємо зробити це самостійно.

ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛА

Геометричний зміст диференціала функції двох змінних $z = f(x;y)$ пов'язаний з дотичною площиною до поверхні, яка визначається цією функцією.

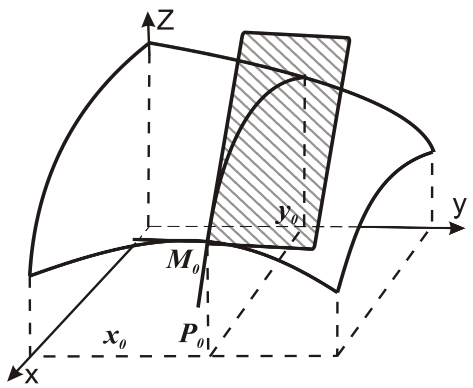

Рисунок 6

Нехай $z = f(x;y)$ – диференційовна функція в околі точки $P_0(x_0;y_0)$, а поверхня S – її графік. Розглянемо перетин поверхні площиною $y = y_0$ і проведемо дотичну пряму в точки P_0 до лінії перетину. Аналогічно побудуємо дотичну до лінії перетину площиною $x = x_0$ (рисунок 6).

Площина, що проходить через ці дві дотичні, які перетинаються, називається ***дотичною площиною*** до поверхні $z = f(x;y)$ в точці $P_0(x_0;y_0)$. Її рівняння

$$z - z_0 = f_x^{'}(x_0;y_0) \cdot (x - x_0) + f_y^{'}(x_0;y_0) \cdot (y - y_0), \qquad (14)$$

де $z_0 = f(x_0;y_0)$.

Можна показати, що для будь-якої лінії на поверхні, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, дотична пряма, проведена до лінії через цю точку, лежить у дотичній площині.

Вектор $\overrightarrow{N}$, який перпендикулярний до дотичної площини, називається ***нормальним вектором*** до поверхні.

Пряма, перпендикулярна до дотичної площини, що проходить через точку дотику, називається ***нормаллю*** до поверхні в даній точці.

З рівняння (14) вектор $\overrightarrow{N}=\{f_x'(x_0;y_0):f_y'(x_0;y_0);-1\}$ є нормальним до поверхні $z=f(x;y)$ (причому будь-який вектор, пропорційний йому, $\overrightarrow{N}_\lambda=\lambda\cdot\{f_x';f_y';-1\}$ – теж нормальний). Звідси випливає, що рівняння нормалі до поверхні в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{15}$$

Нехай тепер поверхня S задана неявним рівнянням $F(x;y;z)=0$, яке визначає в околі точки $P_0(x_0;y_0)$ диференційовну функцію $z=f(x;y)$, причому $z_0=f(x_0;y_0)$. Згідно з правилами диференціювання неявної функції (12), (13) (якщо $F_z'(x_0;y_0;z_0)\neq 0$)

$$f_x'=\frac{-F_x'}{F_z'},\ f_y'=\frac{-F_y'}{F_z'}\Rightarrow \vec{N}=\left(\frac{-F_x'}{F_z'};\frac{-F_y'}{F_z'};-1\right).$$

Для зручності помножимо $\overrightarrow{N}$ на множник $\lambda=-F_z'$, отримаємо інший нормальний вектор $\vec{N}=\{F_x';F_y';F_z'\}$, де всі похідні обчислюються в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Таким чином, приходимо в цьому випадку до рівняння нормалі

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}\ . \tag{16}$$

Зазначимо, що рівняння дотичної площини можна записати у вигляді

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0\ . \tag{17}$$

Хоча раніше було зроблено припущення, що $F_z'(x_0;y_0;z_0)\neq 0$, але рівняння (16),(17) справедливі і коли $F_z'(x_0;y_0;z_0)=0$. Вони не мають сенсу тільки в тому випадку, якщо всі три частинні похідні дорівнюють нулю одночасно.

Точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *називається особливою точкою поверхні* $F(x;y;z)=0$*, якщо* $F_x'(M_0)=0,\ F_y'(M_0)=0,\ F_z'(M_0)=0$.

В особливій точці дотична площина і нормаль до поверхні не визначені.

Приклади. Скласти рівняння нормальної прямої та дотичної площини:

а) до конуса $4x^2-y^2+4z^2=0$ в точках $M(3;10;4)$ та $O(0;0;0)$.

Обчислимо похідні: $F_x'=8x,\ F_y'=-2y,\ F_z'=8z$. Їх значення у точці M: $F_x'(M)=24,\ F_y'(M)=-20,\ F_z'(M)=32$, отже, в точці M нормальний вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}=\{24;-20;32\}$, рівняння дотичної площини за формулою (17) має вигляд

$$24(x-3)-20(y-10)+32(z-4)=0$$

або після розкриття дужок і скорочення на 4

$$6x-5y+8z=0,$$

а рівняння нормалі за формулою (14)

$$\frac{x-3}{24}=\frac{y-10}{-20}=\frac{z-4}{32}.$$

У точці $O(0;0;0)$, $F_x'=0,\ F_y'=0,\ F_z'=0$, отже, це особлива точка поверхні, і в ній дотична площина і нормаль не визначені.

б) до поверхні $z=x^2+2y^2-3xy+y$ в точці $C(-1;3;31)$.

Обчислимо частинні похідні: $z_x'=2x-3y,\ z_y'=4y-3x+1$, та їх значення в точці C: $z_x'(C)=-2-9=-11,\ z_y'(C)=12-9+1=4$, отже, рівняння нормальної прямої за формулою (15)

$$\frac{x+1}{-11}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-31}{-1}.$$

Рівняння дотичної площини запишемо за формулою (14)

$$z-31=-11\cdot(x+1)+4\cdot(y-3).$$

Розкриємо дужки та наведемо подібні

$$11x-4y+z-8=0.$$

ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Точка $P_0(x_0;y_0)\in \mathrm{R}^2$ називається точкою ***екстремуму (максимуму або мінімуму)*** функції двох змінних $z=f(x;y)$, якщо функція визначена в точці P_0 і її околі, та її значення в цій точці $z_0=f(x_0;y_0)$ є відповідно найбільше або найменше значення функції в цьому околі. Значення функції в точках екстремуму називаються ***екстремальними***.

Розглянемо необхідні і достатні умови існування екстремуму.

ТЕОРЕМА. *Необхідна ознака екстремуму.*

Якщо в точці $P_0(x_0;y_0)$ диференційовна функція $z=f(x;y)$ має екстремум, то точка $P_0(x_0;y_0)$ є стаціонарною.

Точка $P_0(x_0;y_0)\in \mathrm{R}^2$, у якій частинні похідні дорівнюють нулю: $z_x'(P_0)=0,\ z_y'(P_0)=0$, або хоча б одна з них не існує називається ***стаціонарною точкою*** *функції* $z(x;y)$.

Проте умови $z_x'(P_0)=0,\ z_y'(P_0)=0$ (вони називаються ***умовами стаціонарності*** функції) не є достатніми, тобто їх виконання не гарантує існування екстремуму в точці P_0.

ТЕОРЕМА. *Достатня ознака екстремуму.*

Нехай функція $z=f(x;y)$ має в точці $P_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні другого порядку (двічі неперервно диференційовна) і точка P_0 – її стаціонарна точка. Позначимо для зручності

$$A=z''_{xx}(P_0),\quad B=z''_{xy}(P_0),\quad C=z''_{yy}(P_0).$$

Розглянемо визначник

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

а) якщо $\Delta(P_0)>0$, то в точці P_0 є екстремум, причому у випадку $A>0$ (або $C>0$) – мінімум, а у випадку $A<0$ (або $C<0$) – максимум;

б) якщо $\Delta(P_0)<0$, то в точці P_0 екстремуму немає (такі точки називаються сідловими);

в) якщо $\Delta(P_0)=0$, то для відповіді на питання про існування екстремуму потрібне додаткове дослідження.

Приклади. Знайти екстремуми функції:

а) $z=x^3-7x^2+2xy-y^2+11x-2y$.

Знайдемо стаціонарні точки:

$$z_x'=3x^2-14x+2y+11, \qquad z_y'=2x-2y-2.$$

$$\begin{cases} z_x'=3x^2-14x+2y+11=0, \\ z_y'=2x-2y-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-12x+9=0, \\ y=x-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=1,\ y_1=0, \\ x_2=3,\ y_2=2. \end{array}$$

Таким чином, функція має дві стаціонарні точки $P_1(1;0)$ і $P_2(3;2)$.

Обчислюємо значення визначника $\Delta(P_1)$ й $\Delta(P_2)$:

$$z''_{xx}=6x-14,\ z''_{yy}=-2,\ z''_{xy}=z''_{yx}=2 \Rightarrow$$

$$\Delta(x;y)=\begin{vmatrix} 6x-14 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2(6x-14)-4=-12x+24=-12(x-2).$$

Звідки $\Delta(P_1)=-12(1-2)=12>0$, отже, в точці $P_1(1;0)$ є екстремум, а оскільки $z''_{yy}=-2<0$, то цей екстремум – максимум і його значення $z(1;0)=5$.

$\Delta(P_2)=-12(3-2)=-12<0$, отже, в точці $P_2(3;2)$ екстремуму немає. Це – сідлова точка.

б) $z=2x^2+5y^2-12x+4y+3$.

Знайдемо стаціонарні точки:

$$z_x'=4x-12, \qquad z_y'=10y+4,$$

$$\begin{cases} 4x-12=0, \\ 10y+4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=12, \\ 10y=-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3. \\ y=-0,4. \end{cases}$$

Отже, функція має одну стаціонарну точку $\mathrm{P}(3;-0,4)$. Перевіримо, чи є в ній екстремум. Обчислимо визначник $\Delta(\mathrm{P})$

$$z''_{xx}=4,\ z''_{yy}=10,\ z''_{xy}=z''_{yx}=0 \Rightarrow \Delta(x;y)=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}=4\cdot 10-0=40.$$

Оскільки Δ у будь-якій точці додатний, то у точці Р екстремум є. Оскільки $A = z''_{xx}(P) = 4 > 0$, то це мінімум. Знайдемо екстремальне значення функції

$$z(3;0,4) = 2 \cdot 9 + 5 \cdot 0,16 - 12 \cdot 3 + 4 \cdot 0,4 + 3 = -12,6 .$$

НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Нехай потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x;y)$ в деякій області (яка розглядається зі своєю межею). Якщо деяке з цих значень досягається в області, то воно, очевидно, є екстремальним. Але може статися, що найбільше або найменше значення приймається функцією в деякій точці, що лежить на межі області.

Зі сказаного вище випливає правило:

Щоб знайти найбільше або найменше значення диференційовної функції двох змінних в замкненій обмеженій області $\overline{D}$, треба:

1) знайти всі стаціонарні (підозрілі на екстремум) точки у середині області й обчислити в них значення функції;

2) знайти найбільше або відповідно найменше значення функції на межі області;

3) порівняти ці значення і вибрати з них потрібне.

Приклад

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ в замкненій області $\overline{D}$, обмеженій лініями $x = 0$, $y = 0$; $x + 2y = 6$ (рисунок 7).

1 Знайдемо всі стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} z_x' = 2x - 4 = 0 \\ z_y' = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Бачимо, що точка $P_0(2;1)$ знаходиться в області $\overline{D}$. Функція набуває в ній значення $z(P_0) = z(2;1) = -5$.

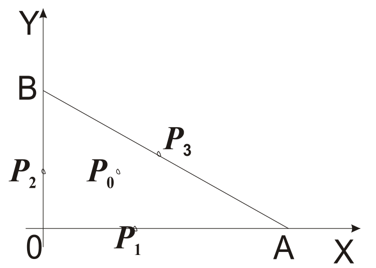

Рисунок 7

2 Розіб'ємо межу $\overline{D}$ на три відрізки ОА, ОВ і АВ. На кожному з них нам необхідно розв’язати задачу знаходження умовного екстремуму, для чого ми скористаємося першим з викладених вище методів, виключаючи за допомогою рівняння зв'язку одну із змінних. Проте повністю розв’язувати ці задачі ми не будемо, а знайдемо тільки точки підозрілі на екстремум.

На ділянці OA: $y=0,\ x\in[0;6] \Rightarrow z_{OA}=f(x)=x^2-4x$. Ця функція неперервно диференційовна і може набувати своїх найбільшого і найменшого значень або у середині відрізка в стаціонарній точці, або на його кінцях. Стаціонарні точки знаходимо з рівняння $z'_{OA}(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2,\ y=0$. Функція в цій точці $P_1(2;0)$ набуває значення $z(P_1)=-4$. Обчислимо також значення функції на кінцях відрізка в точках *O(0;0)* і *A(0;6)*: $z(O)=0,\ z(A)=12$.

На ділянці OB: $x=0,\ y\in[0;3] \Rightarrow z_{OB}=g(y)=y^2-2y$. Критичну точку знаходимо з рівняння $x=0,\ y\in[0;3] \Rightarrow z_{OB}=g(y)=y^2-2y$. Функція набуває в цій точці $P_2(0;1)$ значення $z(P_2)=-1$. Обчислюємо значення функції в точці В: $z(B)=3$.

На ділянці AB: $x=6-2y,\ x\in[0;6] \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_{AB}=h(y)=(6-2y)^2+y^2-4(6-2y)-2y=-5y^2-18y+12.$$

Прирівнюючи до нуля похідну цієї функції $z'_{AB}(y)=10y-18=0$, одержуємо координати її критичної точки: $y=1{,}8;\ x=2{,}4$. Функція набуває в цій точці $P_3(2{,}4;1{,}8)$ значення $z(P_3)=-4{,}2$.

3 Порівнюючи значення функції в точках $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ A,\ B,\ O$, знаходимо, що

$$\min_{\overline{D}} z=z(P_0)=-5,\ \max_{\overline{D}} z=z(A)=12.$$

ВИЗНАЧЕННЯ ЕМПІРИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Експериментальні дані часто використовують для встановлення функціональної залежності одних величин від інших. Наприклад, при різних температурах $T = x_1, x_2, ..., x_n$ виміряна довжина металевого стержня $L = y_1, y_2, ..., y_n$, тобто маємо табличну функцію $L = f(T)$. Виникає задача визначення за експериментальними даними аналітичної формули для цієї функції. Такі формули називаються емпіричними.

При розв'язанні цієї задачі перш за все з аналізу експериментальних даних або інших міркувань встановлюється вид шуканої залежності. Наприклад, передбачається наявність лінійної залежності $y = ax + b$. Можуть розглядатися і складніші функції: квадратична $y = ax^2 + bx + c$, дробово-раціональна $\frac{ax+b}{cx+d}$ та ін. Тут ми розглянемо найпростіший випадок визначення лінійної залежності $y = ax + b$. У цьому випадку задача зводиться до відшукання відповідних коефіцієнтів a і b.

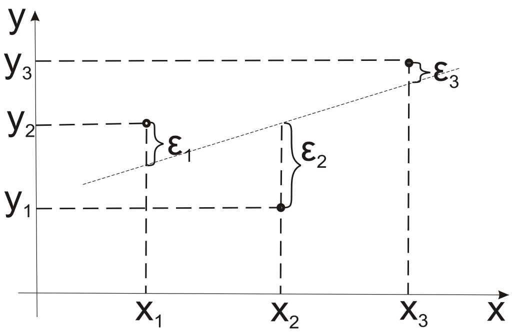

Рисунок 8

Подамо експериментальні дані на графіку (рисунок 8), на якому зобразимо також шукану функцію $y = ax + b$ (її графік – пряма). Позначимо через ε_i неточності або похибки формули, тобто різниці експериментальних даних y_i і теоретичних значень цієї величини: $\varepsilon_i = y_i - ax_i + b$. Поява неточності практично неминуча, оскільки, навіть якщо між величинами y і x є точна лінійна залежність, навряд чи вдасться провести пряму через усі експериментальні точки внаслідок існування похибок вимірювань.

Природно вважати найкращою таку залежність, для якої неточності в сукупності будуть (у деякому розумінні) найменшими. Суть ***методу найменших квадратів*** полягає в тому, що параметри *a* і *b* підбираються так, щоб була мінімальною сума квадратів усіх неточностей. Таким чином, задача зводиться до визначення точки мінімуму функції

$$\Phi(a;b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \ . \tag{18}$$

Знайдемо стаціонарні точки з умови $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) .$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (-y_i x_i + ax_i^2 + bx_i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (-y_i + ax_i + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Позначаючи

$$F = \sum_{i=1}^{n} 1 = n, \ G = \sum_{i=1}^{n} x_i, \ H = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ A = \sum_{i=1}^{n} y_i, \ B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \tag{19}$$

приходимо до системи

$$\begin{cases} aH + bG = B \\ aG + bF = A \end{cases}, \tag{20}$$

звідки знаходимо $a = \frac{BF - AG}{FH - G^2}, \ b = \frac{AH - BG}{FH - G^2}$. Перевіряючи достатні умови існування екстремуму, можна переконатися, що знайдена стаціонарна точка (a;b) і є шукана точка мінімуму (втім це витікає із змісту задачі).

Приклад. Знайти за допомогою методу найменших квадратів рівняння лінійної залежності за експериментальними даними, зведеними в таблицю

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,4	1,0	1,2	1,4	1,8

Розв'язання. За формулами (19) знаходимо F=5, оскільки в таблиці наведено 5 пар $(x_i;y_i)$,

$$G=1+2+3+4+5=15,$$
$$H=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55,$$
$$A=0{,}4+1{,}0+1{,}2+1{,}4+1{,}8=5{,}8,$$
$$B=1\cdot 0{,}4+2\cdot 1{,}0+3\cdot 1{,}2+4\cdot 1{,}4+5\cdot 1{,}8=20{,}6.$$

Далі маємо за формулою (20) систему $\begin{cases}55a+15b=20{,}6\\15a+5b=5{,}8\end{cases}.$

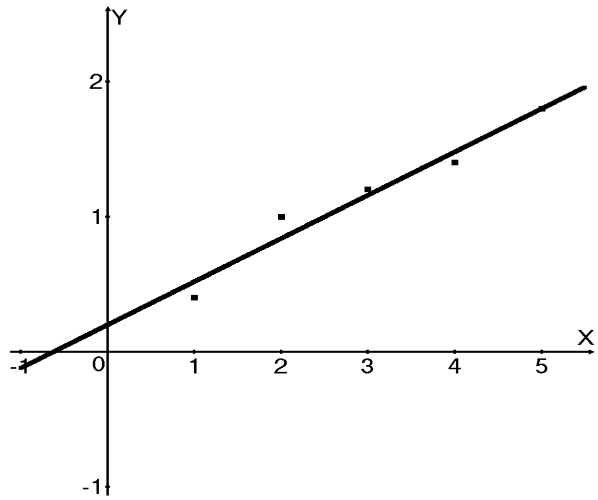

Рисунок 9

Знаходимо $a=0{,}32;\ b=0{,}2$. Таким чином, шукана залежність має вигляд $y=0{,}32x+0{,}2$. Подамо знайдену лінійну залежність і експериментальні дані на графіку (рисунок 9). Бачимо, що знайдена лінійна залежність достатньо добре апроксимує експериментальні дані.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 1. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = f(x;y)$.

Варіант	$z = f(x;y)$	Варіант	$z = f(x;y)$
1	$z = \ln(1 + x^2 + y) - y$	2	$z = (3y + x^6)^2 - x$
3	$z = \cos(4x^3 - y) + 8$	4	$z = \mathrm{arctg}(xy^3) - 1$
5	$z = \sin(x - 4y^5) + 2x$	6	$z = \mathrm{arcctg}(x^5 y) - y$
7	$z = e^{7x - y^7} + 5x$	8	$z = 4\ln(3x + y^2) - 8x$
9	$z = \mathrm{arcctg}\, x^4 y - 9x$	10	$z = \cos(5xy + x^2) + y$
11	$z = \sin(x^3 + 2y) - 4x$	12	$z = (2x - y^4)^7 + y$
13	$z = \mathrm{arctg}(xy^2) - x$	14	$z = 3y - e^{x^2 + 5y^3}$
15	$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$	16	$z = \sin(x^{11} - y) + 5$
17	$z = \mathrm{arctg}(xy^7) - 6x$	18	$z = \cos(xy + x^2 - y^4)$
19	$z = e^{x^2 + y} - 3$	20	$z = (3x - y^2 + xy)^5$
21	$z = \mathrm{arcctg}(x^9 y) - 2y$	22	$z = \ln(x^3 + y^3 - xy)$
23	$z = \cos(x^3 + y^2 - x^2 y)$	24	$z = \mathrm{arctg}(x^2 y^3) + x$
25	$z = \sin(y^3 - x^3 + y^2 x)$	26	$z = e^{x^3 - y^3 + 3xy}$
27	$z = (x^2 - y^3 x + x^3 y)^{11}$	28	$z = \ln(x^4 + 3y^2 - x^2 y)$
29	$z = e^{x^3 y^2 - x + 2y^3}$	30	$z = \mathrm{arctg}(x^2 y^4) - x^5$

ЗАВДАННЯ 2. Задано функцію $z = f(x, y)$ та дві точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$. Потрібно:

1) скласти рівняння нормальної прямої й дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $C(x_0, y_0, z_0)$;

2) обчислити наближене значення $\overline{z}_1$ функції в точці B, спираючись на значення z_0 функції в точці A, замінивши приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом.

Варіант	$z = f(x, y)$	A	B
1	$x^2 + y^2 - x + y$	(-2;2)	(-2,02; 2,05)
2	$x^2 + 3xy + y^2$	(1;2)	(1,03; 1,97)
3	$xy + y^2 - 2x$	(2;1)	(2,03; 0,96)
4	$2x^2 + 2xy - y^2$	(1;3)	(0,95; 2,94)
5	$xy + 2x - y$	(2;2)	(1,93; 2,05)
6	$3y^2 - 9xy + y$	(1;3)	(1,07; 2,94)
7	$xy + x - y$	(1,5; 2,3)	(1,43; 2,35)
8	$y^2 - xy - x^2$	(-4;5)	(-3,92; 5,06)
9	$x^2 + y^2 - x - y$	(1;-3)	(1,08; -2,94)
10	$x^2 + xy + y^2$	(1;2)	(1,02. 1,96)
11	$3x^2 - xy + x + y$	(1;3)	(1,06; 2,92)
12	$x^2 + 3xy - 6y$	(4;1)	(3,96; 1,03)
13	$x^2 - y^2 + 6x + 3y$	(2;3)	(2,02; 2,97)
14	$x^2 + 2xy + 3y^2$	(2;1)	(1,96; 1,04)
15	$x^2 + y^2 + 2x + y - 1$	(2;4)	(1,98; 3,91)
16	$3x^2 - xy + 2y^2$	(-1;3)	(-0,98; 2,97)
17	$x^2 - y^2 + 5x + 4y$	(3;3)	(3.02; 2.98)
18	$2xy + 3y^2 - 5x$	(3;4)	(3,04; 3,95)
19	$xy + 2y^2 - 2x$	(1;2)	(0,97; 2,03)
20	$y^2 - xy - x^2$	(-4;5)	(-3,92; 5,06)
21	$x^2 + y^2 - x - y$	(1;-3)	(1,08; -2,94)
22	$xy + 2x - y$	(2;2)	(1,97; 2,05)
23	$x^2 + 2xy - 6y$	(3;1)	(3,02; 0,97)
24	$2x^2 + 3y^2 - 2xy$	(1;2)	(0,95; 1,95)
25	$xy + x - 2y$	(2;2)	(2,03; 2,01)

Варіант	$z = f(x, y)$	A	B
26	$-2x^2 + 3xy + 4x - y$	(1;2)	(0,95; 1,92)
27	$3x^2 + 4xy + 2y^2$	(1;3)	(0,93; 3,08)
28	$-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2y$	(2;1)	(2,03; 1,08)
29	$x^2 - 3y^2 + 2xy - 8x$	(1;2)	(1,07; 1,91)
30	$-3x^2 + xy + 2y^2 + 4y$	(2;1)	(2,05; 0,92)
31	$4x^2 - 3xy + y^2 + 5x$	(2;-1)	(1,92; -0,95)

ЗАВДАННЯ 3. Задано функцію $z = f(x, y)$, точку $P_0(x_0, y_0)$ та вектор $\vec{l}$. Знайти:

1) $grad\ z$ в точці P_0;
2) похідну в точці P_0 за напрямком вектора $\vec{l}$;
3) повний диференціал;
4) вектор напрямку найбільшого зростання функції $\dfrac{gradz(P_0)}{|gradz(P_0)|}$.

Варіант	$z = f(x, y)$	$P_0(x_0, y_0)$	$\vec{l}$
1	$2x^2 + xy$	(-1,2)	$3\vec{i} + 4\vec{j}$
2	$arctg(y/x)$	(-1,1)	$\vec{i} - \vec{j}$
3	$x^3 y + xy^2$	(1,3)	$-5\vec{i} + 12\vec{j}$
4	$\ln(2x + 3y)$	(2,2)	$2\vec{i} - 3\vec{j}$
5	$3x/y^2$	(3,4)	$-3\vec{i} - 4\vec{j}$
6	$\ln(3x^2 + 2xy^2)$	(1,2)	$3\vec{i} - 4\vec{j}$
7	$\dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$	(1,-2)	$3\vec{i} - 4\vec{j}$
8	$2x^2 - 2xy + y^2$	(1,1)	$2\vec{i} - \vec{j}$
9	$arctg(yx)$	(3,2)	$4\vec{i} + 3\vec{j}$
10	$x^2 + xy + y^2$	(1,1)	$2\vec{i} - \vec{j}$
11	$2x^2 + 3xy + y^2$	(2,1)	$3\vec{i} - 4\vec{j}$
12	$\ln(5x^2 + 3y^2)$	(2,1)	$3\vec{i} - 4\vec{j}$
13	$\ln(5x^2 + 4y^2)$	(1,1)	$2\vec{i} - \vec{j}$
14	$5x^2 + 6xy$	(2,1)	$\vec{i} + 2\vec{j}$

Варіант	$z=f(x,y)$	$P_0(x_0,y_0)$	$\vec{l}$
15	$arctg(y^2x)$	(2,3)	$4\vec{i}-3\vec{j}$
16	$\arcsin(x^2/y)$	(1,2)	$5\vec{i}-12\vec{j}$
17	$\ln(3x^2+4y^2)$	(1,3)	$2\vec{i}-\vec{j}$
18	$3x^4+2x^2y^3$	(-1,2)	$4\vec{i}-3\vec{j}$
19	$3x^2y^2+5xy^2$	(1,1)	$2\vec{i}+\vec{j}$
20	$5x^2y+3xy^2$	(1,1)	$6\vec{i}-8\vec{j}$
21	$x^3+2xy+y^2$	(0,1)	$\vec{i}+\vec{j}$
22	$arctg(yx^2)$	(2,1)	$3\vec{i}-\vec{j}$
23	$\ln(4x^2+3y^2)$	(0,1)	$2\vec{i}+\vec{j}$
24	$x^2+2xy+y^3$	(0,2)	$\vec{i}-2\vec{j}$
25	$\ln(x+2y)$	(1,1)	$-\vec{i}+\vec{j}$
26	$tg\pi(x^2+3xy)$	(-1,2)	$2\vec{i}+5\vec{j}$
27	$x\sin\pi(2x+y^3)$	(2,-1)	$-3\vec{i}+4\vec{j}$
28	xe^{2x^2y}	(2,0)	$4\vec{i}-3\vec{j}$
29	$\ln(2xy+3x^2)$	(2,-1)	$5\vec{i}-3\vec{j}$
30	$x^2arctg\,2yx$	(-1,2)	$-2\vec{i}+5\vec{j}$
31	$y^2tg\pi(x^3+4y)$	(1,-2)	$3\vec{i}-5\vec{j}$

ЗАВДАННЯ 4:

а) дослідити функцію $z=f(x;y)$ на екстремуми та обчислити її екстремальні значення;

б) знайти найбільше та найменше значення функції $z=f(x;y)$ в замкненій області, що обмежена осями координат та прямою φ(x;y)=0.

Варіант	$z=f(x;y)$	$\varphi(x;y)=0$
1	$z=2x^2-y^2-12x-2y+3$	$3x-2y-12=0$
2	$z=2x^2-y^2-4x-4y+2$	$5x-4y-20=0$
3	$z=x^2+2y^2-2x-4y-14$	$x+y-3=0$
4	$z=4x^2+y^2-8x+6y-3$	$2x-y-10=0$
5	$z=xy-y+x+4$	$6x-5y-30=0$
6	$z=xy+3x-y-3$	$4x-7y-28=0$
7	$z=x^2-2y^2-2x+4y+3$	$x+y-3=0$

Варіант	$z = f(x;y)$	$\varphi(x;y) = 0$
8	$z = x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 4$	$6x - 5y + 30 = 0$
9	$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1$	$3x + 5y - 15 = 0$
10	$z = 2x^2 + 5y^2 + 8x - 20y + 11$	$x - 2y + 10 = 0$
11	$z = xy + 2y - x - 3$	$2x - 5y + 20 = 0$
12	$z = xy - 2x - 3y + 5$	$3x + 2y - 12 = 0$
13	$z = 2x^2 - y^2 + 12x - 6y - 2$	$4x + 7y + 28 = 0$
14	$z = 2x^2 - 3y^2 + 8x - 18y - 7$	$2x + y + 8 = 0$
15	$z = 2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 7$	$5x - 4y - 20 = 0$
16	$z = 5x^2 + 2y^2 - 30x - 8y - 9$	$x + y - 6 = 0$
17	$z = xy + 2x - y + 4$	$3x - 5y - 15 = 0$
18	$z = xy - 2x + 2y + 2$	$-x + 2y - 8 = 0$
19	$z = 5x^2 - 2y^2 - 30x + 8y + 1$	$x + y - 6 = 0$
20	$z = 4x^2 - y^2 - 8x - 6y + 1$	$2x - y - 10 = 0$
21	$z = x^2 + 3y^2 + 6x - 6y - 2$	$6x - 5y + 30 = 0$
22	$z = 2x^2 + y^2 + 12x + 6y + 4$	$4x + 7y + 28 = 0$
23	$z = xy + 3y - x - 2$	$-x + y - 8 = 0$
24	$z = xy + 3x + 3y - 1$	$x + 3y + 15 = 0$
25	$z = x^2 - y^2 - 4x + 2y - 6$	$3x + 5y - 15 = 0$
26	$z = 2x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 5$	$x - 2y + 10 = 0$
27	$z = 2x^2 + 3y^2 + 8x + 18y + 4$	$2x + y + 8 = 0$
28	$z = 2x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3$	$3x - 2y - 12 = 0$
29	$z = xy + 3x + 2y + 7$	$2x + y + 10 = 0$
30	$z = xy - 3y + x - 6$	$4x - 3y - 24 = 0$

ЗАВДАННЯ 5. Для значень $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$ задано відповідні значення y_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Потрібно за цими даними знайти за допомогою методу найменших квадратів рівняння лінійної залежності $y = ax + b$. Подати експериментальні дані та шукану лінію на рисунку.

Варіант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	0,89	3,62	4,99	6,48	9,25
2	1,12	3,59	4,41	6,75	9,02
3	0,98	2,89	4,51	7,49	9,11

Варіант	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	1,63	2,77	5,25	6,37	9,72
5	1,17	2,83	5,01	6,48	9,52
6	0,98	2,68	5,03	6,88	9,22
7	1,07	3,17	5,01	6,83	8,93
8	0,97	3,03	5,13	7,23	8,97
9	1,06	2,94	4,84	6,92	9,05
10	0,76	2,66	5,24	7,34	8,96
11	1,39	2,42	2,35	3,32	3,37
12	1,62	1,81	2,41	3,16	4,02
13	1,19	1,89	2,59	3,12	3,39
14	1,73	2,12	2,27	2,87	3,52
15	1,67	1,83	2,77	2,68	3,39
16	1,48	1,68	2,53	2,88	3,72
17	1,57	2,17	2,51	2,83	3,43
18	1,47	2,03	2,63	3,23	3,47
19	1,56	1,94	2,34	2,92	3,55
20	1,26	1,66	2,74	3,34	3,46
21	0,39	2,42	3,35	5,32	6,37
22	0,62	1,81	3,41	5,16	7,02
23	0,19	1,89	3,59	5,12	6,39
24	0,73	2,12	3,27	4,87	6,52
25	0,67	1,83	3,77	4,68	6,39
26	0,48	1,68	3,53	4,88	6,72
27	0,57	2,17	3,51	4,83	6,43
28	0,47	2,03	3,63	5,23	6,47
29	0,56	1,94	3,34	4,92	6,55
30	0,26	1,66	3,74	5,34	6,46

Список літератури

1 Дубовик В.П. Вища математика. : Навч. посібник для вищих навчальних закладів / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. – К.: А.С.К., 2006. - 648 с.

2 Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1966. – 736 с.

3 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.

4 Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова – М.: Высшая школа, 1980. – Ч.1. – 304с.

5 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М. : Наука, 1987.

6 Сборник задач по математике для втузов :Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – Ч.1. – 300 с.

7 Ковалішина І.В. Елементи математичного аналізу. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Конспект лекцій з вищої математики. – Харків: УкрДАЗТ, 2006. – Ч.8. – 30 с.

ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання з дисципліни «*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Відповідальний за випуск Шувалова Ю.С..

Редактор Еткало О.О..

Підписано до друку 23.12.10 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.