№1362

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до разрахунково-графічної роботи з дисципліни

"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"

Харків – 2008

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра "Вищої математики"

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до разрахунково-графічної роботи з дисципліни *"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"* для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання

Харків 2008

Методичні вказівки розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри “Вища математика ” 22 червня 2007 р., протокол №12.

У методичних вказівках наведені програми на мові PASCAL та детальні вказівки щодо виконання РГР для розв’язання наступних задач математичної статистики за допомогою ПК: обробка результатів спостережень та перевірка гіпотези про вид розподілу випадкової величини за допомогою критерію χ^2 (Пірсона), оцінка параметрів регресії, дисперсійний аналіз тощо.

Методичні вказівки рекомендуються для студентів економічних та загальнотехнічних спеціальностей денної та заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти Є.З. Могульський,
Г.П. Бородай

Рецензент

доц. Ю.А. Акімова

ЗМІСТ

1 ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

1.1 Означення випадкового вектора

Якщо кожний наслідок випробування задається упорядкованою сукупністю n випадкових величин, то прийнято говорити про n вимірний **випадковий вектор**. Виявляєьтся, що для повного опису випадкового вектора потрібно мати не тільки інформацію про розподіл його координат, а й про їх взаємодію.

Наведемо приклади випадкових векторів: 1)точка попадання у плоску мішень характеризується випадковим вектором $\vec{X}(X;Y)$, де X та Y - координати точки попадання у системі координат, розміщеній у площині мішені; 2) стан будь-якого виду транспорту характеризується сукупністю випадкових величин.

У подальшому мова найчастіше йтиме про двовимірний випадковий вектор $\vec{X}(X;Y)$.

1.2 Дискретний випадковий вектор

Якщо обидві координати вектора $\vec{X}$ є дискретними випадковими величинами, то вектор $\vec{X}$ називають **дискретним випадковим вектором.** Дискретний випадковий вектор задається набором значень $(x_k;y_j)$ та ймовірностями $p_{kj}=P\{X=x_k;Y=y_j\}$, з якими ці значення приймаються. Дискретний випадковий вектор, як правило, задають таблицею розподілу. Ясно, що сума всіх ймовірностей p_{kj} дорівнює одиниці.

Y / X	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{11}	...	p_{11}
x_2	p_{11}	p_{11}	...	p_{11}
...	...	...	...	...
x_n	p_{11}	p_{11}	...	p_{11}

У таблиці розподілу випадкового вектора міститься вся інформація про нього. Зокрема, ця таблиця дозволяє знайти розподіл координат вектора.

Оскільки подія $\{X=x_k\}$ складається з суми попарно несумісних подій $\{X=x_k;Y=y_1\}$, $\{X=x_k;Y=y_2\}$, ...

$\{X = x_k; Y = y_m\}$, то щоб одержати розподіл ймовірностей p_k випадкової велчини X, потрібно просумувати ймовірності p_{kj}, які стоять у k-му рядку таблиці.

$$p_k = P\{X = x_k\} = p_{k1} + p_{k2} + ... + p_{km}. \quad (1.1)$$

При сумуванні ймовірностей за стовпцями знаходимо розподіл ймовірностей випадкової величини Y.

Приклад 1. Знайти розподіл координат випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$, заданного таблицею розподілу.

Y / X	-2	-1	2
0	0.15	0.05	0.25
1	0.35	0.2	0

Розв'язання

На підставі формули (1.1) одержимо розподіли координат X та Y.

X	0	1
P	0.45	0.55

Y	-2	-1	2
P	0.5	0.25	0.25

Виникає запитання: чи завжди можливо за розподілом координат знайти розподіл вектора? Виявляється, що відповідь на це питання негативна.

Введемо подібно до умовної ймовірності поняття **умовного розподілу**

$$P\{X = x_k / Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_k; Y = y_j\},}{P\{Y = y_j\}}. \quad (1.2)$$

Випадкові величини *X* та *У* називаються **незалежними** тоді, коли при всіх значеннях k та j справедливі співвідношення

$$P\{X = x_k / Y = y_j\} = P\{X = x_k\}. \quad (1.3)$$

Випадкові величини X та Y незалежні тоді і тільки тоді, коли при всіх значеннях k та j виконується рівність

$$P\{X = x_k; Y = y_j\} = P\{X = x_k\} \cdot P\{Y = y_j\}. \qquad (1.4)$$

$$p_{kj} = p_k \cdot p_j. \qquad (1.4')$$

Іншими словами, двовимірний розподіл вектора відновлюється по одновимірних розподілах його координат лише у тому випадку, коли координати вектора є незалежними випадковими величинами.

Приклад 2. В умовах прикладу 1 знайти умовні розподіли $P\{X = x_k / Y = y_j\}$ та з'ясувати питання про те, чи є випадкові величини X та Y залежними.

Розв'язання. На підставі формули (1.2) знайдемо умовний розподіл X при $Y = -2$:

$$P\{X = 0 / Y = -2\} = \frac{0.15}{0.5} = 0.3; \; P\{X = 1 / Y = -2\} = \frac{0.25}{0.5} = 0.7.$$

Аналогічно одержуємо умовний розподіл при $Y = -1$ та

$$Y = 2. \; P\{X = 0 / Y = -1\} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2.$$

$$P\{X = 1 / Y = -1\} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8.$$

$$P\{X = 0 / Y = 2\} = \frac{0.25}{0.25} = 1.$$

$$P\{X = 1 / Y = 2\} = \frac{0}{0.15} = 0.$$

Випадкові величини X та Y є залежними, наприклад, тому що $P\{X = 0\} = 0.45 \neq P\{X = 0 / Y = -2\} = 0.3$.

1.3 Математичне сподівання функції випадкового вектора

Теорема 1. Якщо відомий розподіл дискретного випадкового вектора $\vec{X}(X;Y)$, то математичне сподівання випадкової величини $Z=g(X,Y)$ знаходиться за формулою

$$Mg(X,Y)=\sum_k\sum_j g(x_k,y_j)\,p_{kj,}\,. \tag{1.5}$$

Зокрема, якщо випадкова величина $g(X,Y)$ дорівнює X, $У$, $X+Y$, XY, приходимо до формул:

$$MX=\sum_k\sum_j x_k p_{kj,}\,;MY=\sum_k\sum_j y_j p_{kj,}\,;M(X+Y)=\sum_k\sum_j (x_k+y_j)\,p_{kj,}\,;$$

$$M(X\cdot Y)=\sum_k\sum_j x_k y_j p_{kj,}\,. \tag{1.6}$$

Із формул (1.6), $(1.4')$ виходять такі властивості математичного сподівання.

Теорема 2. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X+Y)=MX+MY\,. \tag{1.7}$$

Теорема 3. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин X та $У$ дорівнює добутку математичних сподівань цих випадкових величин

$$M(X\cdot Y)=MX\cdot MY\,. \tag{1.8}$$

Доведения

$$M(X\cdot Y)=\sum_k\sum_j x_k y_j p_{kj,}=\sum_k\sum_j x_k p_k y_j p_j=MX\cdot MY\,.$$

1.4 Кореляційний момент випадкових величин

Означення 1. **Кореляційним моментом** (кореляцією, коваріацією) *K(X,Y)* випадкових величин *X* та *У* називається число

$$K(X,У)= M[(X\text{-}MX)(Y\text{-}MY)]. \quad (1.9)$$

Ця величина має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин *X* та У. Скориставшись властивостями математичного сподівання, можна привести формулу (1.9) до вигляду

$$K(\text{X},У) =M(X\cdot У)\text{-}MX\cdot MУ. \quad (1.10)$$

Випадкові величини називаються **корельованими** при $K(X,Y)\neq 0$ і **некорельованими** при $K(X,Y)=0$. Якщо випадкові величини незалежні, то із формули (1.10) виходить, що $K(X,Y)=0$ - із незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість. Якщо $K(X,Y)\neq 0$, то випадкові величини є залежними - із корельованості випадкових величин випливає їх залежність. Однак із $K(X,Y)=0$ не випливає незалежність випадкових величин - із некорельованості випадкових величин не випливає їх незалежність.

Незалежність $\Rightarrow$ некорельованість	Корельованість $\Rightarrow$ залежність

Означення 2. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин *X* та *У* називається число

$$r_{X,Y}=\frac{K(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}. \quad (1.11)$$

Приклад 3. Знайти кореляційний момент координат випадкового вектора, заданого таблицею.

Y / X	1	2
2	0.3	0.5
3	0.1	0.1

Розв'язання. За формулою (1.6) знаходимо

$M(X\cdot Y)=\sum_k\sum_j x_k y_j p_{kj},$ $=1\cdot2\cdot0.3+2\cdot2\cdot0.5+3\cdot1\cdot0.1+$ $+3\cdot2\cdot0.1=3.5$, $MX=2\cdot0.3+2\cdot0.5+3\cdot0.1+3\cdot0.1=2.2$,

$MУ=1\cdot0.3+1\cdot0.1+2\cdot0.5+3\cdot0.1=1.6$.

Тоді за формулою (1.10) одержимо $K(X,У)$=3.5-2.2 1.6= -0.02.

1.5 Регресія

Якщо ми знаємо розподіл однієї координати дискретного випадкового вектора при умові, що інша координата приймає певне значення: $P\left\{Y=y_j \big/ X=x_k\right\},\ j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n$, то можна ввести поняття умовного математичного сподівання.

Означення 1. Умовним математичним сподіванням $M\left(Y/X=x_k\right)$ випадкової величини Y при умові, що випадкова величина X прийняла одне зі своїх можливих значень x_k, називається число, яке знаходиться за формулою

$$M\left(Y/X=x_k\right)=\sum_{j=1}^{m} y_j P\left\{Y=y_j/X=x_k\right\}. \tag{1.12}$$

Аналогічно визначається умовне математичне сподівання $M\left(X/Y=y_j\right)$.

При зміні x від x_1 до x_n змінюється умовне математичне сподівання $M\left(Y/X=x_k\right)$, яке можна розглядати у цьому випадку як функцію *x:*

$$M\left(Y/X=x_k\right)=g(x_k). \tag{1.13}$$

Ця функція називається **регресією** *У* на *X* (*Y* відносно *X*), а її графік $y = g(x)$ - **лінією регресії** *Y* на *X***.** Лінія регресії описує зміну середніх значень випадкової величини *У* при переході від одного значення *X* до іншого.

Аналогічно визначається регресія *X* на *У* (*X* відносно *У*) і лінія регресії *X* на *У*: $M\left(X/Y = y_j\right) = h(y_j),\ x = h(y)$.

Для побудови рівняння регресії за означенням формул (1.12)-(1.13) необхідно знати закон розподілу двовимірного випадкового вектора (таблицю з розділу 1.2). На практиці дослідник звичайно має у своєму розпорядженні лише вибірку (x_i, y_i) пар чисел скінченного обсягу n, а рівняння регресії визначається методом найменших квадратів (МНК). Доведено, що одержана за МНК функція *y=g (x)* є найкращим наближенням до дійсної лінії регресії $y = g(x)$.

Випадкові величини *X* та *У* називаються **лінійно корельованими,** якщо лінії регресії є прямими. Рівняння цих прямих такі:

$$y = MY + \beta_1(x - MX), \qquad (\text{У на X}); \qquad (1.14)$$

$$x = MX + \beta_1'(y - MY), \qquad (\text{X на У}). \qquad (1.14')$$

Якщо лінія регресії *У* на *X* (*X* на *У*) не є прямою, можна використати першу (другу) із прямих регресії (1.14)- $(1.14')$ в якості наближення до істинної лінії регресії. У цьому випадку ця пряма називається прямою **наближеної** регресії. У зв'язку з цим відзначимо, що функція $MY + \beta_1(x - MX)$ (функція $MX + \beta_1'(y - MY)$) є найкращим наближенням до *Y* (до *X*) серед усіх лінійних функцій випадкової величини *X* (випадкової величини *У*).

Кутові коефіцієнти β_1 та β_1' прямих регресії (1.14)- $(1.14')$ називаються відповідно **коефіцієнтами регресії** *У* на *X* та *X* на *У*. При цьому

$$\beta_1 = \frac{K(X,Y)}{DX} = r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \qquad \beta_1' = \frac{K(X,Y)}{DY} = r_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}. \qquad (1.15)$$

Прямі регресії (1.14)- $(1.14')$ проходять через точку з координатами (*MX*; *MY*). При $r_{X,Y} = 1$ прямі регресії співпадають, а при $r_{X,Y} = 0$- паралельні осям координат.

Приклад 4. Задано закон розподілу дискретного випадкового вектора $(X;Y)$.

1 Знайти: а) закони розподілу його координат X та Y; б) їх математичні сподівання та дисперсії; в) кореляційний момент $K(X,Y)$; г) коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$.

2 Знайти умовні розподіли $P\{Y = y_j / X = x_k\}$ та з’ясувати, чи залежні X та Y.

3 Побудувати функцію регресії $M(Y/X = x_k) = g(x_k)$. Знайти рівняння лінійної регресії Y на X та порівняти її на графіку з функцією регресії.

X / Y	0	2	4
-4	0.4	0.05	0.1
-1	0.05	0.2	0.2

X	0	1
P	0.45	0.55

Y	-2	-1	2
P	0.5	0.25	0.25

Розв’язання

1 а) На підставі формули (1.1) одержимо розподіли координат X та Y.

б) $MX = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k$ =0·0.45+2·0.25+4·0.3=1.7;

$MX^2=\sum_{k=1}^{3}x_k^2p_k=4\cdot0.25+16\cdot0.3=5.8; DX=MX^2-(MX)^2=5.8\text{-}1.7^2=$

$=5.8\text{-}2.89=2.91;\ MY=\sum_{j=1}^{2}y_jp_j=\text{-}4\cdot0.55\text{-}1\cdot0.45=\text{-}2.65;$

$MY^2=\sum_{j=1}^{2}y_j^2p_j=(\text{-}4)^2\cdot0.55+(\text{-}1)^2\cdot0.45=8.8+0.45=9.25;$

$DY=MY^2-(MY)^2=9.25\text{-}(2.65)^2=9.25\text{-}7.0225=2.2275.$

в) $M(X\cdot Y)=\sum_k\sum_j x_ky_jp_{kj}=2\cdot(\text{-}4)\cdot0.05+4\cdot(\text{-}4)\cdot0.1+2\cdot(\text{-}1)\cdot0.2+4\cdot(\text{-}1)$ •

• 0.2=-0.4-1.6-0.4-0.8=-3.2; $K(X,Y)=M(X\cdot Y)\text{-}MX\cdot MY=\text{-}3.2\text{-}1.7$ •
• (-2.65) = -3.2+4.505=1.305.

г) $r_{X,Y}=\frac{K(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{1.305}{\sqrt{2.91}\cdot\sqrt{2.2275}}\approx0.513.$

2 Знайдемо умовні розподіли

$P\{Y=y_j/X=x_k\}=\frac{P\{Y=y_j;X=x_k\},}{P\{X=x_k\}}$, (j=1,...,m, k=1,...,n; m=2, k=3), умовні закони розподілу $P\{Y=y/X=x_k\}$ та умовні математичні сподівання $M\left(Y/X=x_k\right)$ для x_1=0, x_2=2, x_3=4.

а) x_1=0. Оскільки $P\{Y=\text{-}4/X=0\}=\frac{P\{Y=\text{-}4,X=0\},}{P\{X=0\}}=\frac{0.4}{0.45}=\frac{8}{9}$, а $P\{Y=\text{-}1/X=0\}=\frac{0.05}{0.45}=\frac{1}{9}$, то умовний закон розподілу $P\{Y=y/X=0\}$:

y_i	-4	-1
$P\{Y=y_i/X=0\}$	8/9	1/9

а умовне математичне сподівання

$$M\left(Y/X=x_k\right)=\sum_{j=1}^{m} y_j P\left\{Y=y_j/X=x_k\right\};$$

$$M(Y/X=0)=-4\cdot\frac{8}{9}-1\cdot\frac{1}{9}=-\frac{33}{9}=-\frac{11}{3}.$$

б) $x_2=2$. Оскільки $P\{Y=-4/X=2\}=\dfrac{0.05}{0.25}=\dfrac{1}{5}$, а $P\{Y=-1/X=2\}=\dfrac{0.2}{0.25}=$ $=\dfrac{4}{5}$, то умовний закон розподілу $P\{Y=y/X=2\}$:

y_i	-4	-1
$P\{Y=y_i/X=2\}$	1/5	4/5

а умовне математичне сподівання

$$M(Y/X=2)=-4\cdot\frac{1}{5}-1\cdot\frac{4}{5}=-\frac{8}{5}.$$

в) $x_3=4$. Оскільки $P\{Y=-4/X=4\}=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}$, а $P\{Y=-1/X=4\}=\dfrac{0.2}{0.3}=$ $=\dfrac{2}{3}$, то умовний закон розподілу $P\{Y=y/X=4\}$:

y_i	-4	-1
$P\{Y=y_i/X=4\}$	1/3	2/3

а умовне математичне сподівання

$$M(Y/X=2)=-4\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{2}{3}=-2.$$

Оскільки, наприклад, $P\{Y=-4/X=0\}=\dfrac{8}{9}\neq P\{Y=-4\}=0.55$, то випадкові величини X та Y - залежні.

3 Функція регресії, тобто залежність умовного математичного сподівання $M(Y/X=x)=g(x)$ від x задається таблицею:

x_k	0	2	4
$M(Y/X=x_k)$	-11/3	-8/5	-2

Рівняння прямої регресії Y на X має вигляд

$$y=MY++\beta_1(x-MX),$$

де $\beta_1=\dfrac{K(X,Y)}{DX}$ = $\dfrac{1.305}{2.91}\approx 0.45$, або y=-2.65+0.45(x-1.7), або y=-3.415+0.45x. (*)

Пряма регресії проходить через точку (*MX*;*MУ*)=(1.7;-2.65). Другу точку на прямій одержимо, підставивши в рівнянні (*) x=0. Тоді друга точка: (0;-3.415). На рисунку 1 зображені функція регресії $y=g(x)$ та пряма регресії.

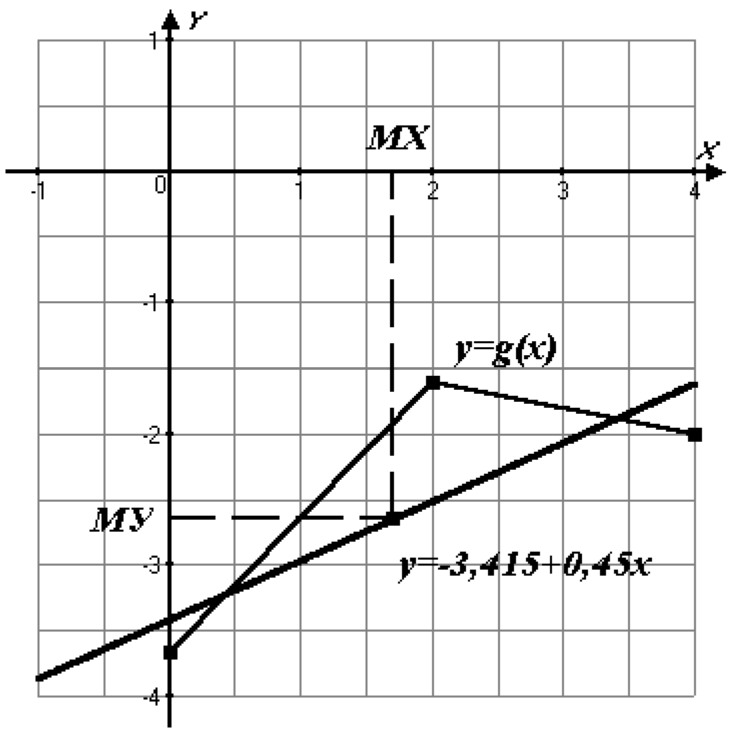


Рисунок 1

2 СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ

2.1 Основні поняття. Статистичний критерій

Статистичною гіпотезою називається припущення відносно параметрів або виду розподілу випадкової величини X.

Статистична гіпотеза називається **простою**, якщо вона повністю визначає розподіл випадкової величини, і **складною,** якщо вона не є простою. Наприклад, якщо $X \sim N(a,4)$, де параметр a є невідомим, то відносно нього можна висунути такі гіпотези: 1) a = 2; 2) a >2. Перша з цих гіпотез є простою, а друга - складною.

Гіпотеза, яка перевіряється, називається **основною** (**нульовою**) та позначається H_0.Разом з гіпотезою H_0 розглядають одну з альтернативних (конкуруючих) гіптез H_1. Наприклад, якщо перевіряється гіпотеза про рівність параметра θ деякому відомому значенню θ_0, тобто $H_0{:}\,\theta=\theta_0$, то однією з альтернативних гіпотез буде $H_1: \theta \neq \theta_0$ (зміст гіпотези записується після двокрапки).

Правило, згідно з яким для кожноє можливої виборки $(x_1; x_2; ..., x_n)$ гіпотеза H_0 відкидається або не відкидається, називається **критерієм** K **.** При цьому:

1 Критерій – це випадкова величина $K = K(X_1, X_2, ..., X_n)$, (статистика), яка обчислюється за вибіркою;

2 Його значення дозволяють робити висновок про **“**розходження вибірки з гіпотезою H_0**”**;

3 Критерій – це випадкова величина, яка при виконанні гіпотези H_0 розподілена за деяким відомим затабульованим законом розподілу (нормальним, τ_n- розподілу, χ^2- розподілу, F - розподілу).

2.2 Знаходження критичної області

Напередодні аналізу вибірки обирається деяка мала ймовірність α, яка називається **рівнем значущості** (істотності). Часто рівень значущості приймають рівним одному із значень 0.1, 0.05, 0.01. Рівень значущості визначає розмір **критичної області.**

Критичною областю $V_к$ називають область відхилення гіпотези H_0. Критична область $V_к$ є такою, що умовна ймовірність влучення статистики K до неї дорівнює рівню значущості α: $P\{K(X_1, X_2, ..., X_n) \in V_k / H_0\} = \alpha$.

Розташування критичної області $V_к$ залежить від формулювання альтернативної гіпотези H_1:

1) якщо перевіряється гіпотеза $H_0\colon \theta = \theta_0$, а альтернативною є гіпотеза $H_1 : \theta < \theta_0$, то критична область $V_к$, яка відповідає значенню α, визначається нерівністю $K < k^л_{кр}$, де $k^л_{кр}$ знаходиться з рівняння $P\{K < k^л_{кр}\} = \int\limits_{-\infty}^{k^л_{кр}} p(k / H_0)dk = \alpha$ (рисунок 2,а);

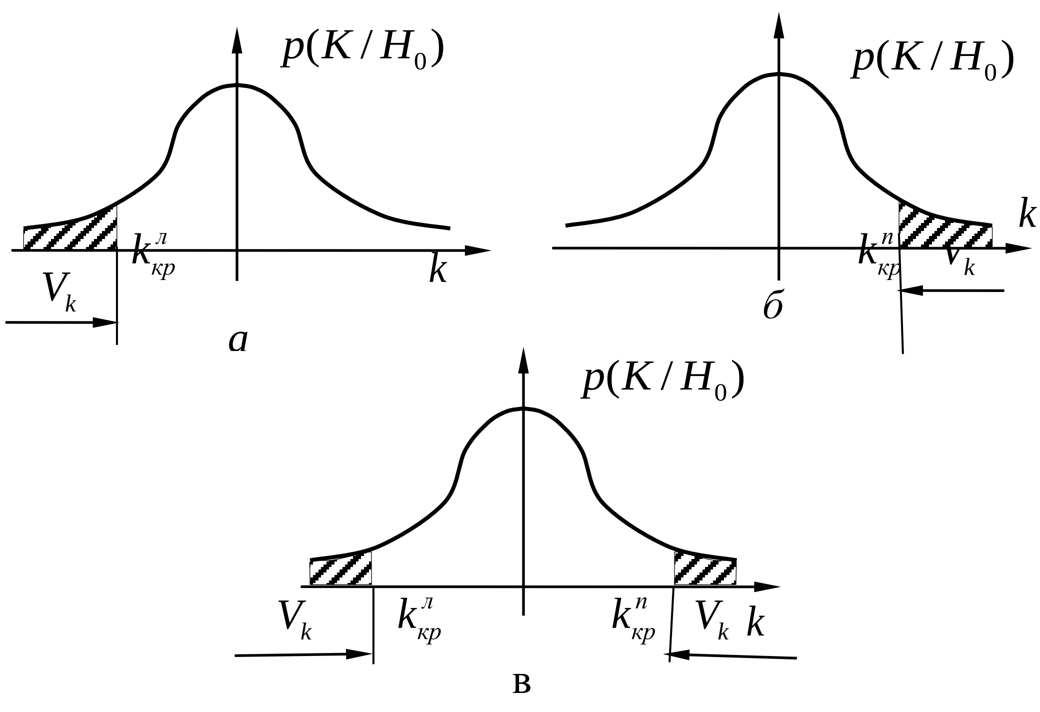


Рисунок 2

2) якщо перевіряється гіпотеза $H_0: \theta = \theta_0$, а альтернативною є гіпотеза $H_1: \theta > \theta_0$, то критична область $V_к$,яка відповідає значенню α, визначається нерівністю $K > k^{п}_{кр}$, де $k^{п}_{кр}$ знаходиться з рівняння $P\{K > k^{\text{ï}}_{\text{êð}}\} = \int\limits_{k^{\text{ï}}_{\text{êð}}}^{+\infty} p(k / H_0) dk = \alpha$ (рисунок 2,б);

3) якщо перевіряється гіпотеза $H_0: \theta = \theta_0$, а альтернативною є гіпотеза $H_1: \theta \neq \theta_0$, то критична область $V_к$,яка відповідає значенню α, визначається нерівностями $K < k^{л}_{кр}$, $K > k^{п}_{кр}$, де $k^{л}_{кр}$ та $k^{п}_{кр}$ знаходяться з рівнянь $P\{K < k^{л}_{кр}\} = \int\limits_{-\infty}^{k^{л}_{кр}} p(k / H_0) dk = \frac{\alpha}{2}$,

$P\{K > k^{\text{ï}}_{\text{êð}}\} = \int\limits_{k^{\text{ï}}_{\text{êð}}}^{+\infty} p(k / H_0) dk = \frac{\alpha}{2}$ (рисунок 2,в).

Критична область на рисунках 2,а-2,в називається відповідно **лівосторонньою**, **правосторонньою**, **двосторонньою**.

2.3 Перевірка статистичних гіпотез

Алгоритм перевірки параметричної статистичної гіпотези складається із таких кроків:

1 Призначити рівень значущості α.

2 Залежно від вигляду альтернативної гіпотези за таблицями В.2, В.4 (додаток В) визначити $k_{кр}$ та критичну область $V_к$.

3 Обчислити $K_{виб}$ - вибіркове значення критерію *К*.

4 Якщо $K_{виб} \in V_к$, то відхилити гіпотезу H_0, як таку, що суперечить результатам спостережень, якщо $K_{виб} \notin V_к$, то прийняти H_0.

2.4 Порівняння вибіркової середньої з математичним сподіванням нормальної сукупності

На практиці часто потрібно оцінити, чи відповідають дійсності рекламні дані про параметри того чи іншого товару. У цьому випадку виникає задача порівняння вибіркової середньої з анонсованим значенням цього параметра.

Якщо дисперсія генеральної сукупності невідома, то в якості критерію перевірки нульової гіпотези обирають випадкову величину $K = \dfrac{\bar{X} - a_0}{S/\sqrt{n}}$, де S- вибіркове скв, $\bar{X}$ - вибіркове середнє, a_0- математичне сподівання. Статистика K має розподіл Стьюдента з $k = n-1$ ступенями свободи.

Приклад 1. Постачальник добрив стверджує, що застосування нової партії добрив забезпечує врожайність пшениці (математичне сподівання) a_0=65ц/га. Добрива внесли на площі в 60га та одержали врожай 58ц/га при вибірковому скв 4ц/га. При α=0.05 оцінити справедливість тверджень постачальника.

Розв'язання. Припускається, що врожайність нормально розподілена випадкова величина. Перевіряється гіпотеза про чисельне значення математичного сподівання при невідомій дисперсії. Нульова гіпотеза $H_0 : a_0$=65 при альтернативній гіпотезі $H_1 : a_0$<65. За алгоритмом розділу 2.3:

1) α=0.05;

2) критична область знаходиться з умови $P\{K < k_{кр}^{л}\} = \alpha = 0.05$ за таблицею В.2: n-1=59, $k_{кр}^{л}$=- $k_{кр}^{п}$=-1.67, $V_k = \{-\infty; -1.67\}$;

3) $K_{виб} = \dfrac{58-65}{4/\sqrt{59}} = -\dfrac{7\sqrt{59}}{4} = -13.44 \in V_к \Rightarrow$ гіпотеза H_0 відхиляється. Постачальник перебільшив у рекламі гіпотетичну врожайність.

2.5 Порівняння двох дисперсій нормальної генеральної сукупності

За незалежними виборками, обсяги яких n_1 та n_2, добутими із нормальних генеральних сукупностей, знайдені вибіркові дисперсії S_X^2 та S_Y^2. Треба порівняти генеральні дисперсії DX та DY. Для перевірки нульової гіпотези $H_0: DX = DY$ при альтернативній $H_1: DX > DY$ ($H_1: DX \neq DY$) застосовують критерій

$$F = \frac{S_Б^2}{S_M^2} \tag{2.1}$$

відношення більшої з вибіркових дисперсій S_X^2 та S_Y^2 до меньшої.

1 Алгоритм розділу 2.3 для випадку альтернативної гіпотези $H_1: DX > DY$ такий:

1) призначити рівень значущості α;

2) за таблицею В.4 за заданим α та числами ступенів свободи $k_1 = n_1 - 1,\ k_2 = n_2 - 1$ (k_1- число ступенів свободи $s_Б^2$) знайти $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ та $V_k = (F_{кр}; +\infty)$;

3) за формулою (2.1) знайти $F_{виб}$;

4) Якщо $F_{виб} \in V_k$, то нульову гіпотезу відхиляють, якщо $F_{виб} \notin V_k$, то приймають.

2 Випадок альтернативної гіпотези $H_1: DX \neq DY$ відрізняється від попереднього тільки тим, що $F_{кр}$ визначають за рівнем значущості $\alpha/2$ з тими ж ступенями свободи k_1 та k_2, тобто $F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2)$.

Приклад 2. За двома незалежними вибірками, обсяги яких n_1 =9 та n_2 =6, добутими із нормальних генеральних сукупностей, знайдені вибіркові дисперсії S_X^2 = 16.2, S_Y^2 = 24.6.

При α=0.1 перевірити гіпотезу $H_0: DX = DY$ при альтернативній гіпотезі $H_1: DX \neq DY$.

Розв'язання

1) α=0.1.

2) За таблицею В визначаємо $F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2)$ = $F_{кр}$ (0.05, 5, 8) = = 3.69, V_k =(3.69; $+\infty$).

3) За формулою (2.1) $F_{виб} = 24.6/16.2 = 1.52$.

4) $F_{виб} \notin V_k \Rightarrow$ нема підстав відхилити гіпотезу H_0.

2.6 Порівняння середніх двох гаусових сукупностей

На практиці часто зустрічається випадок, коли середній результат однієї серії експериментів відрізняється від середнього результату іншої серії. При цому виникає питання, чи можна пояснити виявлений розбіг середніх неминучими помилками експерименту, або він визваний деякими закономірностями. У промисловості задача порівняння середніх виникає при вибірковому контролі якості виробів, вироблених на різних установках, або при різних технологічних режимах, а у фінансовому аналізі - при порівнянні рівня доходності різних активів.

Нехай $(X_1;\ldots;X_n)$ – теоретична вибірка із закону Гауса $N(a_X;\sigma_X^2)$, а $(Y_1;\ldots;Y_m)$ – із закону $N(a_Y;\sigma_Y^2)$. Параметри законів a_X, σ_X^2, a_Y, σ_Y^2 невідомі.

Випадок 1. Розглянемо таку пару гіпотез: H_0: $a_X = a_Y$, H_1: $a_X \neq a_Y$, припускаючи, що $\sigma_X = \sigma_Y$. Побудова правила прийняття рішення грунтується на тому, що випадкова величина

$$T(X_1,\ldots,X_n; Y_1,\ldots,Y_n) = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}, \quad \text{де } S = \sqrt{\frac{(n-1)\ S_X^2 + (m-1)\ S_Y^2}{m+n-2}} \qquad (2.2)$$

при справедливості основної гіпотези H_0 розподілена за законом Стьюдента з $n+m-2$ ступенями свободи.

Перевірка гіпотези за правилом розділу 2.3: 1) - 2) $t_{кр}$ знаходиться за заданим рівнем значущості α, який стоїть у верхньому рядку таблиці В2, та числом ступенів свободи $k=n+m-2$. Область $V_k=(-\infty;t_{кр})\cup(t_{кр};+\infty)$. 3) - 4) Якщо обчислене $T_{виб}\in V_k$, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $T_{виб}\notin V_k$, то приймається.

Випадок 2. При конкуруючій гіпотезі H_1: $a_X>a_Y$ значення $t^{n}_{кр}$ знаходиться за заданим рівнем значущості α, який стоїть у нижньому рядку таблиці В.2. $V_k=(t^{n}_{кр};+\infty)$. Далі, як у випадку 1.

Випадок 3. При конкуруючій гіпотезі H_1: $a_X<a_Y$ значення $t^{n}_{кр}$ знаходиться як і у випадку 2. Оскільки щільність розподілу Стьюдента парна функція, то $t^{л}_{кр}$=- $t^{n}_{кр}$ та критична область $V_k=(-\infty;-t^{n}_{кр})$. Далі перевірка, як і у випадку 1.

Приклад 3. Середній щоденний обсяг продажу за 1-й квартал поточного року для 17 торгових підприємств району А складає 15 тис. гр. од. при вибірковому скв S_X=2.5 тис. гр. од., а для 10 торгових підприємств району В - 13 тис. гр. од. при вибірковому скв S_X=3 тис. гр. од. Вважається, що кожна група продажу – вибірка з гаусової генеральної сукупності. Чи істотна різниця в обсягах продажу в районах А та В при рівні значущості $\alpha=0.05$?

Розв'язання. Виникла задача перевірки нульової гіпотези H_0: $a_X=a_Y$ при альтернативній гіпотезі H_1: $a_X\neq a_Y$.

1) α=0.05;

2) $k=n+m-2$=17+10-2=25. За таблицею В2 одержимо $t_{кр}$=2.06, $V_k=(-\infty;-2.06)\cup(2.06;+\infty)$;

3) За формулою (2.2) $S=\sqrt{\dfrac{6.25\cdot 16+9\cdot 9}{25}}=\sqrt{7.24}\approx 2.69$.

$T_{виб}=\dfrac{15-13}{2.69(1/17+1/10)}=\dfrac{2\sqrt{170}}{2.69\sqrt{27}}\approx 1.87$;

4) $T_{виб}\notin V_k$, гіпотеза H_0 приймається (не суперечить результатам спостережень).

Приклад 4. В умовах задачі з прикладу 3 з'ясувати, чи істотно перевищення обсягу продажу в районі А у порівнянні з обсягом у районі В при рівні значущості $\alpha=0.05$?

Розв'язання. Питання даної задачі відрізняється від питання задачі з прикладу 3 тим, що альтернативною до гіпотези H_0: $a_X=a_Y$ буде гіпотеза H_1: $a_X>a_Y$. У цьому випадку критична область одностороння (зокрема, правостороння). 2) Для $k=25$ та $\alpha=0.05$ за таблицею В2 знайдемо $t^{n}_{кр}=1.708$ та $V_k=(1.708;+\infty)$; 3) $T_{виб}=1.87$; 4) $T_{виб}\in V_k$. Гіпотеза H_0 відхиляється.

2.7 Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції

Нехай випадковий вектор $(X;Y)$ має розподіл Гауса і $\tilde{\rho}_{X,Y}$ – вибірковий коефіцієнт кореляції, вирахуваний за вибіркою обсягу n. Виникає важливе питання про те, чи можна за величиною цього коефіцієнта робити висновок про кореляційний зв'язок між величинами X та Y (значущість величини вибіркового коефіцієнта кореляції $\tilde{\rho}_{X,Y}$).

Проведемо перевірку простої гіпотези H_0: $r=0$ проти складної альтернативи H_1: $r\neq 0$. Побудова правила прийняття рішення грунтується на тому, що випадкова величина

$$T((X_1;Y_1);\ldots;(X_n;Y_n))=\boldsymbol{K}\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}-2}{1-\boldsymbol{R}^2}}\text{, де } \hat{R}=\frac{\hat{K}(X,Y)}{\sqrt{S_X^2\cdot S_Y^2}}$$

(статистика K оцінка кореляційного моменту), при справедливості основної гіпотези має розподіл Стьюдента з $к=n-2$ ступенями свободи.

Гіпотеза H_0 перевіряється як і у розділі 2.6 (випадок 1).

Приклад 5. Випадковий вектор $(X;Y)$ розподілений за законом Гауса. Вибірковий коефіцієнт кореляції $\tilde{\rho}_{X,Y}$, обчислений за вибіркою обсягу $n=32$, дорівнює 0.51. Перевірити при рівні значущості $\alpha=0.05$ гіпотезу H_0: $r=0$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $r\neq 0$.

Розв'язання

1) $\alpha=0.05$;

2) за таблицею В2 за α та $k=n-2=30$ знайдемо $t_{кр}=2.04$, $V_k=(-\infty;-2.04)\cup(2.04;+\infty)$;

3) обчислюємо вибіркове значення статистики $T=\tilde{\rho}_{X,Y}\sqrt{\dfrac{n-2}{1-(\tilde{\rho}_{X,Y})^2}}=0.51\sqrt{\dfrac{30}{1-(0.51)^2}}=3.25$;

4) $T_{виб}\in V_k$. Гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0.05 і, таким чином, вибірковий коефіцієнт кореляції істотно (суттєво) відрізняється від нуля.

2.8 Критерій згоди χ^2 (Пірсона)

Розглянемо випадкову величину X, функція розподілу якої $F_X(x)$ невідома. Висунемо гіпотезу H_0, яка полягає у тому, що $F_X(x)=F_0(x)$, де $F_0(x)$ – деяка функція розподілу. Конкуруюча гіпотеза H_1 полягає у тому, що не виконується основна. Проведемо n незалежних вимірювань випадкової величини X. Їх результатом буде конкретний вектор $(x_1;x_2;...;x_n)$. Тепер виникає запитання, наскільки добре узгоджуються дані вимірювань з гіпотезою H_0. Відповідь на це запитання одержуємо за допомогою критеріїв згоди, найпоширенішим з яких є критерій χ^2.

Розіб'ємо числову вісь на r проміжків, які не перетинаються:

$(-\infty = a_0;\ a_1), [a_1;\ a_2), [a_2;\ a_3),\ldots, [a_{r-1};\ a_r = +\infty)$. Нехай p_i $(i = 1,\ldots, r)$ – теоретична (передбачена) ймовірність попадання випадкової величини X у i–й проміжок, якщо справедлива гіпотеза H_0 :

$$p_i = P\left\{X \in \left[a_{i-1};a_i\right)/H_0\right\} = F_0\left(a_i\right) - F_0\left(a_{i-1}\right).$$

Позначимо через n_i кількість елементів вибірки, що попали у i–й проміжок (n_i – випадкова величина, яка змінюється від вибірки до вибірки). Близькість частоти n_i/n до теоретичної ймовірності p_i, передбаченої гіпотезою H_0, свідчить на користь узгодження гіпотези H_0 з результатом експерименту. За міру відхилення передбаченого закону розподілу $F_0(x)$ від істинного приймається випадкова величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}.$$

Якщо для всіх проміжків, крім крайніх, виконана умова $np_i \geq 5$, а для крайніх $np_i \geq 1$, то випадкова величина χ^2 при $n \to \infty$ має розподіл χ^2 з $r-1$ ступенями свободи. Для перевірки гіпотези H_0:

1 Задамо рівень значущості α.

2 Знайдемо за таблицею В3 додатка В число $\chi^2_{кр} = \chi^2_{r-1}(\alpha)$ та критичну область (вона завжди правостороння) $V_k = (\chi^2_{кр};+\infty)$. Число $\chi^2_{кр} = \chi^2_{r-1}(\alpha)$ визначається з рівняння $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{r-1}(\alpha)\} = \alpha$.

3 Позначимо як $\chi^2_{виб}$ обчислене за конкретною вибіркою $(x_1; x_2;...; x_n)$ значення випадкової величини χ^2.

4 Якщо $\chi^2_{виб} \in V_k = (\chi^2_{кр};+\infty)$, то гіпотеза H_0 відхиляється (подія $\{\chi^2 \geq \chi^2_{r-1}(\alpha)\}$ є практично неможливою у даній серії вимірювань, якщо гіпотеза H_0 насправді правильна). Якщо ж $\chi^2_{виб} \notin V_k = (\chi^2_{кр};+\infty)$, то гіпотеза H_0 приймається (гіпотеза H_0 не суперечить результатам експерименту).

У випадку, коли за вибіркою знаходяться s параметрів розподілу $F_0(x)$, то $\chi^2_{кр}=\chi^2_{r-1}(\alpha)$ потрібно замінити на $\chi^2_{r-s-1}(\alpha)$.

Приклад 6. Нехай є вибірка деякої випадкової величини X у вигляді інтервального варіаційного ряду. За критерієм згоди χ^2 (Пірсона) перевірити гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини X для рівня значущості α =0.01.

$(z_{i-1};z_i)$	(15;19)	(19;23)	(23;27)	(27;31)	(31;35)
n_i	45	125	175	115	40

n =500.

Розв'язання

1 Обчислюється $\bar{x}$-вибіркове середнє за сгрупованими даними. Нехай $x_i=\dfrac{z_{i-1}+z_i}{2}$ - середини розрядів (інтервалів).

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot n_i=\frac{17\cdot 45+21\cdot 125+25\cdot 175+115\cdot 29+40\cdot 33}{500}=$$

$$=\frac{765+2625+4375+3335+1320}{500}=24.84.$$

2 S_X^2 - вибіркова дисперсія за сгрупованими даними:

$$S_X^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{5}n_i\cdot x_i^2-n(\bar{x})^2\right)=\frac{1}{499}(45\cdot 289+125\cdot 441+175\cdot 625+$$

$$+115\cdot 841+40\cdot 1089-500\left(\frac{12420}{500}\right)^2)=(13005+55125+109375+96715+$$

$$+43560-308512.8)/499=\frac{92672}{499}=18.57;\ S\approx 4.3.$$

3 $p_j=P\left\{X\in[z_{j-1};z_j)\right\}=\Phi\left(t_j\right)-\Phi\left(t_{j-1}\right);\quad t_j=\dfrac{z_j-\bar{x}}{S}.$

Обчислюємо t_j: t_0=-∞; $t_1=\dfrac{19-24.84}{4.3}$=-1.36; $t_2=\dfrac{23-24.84}{4.3}$=-0.43;

$t_3=\dfrac{27-24.84}{4.3}$=0.50; $t_4=\dfrac{31-24.84}{4.3}$=1.43; $t_5=\dfrac{35-24.84}{4.3}$=2.49;

$t_6=\infty$.

Знайдемо ймовірності : p_1=Ф(-1.36)-Ф(-∞)=0.08;

p_2=Ф(-0.43)-Ф(-1.36)=0.25; p_3=Ф(0.50)-Ф(-0.43)=0.36; p_4=Ф(1.43)-Ф(0.50)=0.23; p_5=Ф(∞)-Ф(1.43)=0.08.

Обчислення оформимо у вигляді таблиці.

$(z_{i-1};z_i)$	n_i	$(t_{i-1};t_i)$	$\Phi(t_i)$	$\Phi(t_{i-1})$	p_i	$n\ p_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
(15;19)	45	(-∞;-1.36)	-0.42	-0.5	0.08	40	25/40
(19;23)	125	(-1.36;-0.43)	-0.17	-0.42	0.25	125	0
(23;27)	175	(-0.43;0.5)	0.19	-0.17	0.36	180	25/180
(27;31)	115	(0.5;1.43)	0.42	0.19	0.23	115	0
(31;35)	40	(1.43;+ ∞)	0.5	0.42	0.08	40	0
$\sum$	500					500	$\chi^2_{виб}$=0.76

$$\chi^2_{виб}=\frac{25}{40}+\frac{25}{180}=\frac{275}{360}=0.76.$$

За таблицею В3 додатка В знаходимо $\chi^2_{кр}=\chi^2_3(0.1)$=6.251. Відхилити гіпотезу H_0 немає підстав. Більш того, оскільки 0.76 набагато менше, ніж 6.251, правильне припущення про справедливість гіпотези H_0.

3 ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

3.1 Початкові поняття

Дисперсійний аналіз - це статистичний метод обробки результатів вимірювань, які залежать від різних діючих одночасно факторів. Цей метод застосовують для з'ясування питання про суттєвість впливу того чи іншого фактора на вимірювану величину. Залежно від кількості факторів, що вивчаються, розрізняють **однофакторний, двофакторний і багатофакторний дисперсійний аналіз.**

Методи однофакторного дисперсійною аналізу можна, наприклад, застосувати для перевірки впливу на продуктивність праці такого якісного фактора, як організація виробництва на кількох однотипних підприємствах. Кількість рівнів цього фактора дорівнює кількості підприємств (кількість способів організації виробництва).

Методи двофакторного дисперсійного аналізу застосовуються для виявлення ступеня впливу на врожайність деякої сільськогосподарської культури таких факторів, як сорт культури і варіант (спосіб) удобрювання. Кількість рівнів першого і другого факторів дорівнює відповідно кількості засіяних сортів культури і кількості можливих варіантів.

3.2 Однофакторний аналіз

Сформулюємо задачу однофакторного дисперсійного аналізу для випадку рівної кількості вимірювань на кожному рівні фактора. Нехай розподілена за законом Гауса випадкова величина *X* вимірюється $m \cdot n$ разів та нехай має місце m рівнів досліджуваного фактора. На кожному рівні проводиться n вимірювань (спостережень). Тоді можливі результати вимірювань можна розбити на m груп - теоретичних (випадкових) виборок

$$
\begin{gathered}
(X_{11}; X_{21}, ..., X_{n1}), \\
(X_{12}; X_{22}, ..., X_{n2}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(X_{1m}; X_{2m}, ..., X_{nm}),
\end{gathered}
$$

де 1-й індекс є номером спостереження, 2-й – номер вибірки (рівня). Припускається, що кожна з цих виборок має рівні, але невідомі дисперсії σ^2 та математичні сподівання $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$.Перевіряється гіпотеза $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m$ рівності середніх, зміст якої полягає у тому, що фактор не впливає на розподіл випадкових величин X_{ij}.

Позначимо через

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}, \quad (j = 1,...,m) \qquad (3.1)$$

середнє на j-му рівні,

$$\overline{X} = \frac{1}{mn}(n\overline{X}_1 + n\overline{X}_2 + ... + n\overline{X}_m) = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + ... + \overline{X}_m}{m} \qquad (3.2)$$

- це загальне вибіркове середнє.

Основна тотожність однофакторного дисперсійного аналізу має вигляд:

$$\sum_{i=j}^{m}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X})^2 = n\sum_{j=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2 \qquad (3.3)$$

або $Q = Q_1 + Q_2$, де доданок $Q_1 = n\sum_{j=1}^{m}(\overline{X}_j - \overline{X})^2$ є сумою квадратів різниць між середніми рівней $\overline{X}_i$ та загальною середньою $\overline{X}$. Доданок Q_1 називається **сумою квадратів відхилень між групами** та характеризує розбіжність між рівнями, вплив фактора. Доданок $Q_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2$ - сума квадратів різниць між окремими спостереженнями та середньою i -го рівня, називається **сумою квадратів внутришньогрупових відхилень** та характеризує розкид всередині груп.

Суму Q з лівої частини (3.3) називають **загальною сумою квадратів відхилень**.

Знаючи суми квадратів відхилень, можна отримати оцінки відповідних дисперсій:

$$S_1^2 = \frac{Q_1}{m-1}, \qquad S_2^2 = \frac{Q_2}{m(n-1)}, \qquad S^2 = \frac{Q}{mn-1} \ , \qquad (3.4)$$

які називаються **факторною, залишковою** та **загальною дисперсією.** У знаменниках формул (3.4) стоять числа ступенів свободи. **Число ступенів свободи** визначається як загальна кількість спостережень мінус кількість рівнянь, яка їх пов'язує. Тому для S_1^2 число ступенів свободи $k_1 = m-1$, оскільки для його обчислення використовують m групових середніх, пов'язаних між собою рівнянням (3.2). Для S_2^2 число ступенів свободи $k_2 = m(n-1)$, оскільки для його обчислення використовують всі $m \cdot n$ спостережень, пов'язаних між собою m рівняннями (3.1).

Можна показати, що у випадку справедливості гіпотези H_0 (рівність середніх) статистики S_1^2 , S_2^2 , S^2 є спроможними, незсуваними оцінками невідомої дисперсії σ^2. Тому S_1^2 та S_2^2 не відрізняються суттєво одна від іншої, а їх **відношення** S_1^2 / S_2^2 **близьке до одиниці**. Якщо гіпотеза H_0 неправильна (значний вплив фактора), то факторна дисперсія S_1^2 значно більша, ніж залишкова дисперсія S_2^2 , а їх відношення S_1^2 / S_2^2 **суттєво більше одиниці.** Таким чином, питання про справедливість гіпотези H_0 зводиться до питання про справедливість гіпотези про рівність залишкової і факторної дисперсій.

Для порівняння дисперсій (розділ 2.5) застосовують статистичний критерій Фішера

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (3.5)$$

з $k_1 = m-1$ та $k_2 = m(n-1)$ ступенями свободи.

Результати спостережень доцільно подати у вигляді таблиці

.

Номер вибірки (рівень фактора)	Спостереження	Сума	Групова середня
1	$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}$	$T_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \cdot T_1$
2	$x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}$	$T_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	$\bar{x}_2 = \frac{1}{n} \cdot T_2$
…	…	…	…
m	$x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}$	$T_m = \sum_{i=1}^{n} x_{im}$	$\bar{x}_m = \frac{1}{n} \cdot T_m$
Всього		$G = \sum_{j=1}^{m} T_j$	$\bar{x} = \frac{G}{m}$

Обчислення зважених сум квадратів, що входять до s^2, s_0^2, s_A^2, зручно проводити за формулами:

$$Q = A - C, \qquad Q_1 = B - C, \qquad Q_2 = A - B,$$

де $$A = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \sum_{i=2}^{n} x_{i2}^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_{im}^2, \quad B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} T_j^2, \quad C = \frac{G^2}{mn}.$$

Розрахунок оцінок дисперсій зручно оформити у вигляді таблиці, що називається таблицею дисперсійного аналізу.

Складові дисперсії	Зважена сума квадратів	Число ступенів свободи	Оцінка дисперсії
Міжгрупова (факторна)	$B–C$	$m–1$	s_1^2
Внутрішньогрупова (залишкова)	$A–B$	$m\,(n–1)$	s_2^2
Повна (загальна)	$A–C$	$m\,n–1$	s^2

Приклад 1. Нехай є 4 партії сировини для текстильної промисловості. З кожної партії відібрано по 5 зразків та проведено випробування на визначення величини розривного навантаження. Результати випробувань наведені в таблиці. Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0.1$ гіпотезу про рівність середніх. Припускається, що вимірювана величина розподілена за законом Гауса.

Розв'язання. Заповнимо таблицю.

Рівень фактора	Спостереження	Обсяг вибірки	Сума	Групова середня
1	200, 140, 170, 145, 165	5	T_1=820	$\bar{x}_1 = 164$
2	190, 150, 210, 150, 150	5	T_2=850	$\bar{x}_2 = 170$
3	230, 190, 200, 190,200	5	T_3=1010	$\bar{x}_3 = 202$
4	150, 170, 150, 170, 180	5	T_4=820	$\bar{x}_4 = 164$
Всього		mn=20	G=3500	$\bar{x} = 872.5$

Обчислимо суми квадратів спостережень:

1) A=100[(20^2+14^2+17^2+14.5^2+16.5^2)+(19^2+15^2+21^2+15^2+ + 15^2)+(23^2+19^2+20^2+19^2 +20^2)+(15^2+17^2+15^2+17^2+18^2)]=624750;

2) $B = (820^2 + 840^2 + 1010^2 + 820^2)/5$=617480;

3) $C = \dfrac{3500^2}{20}$=612500.

Тоді $Q_1 = B - C$=4980, $Q_2 = A - B$=7270, $Q = A - C$=12250.

Заповнимо тепер таблицю дисперсійного аналізу.

Складові дисперсії	Зважена сума квадратів	Число ступенів свободи	Оцінка дисперсії
Міжгрупова	4980	3	1660
Внутрішньогрупова	7270	16	454.4
Повна	12250	19	644.7

Перевірка гіпотези H_0:

1) α=0.1.

2) k_1=3, k_2=16. За останньою таблицею визначаємо $F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2) = F_{кр}$(0.05, 3, 16) = 3.24, V_k=(3.24; $+\infty$).

3) За формулою (3.5) $F_{виб} = S_1^2 \big/ S_2^2$ =1660/454.4=3.65.

4). $F_{виб} \in V_k \Rightarrow$ гіпотеза H_0 відхиляється. Для різних партій сировини розривне навантаження різне.

n	F_1	F_2	F_3
1	24	74	52
2	26	82	63
3	25	64	72
4	27	72	64
5	28	84	48

Приклад 2. Нехай 3 вибірки (рівня фактора) одержані з нормальних генеральних сукупностей з рівними дисперсіями. Перевірити гіпотезу H_0 про рівність середніх при рівні значущості α=0.05.

Розв'язання. Заповнимо таблицю.

Рівень фактора	Спостереження	Обсяг вибірки	Сума	Групова середня
1	24, 26, 25, 27, 28	5	T_1=130	$\bar{x}_1$=26
2	34, 30, 31, 29, 32	5	T_2=156	$\bar{x}_2$=31.2
3	30, 28, 27, 30,29	5	T_3=144	$\bar{x}_3$=28.8
Всього		mn=15	G=430	$\bar{x}$=143.3

Обчислимо суми квадратів спостережень:

4) A=(24²+26²+25²+27²+28²)+(24²+30²+31²+29²+32²)+(30²+ + 28²+27²+30² +29²)=12426;

5) $B = (130^2 + 156^2 + 144^2)/5$=12394.4;

6) $C = \dfrac{430^2}{15}$=12326.7.

Тоді $Q_1 = B - C$=33.9, $Q_2 = A - B$=31.6, $Q = A - C$=99.3.

Заповнимо тепер таблицю дисперсійного аналізу.

Складові дисперсії	Зважена сума квадратів	Число ступенів свободи	Оцінка дисперсії
Міжгрупова	67.8	2	33.9
Внутрішньогрупова	31.6	12	2.6
Повна	99.3	14	7.1

Перевірка гіпотези H_0:

1) α=0.05.

2) k_1=2, k_2=12. За останньою таблицею визначаємо $F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2) = F_{кр}$(0.025, 2, 12) = 5.10, V_k=(5.10; $+\infty$).

3) За формулою (3.5) $F_{виб} = S_1^2 / S_2^2$ =33.9/2.6=13.04.

4) $F_{виб} \in V_k \Rightarrow$ гіпотеза H_0 відхиляється.

4 ОПИС ТА ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РГР З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

4.1 Статистична обробка результатів вимірювань

1 Початкові дані – 36 значень випадкової величини X **:**

7.88	7.52	9.48	9.56	9.36	9.72	8.98	8.88	10.34	10.36	10.38	10.44
10.38	11.22	10.80	10.36	11.20	10.80	12.32	13.08	12.88	12.40	12.20	12.70
13.80	12.70	13.82	14.68	15.78	14.76	15.88	14.46	15.40	15.66	17.10	16.86.

2 Вибіркові середнє та дисперсія:

$$\overline{x} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i = \mathbf{12.05}; \qquad s^2 = \frac{1}{35}\left(\sum_{i=1}^{36} x_i^2 - 36(\overline{x})^2\right) = \mathbf{6.6046}; \ s = \mathbf{2.5699}.$$

Впорядкований за зростанням масив x (варіаційний ряд вибірки):

7.52, 7.88, 8.88, 8.98, 9.36, 9.48, 9.56, 9.72, 10.34, 10.36, 10.36, 10.38, 10.38, 10.44, 10.80, 10.80, 11.20, 11.22, 12.20, 12.32, 12.40, 12.70, 12.70, 12.88, 13.08, 13.80, 13.82, 14.46, 14.68, 14.76, 15.40,15.66,15.78, 15.88, 16.86, 17.10.

3 Групування даних: $\max\{x_i\} = \mathbf{17.10;}$ $\min\{x_i\} = \mathbf{7,52;}$

$a'_0 = 6 \quad x_1^* = 7 \quad x_2^* = 9 \quad x_3^* = 11 \quad x_4^* = 13 \quad x_5^* = 15 \quad x_6^* = 17$

$a_0 = -\infty \quad a_1 = 8 \quad a_2 = 10 \quad a_3 = 12 \quad a_4 = 14 \quad a_5 = 16 \quad a'_6 = 18$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 6 \quad n_3 = 10 \quad n_4 = 9 \quad n_5 = 7 \quad n_6 = 2$

4 Гістограма

5 Вибіркове середнє та дисперсія за сгрупованими даними:

$$\overline{x}* = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} n_j x_j^* = \mathbf{12.0556;}$$

$$s^2* = \frac{1}{35}\left(\sum_{i=1}^{6} n_j (x_j^*)^2 - 36(\overline{x}*)^2\right) = \mathbf{6.7397;}$$

$$s^* = \mathbf{2.5961.}$$

Рисунок 3

Гістограма нагадує графік нормального закону. Природно виникає припущення про те, що випадкова величина, яка досліджується, розподілена за нормальним законом $N(\overline{x}*, s^2*)$.

6 Перевірка гіпотези про нормальний розподіл випадкової величини, що досліджується за допомогою критерію χ^2:

а) обчислення ймовірностей:

$$p_j = \mathrm{P}\left\{\mathrm{X} \in [a_{j-1}; a_j)\right\} = \Phi\left(t_j\right) - \Phi\left(t_{j-1}\right);$$

$$t_j = \frac{a_j - \overline{x}^*}{s^*};$$

б) вибіркове значення χ^2:

j	a_j	t_j	$\Phi(t_j)$	p_j	$n \cdot p_j$	χ_j^2
0	$-\infty$	$-\infty$	-0.5			
1	8	-1.562	-0.441	0.0591	2.1284	0.0077
2	10	-0.792	-0.286	0.1551	5.5843	0.0309
3	12	-0.021	-0.008	0.2772	9.9800	0.0000
4	14	0.749	0.2731	0.2816	10.1378	0.1277
5	16	1.5194	0.4357	0.1626	5.8535	0.2445
6	$+\infty$	$+\infty$	0.5	0.0643	2.3160	0.0431

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{6} \frac{\left(n_j - 36 p_j\right)^2}{36 p_j} = 0.434;$$

в) поріг випробування $\chi^2_{r-l-1}(\varepsilon) = \chi^2_3(0.1) = 6.251$;

г) висновок: *гіпотеза не суперечить результатам випробувань.*

7 Довірчі інтервали рівня значущості ε для математичного сподівання a та середнього квадратичного відхилення σ. $n = 36$.

$$\frac{t_\varepsilon(35)}{\sqrt{36}} \left[\overline{x} - \frac{t_\varepsilon(n-1)}{\sqrt{n}} s; \overline{x} + \frac{t_\varepsilon(n-1)}{\sqrt{n}} s\right]; \quad z_\varepsilon^{(1)} \; z_\varepsilon^{(2)} \quad \left[z_\varepsilon^{(1)} \cdot s; z_\varepsilon^{(2)} \cdot s\right].$$

$\varepsilon = 0.1$; 0.2858 $a \in [11.33;\ 12.79]$, 0.845 1.23 $\sigma \in [2.17;\ 3.24]$;

$\varepsilon = 0.05$; 0.3435 $a \in [11.18;\ 12.94]$, 0.819 1.28 $\sigma \in [2.10;\ 3.37]$;

$\varepsilon = 0.01$; 0.4612 $a \in [10.88;\ 13.24]$, 0.772 1.40 $\sigma \in [1.97;\ 3.70]$;

8 Інструкція щодо виконання завдання N1. Обчислення у завданні N1 можна виконати за допомогою PASCAL програм CB_11 та CB_1B.Початковими даними для CB_11 є вибірка $(x_1, \ldots, x_{36})$ (масив $x[1..36]$), а результатом роботи – числа $xm(\overline{x}), s2(s^2), s$, а також ця ж вибірка впорядкована за зростанням (див. п.2). Студент повинен провести групування даних по шести інтервалах та одержати масиви $xz[1..6]$ (x_j^*), $a[1..5]$ (a_j), $nt[1..6]$ (nj) (див. п.3), які є початковими

даними для програми CB_1B. Результатом роботи цієї програми є числа $xmz\,(\overline{x}*)$, $s2z\,(s^2*)$, $sz\,(s*)$, набір даних для таблиці п.6 обчислення критерію χ^2, а також $xi2$ - вибіркове значення критерію χ^2.

4.2 Обробка результатів вимірювань двомірної випадкової величини

1 Знаходження вибіркових характеристик:

x_i	-2.71	-2.95	-2.04	-3.02	-2.72	-2.27	-1.44	-0.95	-1.22	-0.30	-1.25	-0.88
y_i	1.38	1.07	1.14	1.22	1.32	1.49	1.78	1.55	1.77	2.00	1.73	1.90

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = -1.8125;\quad \overline{y} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_i = 1.5202;$$

$$s_X^2 = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12(\overline{x})^2\right) = 0.8499;$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{12} y_i^2 - 12(\overline{y})^2\right) = 0.0950;\quad \overline{K}_{X,Y} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 0.2500.$$

2 Складання рівнянь прямих регресії:

Регресія Y на X **Регресія** X на Y

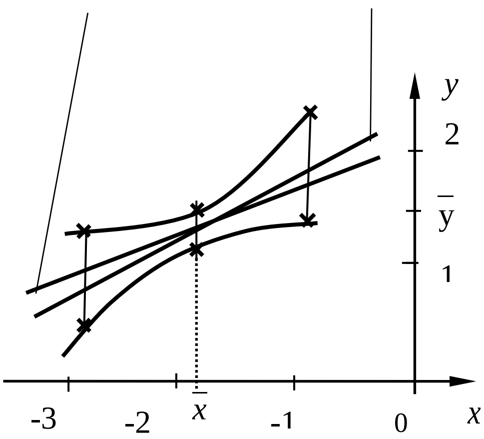


Рисунок 4

$$\overline{\rho}_{X,Y} = \frac{\overline{K}_{X,Y}}{\sqrt{s_X^2 \cdot s_Y^2}} = 0.8800;$$

$$\overline{\beta}_1 = \overline{\rho}_{X,Y} \cdot \frac{s_Y}{s_X} = 0.2942;$$

$$\overline{\beta}_1' = \overline{\rho}_{X,Y} \cdot \frac{s_X}{s_Y} = 2.6322.$$

Пряма регресії Y на X :

$$y = \overline{y} + +\overline{\beta}_1(x - \overline{x}) \Rightarrow y = \overline{\beta}_0 + \overline{\beta}_1 x; \overline{\beta}_0 = \overline{y} - \overline{\beta}_1 \overline{x};$$ *y=0.2942*x + 2.0624.*

Пряма регресії X на Y :

$$x = \overline{x} + +\overline{\beta}'_1(y - \overline{y}) \Rightarrow x = \overline{\beta}_0 + \overline{\beta}'_1 y \; \overline{\beta}'_0 = \overline{x} - \overline{\beta}'_1 \overline{y};$$ *x=2.6322*y -5.8139.*

4.3 Обчислення границь довірчих інтервалів для β_0, β_1 та границь довірчої області

Границі довірчих інтервалів для коефіцієнтів лінійної регресії

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (y=0.2942*x + 2.0624;\ ) \tag{4.1}$$

обчислюються за формулами:

$$\beta_0 \pm t_\varepsilon(n-2)s_e\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n(n-1)s_x^2}}, \tag{4.2}$$

$$\beta_1 \pm t_\varepsilon(n-2)s_e\sqrt{\frac{1}{(n-1)s_x^2}}, \tag{4.3}$$

а границі довірчої області надійності $1-\varepsilon$ для прямої регресії (4.1)

є такі:
$$y + \beta_1(x - \overline{x}) \pm t_\varepsilon(n-2)s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{(n-1)s_x^2}}. \tag{4.4}$$

Побудуємо за формулою (4.4) границі для 3-х точок

$x = \overline{x},\ x = \overline{x} + 1,\quad x = \overline{x} - 1.$

$$x=\overline{x}, \qquad \overline{y}\pm t_{\varepsilon}(n-2)s_e\sqrt{\frac{1}{n}}\,; \tag{4.4.1}$$

$$x=\overline{x}+1, \qquad y+\beta_1\pm t_{\varepsilon}(n-2)s_e\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)s_x^2}}\,; \tag{4.4.2}$$

$$x=\overline{x}-1, \qquad y-\beta_1\pm t_{\varepsilon}(n-2)s_e\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)s_x^2}}\,. \tag{4.4.3}$$

$t_{\varepsilon}(n-2)=t_{0.05}(10)=2.23$, де $s_e^2=\dfrac{(n-1)}{(n-2)}(s_y^2-\beta_1 K_{X,Y})$ - залишкова дисперсія (змінна у програмі CB_2BM називається SE2). Для кожної з формул (4.2), (4.3), (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) програмою CB_2BM обчислюються числа $ДГ\beta 0=dgb0$, $ДГ\beta 1=dgb1$, $ДГО\_1=dgo1$, $ДГО\_2=dgo2$, $ДГО\_3=dgo3$, які є другими доданками у відповідних формулах. Так, $ДГ\beta 1=t_{\varepsilon}(n-2)s_e\sqrt{\dfrac{1}{(n-1)s_x^2}}$, $\quad ДГО\_3=t_{\varepsilon}(n-2)s_e\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{(n-1)s_x^2}}$. За формулами (4.2), (4.3), (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) одержуємо границі довірчих інтервалів. Для коефіцієнта β_0:

$$\beta_0\pm ДГ\beta 0 = 2.0624\pm 0.2263,$$

для коефіцієнта β_1:

$$\beta_1\pm ДГ\beta 1 = 0.2942\pm 0.1123,$$

для значень y, які відповідають трьом значенням x (для довірчої області):

$$x=\overline{x}=-1.8125, \quad \overline{y}\pm ДГО\_1=1.5202\pm 0.0991,$$

$$x=\overline{x}+1=-0.8125, \quad \overline{y}+\beta 1\pm ДГО\_2=1.8144\pm 0.1497,$$

$$x=\overline{x}-1=-2.8125, \quad \overline{y}-\beta 1\pm ДГО\_2=1.226\pm 0.1497.$$

Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції:

1) $\varepsilon = 0.05$.

2) $t_\varepsilon(10) = 2.23, V_k : |t| > 2.23$.

3) $T_{виб} = \dfrac{\bar{\rho}_{X,Y}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\bar{\rho}^2_{X,Y}}} = 5.8442.\ T_{виб} \in V_k \Rightarrow H_0$ відхиляється.

4.4 Дисперсійний аналіз

n	F_1	F_2	F_3
1	46	74	52
2	48	82	63
3	73	64	72
4	52	72	64
5	72	84	48
6	44	68	70
7	66	76	78
8	46	88	68
9	60	70	70
10	48	60	54

Початковою інформацією для програми DA_OA є вибірка, яка задана таблицею з n рядків та m стовпців, де n - кількість спостережень, а m - кількість факторів.

Розглянемо вибірку з $n = 10$, $m = 3$. У десятому рядку програми стоять числа $m = 3$, $n = 10$ та розмірність масиву x, яка дорівнює $m \times n = 30$. Масив x складається із стовпців таблиці, тобто в одномірний масив $x[1..30]$ елементи таблиці вводяться по стовпцях: спочатку стовпець F_1, далі F_2, далі F_3.

Програма обчислює, відповідно, факторну s_1^2, залишкову s_2^2 дисперсію, а також вибіркове значення критерію Фішера $F_{виб}$.

$$s_1^2 = \frac{Q_1}{m-1} = 839.1;\quad s_2^2 = \frac{Q_2}{m(n-1)} = 100.4;\quad F_{виб} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{839.1}{100.4} = 8.36.$$

Перевірка гіпотези H_0:

1) α=0.1;

2) $F\left(\frac{\alpha}{2}, m-1, m(n-1)\right) = F$ (0.05, 2,27) =3.35, V_k =(3.35,∞);

3) $F_{виб} = 8.36 \in V_k \Rightarrow$ гіпотеза H_0 відхиляється. Для своєї вибірки студенту замість $m=3$, $n=10$, $m \times n = 30$ слід увести у текст програми свої значення $m, n, m \times n$, а замість масиву $x[1..30]$ свій масив по стовпцях своєї таблиці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Іохвидович Н.Ю., Могульський Є.З., Поклонський Є.В. Конспект лекцій з курсу “Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики”. - Харків: ХДТУБА, 1999. - 167с.

2 Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. - М.: Наука, 1984.

3 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006.

4 Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под. ред. В.И. Ермакова. - М, 2002.

Додаток А

ІДЗ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ РГР

ІДЗ-А1 Функція регресії та рівняння лінійної регресії

Задано закон розподілу дискретного випадкового вектора $(X;Y)$.

1 Знайти: а) закони розподілу його координат X та Y; б) їх математичні сподівання та дисперсії; в) кореляційний момент $K(X,Y)$; г) коефіцієнт кореляції $r_{X,Y}$.

2 Знайти умовні розподіли $P\{Y = y_j / X = x_k\}$ та з'ясувати, чи залежні X та Y.

3 Побудувати функцію регресії $M(Y / X = x_k) = g(x_k)$. Знайти рівняння лінійної регресії Y на X та порівняти її на графіку з функцією регресії.

В-т	Y / X	-1	0	3	В-т	Y / X	-3	-2	1
1	-1	0.1	0.2	0.3	2	0	0.05	0.4	0.3
	4	0.2	0.1	0.1		5	0.1	0.05	0.1

В-т	Y / X	1	2	2	В-т	Y / X	-3	0	1
3	-1	0.1	0.2	0.4	4	1	0.2	0.3	0.05
	0	0.2	0.05	0.05		2	0.3	0.05	0.1

В-т	Y / X	-1	0	5	В-т	Y / X	-2	-1	0
5	0	0.1	0.3	0.04	6	0	0.1	0.05	0.3
	02	0.06	0.2	0.3		3	0.3	0.01	0.24

В-т	Y / X	-1	2	2	В-т	Y / X	-1	0	3
7	-1	0.1	0.2	0.3	8	-1	0.1	0.2	0.3
	1	0.2	0.1	0.1		4	0.2	0.1	0.1

В-т	*Y* *X*	-1	0	2	В-т	*Y* *X*	-1	0	3
9	-1	0.4	0.1	0.1	10	0	0.2	0.1	0.2
	1	0.2	0.1	0.1		1	0.1	0.3	0.1

В-т	*Y* *X*	-1	1	2	В-т	*Y* *X*	-3	0	1
11	1	0.2	0.1	0.1	12	2	0.1	0.1	0.3
	2	0.2	0.2	0.2		4	0.1	0.2	0.2

В-т	*Y* *X*	-3	-2	1	В-т	*Y* *X*	1	2	3
13	-2	0.1	0.1	0.2	14	0	0.3	0.1	0.2
	3	0.1	0.3	0.2		1	0.1	0.05	0.25

В-т	*Y* *X*	3	1	5	В-т	*Y* *X*	-2	0	3
15	2	0.4	0.1	0.15	16	-2	0.1	0.2	0.1
	6	0.05	0.2	0.1		0	0.2	0.3	0.1

В-т	*Y* *X*	-2	1	2	В-т	*Y* *X*	-1	2	3
17	5	0.01	0.06	0.5	18	1	0.1	0.2	0.35
	10	0.23	0.1	0.1		4	0.2	0.1	0.05

В-т	*Y* *X*	-3	-1	0	В-т	*Y* *X*	0	1	2
19	3	0.04	0.06	0.3	20	3	0.1	0.3	0.1
	8	0.1	0.2	0.3		7	0.2	0.1	0.2

В-т	*Y* *X*	1	3	6	В-т	*Y* *X*	-1	0	3
21	2	0.1	0.3	0.1	22	-3	0.2	0.3	0.1
	10	0.05	0.39	0.06		2	0.1	0.1	0.2

В-т	Y \ X	-5	0	2	В-т	Y \ X	-1	0	3
23	1	0.06	0.07	0.1	24	-1	0.1	0.2	0.3
	3	0.03	0.3	0.44		4	0.2	0.1	0.1

В-т	Y \ X	-2	-1	2	В-т	Y \ X	-3	-1	2
25	0	0.1	0.2	0.1	26	3	0.4	0.02	0.13
	3	0.2	0.1	0.3		8	0.1	0.05	0.3

В-т	Y \ X	-2	0	1	В-т	Y \ X	-3	-2	-1
27	-3	0.1	0.2	0.1	28	4	0.04	0.2	0.1
	-2	0.3	0.1	0.2		6	0.2	0.1	0.36

В-т	Y \ X	-1	0	2	В-т	Y \ X	1	2	3
29	-2	0.3	0.1	0.2	30	-3	0.2	0.3	0.1
	3	0.1	0.1	0.2		-2	0.1	0.1	0.2

В-т	Y \ X	-1	2	3	В-т	Y \ X	0	2	5
31	2	0.3	0.1	0.2	32	-3	0.3	0.1	0.2
	6	0.1	0.2	0.1		-1	0.1	0.2	0.1

ІДЗ-А2 Порівняння вибіркової середньої з математичним сподіванням

При рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити нульову гіпотезу про те, що задане значення a_0 є математичним сподіванням нормально розподіленої випадкової величини при альтернативній гіпотезі $H_1 : a_0 \neq \overline{x}$, якщо відомо вибіркове середнє $\overline{x}$ та скв s_1 вибірки обсягу n=10.

Вар-т	a_0	$\overline{x}$	s_1	Вар-т	a_0	$\overline{x}$	s_1
1	10	12	1	16	100	96	6
2	20	22	4	17	80	78	4
3	20	18	2	18	80	84	3
4	40	44	3	19	50	48	2
5	58	56	4	20	60	54	3
6	60	64	6	21	90	96	5
7	70	66	8	22	80	86	4
8	70	72	5	23	70	68	5
9	50	48	2	24	70	74	6
10	30	34	4	25	60	62	3
11	50	52	3	26	42	46	2
12	90	88	6	27	60	62	3
13	86	84	5	28	30	34	2
14	80	78	4	29	40	38	4
15	60	66	5	30	84	80	6

ІДЗ-А3 Порівняння дисперсій двох нормальних генеральних сукупностей

При рівні значущості $\alpha = 0.1$ перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин при альтернативній гіпотезі $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Вар-т	x_i	n_i	y_i	m_i	Вар-т	x_i	n_i	y_i	m_i
1	142 145 146 148	3 1 2 4	140 146 147 151	5 3 2 2	16	42 45 46 50	15 17 12 16	84 87 92 96	3 2 4 1
2	37 38 40 41 42	2 1 4 2 6	38 39 40 41 42	4 3 2 2 3	17	30 32 33 34 36	4 5 8 1 2	30 31 32 34 35	6 4 3 5 2

3	39 43 45 47 51	4 2 3 4 2	75 80 84 91 94	4 2 3 4 2	18	42 44 48 50 53	4 8 3 5 10	44 45 46 51 55	16 12 11 6 5
4	3.5 3.7 3.9 4.0 4.1	1 3 5 4 4	3.6 3.7 3.8 4.4 4.2	3 5 2 1 4	19	31 35 40 42 44	7 3 4 2 4	29 32 33 35 39	8 9 12 10 11
5	9 10 11 12 14	4 5 3 2 1	9 10 11 13 14	5 6 4 8 3	20	61 62 64 67 68	5 4 6 2 3	60 63 64 68 70	4 3 2 6 5
6	6.1 6.5 6.6 7.0 7.4	2 3 1 4 5	5.8 6.0 6.2 6.3 6.8	6 4 5 2 3	21	12 16 19 21 35	10 12 14 9 5	14 15 20 21 34	7 6 8 10 9
7	9 10 11 12 14	3 4 2 2 4	18 19 20 22 23	6 3 4 2 5	22	44 45 48 52 54	5 2 3 4 6	43 46 48 50 53	2 3 4 4 6
8	142 145 146 148	3 1 **2** 4	140 146 147 151	5 3 2 2	23	42 45 46 50	15 17 12 16	84 87 92 96	3 2 4 1
9	37 38 40 41 42	2 1 4 2 6	38 39 40 41 42	4 3 2 2 **3**	24	30 32 33 34 36	4 5 8 1 2	30 31 32 34 35	6 4 3 5 2

10	39	4	75	4	25	42	4	44	16
	43	2	80	2		44	8	45	12
	45	3	84	3		48	3	46	11
	47	4	91	4		50	5	51	6
	51	2	94	2		53	10	55	5
11	3.5	1	3.6	3	26	31	7	29	8
	3.7	3	3.7	5		35	3	32	9
	3.9	5	3.8	2		40	4	33	12
	4.01	4	4.4	1		42	2	35	10
12	9	4	9	5	27	61	5	60	4
	10	5	10	6		62	4	63	3
	11	3	11	4		64	6	64	2
	12	2	13	8		67	2	68	6
	14	1	14	3		68	3	70	5
13	6.1	2	5.8	6	28	12	10	14	7
	6.5	3	6.0	4		16	12	15	6
	6.6	1	6.2	5		19	14	20	8
	7.0	4	6.3	2		21	9	21	10
	7.4	5	6.8	3		35	5	34	9
14	9	3	18	6	29	44	5	43	2
	10	4	19	3		45	2	46	3
	11	2	20	4		48	3	48	4
	12	2	22	2		52	4	50	4
	14	4	23	5		54	6	53	6
15	-8	3	10	4	30	23	8	30	7
	-5	2	14	10		25	7	35	8
	-3	4	15	9		26	6	41	2
	1	5	18	7		28	9	46	3
	3	4	21	4		24	6	42	6

ІДЗ-А4 Порівняння середніх двох гаусових сукупностей

За двома незалежними вибірками, обсяги яких n та m , здобутими з нормальних генеральних сукупностей, знайдені вибіркові середні $\bar{X}$ **,** $\bar{Y}$ та вибіркові дисперсії S_X^2**,** S_Y^2**.** При рівні значущості $\alpha = 0.01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a_X = a_Y$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : a_X \neq a_Y$.

Вказівка. Попередньо перевірити рівність дисперсій за критерієм Фішера.

в-т	n	$\bar{X}$	S_X^2	m	$\bar{Y}$	S_Y^2
1	10	14.3	1.7	8	15.3	2.2
2	12	31.2	0.84	18	29.2	0.40
3	10	36.2	2.67	12	35.1	2.55
4	16	37.5	1.21	25	36.8	1.44
5	17	39.5	1.29	13	38.3	3.08
6	12	42.3	1.41	18	45.4	1.62
7	9	51.5	2.35	12	48.8	3.41
8	11	22.3	1.15	15	25.2	1.95
9	13	28.8	1.51	18	25.1	**2.55**
10	15	34.8	2.12	21	38.1	3.51
11	10	27.8	2.52	14	30.4	3.81
12	12	32.5	2.81	15	35.1	4.27
13	11	39.4	3.12	16	42.2	5.18
14	15	42.3	2.33	25	45.3	3.38
15	13	23.4	1.41	17	25.1	2.55
16	14	2.52	1.31	11	2.39	1.22
17	**17**	43.5	1.14	12	42.1	1.07
18	9	30.2	1.21	13	32.1	1.41
19	15	33.5	1.15	18	32.5	1.27
20	13	21.3	1.25	17	23.2	1.37
21	10	14.3	1.01	15	15.2	1.34
22	16	12.1	1.09	17	13.5	1.2
23	14	31.5	1.2	19	30.1	1.5
24	11	20.4	1.51	14	21.9	1.72
25	16	31.8	1.25	19	33.1	1.48

26	13	42.2	4.5	17	45.3	6.2
27	17	49.1	6.2	21	51.8	7.11
28	12	33.4	1.21	8	31.3	1.02
29	13	24.5	1.11	10	26.1	0.9
30	18	29.3	1.25	12	27.5	1.12

ІДЗ-А5 Застосування критерію згоди χ^2 (Пірсона)

Нехай є вибірка деякої ВВ X у вигляді інтервального статистичного ряду. Треба: а) побудувати гістограму та графік емпіричної функції розподілу $F_X^*(x)$; б) у припущенні нормального закону розподілу ВВ X знайти довірчий інтервал для математичного сподівання *a* з довірчою ймовірністю $\gamma = 0{,}95$; в) за критерієм згоди Пірсона перевірити гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини X для рівня значущості α=0,01.

1

Інтервал	(21;23)	(23;25)	(25;27)	(27;29)	(29;31)
Частота	30	70	65	30	5

2

Інтервал	(40;45)	(45;50)	(50;55)	(55;60)	(60;65)
Частота	50	100	105	40	5

3

Інтервал	(100;105)	(105;110)	(110;115)	(115;120)	(120;125)
Частота	45	105	100	40	10

4

Інтервал	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)
Частота	60	140	135	55	10

5

Інтервал	(80;90)	(90;100)	(100;110)	(110;120)	(120;130)
Частота	80	165	170	65	20

6

Інтервал	(140;145)	(145;150)	(150;155)	(155;160)	(160;165)
Частота	60	140	135	55	10

7

Інтервал	(170;185)	(185;200)	(200;215)	(215;230)	(230;245)
Частота	80	165	170	65	20

8

Інтервал	(490;495)	(495;500)	(500;505)	(505;510)	(510;515)
Частота	110	240	235	95	20

9

Інтервал	(130;150)	(150;170)	(170;190)	(190;210)	(210;230)
Частота	95	200	205	80	20

10

Інтервал	(150;175)	(175;200)	(200;225)	(225;250)	(250;275)
Частота	110	240	235	95	20

11

Інтервал	(210;230)	(230;250)	(250;270)	(270;290)	(290;310)
Частота	125	270	275	110	20

12

Інтервал	(50;55)	(55;60)	(60;65)	(65;70)	(70;75)
Частота	145	310	305	120	20

13

Інтервал	(60;85)	(85;110)	(110;135)	(135;160)	(160;185)
Частота	125	270	275	110	20

14

Інтервал	(160;170)	(170;180)	(180;190)	(190;200)	(200;210)
Частота	30	70	65	30	5

15

Інтервал	(150;175)	(175;200)	(200;225)	(225;250)	(250;275)
Частота	160	340	345	135	20

16

Інтервал	(280;290)	(290;300)	(300;310)	(310;320)	(320;330)
Частота	30	70	65	30	5

17

Інтервал	(140;145)	(145;150)	(150;155)	(155;160)	(160;165)
Частота	45	105	100	40	10

18

Інтервал	(12;16)	(16;20)	(20;24)	(24;28)	(28;32)
Частота	65	135	140	55	5

19

Інтервал	(20;35)	(35;50)	(50;65)	(65;80)	(80;95)
Частота	80	170	165	70	15

20

Інтервал	(140;160)	(160;180)	(180;200)	(200;220)	(220;240)
Частота	65	135	140	55	5

21

Інтервал	(40;45)	(45;50)	(50;55)	(55;60)	(60;65)
Частота	25	115	100	40	20

22

Інтервал	(10;20)	(20;30)	(30;40)	(40;50)	(60;70)
Частота	50	110	145	75	20

23

Інтервал	(8;9)	(9;10)	(10;11)	(11;12)	(12;13)
Частота	90	155	160	65	30

24

Інтервал	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)	(22;24)
Частота	160	290	285	155	10

25

Інтервал	(120;140)	(140;160)	(160;180)	(180;200)	(200;220)
Частота	90	155	160	70	25

26

Інтервал	(90;100)	(100;110)	(110;120)	(120;130)	(130;140)
Частота	130	260	255	115	40

27

Інтервал	(30;50)	(50;70)	(70;90)	(90;110)	(110;130)
Частота	70	180	190	80	20

28

Інтервал	(15;19)	(19;23)	(23;27)	(31;35)	(35;39)
Частота	65	195	190	50	20

29

Інтервал	(10;30)	(30;50)	(50;70)	(70;90)	(90;110)
Частота	75	220	225	60	20

30

Інтервал	(5;7)	(7;9)	(9;11)	(11;13)	(13;15)
Частота	55	120	115	80	30

31

Інтервал	(5;15)	(15;25)	(25;35)	(35;45)	(45;55)
Частота	10	60	70	40	20

Завдання А1-РГР. Статистична обробка результатів вимірювань

В-1

5.60	10.8	10.8	10.2	10.4	7.12	6.86	6.10	6.38	7.24	9.88	8.46
11.3	13.7	13.0	9.90	8.40	9.26	9.86	8.50	9.52	11.4	11.5	11.3
11.7	4.72	7.84	6.60	7.66	9.44	9.62	9.22	12.8	12.3	14.4	12.9

В-2

7.10	9.36	9.90	9.60	9.55	9.88	9.68	9.20	9.18	9.35	7.40	7.20
11.2	11.2	11.4	11.8	11.8	11.9	11.8	12.2	11.9	13.3	13.3	13.3
17.8	16.0	15.8	15.5	15.4	15.4	15.2	14.2	14.0	13.8	13.5	13.4

В-3

4.46	4.60	7.66	7.12	7.94	6.10	6.40	9.18	9.84	8.60	9.68	9.08
9.98	32	10.2	10.7	11.8	10.5	11.6	11.1	11.9	10.8	10.5	13.5
13.4	13.5	13.4	13.5	13,3	13.8	12.6	13.8	12.7	15.8	14.5	15.6

В-4

1.90	2.14	3.44	3.34	4.14	3.84	3.16	3.60	6.68	6.10	5.86	5.42
5.28	5.98	5.88	5.36	5.36	5.44	7.36	8.16	7.84	7.20	7.68	8.80
7.70	8.82	7.68	10.8	9.76	10.9	9.44	10.6	10.7	9.90	9.86	11.4

В-5

9.64	8.72	13.4	11.8	11.7	10.7	10.2	10.9	16.9	17.1	16.7	17.4
15.7	15.7	17.2	14.8	16.5	21.7	19.0	21.1	20.6	21.6	19.3	21.6
19.4	25.6	23.2	25.4	23.8	23.7	22.8	22.3	23.3	25.5	27.6	27.8

В-6

9.6	8.94	11.8	10.5	11.5	11.4	11.6	13.0	12.8	12.3	11.4	12.3
13.2	13.9	14.4	15.2	15.8	14.5	15.5	15.3	15.8	14.7	15.8	14.6
17.7	17.0	16.8	16.3	16.4	16.1	16.5	17.6	17.1	16.8	18.1	18.4

В-7

5.44	5.62	5.30	8.00	7.88	7.34	7.34	7.34	7.38	7.44	9.36	10.1
9.82	13.1	9.26	9.92	9.88	7.36	9.49	9.22	9.80	9.80	11.3	12.1
11.8	11.4	11.3	12.0	11.8	11.3	13.4	13.3	14.0	13.8	13.4	15.6

В-8

7.16	8.42	10.6	10.1	9.82	9.24	9.86	11.8	11.1	11.5	12.6	12.2
11.8	11.3	14.1	13.8	13.1	13.3	14.2	14.8	13.4	14.4	14.5	16.3
16.7	15.9	15.8	15.4	15.2	15.8	15.8	15.2	15.7	16.8	17.5	18.5

B-9

4.36	4.36	6.56	7.88	7.76	6.76	6.88	6.76	12.4	13.8	10.7	12.4
13.7	10.8	12.7	13.4	12.0	11.7	14.6	14.6	14.7	14.8	14.4	15.6
15.6	14.4	19.4	21.6	19.2	21.4	19.9	19.7	18.6	18.7	22.8	22.3

B-10

15.4	15.6	15.9	16.4	16.5	17.2	17.2	17.5	17.8	17.9
8.94	9.68	10.3	10.3	10.4	10.8	10.8	11.2	12.3	12.3
12.8	12.8	12.9	13.1	14.3	14.4	14.5	14.7	14.8	14.8

B-11

9.80	8.74	11.8	10.5	11.5	11.4	11.6	13.0	12.8	12.3	12.4	12.3
13.2	13.9	14.4	15.2	15.8	14.5	15.5	15.3	15.8	14.7	15.8	14.6
17.7	17.0	16.8	16.3	16.3	16.1	16.5	17.6	17.1	16.8	18.1	18.4

B-12

3.36	7.88	10.3	3.82	7.88	10.7	5.16	8.08	11.1	5.24	8.68	11.3
5.60	9.12	11.3	5.82	9.30	11.3	5.84	9.34	11.4	5.86	9.42	12.3
7.24	9.80	13.7	7.26	9.82	14.8	7.40	9.86	7.82	9.88	7.82	10.0

B-13

1.94	2.12	3.38	3.12	4.40	4.66	4.12	5.86	5.10	5.40	6.28	7.28
8.84	5.60	6.68	6.06	5.88	5.38	5.13	7.42	8.34	8.78	7.82	7.82
7.96	7.88	7.36	9.42	9.26	9.90	9.86	9.44	9.34	10.1	11.8	3.46

B-14

7.68	6.30	7.88	8.28	8.44	8.48	9.52	8.55	10.2	8.18	10.9	10.1
10.7	10.9	10.7	10.2	12.3	11.8	12.6	12.3	12.4	12.9	12.8	17.2
14.4	13.4	13.6	15.1	15.3	14.5	15.2	15.8	14.54	15.6	17.3	13.9

B-15

1.64	7.84	9.84	9.20	9.72	10.8	9.58	12.6	12.6	11.8	11.2	11.7
12.8	11.6	12.7	12.1	13.9	13.1	13.4	14.2	14.9	13.4	14.3	14.8
13.6	14.7	16.6	15.9	15.9	15.4	15.1	15.5	16.5	16.4	18.7	17.8

B-16

7.84	11.2	10.8	8.64	11.7	11.6	9.58	9.20	12.1	11.8	9.84	9.72
13.6	13.4	12.6	12.1	14.2	13.8	12.8	12.7	14.7	14.3	13.4	13.1
16.5	15.9	14.9	14.8	17.9	16.6	15.4	15.1	18.7	18.3	15.5	15.9

B-17

6.30	8.85	8.48	6.58	9.52	10.1	8.18	7.88	10.3	10.2	8.44	8.28
12.4	12.3	10.8	10.7	12.8	12.6	10.9	10.8	13.4	12.9	12.3	11.9
15.3	15.2	13.9	13.6	15.6	15.4	14.5	14.1	17.3	17.2	15.1	14.5

B-18

6.66	7.58	10.6	9.76	10.9	10.7	8.68	8.18	11.7	11.4	8.85	8.84
13.3	13.1	11.9	11.8	13.8	13.4	12.4	12.1	14.3	14.2	12.9	12.6
15.6	15.4	14.4	14.3	15.9	15.8	14.5	14.4	17.2	17.8	14.8	14.7

B-19

-3.4	2.64	1.82	-2.3	3.08	2.80	0.88	0.44	3.77	3.28	1.24	1.08
6.88	6.72	4.60	4.56	8.12	7.88	6.44	5.20	9.44	8.40	6.64	6.52
13.4	13.2	9.96	9.68	14.4	13.8	11.1	10.3	18.0	14.5	12.8	11.9

B-20

6.38	9.22	8.88	7.62	10.2	10.1	8.31	8.24	10.4	10.3	8.81	8.38
12.1	11.6	10.9	10.4	12.4	12.3	11.1	10.9	12.6	12.5	11.3	11.2
15.7	15.2	13.2	12.8	15.9	15.8	14.2	13.3	17.8	17.2	15.2	14.4

B-21

5.58	8.38	8.14	6.32	8.88	8.52	6.85	6.80	9.42	9.06	7.78	7.34
11.7	11.4	10.2	9.52	11.8	11.7	10.8	10.6	11.1	12.3	11.8	10.9
13.2	13.1	12.4	12.3	14.2	13.6	12.6	12.4	15.8	14.7	12.9	12.8

B-22

7.30	10.2	10.2	8.86	10.7	10.3	8.98	8.88	10.8	10.7	9.82	9.76
12.5	12.4	10.8	10.7	12.9	12.8	11.1	11.2	13.3	13.2	12.1	11.8
15.1	14.9	13.5	13.4	15.7	15.3	14.1	13.6	16.4	15.8	14.6	14.4

B-23

7.16	11.2	10.9	9.42	11.6	11.3	9.82	9.24	11.9	11.8	10.2	9.86
14.3	14.1	12.6	12.2	14.6	14.5	13.4	13.1	15.2	14.9	13.9	13.5
16.4	15.9	15.4	15.2	16.9	16.7	15.8	15.7	17.6	17.5	15.9	15.8

B-24

7.11	9.55	9.45	7.26	10.7	10.6	9.18	7.48	10.9	10.8	9.35	9.31
12.3	12.2	11.3	11.2	12.5	12.4	11.8	11.4	13.4	13.3	11.9	11.8
15.4	15.3	13.5	13.4	15.9	15.5	14.1	13.9	17.9	16.1	15.3	14.4

B-25

6.94	9.22	8.88	7.68	10.3	10.2	8.38	8.36	10.4	10.3	8.86	8.44
12.4	12.2	10.9	10.4	12.5	12.3	10.9	10.8	12.9	12.8	11.2	11.1
15.6	15.3	13.6	13.4	15.9	15.8	14.4	13.9	17.8	17.3	15.2	14.5

B-26

5.84	9.22	8.84	6.64	9.84	9.66	7.58	7.20	10.1	9.88
11.9	11.6	10.3	10,2	12.4	12.3	10.6	10.4	12.8	12.7
14.9	14.5	13.1	13.0	16.7	16.3	13.2	13.1	16.9	16.8

B-27

8.74 12.4 11.9 9.65 12.4 12.3 11.1 10.5 13.1 12.9 11.7 11.5
15.3 15.2 13.9 13.2 15.8 15.6 14.5 14.4 15.8 15.9 14.7 14.6
17.1 17.0 16.4 16.2 17.9 17.8 16.6 16.4 18.5 18.1 16.9 16.8

B-28

5.30 7.38 7.36 5.44 7.88 7.44 7.31 5.62 9.22 8.11 7.34 7.32
9.98 9.88 9.36 9.26 11.3 10.2 9.85 9.45 11.4 11.3 9.83 9.81
13.3 13.2 11.9 11.4 13.5 13.4 11.9 11.8 15.7 13.9 12.1 12.6

B-29

3.18 6.14 4.86 3.25 6.86 6.54 4.26 4.24 7.36 4.84 4.82 6.92
7.74 7.56 6.14 4.86 8.32 8.22 8.88 8.82 9.34 9.10 8.42 8.41
10.9 10.8 9.55 9.78 10.9 10.7 10.2 10.1 12.4 12.9 10.4 10.3

B-30

-3.5 2.45 1.77 -2.5 3.55 2.76 0.71 0.37 3.52 3.78 1.39 1.17
6.55 6.33 4.59 4.29 8.25 7.79 6.35 5.23 9.45 8.39 6.54 6.53
13.1 12.8 9.87 9.73 14.71 13.55 107 9.99 18.0 14.74 11.8 11.2

B-31

6.74 10.1 9.86 7.65 10.4 10.3 9.46 8.65 10.9 10.6 9.52 9.42
12.9 12.5 11.3 11.1 13.4 12.9 11.7 11.6 13.5 13.4 12.4 11.8
15.5 15.4 13.7 13.6 15.9 15.6 14.5 14.1 17.4 16.5 15.4 15.2

B-32

3.16 6.60 5.58 6.84 6.64 4.68 4.18 7.16 5.80 4.74 7.42 3.26
8.86 8.64 7.64 7.48 9.55 8.86 8.14 7.64 9.82 9.76 8.65 8.37
11.7 11.5 11.3 10.7 12.6 11.8 11.5 11.4 13.8 13.6 11.6 11.5

Завдання А2-РГР Обробка результатів вимірювань двомірної випадкової величини

B-1

x_i	0.3	0.5	0.7	0.8	1.2	1.1	1.5	1.8	1.9	2.5	2.6	3.01
y_i	-1.1	-1.8	-1.9	-1.5	-1.7	-2.2	-1.7	-2.3	-2.8	-2.5	-3.1	-2.6

B-2

x_i	-3.8	-3.4	-2.7	-2.8	-2.4	-2.2	-1.8	-1.5	-1.2	-0.7	-0.4	-0.3
y_i	2.5	2.2	1.6	2.1	1.1	1.2	1.13	1.02	0.5	0.89	0.8	0.2

B-3

x_i	0.73	0.84	1.45	0.82	1.07	1.5	1.48	1.64	2.14	2.75	2.04	2.23
y_i	-1.1	-1.3	-1.0	-0.6	0.03	1.13	1.40	1.41	1.64	1.99	2.08	2.68

B-4

x_i	-2.8	-2.4	-1.6	-2.2	-2.0	-1.4	-0.9	-1.6	-1.2	-0.6	-0.3	-0.1

y_i	-1.6	-1.8	-1.7	-1.5	-0.9	-0.3	0.55	0.9	0.59	1.83	2.2	2.4

B-5

x_i	-2.5	-2.4	-1.8	-2,0	-1.9	-1.4	-1.1	-1.3	-0.9	-0.5	-0.8	-0.1
y_i	-2.6	-1.9	-1.2	0.18	0.2	1.14	1.2	1.5	1.8	2.2	2.4	2.8

B-6

x_i	1.0	1.4	1.45	1.5	1.75	2.15	2.25	2.5	3.1	3.12	3.15	3.51
y_i	0.23	0.41	0.8	1.15	0.9	1.18	1.45	1.51	1.5	2.02	1.85	2.51

B-7

x_i	-2.7	-4.0	-3.6	-3.1	-2.0	-1.7	-2.1	-1.2	-0.1	-1.3	-0.9	-0.4
y_i	1.7	1.4	1.6	1.3	1.4	1.0	1.4	1.1	0.7	1.1	1.0	0.9

B-8

x_i	-0.5	0.2	0.9	1.2	1.5	1.48	1.8	2.0	2.5	2.8	3.2	3.5
y_i	-0.2	0.5	0.3	1.0	0.6	1.2	1.6	1.3	1.6	2.0	2.5	1.9

B-9

x_i	-3.0	-2.7	-2.5	-2.4	-2.2	-2.1	-1.9	-1.5	-1.4	-1.1	-0.9	-0.8
y_i	0.5	0.7	0.5	1.0	0.8	1.2	1.4	1.6	1.25	1.55	1.3	2.2

B-10

x_i	-2.8	-2.2	-1.6	-2.3	-2.0	-1.5	-0.9	-1.6	-1.2	-0.6	-0.3	-0.4
y_i	-1.4	-1.8	-1.3	-1.5	-0.9	-0.3	0.55	0.8	0.6	1.33	2.1	2.3

B-11

x_i	-2.7	-3.9	-3.6	-3.1	-2.0	-1.1	-2.1	-1.2	-0.1	-1.3	-0.9	-0.4
y_i	1.69	1.45	1.66	1.26	1.42	1.02	1.37	1.09	0.70	1.14	1.02	0.85

B-12

x_i	0.40	0.04	0.25	0.62	0.60	0.90	0.55	0.77	1.15	1.07	1.42	1.12
y_i	-1.2	-0.9	-1.0	-1.4	-1.1	-1.3	-1.6	-1.7	-1.9	-1.8	-2.2	-2.0

B-13

x_i	-1.1	-0.9	-0.5	-0.1	-0.3	0.23	0.53	0.39	0.98	0.32	0.49	0.68
y_i	-2.6	-4.4	-4.0	-3.4	-2.6	-1.0	-1.3	-1.1	-1.7	-1.2	-0.5	0.87

B-14

x_i	0.1	-0.2	1.0	-0.3	0.03	0.48	0.93	1.85	3.03	1.73	2.0	2.40
y_i	-1.7	-1.8	-0.9	-1.7	-1.4	-1.3	-0.9	-0.6	-0,2	-0.6	-0.5	-0.2

B-15

x_i	-0.2	-0.1	-0.3	-0.2	0.1	0.01	0.12	0.28	0.58	0.84	0.56	1.04
y_i	-2.4	-3.7	-3.3	-2.7	-1.6	-1.4	-0.8	-1.2	-0.7	-0.2	-0.5	0.87

B-16

x_i	-4.3	-4.1	-3.5	-2.9	-1.7	-1.5	-0.9	-1.3	-1.0	-1.2	-0.4	0.8
y_i	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.5	1.4	1.2	0.9	0.6	1.0	0.87

B-17

x_i	-2.0	-2.4	-1.9	-1.5	-1.9	-1.4	-0.9	-1.4	-0.8	-0.5	-0.7	0.4
y_i	-2.4	-1.9	-1.3	0.3	0.2	1.1	1.2	1.5	1.7	2.2	2.4	3.1

B-18

x_i	-1.8	-0.9	-0.5	-0.1	-0.3	0.23	0.53	0.39	0.98	0.32	0.49	0.68
y_i	-2.6	-4.4	-4.0	-3.4	-2.6	-1.0	-1.3	-1.1	-1.7	-1.2	-0.5	0.87

B-19

x_i	1.2	1.4	1.45	1.5	0.75	2.15	2.25	2.5	3.1	3.12	3.15	3.54
y_i	0.23	0.47	0.8	1.15	0.9	1.18	1.45	1.51	1.5	2.02	1.85	2.51

B-20

x_i	-2.8	-2.4	-1.6	-2.2	-2.0	11.5	-0.9	-1.6	-1.3	-0.6	-0.5	-0.2
y_i	-1.6	-1.8	-1.7	-1.5	-0.9	-0.8	0.55	0.9	0.6	1.8	2.15	2.38

B-21

x_i	-3.2	-2.6	-2.5	-2.2	-2.1	-0.8	-1.7	-1.3	-1.0	-0.8	-0.7	-0.5
y_i	2.2	1.5	2.0	1.0	1.3	1.2	0.5	0.32	0.7	0.25	0.3	0.2

B-22

x_i	0.3	0.3	0.5	0.6	0.8	0.85	1.12	1.4	1.5	1.65	2.05	2.2
y_i	1.6	2.1	1.7	1.2	1.4	0.9	1.22	0.75	1.15	0.5	0.3	0.25

B-23

x_i	-2.5	-2.4	-1.8	-2.0	-1.9	-1.4	-1.1	-1.3	-0.9	-0.5	-0.8	-0.1
y_i	-2.6	-1.9	-1.2	0.2	0.3	1.2	1.3	1.5	1.9	2.2	2.4	2.87

B-24

x_i	-2.7	-2.2	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-1.8	-1.3	-1.8	-1.7	-1.5	-1.1
y_i	0.2	0.5	1.0	1.1	1.2	1.46	1.7	2.6	1.9	2.5	3.2	3.33

B-25

x_i	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.12	3.4	3.6	3.8	4.1	4.04
y_i	-1.5	-1.0	-0.5	0.3	0.7	0.4	1.8	2.2	2.8	3.5	3.2	3.1

B-26

x_i	-2.8	-2.5	-2.1	-1.8	-1.5	-1.3	-1.1	-0.9	-0.6	-0.5	-0.3	-0.1
y_i	0.4	1.1	0.9	1.5	1.8	2.5	3.3	3.7	3.4	4.2	3.5	3.33

В-27

x_i	0.8	0.3	0.5	1.1	1.5	1.2	1.8	2.1	2.3	2.5	2.8	3.2
y_i	2.8	4.2	3.8	3.1	1.8	2.5	2.8	2.3	1,4	0.6	0.4	0.2

В-28

x_i	0.2	0.5	0.8	1.2	1.3	1.5	1.8	1.9	2.4	2.5	2.8	3.1
y_i	4.2	3.8	3.5	2.6	3.3	2.0	2.5	1.7	1,4	0.9	0.7	0.87

В-29

x_i	1.2	1.5	2.1	2.3	2.5	2.8	3.12	3.55	3.8	4.2	4.5	5.14
y_i	0.31	0.7	0.9	1.4	2.1	2.2	1.8	2.6	2,3	3.2	3.5	3.87

В-30

x_i	1.2	1.4	1.6	2.3	2.6	3.1	3.2	3.4	4.1	4.2	4.5	4.7
y_i	-2.1	-1.1	-0.3	-0.2	0.6	1.4	2.2	1.8	2,7	3.4	3.2	3.8

Завдання А3-РГР Дисперсійний аналіз

При рівні значущості $\alpha = 0.05$ методом дисперсійного аналізу перевірити нульову гіпотезу про вплив фактора на якість об’єкта на основі 5 вимірювань для 3 рівней фактора. Припускається, що вибірки одержані з нормально розподілених генеральних сукупностей з рівними дисперсіями.

Вар-т	N вимі-рюван-ня	F_1	F_2	F_3	Вар-т	N вимі-рюван-ня	F_1	F_2	F_3
	1	24	20	23		1	8	18	35
	2	16	14	16		2	12	23	36
1	3	12	10	15	16	3	13	25	34
	4	5	6	12		4	10	22	30
	5	8	18	10		5	15	20	35
	1	12	16	13		1	22	36	65
	2	8	5	8		2	47	31	54
2	3	10	16	10	17	3	20	34	42

	4	19	4	9		4	18	20	15
	5	7	13	**8**		5	35	38	34
	1	18	10	14		1	14	34	26
	2	20	8	12		2	18	35	22
3	3	30	9	13	18	3	33	36	21
	4	24	7	18		4	15	31	20
	5	25	6	13		5	10	30	25
	1	31	40	28		1	7	15	28
	2	33	30	25		2	13	24	9
4	3	35	34	32	19	3	40	43	18
	4	34	34	21		4	12	35	10
	5	34	32	24		5	34	20	35
	1	49	40	35		1	65	30	124
	2	35	34	36		2	64	33	126
5	3	30	38	44	20	3	46	24	123
	4	42	33	48		4	52	38	124
	5	34	24	43		5	53	30	125
	1	12	8	26		1	18	14	47
	2	13	10	24		2	40	15	46
6	3	11	7	35	21	3	14	20	48
	4	14	8	22		4	36	21	10
	5	15	9	23		5	35	34	19
	1	43	38	36		1	45	33	42
	2	44	39	33		2	32	36	13
7	3	42	30	34	22	3	43	38	44
	4	42	42	22		4	44	30	24
	5	44	33	25		5	46	33	36
	1	13	24	25		1	15	24	23
	2	11	24	13		2	17	27	12
8	3	12	27	22	23	3	12	32	14
	4	14	21	3		4	16	26	21
	5	12	25	22		5	12	25	17
	1	9	8	14		1	24	30	9
	2	11	6	13		2	25	41	40
9	3	14	4	22	24	3	48	32	13
	4	12	7	22		4	51	14	15
	5	10	6	23		5	27	25	12
	1	54	35	14		1	104	244	316
	2	52	40	32		2	128	235	312
10	3	43	24	33	25	3	113	256	291
	4	44	31	24		4	125	241	306
	5	32	24	12		5	110	235	315

11	1	21	36	13	26	1	27	49	68
	2	23	37	15		2	23	42	79
	3	25	38	12		3	24	43	172
	4	22	34	18		4	22	45	60
	5	24	29	20		5	23	45	77
12	1	24	39	65	27	1	15	20	24
	2	45	30	46		2	14	63	33
	3	43	41	24		3	36	14	12
	4	22	13	38		4	22	8	36
	5	41	34	33		5	53	45	35
13	1	12	25	36	28	1	30	104	67
	2	23	36	14		2	32	95	66
	3	11	26	25		3	34	120	58
	4	14	40	42		4	39	111	50
	5	35	18	43		5	35	110	59
14	1	43	58	66	29	1	25	43	52
	2	44	59	63		2	62	26	53
	3	42	50	54		3	33	18	14
	4	42	52	62		4	24	40	34
	5	44	53	65		5	46	13	46
15	1	13	20	44	30	1	28	30	47
	2	22	14	40		2	27	35	48
	3	34	45	29		3	26	31	42
	4	55	28	17		4	29	29	43
	5	24	33	7		5	26	32	46

Додаток Б

PASCAL-програми для виконання РГР

Програма упорядковує за зростанням масив X[1..36] та обчислює вибіркові середнє $\overline{x}$, дисперсію s^2 та скв s. Студент повинен замість масиву X[1..36] ввести свою вибірку з 36 елементів.

```
program CB_11;
uses crt;
var xm,x2,s2,s,buf: real;
   i,j,k: integer;
   const x:array[1..36] of real = (7.88,7.52,9.48,9.56,9.38,9.72,8.98,8.88,
   10.34,10.36,10.38,10.44,10.38,11.22,10.80,10.36,11.20,10.80,12.32,13.08,
   12.88,12.40,12.20,12.70,13.80,12.70,13.82,14.68,15.28,14.76,15.88,14.46,
   15.40,15.66,17.10,16.86);
    begin
        k:=36; xm:=0; x2:=0; for i:=1 to k
        do
         begin
            xm:=xm+x[i]; x2:=x2+x[i]*x[i];
         end;
         xm:=xm/k; s2:=(x2-k*xm*xm)/(k-1);
         s:=sqrt(s2);
         writeln('xm=',xm:5:2,' s2=',s2:7:4,' s=',s:7:4); for i:=1 to k-1
         do for j:=i+1 to k do
           begin
             if x[i] > x[j] then
               begin
                 buf:=x[j];
                 x[j]:=x[i];
                 x[i]:=buf;
               end;
           end;
           for i:=1 to k do write(' ',x[i]:5:2);
         readln;
    end.
```

Програма DA_OA обчислює , відповідно, факторну s_1^2 та залишкову дисперсію s_2^2, а також вибіркове значення критерію Фішера $F_{виб}$.

```
program DA_OA;
uses crt;
  var Q,Q1,Q2,FB,s1,s2,a,b,c,c1: real;
   m,n,i,j,n1: integer;

   const x:array[1..30] of real =(46,48,73,52,72,44,66,46,60,48,
       74,82,64,72,84,68,76,88,70,60,52,63,72,64,48,70,78,68,70,54);
   begin
```

Вхідними параметрами є числа: n - кількість спостережень m - кількість факторів, розмірність $m \cdot n$ масиву X та цей масив $X[1...m \cdot n]$

```
        m:=3; n:=10; a:=0; b:=0; c:=0; n1:=0;
        for j:=1 to m do
           begin s1:=0; s2:=0;
             for i:=n1+1 to n+n1 do
                    begin
                         s1:=s1+x[i];
                         s2:=s2+x[i]*x[i];
                      end;
             n1:=n+n1;
             a:=a+s2; c1:=s1*s1; b:=b+c1/n; c:=c+s1;
           end;
        c:=c*c; c:=c/n1; Q:=(a-c)/(n1-1); Q1:=(b-c)/(m-1); Q2:=(a-b)/(n1-m);
        FB:=Q1/Q2;
        writeln('Q1/(m-1)=',Q1:6:1,' Q2/(mn-m)=',Q2:6:1,' Q/(mn-1)=',Q:7:1,
        ' FB=',FB:5:2);
        readln;
    end.
```

Для своєї вибірки студенту слід увести у текст програми свої значення m, n, $m \cdot n$, а замість масиву X свій масив по стовпцях своєї таблиці.

Програма CB_1BU обчислює вибіркове середнє, дисперсію та скв за сгрупованими даними, таблицю для обчислення вибіркового значення критерію χ^2 та $\chi^2_{виб}$.

```
program CB_1BU;
 uses crt;
  (*----------------*)
  function fl(x:real):real;
  const eps=1e-5; var s,u:real; n,k:word;
   begin
    s:=x; u:=x; n:=1; k:=0;
         repeat
           n:=n+2; k:=k+1; u:=-u*x*x*(n-2)/(k*2*n);
           s:=s+u;
         until abs(u)<eps;
```

```
    fl:=s/sqrt(2*pi);
end;(*--------------------------------------------------*)
  var xmz,x2,s2z,sz,xi2,xi22: real; n,i,k,j: integer;
p,np,x2j:array[1..6] of real; an:array[1..5] of real;
F:array[0..6] of real;
const a:array[1..5] of real = (8,10,12,14,16);
const xz:array[1..6] of real = (7,9,11,13,15,17);
const nt:array[1..6] of integer = (2,6,10,9,7,2);
begin
```

Вхідні параметри для CB_1 BU це: 1) границі розбиття вибірки X на 6 інтервалів; $a[1..5]$;2) середини цих інтервалів $xz[1..6]$; 3) числа елементів вибірки в кожному з цих інтервалів $nt[1..6]$.

```
   n:=36; k:=6; xmz:=0; x2:=0; xi2:=0;xi22:=0;
   for i:=1 to k do
    begin
      xmz:=xmz+nt[i]*xz[i];
      x2:=x2+nt[i]*xz[i]*xz[i];
    end;
```

У масиви $a[1..5], xz[1..6], nt[1..6]$ студент повинен ввести свої числа.

```
    xmz:=xmz/n; s2z:=(x2-n*xmz*xmz)/(n-1);
    sz:=sqrt(s2z);
    writeln('xmz=',xmz:7:4,' s2z=',s2z:7:4,' sz=',sz:6:4);
    (*Check up hypothesis by X2 criterion*)
    F[0]:=-0.5; j:=0;
    writeln('j    ','aj                    ','(aj-xmz)/sz'
    ,'   F((aj-xmz)/sz)','  pj                  ','npj    ','x2j   ');
    writeln(j:1,'   ','                         ','                  ',F[j]:7:4,
    '                                    ');
    for j:=1 to k-1 do
    begin
      an[j]:=(a[j]-xmz)/sz;
      F[j]:=fl(an[j]); p[j]:=F[j]-F[j-1]; np[j]:=n*p[j];
      x2j[j]:=sqr(nt[j]-np[j])/np[j]; writeln(j:1,'   ',a[j]:2:0,'
      ',an[j]:7:4, '      ',F[j]:7:4,           '        ',p[j]:6:4, '
      ',np[j]:7:4,'  ',x2j[j]:6:4);
    end;
    p[6]:=0.5-F[5]; j:=6; np[j]:=n*p[j]; x2j[j]:=sqr(nt[j]-
      np[j])/np[j]; F[6]:=0.5;
    writeln(j:1,'   ','                         ','                  ',F[j]:7:4,
      '               ',p[j]:6:4,' ',np[j]:7:4,'  ',x2j[j]:6:4);
    for j:=1 to k do xi2:=xi2+sqr(nt[j]-n*p[j])/p[j]; xi2:=xi2/n;
    writeln('xi2=',xi2:6:3);
    readln;
 end.
```

program CB_2BMU; uses crt;

Програма CB_2BMU обчислює вибіркові характерристики $\bar{x}, \bar{y}, s_X^2, s_Y^2, K_{X,Y}, \bar{\rho}_{X,Y}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_1', T, \bar{\beta}_0, \bar{\beta}_0'$, рівняння прямих регресії У на Х та Х на У, границі довірчих інтервалів для $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_0$ та довірчої області для прямої регресії.

```
var xm,ym,xv2,yv2,sx2,sy2,sx,sy,Kxy,Pxy,b0,b0s,b1,b1s,se,se2,te,dgb0,dgb1,
dgo1,dgo2,dgo3,sxi2,sxob,sdo,yu1,yl1,yu2,yl2,yu3,yl3,T: real;
 i,k: integer;
  x2,y2,ximx,yimy:array[1..12] of real;
 const x:array[1..12] of real =(-2.71,-2.95,-2.04,-3.02,-2.72,-2.27,-1.44, -0.95,-
 1.22,-0.30,-1.25,-0.88);
 const y:array[1..12] of real
 =(1.38,1.07,1.14,1.22,1.32,1.49,1.78,1.55,1.77,2.,1.73,1.9);
 begin
```

Вхідні параметри для CB_2BMU – це масиви X[1..12],Y[1..12]. Студент повинен ввести замість масивів X та Y свою вибірку

```
     k:=12; xm:=0; ym:=0; xv2:=0; yv2:=0; Kxy:=0; te:=2.23;
      for i:=1 to k do
      begin
         xm:=xm+x[i]; ym:=ym+y[i];
         xv2:=xv2+x[i]*x[i]; yv2:=yv2+y[i]*y[i];
         x2[i]:=x[i]*x[i]; y2[i]:=y[i]*y[i];
      end;
      xm:=xm/k; ym:=ym/k; sx2:=(xv2-k*xm*xm)/(k-1);
      sy2:=(yv2-k*ym*ym)/(k-1);
    for i:=1 to k do
      begin
         ximx[i]:=x[i]-xm; yimy[i]:=y[i]-ym;
         Kxy:=Kxy+ximx[i]*yimy[i];
      end;
      Kxy:=Kxy/(k-1);
      writeln('                                   CB_2BMU program results');
      writeln('xm=',xm:7:4,' ym=',ym:7:4,' sx2=',sx2:6:4,' sy2=',sy2:6:4,
      ' Kxy=',Kxy:6:4);
      sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); Pxy:=Kxy/sx/sy;
      T:=Pxy*sqrt(10)/sqrt(1-sqr(Pxy));
      b1:=Pxy*sy/sx; b1s:=Pxy*sx/sy;
      writeln('Pxy=',Pxy:6:4,' b1=',b1:7:4,' b1s=',b1s:7:4,' T=',T:7:4);
      se2:=(k-1)*(sy2-b1*Kxy)/(k-2); se:=sqrt(se2); se:=te*se; b0:=ym-
      b1*xm;b0s:=xm-b1s*ym; writeln('b0=',b0:7:4,' b0s=',b0s:7:4);
       writeln('The regression line Y from X: y=b0+b1*x=',b0:7:4,'+',b1:7:4,
      '*x');
      writeln('The regression line X from Y:
```

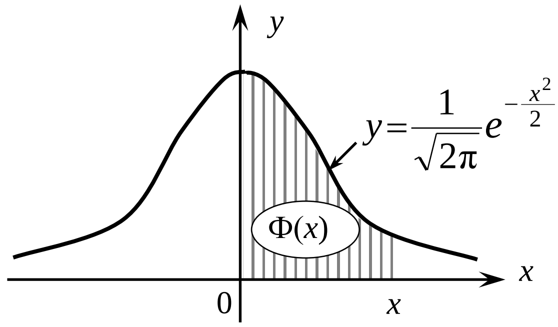
```
        x=b0s+b1s*y=',b0s:7:4,'+',b1s:7:4, '*y');
        sxi2:=(k-1)*sx2+k*xm*xm; sxob:=(k-1)*sx2; sxob:=1/sxob;
        sdo:=sqrt(1/k+sxob); dgo1:=se/sqrt(k); dgo2:=se*sdo;
        dgo3:=dgo2; dgb0:=se*sqrt(sxi2*sxob/k); dgb1:=se*sqrt(sxob);
        writeln('dgb0=',dgb0:6:4,' ','dgb1=',dgb1:6:4,' ',
        'dgo1=',dgo1:6:4,' ','dgo2=',dgo2:6:4,' ','dgo3=',dgo3:6:4);
        yu1:=ym+dgo1; yl1:=ym-dgo1; yu2:=ym+b1+dgo2;
        yl2:=ym+b1-dgo2; yu3:=ym-b1+dgo3; yl3:=ym-b1-dgo3;
        writeln('                         The confidence region boundary');
        writeln('x=xm,','[',yl1:7:4,';',yu1:7:4,']');
        writeln('x=xm+1,','[',yl2:7:4,';',yu2:7:4,']');
        writeln('x=xm-1,','[',yl3:7:4,';',yu3:7:4,']'); readln;
end.
```

Додаток В

Таблиця В1

Значення функції

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

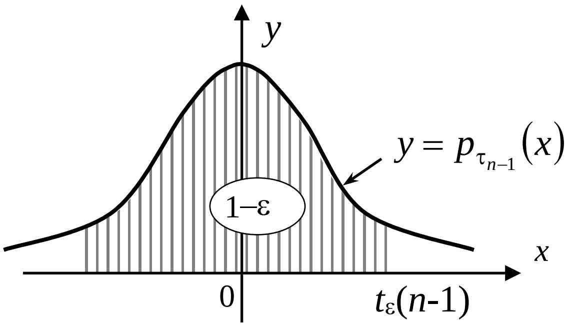


x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.00000				
0.05	0.01994	1.05	0.35314	2.05	0.47982
0.10	0.03983	1.10	0.36433	2.10	0.48214
0.15	0.05962	1.15	0.37493	2.15	0.48422
0.20	0.07926	1.20	0.38493	2.20	0.48610
0.25	0.09871	1.25	0.39435	2.25	0.48778
0.30	0.11791	1.30	0.40320	2.30	0.48928
0.35	0.13683	1.35	0.41149	2.35	0.49061
0.40	0.15542	1.40	0.41924	2.40	0.49180
0.45	0.17364	1.45	0.42647	2.45	0.49286
0.50	0.19146	1.50	0.43319	2.50	0.49379
0.55	0.20884	1.55	0.43943	2.55	0.49461
0.60	0.22575	1.60	0.44520	2.60	0.49534
0.65	0.24215	1.65	0.45053	2.65	0.49598
0.70	0.25804	1.70	0.45543	2.70	0.49653
0.75	0.27337	1.75	0.45994	2.75	0.49702
0.80	0.28814	1.80	0.46407	2.80	0.49744
0.85	0.30234	1.85	0.46784	2.85	0.49781
0.90	0.31594	1.90	0.47128	2.90	0.49813

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.95	0.32894	1.95	0.47441	2.95	0.49841
1.00	0.34134	2.00	0.47725	3.00	0.49865
3.1	0.49903	3.2	0.49931	3.3	0.49952
3.4	0.49966	3.5	0.49977	3.6	0.49984
3.7	0.49989	3.8	0.49993	3.9	0.49995
4.0	.499968	4.5	.499997	5.0	

Таблиця В2

Значення $t_\varepsilon(n\text{-}1)$, які задовольняють рівнянню $2\int\limits_0^{t_\varepsilon(n-1)} p_{\tau_{n-1}}(x)dx = 1-\varepsilon$, де $p_{\tau_{n-1}}(x)$ – щільність розподілу Стьюдента з n–1 ступенями свободи.



	Рівень значущості ε (двостороння критична область)					
n	0.1	$t_{0.1}(n-1)/\sqrt{n}$	0.05	$t_{0.05}(n-1)/\sqrt{n}$	0.01	$t_{0.01}(n-1)/\sqrt{n}$
2	6.3138	4.4645	12.7062	8.9846	63.6567	45.0121
3	2.9200	1.6859	4.3027	2.4842	9.9248	5.7301
4	2.3534	1.1767	3.1824	1.5912	5.8409	2.9204
5	2.1318	0.9534	2.7764	1.2416	4.6041	2.0590
6	2.0105	0.8226	2.5706	1.0494	4.0321	1.6461
7	1.9432	0.7345	2.4469	0.9248	3.7074	1.4013
8	1.8946	0.6698	2.3646	0.8360	3.4995	1.2373
9	1.8595	0.6198	2.3060	0.7687	3.3554	1.1185
10	1.8331	0.5719	2.2622	0.7154	3.2498	1.0277
11	1.8125	0.5465	2.2281	0.6718	3.1693	0.9556
12	1.7959	0.5184	2.2010	0.6354	3.1058	0.8966
13	1.7823	0.4943	2.1788	0.6043	3.0545	0.8472
14	1.7709	0.4733	2.1604	0.5774	3.0123	0.8051
15	1.7613	0.4548	2.1448	0.5534	2.9768	0.7686
16	1.7530	0.4382	2.1314	0.5328	2.9467	0.7367
17	1.7459	0.4234	2.1199	0.5142	2.9208	0.7084
18	1.7396	0.4100	2.1098	0.4973	2.8982	0.6831
19	1.7341	0.3978	2.1009	0.4820	2.8784	0.6604
20	1.7291	0.3866	2.0930	0.4680	2.8609	0.6397
21	1.7247	0.3764	2.0860	0.4552	2.8453	0.6204
22	1.7207	0.3669	2.0796	0.4434	2.8314	0.6037
23	1.7171	0.3580	2.0739	0.4324	2.8188	0.5878

	Рівень значущості ε (двостороння критична область)					
n	0.1	$t_{0.1}(n-1)/\sqrt{n}$	0.05	$t_{0.05}(n-1)/\sqrt{n}$	0.01	$t_{0.01}(n-1)/\sqrt{n}$
24	1.7139	0.3498	2.0687	0.4224	2.8073	0.5730
25	1.7109	0.3422	2.0639	0.4129	2.7969	0.5535
26	1.7081	0.3350	2.0595	0.4039	2.7874	0.5467
27	1.7056	0.3282	2.0555	0.3956	2.7787	0.5348
28	1.7033	0.3219	2.0518	0.3878	2.7707	0.5236
29	1.7011	0.3159	2.0484	0.3804	2.7633	0.5131
30	1.6991	0.3102	2.0452	0.3734	2.7564	0.5032
32	1.6956	0.2997	2.0396	0.3606	2.7442	0.4851
35	1.6909	0.2858	2.0322	0.3435	2.7284	0.4612
40	1.6849	0.2664	2.0227	0.3198	2.7083	0.4282
	0.05		0.025		0.005	
	Рівень значущості ε (одностороння критична область)					

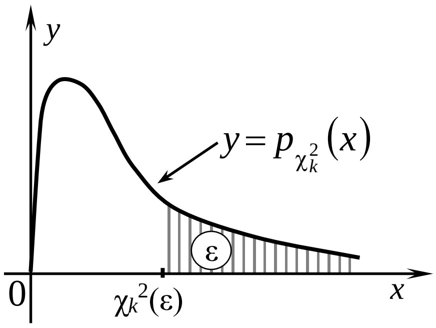
Граничні значення $t_\varepsilon(n-1)$ при $n \to +\infty$:
$t_{0.1}(+\infty)=1.6449$, $t_{0.05}(+\infty)=1.9600$, $t_{0.01}(+\infty)=2.5758$.
Вони є коренями рівняння $2\Phi(\delta_\varepsilon)=1-\varepsilon$ при $\varepsilon=0.1, 0.05, 0.01$.

Таблиця В3

Значення $\chi_k^2(\varepsilon)$, які задовольняють рівнянню

$$P\left\{\chi_k^2 > \chi_k^2(\varepsilon)\right\} = \int_{\chi_k^2(\varepsilon)}^{+\infty} p_{\chi_k^2}(x)\,dx = \varepsilon,$$

де $p_{\chi_k^2}(x)$ – щільність розподілу χ^2 з k ступенями свободи.

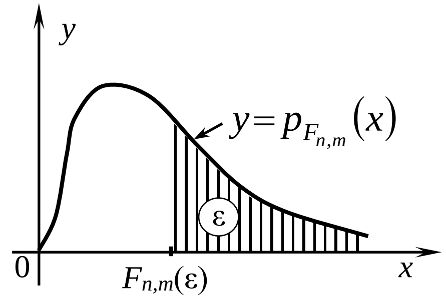


k	$\chi_k^2(0.1)$	$\chi_k^2(0.05)$	$\chi_k^2(0.01)$
1	2.71	3.84	6.63
2	4.61	5.99	9.21
3	6.25	7.81	11.3
4	7.78	9.49	13.3
5	9.24	11.1	15.1
6	10.6	12.6	16.8
7	12.0	14.1	18.5
8	13.4	15.5	20.1
9	14.7	16.9	21.7
10	16.0	18.3	23.2
11	17.3	19.7	24.7
12	18.5	21.0	26.2
13	19.8	22.4	27.7
14	21.1	23.7	29.1
15	22.3	25.0	30.6
16	23.5	26.3	32.0
17	24.8	27.6	33.4
18	26.0	28.9	34.8
19	27.2	30.1	36.2

k	$\chi_k^2(0.1)$	$\chi_k^2(0.05)$	$\chi_k^2(0.01)$
20	28.4	31.4	37.6
21	29.6	32.7	38.9
22	30.8	33.9	40.3
23	32.0	35.2	41.6
24	33.2	36.4	43.0
25	34.4	37.7	44.3
30	40.3	43.8	50.9
35	46.1	49.8	57.3
40	51.8	55.8	63.7

Таблиця В4. Значення $F_{n,m}(\varepsilon)$, які задовольняють рівнянню

$$\int\limits_{F_{n,m}(\varepsilon)}^{+\infty} p_{F_{n,m}}(x)\,dx = \varepsilon,,$$ де $p_{F_{n,m}}(x)$ – щільність ймовірності розподілу Фішера з n і m ступенями свободи (n-кількість ступенів свободи для більшої дисперсії). ε=0.05



n / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06

19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79

ε=0.025

n / *m*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33

20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01

МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
та завдання до разрахунково-графічної
роботи з дисципліни
*“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА”*

Відповідальний за випуск Бородай Г.П.

Редактор Губарева К.А.

Підписано до друку 16.11.07 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 4,5. Обл.-вид.арк. 2,5.
Замовлення № Тираж 150 Ціна
Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007
р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7