№1002

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ЗБІРНИК ВПРАВ ТА ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ МАРКІВСЬКИХ ЛАГЦЮГІВ Й ТЕОРІЇ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Харків – 2002

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № від .

Укладачі:
Р.О. Ефременко, Г.Ю. Глушакова

Рецензент

Вступ

Збірник вправ та задач пропонується студентам II курсу спеціальності “Управління процесами перевезень на залізничному транспорті”, які вивчають випадкові процеси та елементи теорії систем масового обслуговування в обсязі навчальної програми для вказаної спеціальності. Збірник містить вправи та задачі до основних розділів теоретичного курсу. До деяких задач надаються робочі формули, способи розв’язання й вказівки про переваги кожного з цих способів. У першу частину увійшли вправи з теорії марковських ланцюгів з дискретним часом, у другій частині розглянуті задачі з теорії неперервних марковських процесів і теорії систем масового обслуговування. Збірник може бути корисним і студентам інших спеціальностей, які вивчають відповідні розділи дисципліни “Вища математика”.

МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ З КІНЦЕВИМ ЧИСЛОМ СТАНІВ І ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

№1

Виписати матрицю перехідних імовірностей марковського ланцюга, граф станів якого має такий вигляд (рисунки 1-12):

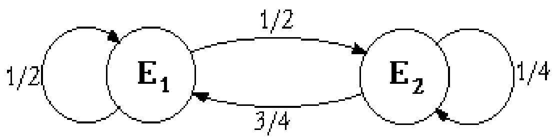


Рисунок 1

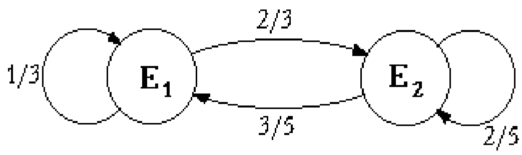


Рисунок 2

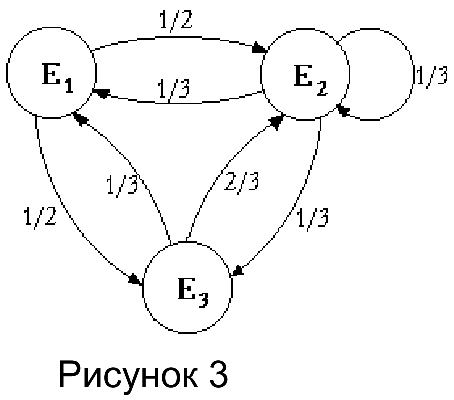


Рисунок 3

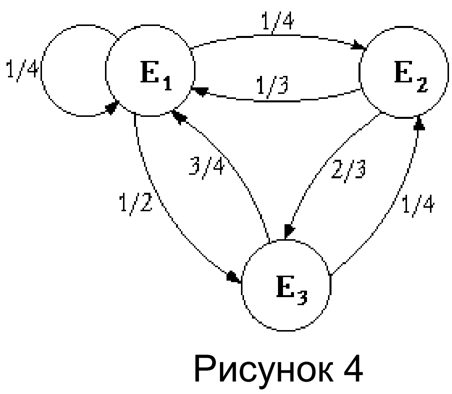
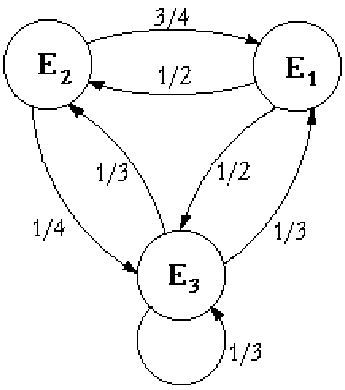


Рисунок 4



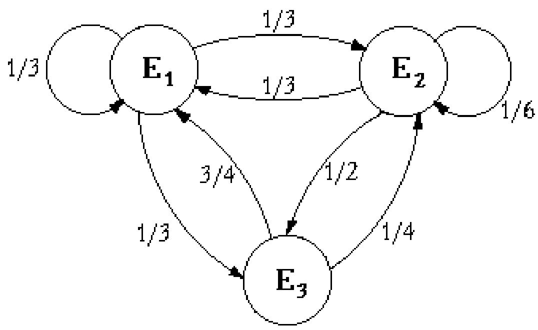
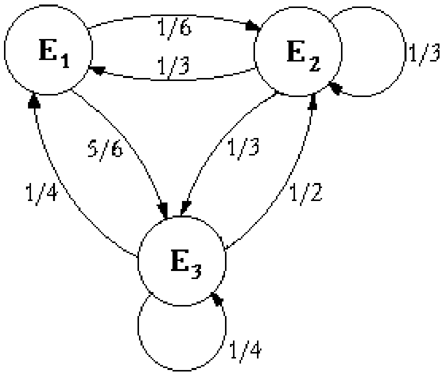


Рисунок 5

Рисунок 6



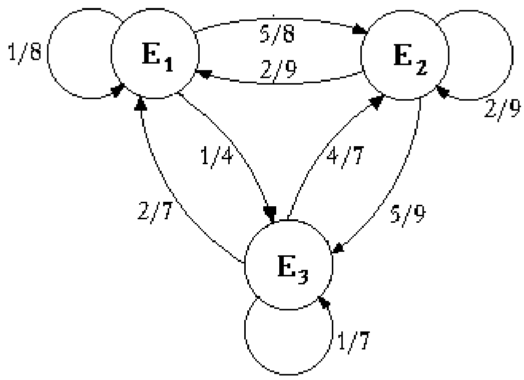
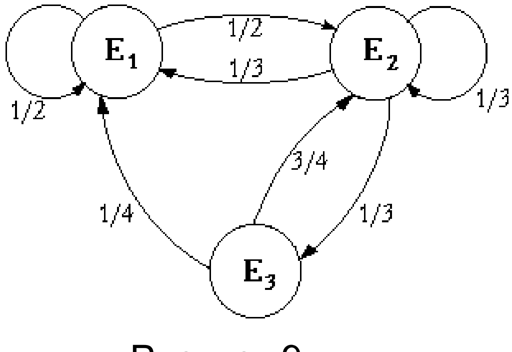


Рисунок 7

Рисунок 8



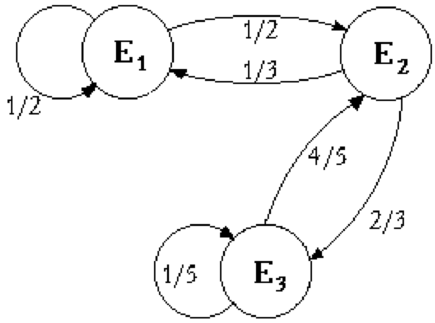
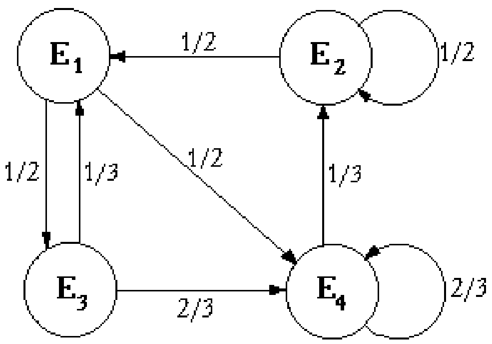


Рисунок 9

Рисунок 10



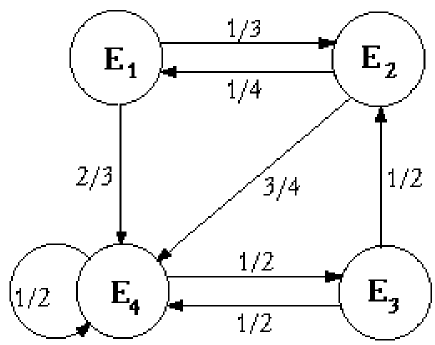


Рисунок 11

Рисунок 12

№2

Зобразити граф станів марковського ланцюга, якщо матриця перехідних імовірностей має вигляд:

1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

6

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

7

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{8} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

8

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

9

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

10

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

№3

Знайти перехідні ймовірності за два й три кроки для марковських ланцюгів, графи станів яких зображені на рисунках 1-12.

Вказівка. Робоча формула для розв'язання

$$P(n) = P^n,$$

де P — матриця перехідних імовірностей за один крок,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots & p_{kk} \end{pmatrix};$$

P(n) — матриця перехідних імовірностей за n кроків,

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) \ldots\ldots & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) \ldots\ldots & p_{2k}(n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{k1}(n) & p_{k2}(n) \ldots\ldots & p_{kk}(n) \end{pmatrix}.$$

№4

Дана матриця перехідних імовірностей за один крок марковського ланцюга:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл імовірностей станів через два кроки, якщо спочатку система знаходилася у другому стані.

Розв'язання

Перший спосіб

Робоча формула:

$$Q(n) = Q \cdot P(n),$$

де Q – матриця імовірностей початкових станів, $Q = Q(0) = (q_1\, q_2)$;

Q(n) – матриця імовірностей станів через n кроків, $Q(n) = (q_1(n)\, q_2(n))$;

$P(n)$ – матриця перехідних імовірностей через n кроків.

За умовою завдання:

q_1 – це імовірність того, що початково система знаходилася у першому стані, $q_1 = 0$;

q_2 – це імовірність того, що початково система знаходилася у другому стані, $q_2 = 1$;

кількість кроків n=2.

За робочою формулою:

$$Q(2) = Q \cdot P(2); \quad Q = (0\ 1),$$

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1/9 + 1/2 & 2/9 + 1/6 \\ 1/4 + 3/16 & 1/2 + 1/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix};$$

$$Q(2) = (0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix};$$

$$Q(2) = \left(7/16\ \ 9/16\right) = \left(q_1(2)\ q_2(2)\right).$$

Відповідь: $q_1(2) = 7/16, \quad q_2(2) = 9/16.$

Другий спосіб

Робоча формула:

$$Q(n) = Q(n-1) \cdot P.$$

За умовами завдання n=2, отже,

$$Q(2) = Q(1) \cdot P,$$

$$Q(1) = Q(0) \cdot P.$$

$$Q(1) = Q(0) \cdot P = Q \cdot P = (0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix};$$

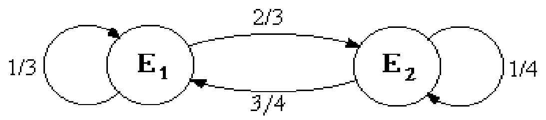
$$Q(1) = \left(3/4\ \ 1/4\right);$$

$$Q(2) = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $q_1(2) = 7/16, \quad q_2(2) = 9/16.$

Третій спосіб

Усі міркування зручно виконувати за допомогою графа станів ланцюга. Тому зобразимо цей граф:



У початковий момент за умовою завдання система перебувала у стані E_2.

Розглянемо події:

A — за один крок система перейшла зі стану E_2 у стан E_1;

$\overline{A}$ — через один крок система не вийшла зі стану E_2;

B — за один крок система перейшла зі стану E_1 у стан E_2.

Розглянемо складну подію: [(A і B) або ($\overline{A}$ і $\overline{A}$)].

Це означає, що через два кроки система опиниться у стані E_2 за умовою, що у початковий момент вона знаходилася у цьому ж стані. За відомими теоремами теорії імовірностей імовірність цієї складної події дорівнює

P[(A і B) або ($\overline{A}$ і $\overline{A}$)]$= P(A) \cdot P(B) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = p_{22}(2)$.

За умовами задачі

$$P(A) = p_{21} = 3/4, \quad P(B) = p_{12} = 2/3, \quad P(\overline{A}) = p_{22} = 1/4.$$

Отже, $p_{22}(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 9/16.$

З іншого боку, ця імовірність дорівнює $q_2(2)$, тому

$$q_2(2) = 9/16, \quad q_1(2) = 1 - q_2(2) = 7/16.$$

№5

Дана матриця перехідних імовірностей марковського ланцюга за один крок:

$$P=\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл імовірностей станів через два кроки, якщо початково система знаходилась у стані E_1.(Розв'язати задачу трьома способами).

№6

Знайти розподіл імовірностей станів марковських ланцюгів, графи станів яких зображені на рисунках 1 та 2 через три кроки, якщо в початковий момент система перебувала у стані E_i:

а) рисунок 1, i=1; б) рисунок 2, i=2.

№7

Знайти розподіл імовірностей станів марковських ланцюгів, графи станів яких зображені на рисунках 3-12, через n кроків, якщо початково система перебувала у i стані:

а) рисунок 3, n=2, i=1;
б) рисунок 4, n=2, i=2;
в) рисунок 5, n=3, i=3;
г) рисунок 6, n=3, i=1;
д) рисунок 7, n=3, i=2;
е) рисунок 8, n=3, i=3;
є) рисунок 9, n=4, i=1;
ж) рисунок 10, n=4, i=2;
з) рисунок 11, n=4, i=1;
и) рисунок 12,n=4, i=2.

№8

Дана матриця перехідних імовірностей марковського ланцюга за один крок

$$P=\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Знайти імовірність того, що через два кроки система перейде з першого стану у другий.

Розв'язання

Перший спосіб

Робоча формула:

$$P(n) = P^n,$$

де P(n) – матриця перехідних імовірностей через n кроків.

У завданні n=2, отже,

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 53/80 & 27/80 \\ 9/25 & 16/25 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\quad P(2) = \begin{pmatrix} p_{11}(2) & p_{12}(2) \\ p_{21}(2) & p_{22}(2) \end{pmatrix},$

то $\quad p_{12}(2) = 27/80.$

Другий спосіб

Використовуємо формулу

$$Q(n) = Q(n-1) \cdot P,$$

де $Q(n)$ – матриця імовірностей станів через n кроків, $Q(n) = (q_1(n) q_2(n) \ldots q_k(n))$;

$$Q(2) = Q(1) \cdot P, Q(1) = Q \cdot P,$$

де Q – матриця імовірностей початкових станів, $Q = (q_1 q_2 \ldots q_k)$.

Будемо вважати, що у початковий момент система перебувала у першому стані, тому $Q = (1\ 0)$. Тоді

$$Q(1) = (1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \left(1/4\ \ 3/4\right);$$

$$Q(2) = \left(1/4\ \ 3/4\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \left(q_1(2)\ q_2(2)\right).$$

Нас цікавить лише $q_2(2)$:

$$q_2(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{80},$$

це імовірність того, що через два кроки система опиниться у другому стані за умовою, що початково вона перебувала у першому стані, отже,

$$p_{12}(2) = q_2(2) = {}^{27}\!/_{80}.$$

№9

Дана матриця P перехідних імовірностей для марковського ланцюга за один крок.

Знайти імовірність того, що за n кроків система перейде з i-го стану в j-й стан.

а) $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}, n = 2, i = 1, j = 2;$ б) $P = \begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 3/10 & 7/10 \end{pmatrix}, n = 2, i = 2, j = 1;$

в) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, n = 3, i = 2, j = 1;$ г) $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, n = 3, i = 1, j = 1;$

д) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, n = 2, i = 2, j = 3;$

е) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}, n = 3, i = 3, j = 1.$

№10

Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів марковського ланцюга, якщо матриця перехідних імовірностей має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Робоча формула:

$$Q \cdot P = Q,$$

де Q – рядкова матриця стаціонарних імовірностей станів, $Q = (q_1, q_2, q_3)$.

$$(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3).$$

Перемножуючи матриці зліва та прирівнюючи відповідні елементи одержаної матриці та матриці справа, одержимо:

$$\begin{cases} 0 \cdot q_1 + \frac{1}{3} q_2 + \frac{2}{5} q_3 = q_1 \\ \frac{1}{2} q_1 + 0 \cdot q_2 + \frac{2}{5} q_3 = q_2 \\ \frac{1}{2} q_1 + \frac{2}{3} q_2 + \frac{1}{5} q_3 = q_3 \end{cases},$$

тобто

$$\begin{cases} -q_1 + \frac{1}{3} q_2 + \frac{2}{5} q_3 = 0 \\ \frac{1}{2} q_1 - q_2 + \frac{2}{5} q_3 = 0 \\ \frac{1}{2} q_1 + \frac{2}{3} q_2 - \frac{4}{5} q_3 = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

це однорідна система, її головний визначник Δ=0, отже, одне з рівнянь зайве, його можна відкинути або замінити умовою нормування: $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Відкинемо третє рівняння:

$$\begin{cases} -q_1+\dfrac{1}{3}q_2+\dfrac{2}{5}q_3=0 \\ \dfrac{1}{2}q_1-q_2+\dfrac{2}{5}q_3=0 \end{cases} \Rightarrow (-1-1/2)\cdot q_1+(1/3+1)\cdot q_2=0 \Rightarrow q_2=\frac{9}{8}q_1.$$

$$-q_1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8}q_1+\frac{2}{5}q_3=0 \Rightarrow q_3=\frac{25}{16}q_1,$$

$$q_1+q_2+q_3=q_1+\frac{9}{8}q_1+\frac{25}{16}q_1=1 \Rightarrow q_1=\frac{16}{59},\ q_2=\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{59}=\frac{18}{59},$$

$$q_3=\frac{25}{16}\cdot\frac{16}{59}=\frac{25}{59}.$$

Зауваження. Третє рівняння системи (1) можна було б не відкидати, а замінити рівнянням $q_1+q_2+q_3=1$. Головний визначник тепер $\Delta\neq 0$. Залишається розв'язати нову систему рівнянь будь-яким способом, наприклад, за формулами Крамера.

№11

Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів марковського ланцюга, поданого матрицею перехідних імовірностей Р. Матрицю Р взяти з умови задачі №9 (пункти а-е).

№12

Знайти фінальні імовірності станів марковських ланцюгів, графи станів яких зображені на рисунках1-12.

Примітка – Робоча формула $Q=Q\cdot P$ – та ж сама, що й у двох попередніх задачах, але тепер q_i означає фінальну імовірність i-го стану.

№13

Для ланцюга, граф станів якого зображений на рисунку 13, знайти фінальні імовірності станів.

(Відповідь: $q_i = 1/5, i=1,2,3,4,5.$)

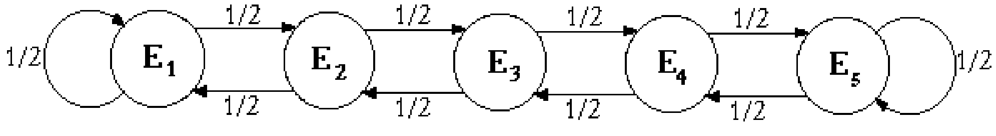


Рисунок 13

МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ З КІНЦЕВИМ ЧИСЛОМ СТАНІВ ТА НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

№14

Дані матриці інтенсивностей переходів марковського ланцюга. Побудувати графи станів.

1 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2 $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

3 $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4 $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 6 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

№15

Виписати матриці інтенсивностей переходів марковських ланцюгів, графи станів яких мають такий вигляд (рисунки 14-19):

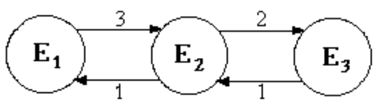


Рисунок 14

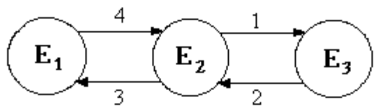


Рисунок 15

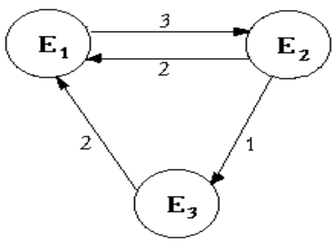


Рисунок 16

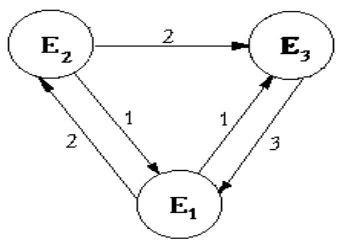


Рисунок 17

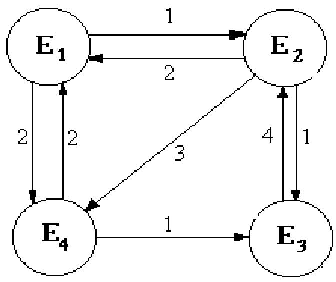


Рисунок 18

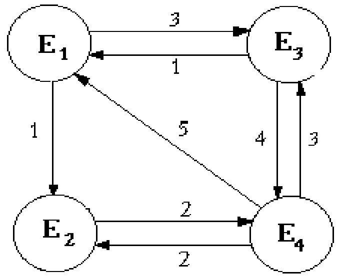


Рисунок 19

№16

Для неперервних марковських ланцюгів, графи станів яких подані в задачі №15, скласти системи диференціальних рівнянь Колмогорова.

Примітка. Робоча формула:

$$Q'(t) = Q(t) \cdot \Lambda,$$

де $Q(t)$ – рядкова матриця імовірностей $q_i(t)$ станів через час t,

$$Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots q_n(t));$$

$Q'(t)$ – матриця похідних імовірностей $q_i(t)$,

$$Q'(t) = (q_1'(t), q_2'(t), \ldots q_n'(t));$$

Λ – матриця інтенсивностей переходів.

№17

Дана матриця інтенсивностей переходів неперервного марковського ланцюга:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл імовірностей станів через час t, якщо в початковий момент система знаходилася у першому стані.

Розв’язання

Складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} q_1'(t) = -3q_1(t) + 4q_2(t) \\ q_2'(t) = 3q_1(t) - 4q_2(t) \end{cases}. \qquad (2)$$

Перший спосіб розв’язання системи (2)

Розв’язок шукаємо у вигляді

$$q_1(t) = \alpha \cdot e^{k \cdot t}, q_2(t) = \beta \cdot e^{k \cdot t}. \qquad (3)$$

Значення κ знаходимо з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} -3-k & 4 \\ 3 & -4-k \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $k_1 = 0, k_2 = -7.$
При $k = k_1 = 0$ запишемо рівняння для α і β:

$$(-3-0)\alpha + 4\beta = 0, \text{ тобто можна взяти } \alpha = 4, \beta = 3.$$

Тоді за формулою (3):

$$q_1^{(1)}(t) = 4, q_2^{(1)}(t) = 3 - \text{ це перший окремий розв'язок системи (2).}$$

При $\underline{k = k_2 = -7}$ маємо рівняння для α і β:

$$(-3-(-7))\alpha + 4\beta = 0, \text{ тобто можна взяти } \alpha = -1, \beta = 1.$$

За формулою (3) одержимо другий окремий розв'язок системи (2):

$$q_1^{(2)}(t) = -e^{-7t}, \quad q_2^{(2)}(t) = e^{-7t}.$$

Складемо загальний розв'язок:

$$q_1(t) = c_1 q_1^{(1)}(t) + c_2 q_1^{(2)}(t), \quad q_2(t) = c_1 q_2^{(1)}(t) + c_2 q_2^{(2)}(t),$$
$$q_1(t) = 4c_1 - c_2 e^{-7t}, \quad q_2(t) = 3c_1 + c_2 e^{-7t}.$$

Залишилося знайти значення сталих c_1 і c_2.

Оскільки $q_1(t) + q_2(t) = 1$, то $4c_1 + 3c_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{7}.$

Отже, $q_1(t) = \frac{4}{7} - c_2 e^{-7t}, \quad q_2(t) = \frac{3}{7} + c_2 e^{-7t}.$

Оскільки за умовою задачі у початковий момент часу система знаходилася у першому стані, то $q_1(0) = 1, q_2(0) = 0.$

$$q_1(0)=\frac{4}{7}-c_2=1\Rightarrow c_2=-\frac{3}{7},$$

або

$$q_2(0)=\frac{3}{7}+c_2=0\Rightarrow c_2=-\frac{3}{7}.$$

Відповідь: $q_1(t)=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}e^{-7t},\ q_2(t)=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}e^{-7t}$.

Другий спосіб розв'язання системи (2)

Зведемо систему (2) до єдиного рівняння 2-го порядку. Диференціюємо друге рівняння системи:

$$q_2''=3q_1'-4q_2'.$$

Через перше рівняння $q_2''=3(-3q_1+4q_2)-4q_2'$.

З другого рівняння системи (2): $-3q_1+4q_2=-q_2'$.

Отже,

$$q_2''=3(-q_2')-4q_2'\Rightarrow q_2''+7q_2'=0\Rightarrow q_2(t)=c_1+c_2e^{-7t}.$$

З другого рівняння системи (2):

$$q_1(t)=\frac{1}{3}q_2'(t)+\frac{4}{3}q_2(t),$$

тобто

$$q_1(t)=\frac{4}{3}c_1-c_2e^{-7t}.$$

Значення c_1 і c_2 знаходяться, як і вище, за допомогою умов

$$\begin{cases} q_1(t)+q_2(t)=1 \\ q_1(0)=1 \quad \text{або} \quad q_2(0)=0 \end{cases};$$

$$c_1=\frac{3}{7};\ c_2=-\frac{3}{7}.$$

Третій спосіб розв'язання системи (2)

З умови $q_1(t)+q_2(t)=1$ виразимо $q_2(t)$ та підставимо його значення в перше рівняння системи (2):

$$q_1'=-3q_1+4(1-q_1),$$

тобто $q_1' + 7(q_1 - 4/7) = 0$ – це рівняння з відокремлювальними змінними

$$q_1 - 4/7 = c_1 \cdot e^{-7t}.$$

З початкової умови $q_1(0) = 1$ знайдемо $c_1 = \frac{3}{7}$.

Таким чином,

$$q_1(t) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} e^{-7t},$$

$$q_2 = 1 - q_1 \Rightarrow q_2(t) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} e^{-7t}.$$

Зауваження. Третій спосіб розв'язання системи (2) є найбільш результативним.

№18

Дана матриця Λ інтенсивностей переходів неперервного марковського ланцюга. Знайти розподіл імовірностей станів через час t, якщо у початковий момент часу система знаходилась у i-му стані.

1 $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, i = 2$

2 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, i = 1$

3 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, i = 1$

4 $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, i = 2$

5 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, i = 3$

6 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, i = 2$

7 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, i = 2$

8 $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, i = 1$

№19

Знайти перехідні імовірності марковського ланцюга, якщо відома матриця інтенсивностей переходів:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Система диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} q_1'(t) = -3q_1(t) + 4q_2(t) \\ q_2'(t) = 3q_1(t) - 4q_2(t) \end{cases}. \qquad (2)$$

Нехай спочатку $q_1(0) = 1, q_2(0) = 0$, тобто спочатку система знаходилась у першому стані. Розв'язок системи (2) за такою почат-ковою умовою було одержано вище у задачі №17:

$$q_1(t) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}e^{-7t},\ q_2(t) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}e^{-7t},$$

де $q_1(t) -$ імовірність того, що через час t система опиниться у першому стані за умовою, що спочатку вона знаходилась у цьому ж стані.

Отже, $q_1(t) -$ це імовірність переходу системи через час t з першого стану у перший стан:

$$p_{11}(t) = q_1(t),\ p_{11}(t) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}e^{-4t}.$$

Далі, $q_2(t) -$ це імовірність того, що система опиниться у другому стані через час t за умовою, що спочатку вона перебувала у першому стані.

Отже, $q_2(t) -$ це імовірність переходу системи за час t з першого стану у другий:

$$p_{12}(t) = q_2(t), \quad p_{12}(t) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}e^{-7t}.$$

Аналогічно, вводячи початкову умову $q_1(0) = 0, q_2(0) = 1$, знайдемо з системи (2) $q_1(t)$ і $q_2(t)$, тобто перехідні імовірності за час t:

$$p_{21}(t) = q_1(t), \quad p_{22}(t) = q_2(t).$$

№20

Знайти перехідні імовірності марковського ланцюга, якщо відома матриця Λ інтенсивностей переходів:

1 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

3 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 4 $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 6 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

7 $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 8 $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

№21

Знайти перехідні імовірності станів марковських ланцюгів, графи станів яких зображені на рисунках 14-19 (див. задачу №15).

№22

Даний граф станів неперервного марковського ланцюга (рисунок 20):

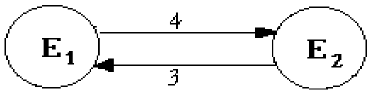


Рисунок 20

Знайти фінальні імовірності станів.

Розв'язання

Робоча формула:

$$Q \cdot \Lambda = 0,$$

де Q – рядкова матриця з фінальних імовірностей, $Q = (q_1 \; q_2)$;

Λ – матриця інтенсивностей переходів:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$Q \cdot \Lambda = (q_1\ q_2) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = (0\ 0) \Rightarrow \begin{cases} -4q_1 + 3q_2 = 0 \\ 4q_1 - 3q_2 = 0 \end{cases}.$$

У такій системі завжди одне з рівнянь зайве, тому одне з рівнянь системи замінимо умовою нормування $q_1 + q_2 = 1$. Унаслідок цього будемо мати систему:

$$\begin{cases} 4q_1 - 3q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{3}{7},\ q_2 = \frac{4}{7}.$$

№23

Даний граф станів неперервного марковського ланцюга (рисунки 21-26). Знайти фінальні імовірності станів.

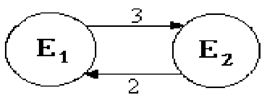


Рисунок 21

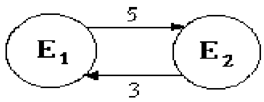


Рисунок 22

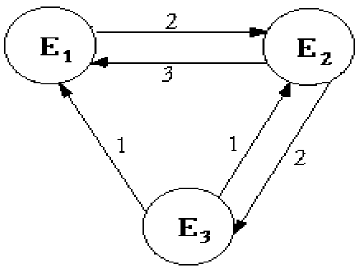


Рисунок 23

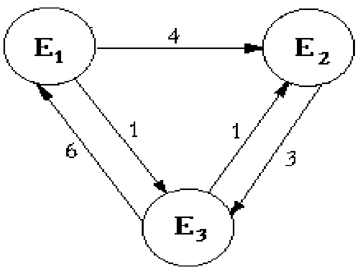


Рисунок 24

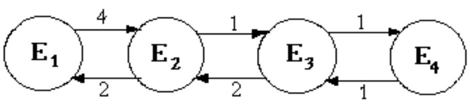


Рисунок 25

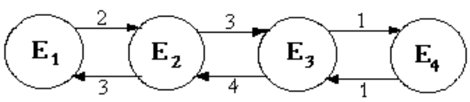


Рисунок 26

№24

Дані матриці інтенсивностей переходів марковських ланцюгів (див. задачу №14). Знайти фінальний розподіл імовірностей станів.

№25

На станції одночасно можуть навантажуватись чотири вагони. Кожен з них навантажується з інтенсивністю μ. З інтенсивністю λ вагони надходять для навантаження. Зобразити граф станів навантажувального майданчика і виписати матрицю інтенсивностей.

№26

У транзитному парку сортувальної станції три колії. Поїзди прибувають з інтенсивністю λ і приймаються без затримань. Кожна колія звільняється з інтенсивністю μ. Зобразити граф станів парку і виписати матрицю інтенсивностей.

№27

Формуванням поїздів на станції зайняті чотири маневрові локомотиви. Кожен з них з інтенсивністю λ виходить з ладу, після чого його відразу починають ремонтувати. Інтенсивність ремонту одного локомотива дорівнює μ. Зобразити граф станів виникаючого випадкового процесу та виписати матрицю інтенсивностей.

№28

Чергові по ділянці колії мають три радіостанції. Кожна з них з інтенсивністю λ виходить з ладу. При виході з ладу радіостанція негайно ремонтується. Інтенсивність ремонту однієї радіостанції дорівнює μ. Зобразити граф станів виникаючого випадкового процесу та виписати матрицю інтенсивностей.

№29

На пероні стоять три турнікети, які обслуговує один ремонтник. Інтенсивність пошкодження кожного турнікета дорівнює λ, а інтенсивність ремонту - μ. Зобразити граф станів виникаючого випадкового процесу та виписати матрицю інтенсивностей.

№30

На залізничній станції є чотири електронних годинники, які обслуговує один майстер. Кожен годинник виходить з ладу з інтенсивністю λ, а ремонтується з інтенсивністю μ. Зобразити граф станів виникаючого випадкового процесу та виписати матрицю інтенсивностей.

№31

На станції метрополітену працюють чотири монітори. Інтенсивність пошкоджень кожного з них дорівнює λ. При виході з ладу монітор одразу починають ремонтувати. Інтенсивність ремонту дорівнює μ. Зобразити граф станів моніторів на станції та виписати матрицю інтенсивностей.

№32

У деканаті працюють три комп'ютери. Їх обслуговує один майстер. Кожний комп'ютер виходить з ладу з інтенсивністю λ і з інтенсивністю μ - ремонтується. Зобразити граф станів комп'ютерів у деканаті та виписати матрицю інтенсивностей.

№33

У вокзальному приміщенні є майстерня термінового дрібного ремонту взуття. У ній працюють три майстри. Клієнти звертаються до цієї майстерні з інтенсивністю λ і при цьому кожен з них обслуговується з інтенсивністю μ. Якщо клієнт з'являється у той час, коли всі майстри зайняті, йому відмовляють в обслуговуванні. Кожний майстер обслуговує тільки одного клієнта. Зобразити граф станів майстерні та виписати матрицю інтенсивностей.

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

№34

Автоматична система управління (АСУ) продажем залізничних квитків складається з двох ЕОМ, які працюють паралельно. При ушкодженні однієї ЕОМ АСУ продовжує нормально функціонувати за рахунок роботи другої ЕОМ. Потік відмов кожної ЕОМ — найпростіший. Середній час безвідмовної роботи однієї ЕОМ дорівнює десяти добам. Пошкоджену ЕОМ негайно починають ремонтувати. Час ремонту ЕОМ має показниковий розподіл і в середньому складає дві доби. У початковий момент часу обидві ЕОМ справні.

Знайти:

1) розподіл імовірностей станів АСУ через довільний час t;

2) фінальний розподіл імовірностей станів.

Вказівка. Позначимо стани АСУ за числом несправних ЕОМ:

E_0 – обидві ЕОМ справні;

E_1 – одна ЕОМ справна, одна ремонтується;

E_2 – обидві ЕОМ несправні.

Інтенсивність відмов однієї ЕОМ $\lambda = 1/10$ відмов за добу, інтенсивність відновлення однієї ЕОМ $\mu = 1/2$ відновлення за добу.

Граф станів має вигляд (рисунок 27):

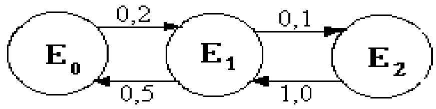


Рисунок 27

Початковий розподіл імовірностей станів: (1 0 0).

№35

Диспетчерська служба має п'ять каналів зв'язку. Потік викликів — найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 0{,}8$ викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає три хвилини. Час переговорів розподілено за показниковим законом.

Знайти:

1) фінальний розподіл імовірностей станів диспетчерської служби;

2) середню кількість зайнятих каналів;

3) середню кількість вільних каналів.

Вказівка. У стані E_i кількість зайнятих каналів дорівнює i. Граф станів диспетчерської служби має вигляд (рисунок 28):

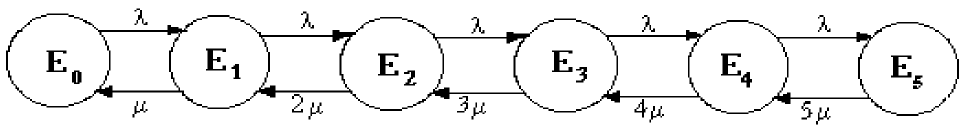


Рисунок 28

$\mu = 1/3$ переговорів за хвилину для одного каналу.

№36

До приймально-відправного парку станції надходить найпростіший потік поїздів із середньою інтенсивністю три поїзди за годину. Одна бригада оглядачів обробляє состав із середньою тривалістю п'ятнадцять хвилин. Час обробки розподілений за показниковим законом.

Визначити:

1) фінальний розподіл імовірностей станів парку;

2) середню кількість составів, які очікують обслуговування.

№37

У вокзальному приміщенні знаходиться одна квиткова каса. У середньому за одну годину до неї звертаються п’ятнадцять чоловік, а касир обслуговує кожного пасажира три хвилини. Знайти середню довжину черги, якщо прибуваючий потік пасажирів – найпростіший, а час обслуговування – показниковий.

№38

Автомат з продажу квитків на вокзалі видає квиток за п’ятнадцять секунд. Звертаються до нього з інтенсивністю $\lambda = 180$ пасажирів за годину. Закон розподілу пасажиропотоку – пуассонів. Знайти середню кількість пасажирів у черзі.

№39

На сортувальну станцію надходять у переробку шість тисяч чотириста вісімдесят вагонів за добу. Середня кількість вагонів у поїзді дорівнює дев’яносто. Гірковий технологічний інтервал $t_г$=12 хвилин. Визначити середню кількість составів у системі “парк приймання-гірка” і середній час очікування розформування, якщо вхідний потік поїздів підкоряється закону Пуассона, а час обслуговування – показниковому.

№40

Поїзди, які прибувають у парк відправлення станції, піддаються там технічному огляду. Паралельно працюють дві бригади. Середній час огляду состава бригадою дорівнює M(S)=20 хвилин. Вважаючи прибуваючий у парк потік составів пуассоновим з інтенсивністю λ=3 состави за годину, а час огляду бригадою состава показниковим, визначити середню кількість составів, які очікують огляду, й середній час очікування початку огляду.

№41

На залізничній станції є три касові апарати. Потік пасажирів, бажаючих придбати квиток, є найпростішим з інтенсивністю λ=68 пасажирів за хвилину. Час обслуговування розподілений за показниковим законом. Середній час обслуговування складає 2,5 секунди.

Визначити:
1) імовірність того, що пасажир застане усі апарати зайнятими;
2) середнє число пасажирів у черзі за квитками;
3) середнє число пасажирів у касі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977. – 366 с.
2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979. – 334 с.
3 Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Наука,1988. – 208 с.
4 Теорія масового обслуговування. – Харків: ХарДАЗТ, 1999. - №3596.