№626

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
та завдання до розрахунково-графічної роботи
з розділу дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина II

Харків - 2014

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 13 листопада 2013 р., протокол № 4.

Методичні вказівки призначено для студентів денної форми навчання напряму підготовки 6.050702 «Електромеханіка». Методичні вказівки можуть бути також використані студентами факультету АТЗ та студентами механічного факультету інших напрямів підготовки.

Укладачі:

проф. В.І. Храбустовський,
доценти О.І. Удодова,
Ю.С. Шувалова

Рецензент

проф. Ю.В. Куліш

Зміст

ВСТУП

Методичні вказівки є продовженням [11]. Вони містять допоміжні теоретичні відомості, завдання та приклади розв’язків завдань з таких тем: степеневі ряди, інтегрування функцій комплексної змінної, ряди Лорана, лишки, обчислення інтегралів за допомогою лишків. Матеріал методичних вказівок спирається на конспект лекцій [9]. Для більш глибокого опрацювання цих розділів можна використати наведену літературу.

Номери варіантів індивідуальних завдань або розрахункових робіт видаються викладачем. Залік контрольних (розрахункових) робіт згідно з навчальною програмою є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики. Робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не заліковується.

1 СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Завдання 1. Знайти і зобразити на комплексній площині круг збіжності степеневого ряду ([9], розділ 2.1; [1], гл. 9; [8], гл.12):

1) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2+i\sqrt{5}\right)^n\left(z+2i\right)^n}{\left(3i\right)^n+\left(9i\right)^n}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2+3i)^5(z-2+i)^n}{n!(3-4i)^n}$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5i)^2(z-4+2i)^{3n}}{\sqrt{n}(\sqrt{13}+i\sqrt{3})^n}$$

4) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(5n)^{2n}(z-2i)^n}{(3n+i)^{2n+1}(3-4i)^n}$$

5) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3-i)2^n(z+4i)^n}{(3+i\sqrt{7})^n}$$

6) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-i)^{n^2+1}(z+4i)^{n^2}}{(3-4i)^n}$$

7) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{n^2}(z-2+3i)^n}{(2n-5)^{n^2}(\sqrt{3}+i)^n}$$

8) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!2^n(z+3+4i)^n}{(n+5i)^{10}}$$

9) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+i)^n(z+2)^{5n}}{(n+5-i)^{n+1}(2i)^n}$$

10) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^n(z+5i)^n}{(3i)^n+(4i)^n}$$

11) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+3-i)^2(z+3-2i)}{(3i)^n+(2-2i)^n}$$

12) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{n^2+1}(z+2-i)^{n^2}}{(2+\sqrt{5}i)^n}$$

13) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2i)^{n+1}(z-3+i)^n}{(2n+2i)^{n+2}}$$

14) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)^{n+1}(z-1+i)^n}{(n+3)!(1+i)^n}$$

15) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5+i\sqrt{11})^n(z+3i)^{5n}}{4^n+(5i)^n}$$

16) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2-3i)^n}{(-5i)^n(1+\sqrt{3}i)^{n^2}}$$

17) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+10i)^3 (z+4+2i)^n}{(1+i\sqrt{3})^n}$

18) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-\sqrt{6}i)^n (z+2i)^{4n^2}}{(2-i)^{2n^2}}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+i)^n (z+3-i)^n}{(-6in)^n}$

20) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(z+3-4i)^n}{(n+1)^2 (2+i\sqrt{5})^n}$

21) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2i)^4 (z+1-4i)^{3n}}{(2+3i)^n}$

22) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+2i)^{n^2} (z-2i)^n}{(2-2i)^{n^2+2n} (3i)^n}$

23) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2i)^{2n} (z-2+i)^n}{(2+in)(3+4i)^n}$

24) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n (z-5+3i)^{2n+n^2}}{(\sqrt{5}+2i)^{n^2}}$

25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2} (z+2-i)^n}{(n+2)^{n^2} (3+i\sqrt{7})^n}$

26) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3i)^5 (z+5i)^n}{(4+i\sqrt{20})^n}$

27) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(z+2-5i)^{3n}}{(n+3)^n(2+i)^{2n}}$$

28) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}(z+4i)^n}{(n+3)^{n^2}(\sqrt{6}+i\sqrt{10})^n}$$

29) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!(z-2i)^n}{(n+i)^n(-2i)^n}$$

30) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^{2n^2}(z+3i)^{n^2}}{(3-4i)^n}$$

31) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2-3i)^{n^2+n}}{(5i)^n(1+\sqrt{3}i)^{n^2}}$$

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулами

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,\quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},\tag{1}$$

коли границі в першій або другій формулах існують. Приклади застосування цих формул наведені у ([9], підрозділ 2.1).

Розв'яжемо приклад, в якому ці формули застосувати не можна.

Розв'язання завдання 31

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2-3i)^{n^2+n}}{(5i)^n(1+\sqrt{3}i)^{n^2}}.\tag{2}$$

Центр круга збіжності $z_0 = -2 + 3i$. Знайдемо радіус цього круга*. Застосуємо радикальну ознаку Коші для числових рядів. Запишемо n – й член ряду (2)

$$u_n = \frac{(z + 2 - 3i)^{n^2+n}}{(5i)^n (1 + \sqrt{3}i)^{n^2}}.$$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\frac{|z - 2 + 3i|^{n^2+n}}{|5i|^n \left|1 + \sqrt{3}i\right|^{n^2}}} = \frac{|z - 2 + 3i|^{n+1}}{5\left|1 + \sqrt{3}i\right|^n} = \frac{|z - 2 + 3i|^{n+1}}{5 \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{|z - 2 + 3i|}{2}\right)^n |z - 2 + 3i|.$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \infty, & \frac{1}{2}|z - 2 + 3i| > 1 \\ 0, & \frac{1}{2}|z - 2 + 3i| < 1 \end{cases} \Rightarrow l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \infty, & |z - 2 + 3i| > 2 \\ 0, & |z - 2 + 3i| < 2 \end{cases}.$$

Тобто за радикальною ознакою Коші ряд (2) збігається при $|z - 2 + 3i| < 2$ (тому що тоді $l = 0 < 1$) і розбігається при $|z - 2 + 3i| > 2$ (тому, що тоді $l = \infty > 1$). Таким чином, $R = 2$.** Зобразимо круг збіжності степеневого ряду (2) (рисунок 1).

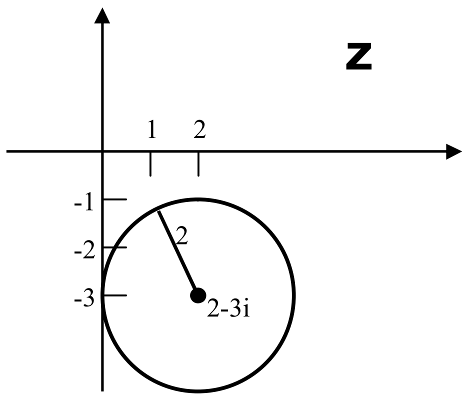

Рисунок 1

---

* З $k = n^2 + n$ витікає, що $n \sim \sqrt{k}$, отже $|c_k| = 0, k \neq n^2 + n$, $|c_k| \sim \dfrac{1}{5^{\sqrt{k}} 2^k}, k = n^2 + n$, і тому жодну з формул (1) застосувати не можна.

** Зауважимо, що при $|z - 2 + 3i| = 2$ $l = \dfrac{2}{5} < 1$. Отже ряд збігається при $|z - 2 + 3i| \leq 2$.

Завдання № 2. Для даної функції вказати, як знаходити її розклад у степеневий ряд за степенями z-z_0, та знайти радіус збіжності цього степеневого ряду ([9], підрозділ 2.2; [8], гл.12)

1) $tg2z, \qquad z_0 = 5\pi/6$

2) $\ln\dfrac{z^2-2z+17}{z^2-4z+4}, z_0 = 5+2i$

3) $\dfrac{1}{2\sin z-1}, z_0 = 4,7-1,2i$

4) $th^3 z, z_0 = -i7\pi/6$

5) $\ln(shz), \qquad z_0 = -i\pi/3$

6) $\dfrac{z}{e^{2z}-1}, z_0 = 4-7,8i$

7) $ctg^2 2z, z_0 = -11+7i$

8) $\ln\dfrac{z^2-4z+5}{z^2+9}, z_0 = -5-4i$

9) $\dfrac{1}{\cos 3z-1}, z_0 = 5\pi/4$

10) $cth^2 z, z_0 = -i7\pi/4$

11) $\ln(tgz), z_0 = 7,9-4i$

12) $\dfrac{1}{e^{2z}+3e^z+2}, z_0 = 0,6-6i$

13) $ctg(z+5+2i), z_0 = 5\pi/3-5-2i$

14) $\ln\dfrac{z^2+4}{z^2+4z+13}, z_0 = -1{,}1-2{,}4i$

15) $\dfrac{1}{2\cos z+1}$, $z_0=17\pi/6$

16) $th(z-1+2i), z_0 = 1+i(\pi/3-2)$

17) $\ln(thz), z_0 = i9\pi/4$

18) $\dfrac{\sin z}{e^{2z}}, z_0 = 3-i2\pi$

19) $tg^2 0{,}25z, z_0 = 2+i$

20) $\ln\dfrac{z^2+6z+9}{z^2+2z+10}, z_0 = 5-i$

21) $\dfrac{1}{\sin 2z+1}, z_0 = \pi/3$

22) $cth5z, z_0 = -2+7{,}8i$

23) $\ln(ctgz), z_0 = -13\pi/3$

24) $\dfrac{\cos z}{e^{2z}+e^z-2}, z_0 = 1+i2\pi$

25) $tg(z-4+i), z_0 = 4-13\pi/6-i$

26) $\ln\dfrac{z^2-4z+29}{z^2+9}, z_0 = 1-0{,}1i$

27) $\dfrac{e^z}{\cos 2z+1}, z_0 = 6-i3\pi/2$

28) $cth(z - i), z_0 = -5 + 5,7i$

29) $\ln(chz),\ z_0 = -i\pi / 3$

30) $\dfrac{z}{e^{2z} + 9}, z_0 = 3i$

31) $\ln(cth\,z), z_0 = 2,1 + 3,9i$

Розв'яжемо завдання 31 (інші приклади див. у [9])

$$\ln(cth\,z), z_0 = 2,1 + 3,9i \ .$$

Згідно з теоремою Тейлора ([9], підрозділ 2.2) розклад функції $\ln cth\,z$ у ряд за степенями $(z - 2,1 - 3,9i)$ має вигляд

$$\ln cth\,z = c_0 + c_1(z - 2,1 - 3,9i) + \ldots + c_n(z - 2,1 - 3,9i) + \ldots, \qquad (3)$$

де $c_n = \left.\dfrac{(\ln cthz)^{(n)}}{n!}\right|_{z=2,1+3,9i}$.

Згідно з правилом знаходження радіуса збіжності ряду Тейлора функції, яка аналітична в точці ([9], підрозділ 2.2), радіус збіжності ряду (3) дорівнює відстані від $z_0 = 2,1 + 3,9i$ до найближчої особливої точки функції $f(z) = \ln cth\,z$. Особливі точки цієї функції – це множина точок, де $cth\,z = 0$ (це точки $z = i(\dfrac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z$) або $cth\,z = \infty$ (це точки $z = i\pi n,\ n \in Z$).

Таким чином, множина особливих точок: $z = i\frac{\pi n}{2}, n \in Z$. З рисунка 2 видно, що дві найближчі до точки $z_0 = 2{,}1 + 3{,}9i$ є точки $z = i\pi$ та $z = i\frac{3\pi}{2}$.

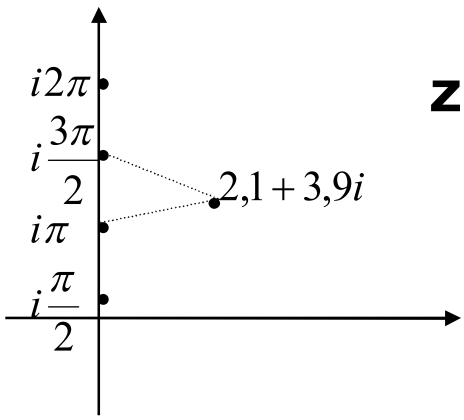

Рисунок 2

Знайдемо відстані

$$\left|z_2 - z_0\right| = \left|\pi i - 2{,}1 - 3{,}9i\right| = \sqrt{(-2{,}1)^2 + (\pi - 3{,}9)^2} \approx \sqrt{4{,}41 + 0{,}58} \approx 2{,}23,$$

$$\left|z_3 - z_0\right| = \left|\frac{3\pi i}{2} - 2{,}1 - 3{,}9i\right| = \sqrt{(-2{,}1)^2 + (\frac{3\pi}{2} - 3{,}9)^2} \approx \sqrt{4{,}41 + 0{,}66} \approx 2{,}25.$$

Таким чином, радіус збіжності ряду (3) $R \approx 2{,}23$.

2 ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Інтеграл від аналітичної функції обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца. Точніше, справедлива

теорема. Нехай $f(z)$ аналітична в області[*] D. Нехай шлях L, який з’єднує точки z_1 та z_2, лежить в цій області D (рисунок 3).

---

[*] В цих методичних вказівках областю називаємо відкриту однозв'язну множину.

Тоді

$$\int_L f(z)dz = F(z_2) - F(z_1), \qquad F'(z) = f(z).$$

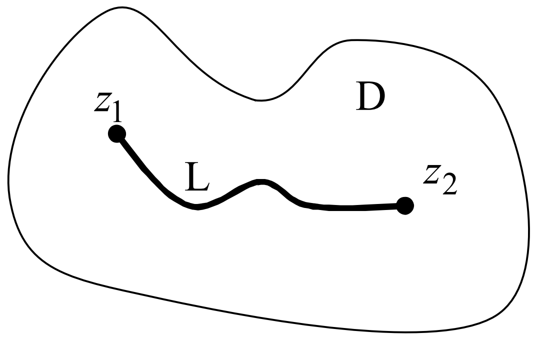

Рисунок 3

Завдання 3. Обчислити інтеграл

1) $\int_L \cos(2z-i)dz$ від i до 1+0,5i;

2) $\int_L sh(2z-3)dz$ від 1,5+i до 3i;

3) $\int_L 11ze^z dz$ від 0 до 11+i;.

4) $\int_L \sin(5z+2i)dz$ від 2 до 1-0,4i;

5) $\int_L ch(2z+4)dz$ від 4i-2 до 4i;

6) $\int_L 8z\sin z dz$ від 0 до 8i;

7) $\int_L e^{4z-5i}dz$ від 4-2i до 5i;

8) $\int_L z^{30}dz$ від 0 до 1-i;

9. $\int_L 7z\cos z dz$ від 0 до 7i;

10) $\int_L 3^{2z-6i}dz$ від 6 до 1+3i;

11) $\int_L \cos(2z-16i)dz$ від 1+8i до i;

12) $\int\limits_L sh(3z-18)dz$ від 6+i до i;

13) $\int\limits_L z27^z dz$ від 0 до 27-i;

14) $\int\limits_L \sin(2z+17i)dz$ від 17 до -i;

15) $\int\limits_L ch(2z-19)dz$ від 19 до 8-i;

16) $\int\limits_L 23z\sin z dz$ від 0 до 23i;

17) $\int\limits_L e^{2z-20i}dz$ від 4+5i до 3i;

18) $\int\limits_L z^{15}dz$ від 0 до 1+i;

19) $\int\limits_L 22z\cos z dz$ від 0 до 22i;

20) $\int\limits_L 21^{2z-3i}dz$ від 2+i до 1,5i;

21) $\int\limits_L \cos(3z-i)dz$ від 2i до 1+i

22) $\int\limits_L sh(3z-1)dz$ від 1+0,5i до 4i;

23) $\int\limits_L z12^z dz$ від 0 до 12-i;

24) $\int\limits_L \sin(4z+3i)dz$ від 3 до 2-0,5i;

25) $\int\limits_L ch(3z-4)dz$ від 4i-5 до 2i;

26) $\int\limits_L 9zshzdz$ від 0 до 9i;

27) $\int\limits_L e^{4z-5i}dz$ від 4-2i до 5i;

28) $\int\limits_L (2z+4i)^{14}dz$ від -2i до 0;

29) $\int\limits_L 10zchzdz$ від 0 до 10i;

30) $\int\limits_L 10^{2z-i}dz$ від 1+i до 2+3i.

3 РЯДИ ЛОРАНА. ОБЧИСЛЕННЯ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

Нехай z_0 ізольована особлива точка функції $f(z)$ [9], тоді в околі цієї точки функція розкладається в ряд Лорана [9]

$$\ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

ряди

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots$$

Та

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

називаються відповідно його головною та правильною частинами.

Коефіцієнт c_{-1} ряду Лорана називається лишком функції в точці z_0 і позначається

$$c_{-1} = \underset{z=z_0}{Res} f(z).$$

В разі, коли z_0 є полюсом, для знаходження лишка не потрібно розкладати функцію у ряд Лорана, а саме справедливо **правило**:

1) нехай

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}\ , \tag{4}$$

де функції $h(z)$, $g(z)$ аналітичні в точці z_0, $g(z_0) = 0$, $g((z_0) \neq 0$, тоді

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad (5)$$

2) нехай

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}\ , \qquad (6)$$

тоді

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = \frac{(h(z_0))^{(m-1)}}{(m-1)!}. \qquad (7)$$

Якщо z_0 є суттєво особливою точкою, аналогічних формул не існує і для обчислення лишка потрібно знаходити головну частину ряда Лорана (див. нижче розв'язання прикладу 31 завдання 5).

3.1 Теорема Коші про лишки

Нехай $f(z)$ аналітична в середині замкненого контуру L і на ньому за винятком скінченної кількості точок z_1, $z_{2,\dots} z_n$ в середині L, як на рисунку 4.

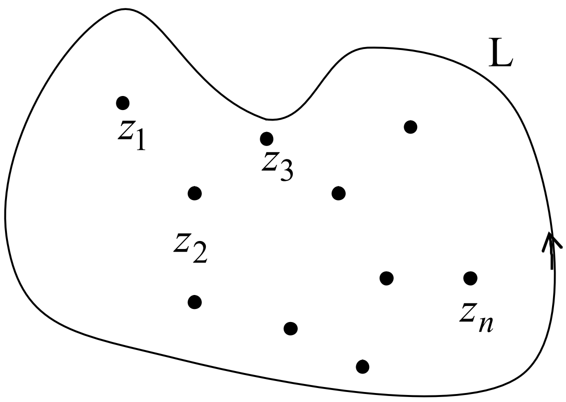

Рисунок 4

Тоді

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z), \qquad (8)$$

контур обходимо, як показано на рисунку 4.

Завдання 4

1 Знайти всі розкладання у ряд Лорана функції f(z) за степенями z ([1], гл.6; [8], гл.12);

2 Обчислити за допомогою лишків $\oint\limits_L f(z)dz$ (таблиця 1).

Таблиця 1

	$f(z)$	Рівняння L
1	$\dfrac{z+4}{z^3-5z^2+6z}$	$\mathrm{Re}\dfrac{1}{z+0,5}=\dfrac{1}{3}$
2	$\dfrac{3z+1}{z^3+5z^2+6z}$	$\lvert z\rvert^2-3z-3\bar{z}+5=0$
3	$\dfrac{4z-1}{2z^3+4,5z}$	$\left\lvert\dfrac{z}{z-3i}\right\rvert=\dfrac{1}{2}$
4	$\dfrac{2z+5}{4z^3-17z^2+4z}$	$\mathrm{Re}\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4}$
5	$\dfrac{z+2}{4z^3+17z^2+4z}$	$\left\lvert\dfrac{3z}{z+8i}\right\rvert=1$
6	$\dfrac{z-3}{2z^3-3z^2-2z}$	$\lvert z\rvert^2-2z-2\bar{z}+1=0$
7	$\dfrac{2z+7}{6z^3-5z^2+z}$	$\mathrm{Re}\dfrac{1}{z+0,6}=1$
8	$\dfrac{3z+2}{6z^3+5z^2+z}$	$(z+2)(\bar{z}+2)=3,24$
9	$\dfrac{z-2}{8z^3+6z^2+z}$	$\mathrm{Re}\dfrac{8}{8z+3}=1$
10	$\dfrac{z-1}{3z^3+7z^2+2z}$	$\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$

Продовження таблиці 1

	$f(z)$	Рівняння L
11	$\dfrac{2z-3}{7z^2-3z^3-2z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{1}{2z+2+i}=\dfrac{1}{4}$
12	$\dfrac{2z+5}{z^3-6z^2+8z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z(1+3i)-1+3i}{z+1}=0$
13	$\dfrac{3z+1}{z^3+z^2-12z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{4}{z+4-i}=1$
14	$\dfrac{5z-4}{z^3-z^2-12z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z-5+i}{z+1+i}=0$
15	$\dfrac{z+4}{15z+8z^2+z^3}$	$\operatorname{Re}\dfrac{2}{z+4+i}=\dfrac{1}{2}$
16	$\dfrac{z-1}{z^3+4z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z-2-i}{z+2-i}=0$
17	$\dfrac{2z-1}{3z^3+10z^2+3z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{2}$
18	$\dfrac{3z+2}{3z^3-10z^2+3z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+2}=0$
19	$\dfrac{3z-1}{2z^3+3z^2-2z}$	$(z-1)(\bar{z}-1)=4$
20	$\dfrac{5z-2}{5z^3+26z^2+5z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z-5-i}{z+5-i}=0$
21	$\dfrac{4z+1}{5z^3-26z^2+5z}$	$\left\lvert\dfrac{z+3+3i}{z}\right\rvert=2$
22	$\dfrac{z-4}{6z^2-8z^3-z}$	$\operatorname{Re}\dfrac{z-0,3}{z+0,3}=0$
23	$\dfrac{z-1}{12z^3+7z^2+z}$	$9\lvert z\rvert^2+3z+3\bar{z}-3=0$
24	$\dfrac{2z+5}{3z^3-13z^2+4z}$	$(z-1-i)(\bar{z}-1+i)=4$
25	$\dfrac{5z-1}{2z^3+7z^2+3z}$	$\left\lvert\dfrac{z+4+4i}{z}\right\rvert=3$
26	$\dfrac{7z+1}{z^3+6z^2+8z}$	$(z+3-i)(\bar{z}+3-i)=9$

Продовження таблиці 1

	$f(z)$	Рівняння L
27	$\dfrac{2z-5}{5z^2-2z^3-3z}$	$\left\|\dfrac{z+4i}{z}\right\|=3$
28	$\dfrac{3z+7}{z^3+9z^2+20z}$	$(z+4+i)(\overline{z}+4-i)=4$
29	$\dfrac{3z+7}{z^3+z^2-20z}$	$\left\|\dfrac{z}{z+6+3i}\right\|=\dfrac{1}{2}$
30	$\dfrac{3z+5}{z^3+9z^2+18z}$	$\|z\|^2+5z+5\overline{z}-34=0$
31	$\dfrac{7z+1}{z^3-9z^2+20z}$	$(z-3+i)(\overline{z}-3-i)=9$

Розв'яжемо приклад 31.

1 Всі розкладання у ряд Лорана функції $f(z)$ за степенями z здійснюються аналогічно прикладу 2.23 у [9].

2 Обчислимо за допомогою лишків $\oint\limits_L f(z)dz$.

Рівняння L можна записати так: $|z-(3-i)|^2=9$, тобто це коло з центром в точці $3-i$ та радіусом $R=3$ (рисунок 5).

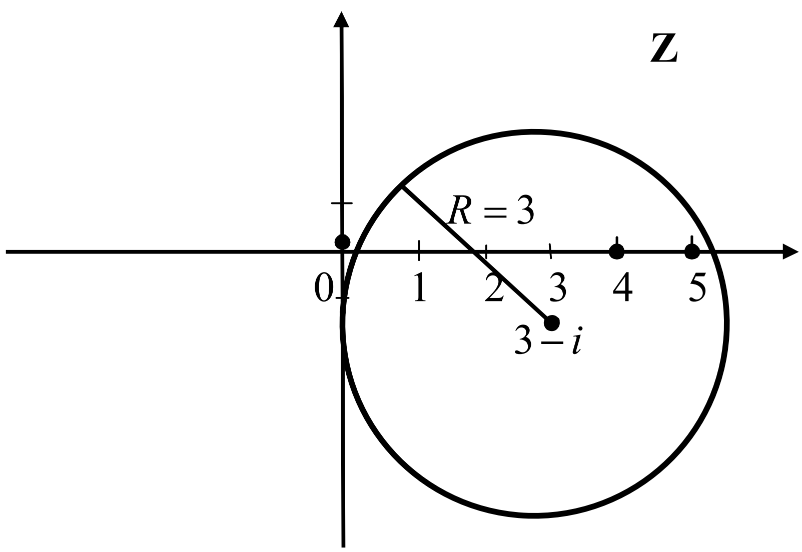

Рисунок 5

За **теоремою 2.3** [9] функція

$$f(z)=\frac{7z+1}{z^3-9z^2+20z}\quad \begin{matrix}\}h(z)\\ \}g(z)\end{matrix}$$

має полюси першого порядку в точках $z=0$, $z=4$, $z=5$.

В середині L $f(z)$ знаходяться полюси $z=4$, $z=5$. Обчислимо лишки в цих полюсах за формулою (5).*

$$\operatorname*{Res}_{z=4} f(z)=\frac{h(4)}{g'(4)}=\left.\frac{7z+1}{3z^2-18z+20}\right|_{z=4}=-\frac{29}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=5} f(z)=\frac{h(5)}{g'(5)}=\left.\frac{7z+1}{3z^2-18z+20}\right|_{z=5}=\frac{36}{5}.$$

За теоремою Коші про лишки

$$\oint_L \frac{7z+1}{z^3-9z^2+20z}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=4} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=5} f(z)\right)=2\pi i\left(-\frac{29}{4}+\frac{36}{5}\right)=-\frac{\pi i}{10}.$$

Завдання 5

1 Задану функцію f(z) розкласти у ряд Лорана в околі точки z_0 ([8], гл.12).

2 Обчислити за допомогою лишків ([8], гл.12) $\oint_L f(z)dz$, де контур L охоплює точку z_0 таким чином, що всередині контуру L у функції f(z) не має інших особливих точок окрім z_0.

* Тут для обчислення лишків можна також застосовувати формули (6)-(7).

1. $z\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0=1$

2. $(z-4)\cos\dfrac{z+7}{z},\ z_0=0$

3. $\exp\dfrac{4z-2z^2}{(z-1)^2},\ z_0=1$

4. $\sin\dfrac{z+4}{z+i},\ z_0=-i$

5. $z^2\sin\dfrac{z-1}{z+2},\ z_0=-2$

6. $\cos\dfrac{4iz+2z^2}{(z+i)^2},\ z_0=-i$

7. $z\exp\dfrac{3z+i}{3z-i},\ z_0=i/3$

8. $z^2\cos\dfrac{z-i}{z},\ z_0=0$

9. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=1$

10. $\dfrac{z}{z^2+1},\ z_0=-i$

11. $\dfrac{1}{z^2-3z+2},\ z_0=1$

12. $\dfrac{z}{z^2+4},\ z_0=2i$

13. $iz\exp\frac{2z}{z+i},\ z_0=-i$

14. $z\sin\frac{z+5i}{z},\ z_0=0$

15. $zchi\frac{z+1}{z-2i},\ z_0=2i$

16. $(z+1)shi\frac{z+i}{z-3},\ z_0=3$

17. $(z-4)\exp\frac{z-8}{z},\ z_0=0$

18. $z^4\sin i\frac{z-8}{z},\ z_0=0$

19. $\frac{z}{z^2-5z+4},\ z_0=1$

20. $\cos\frac{4z}{z-2},\ z_0=2$

21. $ch\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2$

22. $sh\frac{5z}{z+3},\ z_0=-3$

23. $(z-i)\exp\frac{z+1}{z-1},\ z_0=1$

24. $\sin\frac{3z^2-18z}{(z-3)^2},\ z_0=3$

25. $\dfrac{z-4}{z(z+5)}$, $z_0=-5$

26. $\dfrac{z+i}{z(z-i)}$, $z_0=i$

27. $z^2 sh\dfrac{z-i}{z}$, $z_0=0$

28. $(z-5)ch\dfrac{z-i}{z+4}$, $z_0=-4$

29. $\exp\dfrac{z^2-6z}{(3-z)^2}$, $z_0=3$

30. $\dfrac{z+1}{z(z+i)}$, $z_0=-i$

31. $z\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0=-2i$

Розв'яжемо завдання 31.

1 Розкладемо функцію $f(z)=zcos\frac{z}{z+2i}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0=-2i$, використовуючи розкладання $\cos z$ та $\sin z$ у степеневі ряди ([9] формули (2.12), (2.13)), а також розкладання в ряд Лорана $\dfrac{\cos z}{z+2i}$ (знаходження цього показано у прикладі 2.22 [9]).

$$cos\frac{z}{z+2i}=cos1-\frac{2isin1}{1!}\frac{1}{z+2i}-\frac{2^2i^2cos1}{2!}\frac{1}{(z+2i)^2}+$$

$$+\frac{2^3i^3sin1}{3!}\frac{1}{(z+2i)^3}+\frac{2^4i^4cos1}{4!}\frac{1}{(z+2i)^4}+\cdots$$

Маємо

$$f(z)=z\cos\frac{z}{z+2i}=(z+2i)\cos\frac{z}{z+2i}-2i\cos\frac{z}{z+2i}=(z+2i)\cos 1-$$
$$-\frac{2i\sin 1}{1!}-\frac{2^2i^2\cos 1}{2!}\frac{1}{z+2i}+\frac{2^3i^3\sin 1}{3!}\frac{1}{(z+2i)^2}+\frac{2^4i^4\cos 1}{4!}\frac{1}{(z+2i)^3}+\ldots-$$
$$-\left(2i\cos 1-\frac{2^2i^2\sin 1}{1!}\frac{1}{z+2i}-\frac{2^3i^3\cos 1}{2!}\frac{1}{(z+2i)^2}+\frac{2^4i^4\sin 1}{3!}\frac{1}{(z+2i)^3}+\cdots\right)=$$
$$=\underbrace{(z+2i)\cos 1-2i(\sin 1+\cos 1)}_{\text{правильна частина}}+$$
$$\underbrace{+2^2i^2\left(\frac{\sin 1}{1!}-\frac{\cos 1}{1!}\right)\frac{1}{z+2i}-2^3i^3\left(\frac{\cos 1}{2!}-\frac{\sin 1}{3!}\right)\frac{1}{(z+2i)^2}+2^4i^4\left(\frac{\cos 1}{4!}-\frac{\sin 1}{3!}\right)\frac{1}{(z+2i)^3}+\ldots}_{\text{головна частина}}$$

Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} z\cos\frac{z}{z+2i}=c_{-1}=2^2i^2\left(\frac{\sin 1}{1!}-\frac{\cos 1}{2!}\right)=2\cos 1-4\sin 1.$$

$$2\oint_L z\cos\frac{z}{z+2i}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=-2i} z\cos\frac{z}{z+2i}\right)=2\pi i(2\cos 1-4\sin 1).$$

4 ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

1 *Обчислення інтегралів вигляду*

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx, \qquad (9)$$

де $R(\cos x,\sin x)$ *раціональна функція від* $\cos x$, $\sin x$, *яка обмежена всередині проміжку інтегрування.*

Інтеграли вигляду (9) заміною $z = e^{ix}$

$$dz = -ie^{ix}dx = -izdx \Rightarrow \quad \boxed{dx = -\frac{idz}{z}}; \tag{10}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \quad \boxed{\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}; \tag{11}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \quad \boxed{\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} \tag{12}$$

зводяться до інтегралів по колу $|z| = 1$ від деякої раціональної функції $R_1(z)$. Тому

$$I = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} R_1(z), \tag{13}$$

де z_k - полюси $R_1(z)$, що лежать в середині кола $|z| < 1$.

Завдання 6. Обчислити за допомогою лишків
А)

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3\sqrt{3} + \sqrt{23}\cos x}$

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dx}{6 + \sqrt{35}\sin x}$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{2\sqrt{5} - 4\cos x}$

4) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{0} \frac{dx}{4 - \sqrt{7}\sin x}$

5) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{17}+\cos x}$$

6) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}$$

7) $$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}\cos x}$$

8) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{dx}{5-2\sqrt{6}\sin x}$$

9) $$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{\sqrt{8}+2\cos x}$$

10) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{7-\sqrt{33}\sin x}$$

11) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{15}-\sqrt{6}\cos x}$$

12) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dx}{6-4\sqrt{2}\sin x}$$

13) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{34}+5\cos x}$$

14) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{4+2\sqrt{3}\sin x}$$

15) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{50}-7\cos x}$$

16) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{dx}{8-3\sqrt{7}\sin x}$$

17) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{11+3\sqrt{13}\cos x}$$

18) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{dx}{9+4\sqrt{5}\sin x}$$

19) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{2}-\sqrt{7}\cos x}$$

20) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} \frac{dx}{4-\sqrt{15}\sin x}$$

21) $$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos x}$$

22) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3+\sqrt{5}\sin x}$$

23) $$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{\sqrt{13}-2\sqrt{3}\cos x}$$

24) $$\int_{-2\pi}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt{21}\sin x}$$

25) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos x}$$

26) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{dx}{7+4\sqrt{3}\sin x}$$

27) $$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{3\sqrt{6}-\sqrt{38}\cos x}$$

28) $$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{8-2\sqrt{15}\sin x}$$

29) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{dx}{6+3\sqrt{3}\cos x}$$

30) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{3+2\sqrt{2}\sin x}$$

Б)

1. $$\int_{-\pi}^{0} \frac{\cos^2 x dx}{4-3\sin^2 x}$$

2. $$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$$

3. $$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$$

4. $$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(13+5\cos x)^2}$$

5. $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(13-12\sin x)^2}$$

6. $$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{17+8\cos x}$$

7. $\int\limits_{-2\pi}^{0} \frac{\sin^2 x dx}{17 - 15\sin x}$

8. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\cos^2 x dx}{25 + 7\cos x}$

9. $\int\limits_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos^2 x dx}{25 - 24\sin x}$

10. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{(1 + 3\cos^2 x)^2}$

11. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1 + 15\cos^2 x}$

12. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{1 + 24\sin^2 x}$

13. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{(29 - 20\cos x)^2}$

14. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(29 - 21\sin x)^2}$

15. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\sin^3 x dx}{41 - 9\cos x}$

16. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{41 - 40\sin x}$

17. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{37+12\cos x}$

18. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 x dx}{37-35\sin x}$

19. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$

20. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{1+35\cos^2 x}$

21. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+48\sin^3 x}$

22. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(5-3\cos x)^2}$

23. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\sin x)^2}$

24. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{13-5\cos x}$

25. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{13+12\sin x}$

26. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\cos^2 x dx}{17-8\cos x}$

27. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 x dx}{17+5\sin x}$

28. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(3+\cos x-2\sin x)^2}$

29. $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3-\cos x+2\sin x}$

30. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+2\sin x}$

31. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x)^2}$

32. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 x dx}{1+\sin^2 x}$

33. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{cox^2 3x dx}{5-4\cos x}$

34. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2x dx}{5+3\sin x}$

35. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{(1+2\cos x)^n dx}{5+4\cos x}$

36. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos(nx) dx}{13-5\cos x}$

37. $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{2n} x dx$

38. $\int\limits_{0}^{\pi} tg(x-5i) dx$

39. $\int\limits_{0}^{2\pi} ctg(x+4-3i)dx$

40. $\int\limits_{0}^{\pi} e^{2ix} ctg(x-2i)dx$

Розв'яжемо завдання 31, Б).

Обчислимо

$$\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x)^2} \qquad (14)$$

Користуючись парністю підінтегральної функції та заміною (10)-(11), зведемо інтеграл (14) до інтегралу від деякої функції $R_1(z)$ за колом $|z|=1$.

$$\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{dx}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x\right)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x\right)^2} = \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{-idz}{z\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}(z+\frac{1}{z})\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{-idz}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z^2+\sqrt{5}z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{-idz}{\left(z^2+\sqrt{10}z+1\right)^2}.$$

Отже , $R_1(z) = \dfrac{z}{z^2+\sqrt{10}z+1}$.

Знайдемо полюси $R_1(z)$, які лежать в середині кола $|z|=1$:

$$z^2+\sqrt{10}z+1=0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-\sqrt{10}\pm\sqrt{10-4}}{2} = \frac{-\sqrt{10}\pm\sqrt{6}}{2} =$$

$$= -\sqrt{2,5}\pm\sqrt{1,5} \approx \left[\begin{array}{l} -0,36 \\ -1,2 \end{array}\right.$$

В середині кола $|z|=1$ $R_1(z)$ має полюс $z=-0{,}36$. Обчислимо лишок в цьому полюсі. Запишемо $R_1(z)$ у вигляді (6)

$$R_1(z)=\frac{-iz}{(z+\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5})^2(z+\sqrt{2{,}5}-\sqrt{1{,}5})^2}=\frac{\left.\dfrac{-iz}{(z+\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5})^2}\right\}h(z)}{(z+\sqrt{2{,}5}-\sqrt{1{,}5})^2}=$$

$$=\frac{h(z)}{(z+\sqrt{2{,}5}-\sqrt{1{,}5})^2}.$$

Тому за формулою (7)

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5}} R_1(z)=h'(-\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5})=\left.\left(\frac{-iz}{(z+\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5})^2}\right)'\right|_{z=-\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5}}=$$

$$=-i\left.\frac{z+\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5}-2z}{(z+\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5})^3}\right|_{z=-\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5}}=-i\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Отже, за формулою (13)

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{dx}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x)^2}=\frac{1}{2}(2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{2{,}5}+\sqrt{1{,}5}} R_1(z))=\frac{1}{2}(2\pi i(-i\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}))=$$

$$=\pi\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

2 *Обчислення інтегралів вигляду*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx \qquad (15)$$

від раціонального дробу $R(x) \neq 0$ *при* $x \in (-\infty; +\infty)$, *в якому степінь знаменника* ≥ (*степінь чисельника* + 2).

Інтеграли вигляду (15) дорівнюють

$$I = 2\pi i \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \tag{16}$$

де z_k - полюси $R(z)$, що лежать у верхній напівплощині.

У формулі (16) можна також сумувати за полюсами, які лежать в нижній напівплощині, але тоді перед сумою потрібно поставити знак «мінус».

Завдання 7

Обчислити за допомогою лишків. Відповідь перевірити за формулою Ньютона-Лейбніца.

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{25x^2 + 13}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{17x^2 + 4}$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 22x + 122}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 17}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{21x^2+36}$

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+34}$

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16x^2+11}$

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+26}$

11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{7x^2+25}$

12) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+29}$

13) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{36x^2+19}$

14) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+100}$

15) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{13x^2+9}$

16) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$

17) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16x^2+19}$

18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$

19) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{23x^2+9}$

20) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+82}$

21) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{25x^2+27}$

22) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+20}$

23) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{7x^2+4}$

24) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$

25) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{36x^2+31}$

26) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-16x+65}$

27) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{29x^2+16}$

28) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+41}$

29) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+31}$

30) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+37}$

Завдання 8

Обчислити за допомогою лишків (див. [8], гл. 12).

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(5x-4)dx}{x^4+5x^2+4}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x-1)dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(3x+1)dx}{x^4+4}$

5. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^4}$

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(4x^3-7x+4)dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$

8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$

9. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+4)^5}$

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)dx}{x^4+17x^2+16}$

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-4x+1)dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+2x-1)dx}{x^6+1}$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-x+1)dx}{(x^2+4)^3}$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(6x+1)dx}{x^4+26x^2+25}$

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2x+1)dx}{(x^2+4)(x^2+0{,}25)}$

16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^6+1}$

17. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^6}$

18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)dx}{x^4+13x^2+36}$

19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{(x^2+\frac{1}{4})^2(x^2+9)}$

20. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x^4+1)dx}{x^6+1}$

21. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4x^2+1)^3}$

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2x+1)dx}{x^4+5x^2+4}$

23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+\frac{1}{9})(x^2+1)^2}$

24. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(9x^2+4)^3}$

25. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^6dx}{(x^4+1)^2}$

26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+26x^2+25}$

27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+4)dx}{x^4+13x^2+36}$

28. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4dx}{(2x^2+1)^4}$

29. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$

30. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$

31. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}$

Розв'яжемо завдання 31

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}.$$

$R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)^2}$. Знайдемо полюси $R(z)$:

$(z^2+1)^2(z^2+4)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm i;\ z = \pm 2i$.

У верхній півплощині $R(z)$ має полюси i; $2i$. Обчислимо лишок в полюсі $z = i$. Запишемо $R(z)$ у вигляді (6):

$$R(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+4)^2} = \frac{\left.\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)^2}\right\} = h(z)}{(z-i)^2} = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$$

Тому за формулою (7)

$$\operatorname*{Res}_{z=i} R(z) = h'(i) = \left.\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)^2}\right)'\right|_{z=i} = \left.-2\frac{3z^2+2zi+4}{(z+i)^3(z^2+4)^3}\right|_{z=i} = \frac{i}{108}$$

Обчислимо лишок в полюсі $z = 2i$. Запишемо $R(z)$ у вигляді (6):

$$R(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2(z-2i)^2(z+2i)^2}=\frac{\left.\frac{1}{(z+2i)^2(z^2+1)^2}\right\}=h(z)}{(z-2i)^2}=\frac{h(z)}{(z-2i)^2}$$

Тому за формулою (7)

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} R(z)=h'(2i)=\left.\left(\frac{1}{(z+2i)^2(z^2+1)^2}\right)'\right|_{z=2i}=$$

$$=-2\left.\frac{3z^2+4zi+1}{(z+2i)^3(z^2+1)^3}\right|_{z=2i}=-\frac{19}{864}i$$

Отже, за формулою (16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}R(z)+\operatorname*{Res}_{z=2i}R(z)\right)=2\pi i\left(\frac{i}{108}-\frac{19i}{864}\right)=\frac{11\pi}{432}.$$

3 *Обчислення інтегралів Фур'є вигляду*

$$\mathrm{I_e}=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{i\omega x}dx; \qquad (17)$$

$$\mathrm{I_c}=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\omega x dx; \qquad (18)$$

$$\mathrm{I_s}=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\omega x dx, \qquad (19)$$

де $R(x)$ *правильний раціональний дріб,* $R(x)\neq 0$ *при* $x\in(-\infty;+\infty)$.

Інтеграли (17), (18), (19) дорівнють відповідно

$$\mathrm{I_e}=2\pi i\sum\operatorname*{Res}_{z=z_k}R(z)e^{i\omega z},\ \omega>0; \qquad (20)$$

$$\mathrm{I_c} = \mathrm{Re}\,\mathrm{I_e} = \mathrm{Re}(2\pi i \sum \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, R(z)e^{i\omega z}),\ \omega > 0; \qquad (21)$$

$$\mathrm{I_s} = \mathrm{Im}\,\mathrm{I_e} = \mathrm{Im}(2\pi i \sum \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, R(z)e^{i\omega z}),\ \omega > 0, \qquad (22)$$

де z_k - полюси $R(z)$, що лежать у верхній напівплощині.

У формулах (20), (21), (22) також може бути $\omega < 0$, але тоді потрібно сумувати за полюсами, які лежать в нижній на півплощині, та перед сумою поставити «мінус».

Завдання 9

Обчислити за допомогою лишків інтеграли I_e (17), I_c (18), I_s (19), якщо (таблиця 2)

Таблиця 2

	$R(x)$	ω	№	$R(x)$	ω	№	$R(x)$	ω
1	$\frac{1}{x^2+2x+2}$	2	11	$\frac{1}{x^2+4x+29}$	4	21	$\frac{1}{x^2-4x+40}$	1
2	$\frac{1}{x^2+4x+5}$	3	12	$\frac{1}{x^2+24x+145}$	6	22	$\frac{1}{x^2+22x+122}$	8
3	$\frac{1}{x^2-4x+8}$	1	13	$\frac{1}{x^2-8x+17}$	3	23	$\frac{1}{x^2-18x+82}$	4
4	$\frac{1}{x^2+2x+26}$	4	14	$\frac{1}{x^2+2x+82}$	2	24	$\frac{1}{x^2+10x+61}$	2
5	$\frac{1}{x^2-8x+41}$	5	15	$\frac{1}{x^2-2x+2}$	5	25	$\frac{1}{x^2+4x+53}$	1
6	$\frac{1}{x^2-16x+65}$	3	16	$\frac{1}{x^2+10x+34}$	1	26	$\frac{1}{x^2-2x+17}$	5
7	$\frac{1}{x^2-4x+20}$	6	17	$\frac{1}{x^2-4x+85}$	3	27	$\frac{1}{x^2-6x+90}$	7

Продовження таблиці 2

	$R(x)$	ω	№	$R(x)$	ω	№	$R(x)$	ω
8	$\dfrac{1}{x^2-6x+34}$	2	18	$\dfrac{1}{x^2+6x+13}$	5	28	$\dfrac{1}{x^2+10x+50}$	4
9	$\dfrac{1}{x^2+4x+13}$	5	19	$\dfrac{1}{x^2+10x+41}$	6	29	$\dfrac{1}{x^2+8x+52}$	5
10	$\dfrac{1}{x^2-6x+109}$	2	20	$\dfrac{1}{x^2+2x+10}$	3	30	$\dfrac{1}{x^2-10x+26}$	3

Завдання 10

Обчислити за допомогою лишків (див. [8], гл. 12).

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x dx}{x^4+5x^2+4}$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x dx}{(x^2+4x+5)^2}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 4x dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^3+1)\cos 3x dx}{(x^2+1)^2}$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\cos x dx}{x^4+5x^2+4}$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2x dx}{(x^2+2x+2)^2}$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x dx}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}$

8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2+4)^2}$

9. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos \sqrt{2} x dx}{x^4+1}$

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+2x+5)^2}$

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x dx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)}$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos 4x dx}{(x^2+9)^2}$

13. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^4+1}$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x dx}{(x^2-4x+5)^2}$

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+9)(x^2+x+1)}$

16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2+9)^2}$

17. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x dx}{x^4+13x^2+36}$

18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2+4x+8)^2}$

19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x^2+4)(x^2+2x+2)}$

20. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos 5x dx}{(x^2+16)^2}$

21. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2} x dx}{x^4+4}$

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2-4x+8)^2}$

23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}$

24. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(x^3+5x)\sin x dx}{x^4+10x^2+9}$

25. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2+x+1)^2}$

26. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos x dx}{(x^2+4)^3}$

27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{6ix}dx}{(x+2+3i)^2}$

28. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin xdx}{(x^2+16)^2}$

29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2xdx}{(x^2+9)(x^2-x+1)}$

30. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{3}xdx}{(x^2+12)^2}.$

31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}dx}{x^2+x+1}$

Розв'яжемо завдання 31.

Обчислимо $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}dx}{x^2+x+1}$.

Тут $R(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$, $\omega=2$. Знайдемо полюси $R(z)$:

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

У верхній напівплощині $R(z)$ має полюс $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Обчислимо лишок у цьому полюсі. Запишемо $R(z)$ у вигляді (6)

$$R(z)e^{2iz}=\frac{e^{2iz}}{(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{\underbrace{\dfrac{e^{2iz}}{(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}_{=h(z)}}{(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}=$$

$$=\frac{h(z)}{(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}.$$

Тому за формулою (7)

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} R(z)e^{2iz}=h(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{i\sqrt{3}}.$$

Отже, за формулою (20)

$$\mathrm{I}_e=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} R(z)e^{2iz}=2\pi i\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{i\sqrt{3}}=2\pi\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}}.$$

Зауважимо, що за формулами (21), (22) інтеграли (18), (19) відповідно дорівнюють

$$\mathrm{I}_c=\mathrm{Re}\left(2\pi\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\cos 1;\ \ \mathrm{I}_s=\mathrm{Im}\left(2\pi\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin 1.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М. : Дрофа, 2004. – 512 с.

2 Вища математика [Текст]: підручник. ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П.П. Овчинников [та ін.]. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

3 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

4 Давидов, Р.Н. Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы теории функций комплексного переменного» [Текст] / Р.Н. Давыдов, В.И. Храбустовский – Харьков : ХИИТ, 1993. – 30 с.

5 Мышкис, А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. [Текст] / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1971. – 607 с.

6 Пикунов, М.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. - т.2 [Текст] / М.С. Пикунов. – М.: Наука, 1985. – 575 с.

7 Сборник задач по теории аналитических функций [Текст] / под ред. М.А. Евграфова. – М. : Наука, 1972. – 416 с.

8 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова, В.П. Демидовича. –М. : Наука, 1986. – 386 с.

9 Храбустовський, В.І. Спеціальні розділи: ч.2 «Ряди, елементи теорії функцій комплексної змінної» [Текст]: конспект лекцій / В.І. Храбустовський, Ю.С. Шувалова. – Харків: УкрДаЗТ, 2013. – 46 с.

10 Храбустовський, В.І. Теорія функцій комплексної змінної. ч. 1. Методичні вказівки і завдання до розрахункової роботи з розділу дисципліни "Вища математика" [Текст] / В.І.Храбустовський, О.А.Осмаєв, О.І.Удодова. – Харків : УкрДАЗТ, 2007. – 42 с.

11 Чудесенко, В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики [Текст] / В.Ф. Чудесенко. – М. : Высшая школа, 1983. – 113 с.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ
КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до розрахунково-графічної роботи
з розділу дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина II

Відповідальний за випуск Удодова О.І.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 12.12.13 р.
Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 0,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.