

УДК 656.2:519.876.5

Д. В. ЛОМОТЬКО^{1*}, Г. Є. БОГОМАЗОВА^{2*}, Г. С. БАУЛІНА^{3*}, І. С. ГРУНИК^{4*},
Я. А. БЕЛЯЄВ^{5*}

^{1*}Кафедра «Транспортні системи та логістика», Український державний університет залізничного транспорту, Майдан Оборонний Вал, 7, м. Харків, 61050, Україна, тел. +38 (067) 576 06 61, ел. пошта den@kart.edu.ua, ORCID 0000-0002-7624-2925

^{2*}Кафедра «Управління вантажною і комерційною роботою», Український державний університет залізничного транспорту, Майдан Оборонний Вал, 7, м. Харків, 61050, Україна, тел. +38 (050) 627 02 04, ел. пошта bogomazova.uvkr@kart.edu.ua, ORCID 0000-0002-8042-0624

^{3*}Кафедра «Управління вантажною і комерційною роботою», Український державний університет залізничного транспорту, Майдан Оборонний Вал, 7, м. Харків, 61050, Україна, тел. +38 (050) 935-53-23, ел. пошта baulina.uvkr@kart.edu.ua, ORCID 0000-0001-8464-1507

^{4*}Кафедра «Транспортні технології», Львівський фаховий коледж транспортної інфраструктури Інститут механічної інженерії та транспорту, Національного університету «Львівська політехніка». Вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, тел. +38 (067) 576 06 61, ел. пошта gis.grunyk@gmail.com, ORCID 0009-0004-6878-2616

^{5*}Кафедра «Транспортні системи та логістика», Український державний університет залізничного транспорту, Майдан Оборонний Вал, 7, м. Харків, 61050, Україна, тел. +38 (067) 576 06 61, ел. пошта jasurok@gmail.com, ORCID 0009-0000-2218-1381.

УДОСКОНАЛЕННЯ МОДЕЛІ СУЧАСНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ДОКУМЕНТООБІГУ ЗАЛІЗНИЧНИХ ВАНТАЖНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ МЕТОДАМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Метою дослідження є вдосконалення математичної моделі організації документообігу пункту концентрації обробки перевізних документів (ПКОПД) на основі теорії масового обслуговування з розширенням її складниками прогнозування попиту та імітаційної валідації. **Методика.** У роботі використано теорію масового обслуговування (модель М/М/с, формула Ерланга-С) для формування удосконаленої математичної моделі оптимізації організації документообігу для залізничних вантажних перевезень, методи експоненційного згладжування для прогнозування обсягів документообігу, методи дискретно-подієвого імітаційного моделювання для обґрунтування процедури валідації вдосконаленої моделі. **Результати.** У статті виконано критичний аналіз оптимізаційної математичної моделі організації документообігу ПКОПД, яку раніше було запропоновано для визначення необхідної кількості агентів комерційних з мінімальними експлуатаційними витратами в умовах ризику. Встановлено, що чинна модель поєднує економічно обґрунтовану структуру цільової функції з формально коректним способом переведення стохастичного часу обробки документа у витрати через інтеграл Лебега-Стільтєса, але містить нероз'єднаний, слабо формалізований складник фінансового ризику $R(t, \Pi)$. На основі порівняння з програмно реалізованим розрахунковим модулем, що використовує апарат теорії масового обслуговування, запропоновано вдосконалену модель, яка: 1) замінює інтегральний складник на аналітично обґрунтований вираз витрат від очікування вагонів у черзі за наближенням Аллена-Каннінга для системи G/G/c; 2) декомпозує сумарний ризик на окремі складники реєстру небезпек, імовірність яких залежить від коефіцієнта завантаження системи; 3) вводить обмеження стійкості черги $\rho < 1$; 4) переходить від статичної до сезонної (помісячної) оптимізації штату агентів комерційних; 5) доповнює сезонну оптимізацію формальним прогнозуванням обсягів документообігу методами експоненційного згладжування із сезонною компонентою; 6) передбачає валідацію аналітичних наближень методом дискретно-подієвого імітаційного моделювання з оцінюванням довірчого інтервалу та похибки узгодження. Наведено числові приклади розрахунку. **Наукова новизна.** Сформовано вдосконалену цільову функцію та систему обмежень на основі теорії масового обслуговування з використанням наближення Аллена-Каннінга та декомпозиції ризику, доповнено модель сезонного планування штату прогнозуванням обсягів документообігу, методологічно обґрунтовано процедуру валідації аналітичних наближень методом дискретно-подієвого імітаційного моделювання з оцінкою довірчого інтервалу витрат і кількісної похибки узгодження. **Практична значимість.** Одержані результати можуть бути використані для покращення роботи виробничого підрозділу «Служба роботи станцій» АТ «Укрзалізниця».

Ключові слова: транспортні технології, електронний документообіг, пункт концентрації обробки перевізних документів, теорія масового обслуговування, прогнозування, імітаційне моделювання, ризик-орієнтована технологія, залізничні вантажні перевезення.

Вступ

Економічний розвиток України у воєнні та повоєнні часи тісно пов'язаний зі стабільною роботою залізничного транспорту. Ефективне управління залізничною інфраструктурою зокрема базується на впровадженні сучасних інформаційних технологій й технологій електронного документообігу. Для покращення обслуговування вантажовідправників АТ «Укрзалізниця» створює пункти концентрації обробки перевізних документів (ПКОПД). Пункти взаємодіють з вантажними станціями для організації перевезень як всередині країни, так і з міжнародними сполученнями, включаючи документальне оформлення військових вантажів та здійснюють розрахунки за послуги, що надаються залізницею.

У роботі [1] (далі базова стаття) сформульовано та обґрунтовано актуальність задачі визначення оптимальної кількості агентів комерційних (ПКОПД) в умовах статистично підтвердженої нерівномірності документообігу (коливання помісячних обсягів до 32 %, перевищення нормативного часу обробки документа у 60 % випадків) та наявності операційних, техногенних і технологічних ризиків. Для розв'язання задачі в [1] сформовано оптимізаційну математичну модель $C(P, t) \rightarrow \min$, розроблено систему обмежень і побудовано поверхню відгуку засобами Microsoft Excel, за якою встановлено орієнтовний оптимум у 32 працівники. Тому для вдосконалення підходу, що запропонований у базовій статті, слід враховувати не тільки випадковість коливань потоку документів, а й їх регулярну сезонну закономірність. Також за рахунок врахування додаткових факторів та імітаційного моделювання можна покращити точність та достовірність отриманих результатів розрахунків із можливістю формування програмного засобу у вигляді системи підтримки прийняття рішень (СППР).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питання формування технології роботи ПКОПД і взаємодії із закріпленими вантажними станціями розглянуто в роботах [1–3]. У роботі [1] вперше запропоновано оптимізаційну модель, що поєднує витрати на обробку документів, оплату праці, електроенергію та фінансові ризики в єдиній цільовій функції. Питання коректного переведення стохастичного часу обробки документа у грошовий еквівалент простою вагонів, формалізації ризику, а також завчасного (а не лише ретроспективного) урахування сезонності залишились розкритими не в повній мірі.

У роботі [4] представлено інтелектуальну систему моделювання залізничного вантажоперевезення, яка поєднує теорію черг та технологічні процеси на рівні станцій для моделювання процесів навантаження та очікування, що призводять до затримок доставки. Система безпосередньо знижує ймовірність затримок і схильність до штрафів за рахунок скорочення черг і підвищення рівня технологічної послідовності. Авторами статті [5] розроблено модель системи двоканального вантажоперевезення з використанням теорії черг для оптимізації розподілу вантажних потоків та стратегій ціноутворення. Дослідження використовує моделі черг М/М/1 та структуру вибору Logit для аналізу динамічної рівноваги між часом очікування вантажів та прибутком перевізників, досліджуючи цілі мінімізації середнього часу очікування у системі та максимізації прибутку перевізників.

Оцінка витрат робочого часу спеціаліста залізничного транспорту та приклад моделювання операцій наведено у статті [6]. Математичний апарат дослідження, розрахунку та оптимізації логічних систем є моделюванням, що відноситься до теорії ймовірностей, математичної статистики і представлено в термінах теорії масового обслуговування. У роботах [7, 8] операції обробки вантажу також розглянуто як процеси масового обслуговування. Параметри, які були визначені у [7], включали інтенсивність трафіку, ймовірність очікування, середню кількість об'єктів у черзі та середній час, проведений у черзі.

У дослідженні [9] використано методи математичного моделювання та теорії масового обслуговування з урахуванням економічних і технологічних показників та вимог, що висуваються одержувачами вантажів, для вирішення завдання визначення показників і дослідження їх впливу на час знаходження транспортних засобів у пунктах розвантаження.

Проведений аналіз наукових досліджень свідчить, що питання оптимізації технологічних процесів залізничних вантажних перевезень активно досліджуються із застосуванням математичного моделювання та теорії масового обслуговування. Існуючі роботи охоплюють моделювання функціонування вантажних станцій, оцінювання параметрів систем масового обслуговування, оптимізацію вантажопотоків, дослідження часу очікування та простою транспортних засобів, а також економічне оцінювання технологічних процесів. Разом із тим більшість досліджень зосереджена на оптимізації операцій навантаження, розвантаження, переробки

вантажів або управління транспортними потоками, тоді як процеси організації документообігу в підрозділах комерційного оформлення перевезень залишаються недостатньо формалізованими.

Наявні моделі не забезпечують комплексного врахування взаємозв'язку між інтенсивністю надходження документів, продуктивністю персоналу, економічними наслідками затримок обробки документів і непродуктивним простоям вагонів. Крім того, недостатньо дослідженими залишаються питання адаптації моделей до нерівномірності вхідних потоків документів, сезонних коливань навантаження та стохастичного характеру технологічних процесів.

Мета та завдання дослідження

Метою дослідження є вдосконалення математичної моделі організації документообігу ПКOPД на основі теорії масового обслуговування з розширенням її складниками прогнозування попиту та імітаційної валідації.

Завдання дослідження:

- 1) порівняти структуру цільової функції базової моделі [1] з програмно реалізованою обчислювальною моделлю;
- 2) сформулювати вдосконалену цільову функцію та систему обмежень на основі наближення Аллена-Каннінга та декомпозиції ризику;
- 3) доповнити модель сезонного планування штату формальним прогнозуванням обсягів документообігу;
- 4) обґрунтувати процедуру валідації вдосконаленої моделі методом імітаційного моделювання;
- 5) навести числові приклади.

Основний матеріал дослідження

Аналіз базової математичної моделі

Базова модель [1] має вигляд (з позначеннями оригіналу):

$$C(\Pi, t) = \sum_{\Pi} \frac{C_{\text{обр.}\Pi}}{D \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} t \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma} \right)^2} dt + \frac{C_{\text{оп.пр.}} \cdot t}{\Pi} + C_{\text{ел}} \cdot t \cdot K(\Pi) + R(t, \Pi) \rightarrow \min, \quad (1)$$

де Π – кількість агентів комерційних у пункті концентрації обробки перевізних документів;

t – час, витрачений на обробку перевізного документа, хв;

$C_{\text{обр}}$ – експлуатаційні витрати на обробку перевізних документів, грн;

D – кількість документів;

σ – стандартне відхилення середнього значення часу, витраченого на обробку документів;

$C_{\text{оп.пр.}}$ – витрати на оплату праці агентів комерційних ПКOPД, грн;

$C_{\text{ел}}$ – витрати на електроенергію, грн;

K – кількість працюючих комп'ютерів, що залежать від кількості працівників;

$R(t, \Pi)$ – складник ризику.

Ця модель коректно вказує на чотири джерела витрат, проте має методологічні особливості.

Перший доданок має визначений інтеграл функції густини нормального розподілу – це математичне сподівання часу обробки документу. Але цей доданок не враховує економічні втрати, які виникають через те, що документи чекають своєї черги на обробку.

Складник ризику $R(t, \Pi)$ введений лише позначенням та слабо інтегрована з рештою моделі.

Оптимум моделі (32 працівники) отримано побудовою поверхні відгуку за емпіричними точками, без аналітичної перевірки стійкості розв'язку чи чутливості до вхідних параметрів.

Отже, можлива програмна реалізація у вигляді СППР усуватиме методологічну проблему переведення часу у витрати завдяки використанню теорії масового обслуговування та імітаційного моделювання, ліквідує суперечність із фактично встановленим у [1] розподілом часу обробки, врахує сезонність при формуванні штату працівників й матиме процедури прогнозування з перевіркою адекватності.

Формування удосконаленої математичної моделі

З урахуванням виявлених переваг і недоліків обох підходів пропонується вдосконалена модель, що зберігає економічний зміст цільової функції (1), але заміняє її неоднозначні складники аналітично обґрунтованими виразами.

Складник витрат від очікування вагонів у черзі

Оскільки емпірично встановлений розподіл часу обробки документа є нормальним з параметрами $\bar{t}$ і σ , а не експоненційним, коректним апаратом є система масового обслуговування загального вигляду G/G/c. Для неї застосовується наближення Аллена-Каннінга [10]:

$$W_{\text{оч}} = W_{\text{оч}}(M/M/c) \cdot \frac{C_a^2 + C_s^2}{2}, \quad (2)$$

$$C_s^2 = \left(\frac{\sigma}{\bar{t}} \right)^2, \quad (3)$$

де $W_{\text{оч}}(M/M/c)$ – тривалість очікування обчислюється за формулою Ерланга-С для $\lambda = D/T_{\text{зм}}$ і $\mu = 60/\bar{t}$;

C_a^2 – квадрат коефіцієнта варіації потоку документів (для пуассонівського потоку $C_a^2 = 1$);

C_s^2 – квадрат коефіцієнта варіації часу обробки, який безпосередньо обчислюється за параметрами $\bar{t}$ і σ , встановленими в [1]. Це усуває суперечність між припущенням про експоненційний розподіл у $M/M/c$ і фактично спостереженим нормальним розподілом.

λ – інтенсивність надходження документів, док./хв ($\lambda = D/T_{3M}$);

μ – інтенсивність обслуговування одним агентом, док./хв ($\mu = 60/t$);

T_{3M} – тривалість робочої зміни ПКOPД, год.

Середня довжина черги обчислюється за формулою Літтла $L_{оч} = \lambda \cdot W_{оч}$, а витрати від очікування вагонів у черзі – через тарифну вартість вагоно-години простою w_B :

$$C_q(t, \Pi) = \lambda \cdot W_{оч}(\Pi) \cdot w_B \cdot T_{3M}. \quad (4)$$

На відміну від інтеграла в (1), вираз (4) має однозначну економічну розмірність і явну залежність від Π через завантаження $\rho = \lambda/(\Pi \cdot \mu)$.

Декомпозиція складника ризику

Замість єдиної, аналітично нерозкритої функції $R(t, \Pi)$, використовується реєстр ризиків із роботи [1, рис. 4]. Для кожного ризику i ($i = 1, \dots, m$) величина втрат C_i приймається сталою, а ймовірність P_i пов'язується з коефіцієнтом завантаження $\rho(\Pi)$:

$$R(t, \Pi) = \sum_{i=1}^m P_i(\rho(\Pi)) \cdot C_i, \quad (5)$$

$$P_i(\rho) = P_{i,0} \cdot (1 + k_i \cdot \max(0, \rho - \rho^*))$$

де $P_{i,0}$ – базова ймовірність i -го ризику;

ρ^* – граничне (порогове) допустиме завантаження системи, вище якого швидко зростає ризик-складник $R(t, \Pi)$ (приймається, наприклад, 0,85);

k_i – коефіцієнт чутливості ризику до перевантаження. Такий вигляд поєднує всі дев'ять факторів у єдину функцію, залежну від t і Π .

C_i – величина потенційних втрат (наслідків) від настання i -го ризику, грн; приймається сталою для кожного ризику реєстру (рис. 4 базової статті і оцінюється експертно або за статистикою фактичних інцидентів ПКOPД).

Вдосконалена цільова функція та обмеження

Враховуючи вищенаведене доцільно цільову функцію представити у вигляді

$$C(\Pi, t) = w \cdot \Pi + \Pi \cdot e_K \cdot e_T \cdot T_{3M} + C_q(t, \Pi) + R(t, \Pi) \rightarrow \min, \quad (6)$$

де w – витрати на оплату праці одного агента комерційного за зміну, грн/особу (аналог $C_{оп.пр}/\Pi$ у нотації базової моделі);

e_K – тариф на електроенергію, грн/кВт·год;

e_T – встановлена потужність одного автоматизованого робочого місця (АРМ), кВт;

$C_q(t, \Pi)$ – витрати від очікування вагонів у черзі за формулою (4), грн/добу;

$R(t, \Pi)$ – сумарний ризик-складник за формулою (5), грн/добу.

Математична модель організації документообігу ПКOPД враховує таку систему обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\Pi) = \lambda/(\Pi \cdot \mu) < \rho^* < 1; \\ t \leq t_{норм}; \\ t_1 + t_2 \leq T_{дост}; \\ t_{ст} \leq t_{норм.ст}; \\ B_{зв} \neq 0; E \geq \gamma \cdot V; \\ \Pi \geq \Pi_{min}, \end{array} \right. \quad (7)$$

де $\rho(\Pi)$ – коефіцієнт завантаження системи (частка часу, коли всі Π агентів зайняті обробкою документів), $\rho(\Pi) = \lambda/(\Pi \cdot \mu)$;

$t_{норм}$ – нормативний час, що припадає на обробку документа, хв.;

t_1 – час знаходження вагонів на станціях відправлення та призначення, діб;

t_2 – час знаходження вагонів на шляху прямування, доба;

$T_{дост}$ – термін доставки вантажу, діб;

Π_{min} – мінімально необхідна кількість агентів комерційних, що визначається трудовим законодавством, вимогами позмінної роботи та мінімальною чисельністю, здатною забезпечити функціонування ПКOPД (наприклад, недопущення відсутності обслуговування станцій).

Перша формула у системі обмежень відображає умову стійкості черги, друга – час обробки документа не перевищує норму, третя – необхідність дотримання терміну доставки вантажу, четверта – час знаходження вагона на станції не повинен перевищувати нормативний, п'ята складова відображає інфраструктурні умови, такі як зв'язок, електроенергію, інтернет тощо і остання умова відображає мінімально необхідну кількість агентів комерційних.

Сезонна (помісячна) оптимізація штату

Оскільки в [1] встановлено коливання обсягів документообігу до 32 % відносно середньомісячного значення, а фіксований штат є субоптимальним і в періоди спаду, і в періоди пікового навантаження, пропонується розв'язувати задачу (6) для кожного місяця k окремо, з $\lambda_k = D_k/T_{3M}$:

$$\Pi^*(k) = \operatorname{argmin} C(\Pi, t | \lambda_k). \quad (8)$$

Такий підхід перетворює модель зі статичної («32 агенти») на динамічний план чисельності штату за місяцями, що усуває саму причину неврівноваженості, а не лише її наслідок.

Прогнозування обсягів документообігу для сезонного планування

Формула (8) потребує на вході обсягу документообігу D_k наступного (ще не завершеного) місяця, тоді як у [1] обсяги D_k наведено лише ретроспективно за 9 фактичних місяців 2025 р. Щоб перейти від реактивного штатного планування (за фактом перевантаження) до проактивного, пропонується формально прогнозувати D_k , а не використовувати лише описовий аналіз сезонності.

Базовий (найпростіший) варіант – індексний метод, за яким для кожного місяця обчислюється сезонний індекс

$$S_k = \frac{D_k}{\bar{D}}, \quad (9)$$

де $\bar{D}$ – середньомісячний обсяг документообігу за наявний період спостереження. Прогноз обсягу на аналогічний місяць наступного року отримують множенням прогнозованого загального рівня на відповідний сезонний індекс S_k .

Точніший варіант, що одночасно враховує рівень, тренд (уже зафіксований у [1] як стійке зростання показника «документів на добу на одного працівника») і сезонність, – потрійне експоненційне згладжування Хольта-Вінтерса, в якому прогноз на h кроків вперед від поточного місяця t обчислюється як

$$\hat{D}_{t+h} = (L_t + h \cdot T_t) \cdot S_{t+h-m} \quad (10)$$

де L_t – згладжений рівень ряду;

T_t – згладжений тренд;

S_t – сезонна компонента (мультиплікативна);

m – довжина сезонного циклу ($m=12$ місяців);

h – горизонт прогнозування, кількість місяців вперед від поточного місяця t , на яку виконується прогноз.

Слід зазначити, що для надійного оцінювання всіх трьох параметрів згладжування методом Хольта-Вінтерса зазвичай потрібно не менше 2–3 повних сезонних циклів (24–36 місяців) статистичних даних. Тому на практиці доцільна двоетапна стратегія: у короткостроковій перспективі застосовувати простіший індексний метод (9) у поєднанні з уже наявною лінією тренду (аналогічною до розрахованої в базовій статті для показника документів на добу на одного працівника), а після накопичення достатнього масиву щомісячних даних (орієнтовно 2–3 роки) перейти до повної моделі Хольта-

Вінтерса або еквівалентних сезонних моделей часових рядів (наприклад, SARIMA).

Точність прогнозу після накопичення фактичних даних доцільно оцінювати за середньою абсолютною процентною похибкою

$$MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum \left| \frac{D_k - \hat{D}_k}{D_k} \right| \cdot 100\%, \quad (11)$$

де n – кількість періодів (місяців) фактичних спостережень, використаних для оцінювання похибки прогнозу MAPE.

Прогнозоване значення $\hat{D}_k$ підставляється в $\hat{\lambda}_k = \hat{D}_k / T_{зм}$ формули (8), а ширина довірчого інтервалу прогнозу (яку дають як індексний метод у формі історичного розкиду відхилень, так і модель Хольта-Вінтерса у формі стандартної похибки прогнозу) використовується для встановлення штатного резерву на випадок, якщо фактичний попит перевищить точковий прогноз: у пікові місяці штат доцільно планувати не за точковим прогнозом $\hat{D}_k$, а за верхньою межею прийнятного довірчого інтервалу (наприклад, 80–90-й процентиля), що узгоджується з ризиковою складовою $R(t, \Pi)$ моделі (5) – планування «про запас» саме там, де ймовірність ризику перевантаження $P_i(\rho)$ найвища.

Числовий приклад і перевірка адекватності моделі

Для ілюстрації запропонованих заходів використано вихідні параметри, що наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні параметри

Параметр	Значення параметра
W	850
D	250
e_k	4,2
Π	31
e_T	4,32
$T_{зм}$	8
t	52
ρ^*	0,85
C_s^2	0,55
$t_{норм.ст}$	35

У результаті розрахунків за зазначеними даними отримано залежність сукупних добових витрат від кількості агентів Π (рис. 1).

Суцільна крива відображає витрати за вдосконаленою моделлю $G/G/c$, а штрихова червона – витрати за класичною $M/M/c$. Розбіжність між кривими показує, наскільки некоректно класична формула оцінює саме витрати, а не лише чергу.

Кількість агентів П впливає на систему через два взаємопов'язані, але різні механізми. По-перше, довжина черги – це фізичний обсяг вагонів/документів, що очікують обробки; вона спадає нелінійно й опукло зі зростанням П –

додавання одного агента при малому штаті (близько до $\rho=1$) різко скорочує чергу, а той самий агент при вже великому штаті майже не впливає на результат (закон спадної віддачі черги).

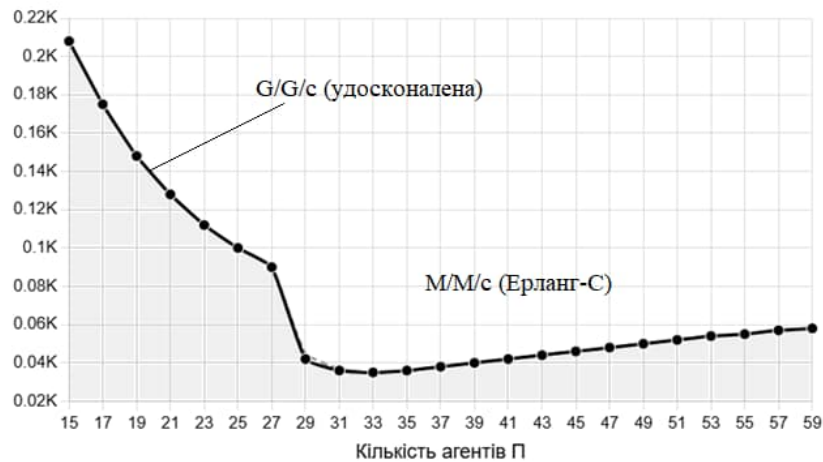


Рис. 1. Залежність сукупних добових витрат від кількості агентів П

По-друге, коефіцієнт завантаження – це частка часу фактичної зайнятості агентів роботою; він спадає гіперболічно (обернено пропорційно П) і однаковий для моделей М/М/с та G/Г/с, оскільки залежить лише від співвідношення потоку заявок і сумарної продуктивності, а не від варіації часу обробки. Саме тому штат обирають

не за мінімумом черги (яка завжди зменшується зі зростанням П), а за мінімумом сукупних витрат, що балансує вартість простою вагонів у черзі проти вартості оплати надлишкових агентів. Отже визначено залежність довжини черги від кількості агентів комерційних (рис. 2).

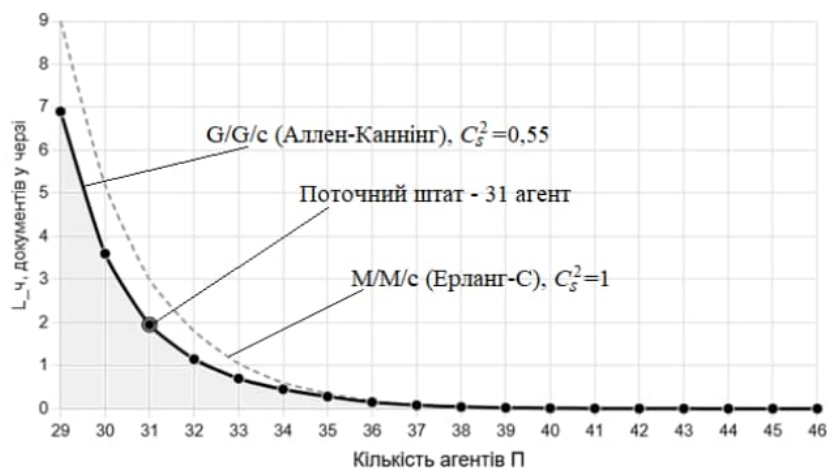


Рис. 2. Залежність довжини черги від кількості агентів комерційних

Крива з мітками – вдосконалена модель G/Г/с з фактичним $C_s^2 = 0,55$; штрихова червона – класична М/М/с ($C_s^2 = 1$). Різниця між кривими показує, наскільки некоректно класична формула Ерланга-С оцінює чергу за реального (нормального) розподілу часу обробки. Вертикальна межа зліва – зона нестабільності ($\rho \geq 1$, П=28 і менше), де черга формально прямує до нескінченності; точка на кривій – поточний штат П=31.

Кожен із дев'яти ризиків реєстру [1, рис. 4] має базову ймовірність $P_{i,0}$, яка зростає, коли завантаження системи ρ перевищує поріг ρ^* відповідно до формули (5) – чим більше система перевантажена, тим імовірніші операційні помилки, збої зв'язку й пропущені реагування, що наведено у табл. 2.

На основі розрахунків отримано залежність витрат від ймовірності настання ризику за поточного завантаження $\rho=87.4\%$ (вище порогового 85%), де розмір і колір бульбашок –

інтегральний рівень ризику $R=P_i \cdot C$ (зелений ≤ 50 , амбер 50–100, червоний >100) (рис. 3). Встановлено 4 критичних ризиків: нерівномірність надходжень вантажів, відсутність зв'язку / інтернету, нерівномірність вантажної роботи у регіоні, відсутність електроенергії). Найвищим інтегральним ризиком та найімовірнішою подією є нерівномірність надходжень вантажів ($R=154$, $P_i=0,86$).

Визначено прогнозований штат на наступний рік за місяцями, що наведено на рисунку 4. Встановлено, що у лютому та червні необхідна менша кількість комерційних агентів (27 та 26 відповідно), ніж в інші місяці року. Місяцем пікового навантаження виявлено вересень (потрібно 34 агента). Різниця у 8 осіб свідчить про доцільність тимчасового залучення персоналу в пікові місяці замість утримання незмінного штату – 31 особи цілий рік.

Таблиця 2

Реєстр ризиків за поточного ρ

№ з/п	Ризик	P_0	$P_i(P)$	C , грн	$R=P_i \cdot C$	Рівень
1	Нерівномірність надходження вантажів	0,85	0,86	180	154	Критичний
2	Відсутність зв'язку / інтернету	0,30	0,30	380	116	
3	Нерівномірність вантажної роботи в регіоні	0,75	0,76	150	113	
4	Відсутність електроенергії	0,25	0,25	420	106	
5	Операційні ризики (помилки агентів)	0,35	0,36	140	50	Підвищений
6	Ризик хвороби / відпустки агента	0,40	0,41	120	49	Помірний
7	Техногенні ризики	0,08	0,08	600	48	
8	Технологічні ризики (збій АРМ)	0,18	0,18	260	48	
9	Відпустка непланована	0,20	0,20	90	18	

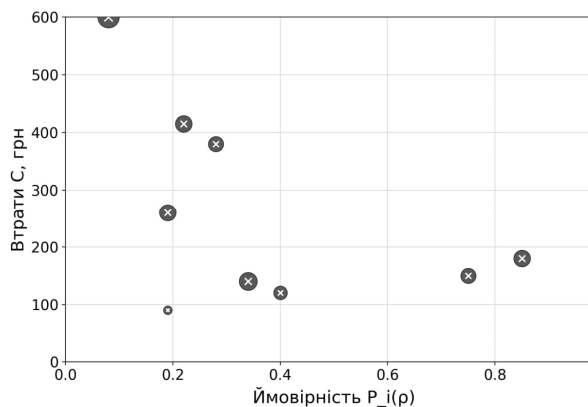


Рис. 3. Залежність витрат від імовірності настання ризику

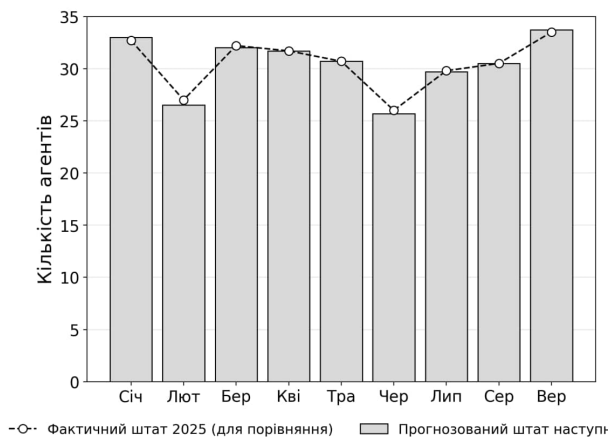


Рис. 4. Прогнозований штат за місяцями року

Валідація моделі методом імітаційного моделювання

Наближення Аллена-Каннінга (3) та лінійна модель ймовірності ризику (5) є аналітичними наближеннями, точність яких за умов, що суттєво відхиляються від класичних припущень теорії масового обслуговування (нестационарний, не строго пуассонівський потік документів; обмежена знизу нулем тривалість обробки, що заперечує строго нормальному розподілу в лівому хвості), потребує незалежної перевірки. Для цього пропонується побудова дискретно-подієвої імітаційної моделі роботи ПКOPД, яка відтворює:

- надходження документів як нестационарний процес із інтенсивністю $\lambda(\tau)$, що змінюється протягом зміни відповідно до фактичного погодинного профілю навантаження, а не як стаціонарний пуассонівський потік;
- час обробки документа як випадкову величину з розподілом $N(\bar{t}, \sigma)$, що коректно відтворює встановлений нормальний розподіл;
- П паралельних агентів комерційних з можливістю тимчасової відсутності одного з них (хвороба, відпустка) відповідно до ймовірностей реєстру ризиків (5);
- накопичення статистики середнього часу очікування, довжини черги, коефіцієнта завантаження та сумарних витрат за R незалежних реплікацій (наприклад, $R=30$) для кожного кандидата П.

Для кожного Π середні змодельовані витрати супроводжуються довірчим інтервалом

$$C(\bar{\Pi}) \pm t_{\alpha/2, R-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{R}} \quad (12)$$

де s – вибіркове стандартне відхилення витрат за R реплікацій,

$t_{(\alpha/2, R-1)}$ – квантиль розподілу Стюдента;

α – рівень значущості довірчого інтервалу (наприклад, $\alpha=0,05$ відповідає 95%-му довірчому інтервалу).

Оптимальне за симуляцією Π_{sim}^* обирають як таке, що мінімізує $\bar{C}(\Pi)$ за умови стабільності черги ($\rho < 1$) не нижче заданого рівня сервісу (наприклад, 95 %), тобто переходять до імовірнісної постановки задачі оптимізації штату ПКOPД.

Похибку узгодження аналітичної моделі (6) із результатами симуляції оцінено як

$$\delta(\Pi^*) = \frac{C_{sim}(\Pi^*) - C_{аналіт}(\Pi^*)}{C_{аналіт}(\Pi^*)} \cdot 100 \%. \quad (13)$$

Якщо δ перевищує наперед визначений допустимий поріг (наприклад, 10–15 %), це свідчить про суттєве порушення передумов наближення Аллена-Каннінга (наприклад, через сильну нестационарність реального потоку документів) і потребує або уточнення параметрів моделі, або

в перспективі переходу від аналітичного розрахунку штату до симуляційно-оптимізаційного підходу пошуку оптимального Π за результатами імітаційної моделі замість формули (3) – (4)). Оскільки для проведення такої симуляції необхідні детальні первинні дані (хронометраж обробки документів, фактичний погодинний профіль надходжень), у цій роботі наведено лише методологічну процедуру валідації; її повне числове виконання є предметом подальшого дослідження за участю ПКOPД.

На основі формул (2) – (13) реалізовано інтерактивний веб-інструмент (СППР працівника ПКOPД), що послідовно відтворює логіку вдосконаленої моделі у семи взаємопов'язаних розділах (вихідні дані, порівняння G/G/c і M/M/c, декомпозиція ризику, сезонне планування штату, прогнозування обсягів документообігу, валідація методом імітаційного моделювання, узагальнення результатів прикладу).

Фрагмент інтерактивної системи підтримки прийняття рішень працівника пункту концентрації обробки перевізних документів на основі удосконаленої математичної моделі організації документообігу ПКOPД на основі теорії масового обслуговування з розширенням її складників прогнозування попиту та імітаційної валідації наведено на рис. 5.

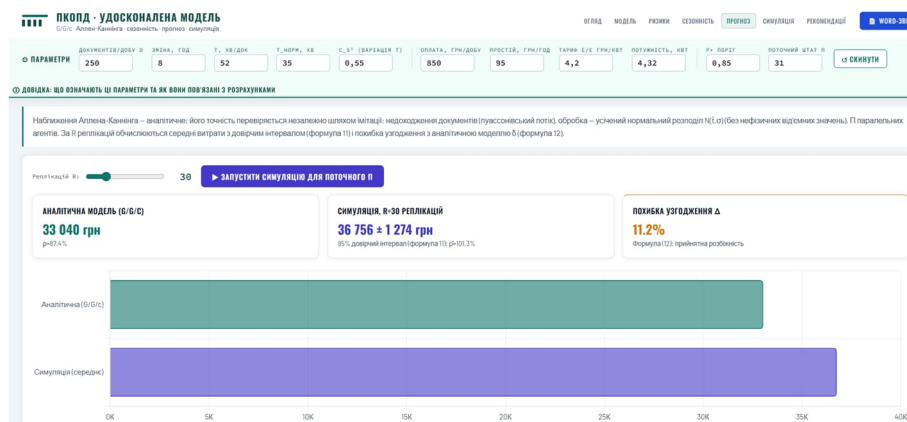


Рис. 5. Валідація моделі методом імітаційного моделювання

У перспективі СППР може бути розширена підключенням до фактичних даних системи АСК ВП УЗ-Є і отримання оперативної інформації з автоматизованих робочих місць працівників комерційного господарства та клієнтів залізниці.

Наукова новизна та практична значимість

Одержані результати забезпечують наукове обґрунтування необхідності вдосконалення існуючої базової математичної моделі організації документообігу ПКOPД. За допомогою теорії масового обслуговування у роботі вдосконалено

процес визначення необхідного штату агентів комерційних шляхом аналітичного оцінювання витрат від очікування вагонів, декомпозиції ризиків, урахування сезонності документообігу та введення прогнозування обсягів робіт і валідації моделі засобами дискретно-подієвого імітаційного моделювання.

Запропонована модель дозволяє обґрунтовувати оптимальну чисельність агентів комерційних ПКOPД, зменшувати непродуктивний простій вагонів і експлуатаційні витрати, а також підвищувати ефективність організації

документообігу в умовах нерівномірного навантаження. Побудована СППР агента комерційного може бути корисна для покращення роботи виробничого підрозділу «Служба роботи станції» АТ «Укрзалізниця»

Обмеження дослідження та напрями подальшої роботи

Значення C_s^2 , k_i , ρ^* , а також параметри згладжування моделі Хольта-Вінтерса потребують оцінювання за фактичними експлуатаційними даними реального ПКOPД у вигляді, придатному для прямого оцінювання цих параметрів.

Найвний масив спостережень (9 місяців) недостатній для надійного оцінювання повної сезонної моделі Хольта-Вінтерса (потрібно 24–36 місяців); до накопичення такого масиву слід використовувати спрощений індексний метод (9).

Модель (6) – (8) не враховує можливу кореляцію між сусідніми змінами/добами (накопичення черги з попередньої зміни), що потребує переходу до нестационарної моделі черги $Q_{t/G/c}(t)$ у подальших дослідженнях.

Практичне впровадження сезонного плану штату (8) і резервування «про запас» за прогнозним довірчим інтервалом вимагає узгодження з трудовим законодавством щодо тимчасового залучення персоналу в пікові місяці.

Висновки

У результаті порівняльного аналізу оптимізаційної моделі організації документообігу ПКOPД [1] та програмно реалізованого розрахункового модуля, що використовує апарат теорії масового обслуговування, встановлено, що обидва підходи мають взаємодоповнювальні переваги й недоліки: перший коректно фіксує нормальний розподіл часу обробки документа, але не враховує витрати на знаходження документів у черзі, а також не розкриває аналітично ризик; другий надає придатний для обчислення апарат теорії масового обслуговування, проте суперечить встановленому нормальному розподілу часу обробки і зводить ризик до єдиного коефіцієнта.

Запропонована вдосконалена модель усуває ці недоліки шляхом: 1) застосування наближення Аллена-Каннінга для системи G/G/c, що коректно враховує параметри $\bar{t}$ і σ ; 2) декомпозиції ризику на дев'ять складників реєстру небезпек із залежністю ймовірності від завантаження системи; 3) явного обмеження стійкості черги $\rho < 1$; 4) переходу до сезонного (помісячного) планування штату $P^*(k)$; 5) доповнення

сезонного планування формальним прогнозуванням обсягів документообігу методом сезонних індексів (з переходом до моделі Хольта-Вінтерса після накопичення 24–36 місяців даних) з урахуванням довірчого інтервалу прогнозу при формуванні штатного резерву;

Методологічно обґрунтовано процедуру валідації аналітичних наближень методом дискретно-подієвого імітаційного моделювання з оцінкою довірчого інтервалу витрат і кількісної похибки узгодження δ .

Наведений числовий приклад показує, що точна кількість агентів комерційних відповідає розрахунковому оптимуму вдосконаленої моделі за заданих параметрів, сезонна потреба у штаті коливається від 26 до 34 агентів залежно від місяця; статичний штат (31 особа) є субоптимальним для більшості місяців. Найкритичнішими ризиками є нерівномірність надходжень вантажів ($R=154$), відсутність зв'язку / інтернету ($R=116$), нерівномірність вантажної роботи в регіоні ($R=113$).

Створена СППР реалізує вдосконалену оптимізаційну модель організації документообігу ПКOPД: наближення Аллена-Каннінга для черги загального вигляду G/G/c, декомпозицію ризику на реєстр небезпек, сезонне планування штату, просте прогнозування попиту та валідацію імітаційним моделюванням.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на збір первинних даних, повне числове виконання імітаційної валідації та практичну апробацію моделі Хольта-Вінтерса на реальних ПКOPД АТ «Укрзалізниця».

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Богомазова, Г.Є., Бауліна, Г.С., Продашук, С.М., Чехунов, Д.М. Підвищення ефективності організації документообігу для залізничних вантажних перевезень. *Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту*. 2026. Вип. 215. С. 254–265. DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.215.2026.358855>.
2. Baulina, H.S., Bohomazova, H.Ye., Prodashchuk S.M. Formation of a rational technology for service cargo points at railway connecting lines of industrial enterprises. *Revista De La Universidad Del Zulia*. 2022. Año 13, N° 36. P. 357 – 372. URL: <http://dx.doi.org/10.46925/rdluz.36.23>.
3. Каграманян, А.О., Ковальов, А.О., Запара, В.М. та ін. Адаптивна концентрація у вантажній і комерційній роботі в умовах інформатизації технологічних процесів на залізницях України. *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*. 2024. Т. 29. № 2. С. 25–32. DOI: <https://doi.org/10.18664/ikszt.v29i2.307555>.

4. Barotov, J., Mukhamedova, Z., Kobulov, J., Tursunkhodjaeva, R., Saidivaliyev, S., Abdullayev, R., Boboyev, D. Modeling of Delivery Infrastructure for Solving Problems by Type of Goods. *Systems*. 2026. 14(2). 184. DOI: <https://doi.org/10.3390/systems14020184>.

5. Wang, X., Li, Y., Ma, C., Xian, Y., Sun, Y. Pricing Decision and Research of Dual-Channel Cargo Transportation Service System Based on Queuing Theory. *Sustainability*. 2025. 17. 5610. DOI: <https://doi.org/10.3390/su17125610>.

6. Malybaev, S.K., Malaybaev, N.S., Isina, B.M., Kenzhekeeva, A.R., Khuangan, N. Creating Intelligent Computer Workstation of a Freight Officer in a Single Information Space of Railway Transport: Synergetic Approach. *International Journal of Environmental and Science Education*. 2016. Vol. 11. No 17. P. 9705-9721.

7. Zabielska, A., Jacyna, M., Lasota, M., Nehring, K. Evaluation of the efficiency of the delivery process in the technical object of transport infrastructure with the application of a simulation model. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2023. Vol. 25. No. 1. DOI: <http://doi.org/10.17531/ein.2023.1.1>.

8. Папахов, О.Ю., Компанієць, Р.М., Сергієнко, М.І. Математичне моделювання процесу

контейнерних перевезень з метою їх оптимізації. *Транспортні системи та технології перевезень. Збірник наукових праць*. 2026. Вип. 31. С. 49 – 59. DOI: 10.15802/tstt2026/352132.

9. Ковцур, К.Г. Теоретичні та практичні аспекти організації сумісної роботи вантажних автомобілів і пунктів перевалки / Підходи до управління матеріальними потоками та оптимізації вантажних перевезень: колективна монографія / Н.В. Птиця, К.Г. Ковцур, О.О. Орда, О.С. Колій; за загальною редакцією проф. П.Ф. Горбачова. Харків: СГ НТМ «Новий курс». 2025. С. 37 – 67.

10. Allen, A.O. Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications. 2nd ed. Boston: Academic Press. 1990. 624 p.

11. Merkle, M., Marinescu, D., Merkle, M. Lebesgue-Stieltjes integral and Young's inequality. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. 2014. № 8 (1). P. 60–72.

Надійшла до редколегії 16.06.2026

Прийнята до друку 17.08.2026

D. LOMOTKO, H. BOHOMAZOVA, H. BAULINA, I. HRUNYK, Ya. BIELIAIEV

IMPROVEMENT OF THE MODERN MODEL OF ORGANIZATION OF DOCUMENT CIRCULATION OF RAILWAY FREIGHT TRANSPORTATION USING MASS SERVICE METHODS

The purpose of the study is to improve the mathematical model of document flow organization of the transport document processing concentration point (PCPTD) based on the theory of mass service with its expansion by components of demand forecasting and simulation validation. **Methodology.** The paper uses the theory of mass service (M/M/c model, Erlang-C formula) to form an improved mathematical model of document flow organization optimization for railway freight transportation, exponential smoothing methods for forecasting document flow volumes, and discrete-event simulation modeling methods to substantiate the validation procedure of the improved model. **The results.** The article presents a critical analysis of the optimization mathematical model of document flow organization of the PCPTD, which was previously proposed to determine the required number of commercial agents with minimal operating costs under risk conditions. It is established that the current model combines an economically justified structure of the objective function with a formally correct method of converting stochastic document processing time into costs through the Lebesgue-Stieltjes integral, but contains an unconnected, weakly formalized component of financial risk $R(t, P)$. Based on a comparison with a software-implemented calculation module that uses the apparatus of the theory of mass service, an improved model is proposed that: 1) replaces the integral component with an analytically justified expression of the costs of waiting for cars in the queue according to the Allen-Canning approximation for the G/G/c system; 2) decomposes the total risk into separate components of the hazard register, the probability of which depends on the system load factor; 3) introduces a queue stability constraint $\rho < 1$; 4) moves from static to seasonal (monthly) optimization of the staff of commercial agents; 5) complements seasonal optimization with formal forecasting of document flow volumes using exponential smoothing methods with a seasonal component; 6) provides for validation of analytical approximations using the method of discrete-event simulation modeling with estimation of the confidence interval and agreement error. Numerical examples of calculation are given. **Scientific novelty.** An improved objective function and a system of constraints based on the theory of mass service using the Allen-Canning approximation and risk decomposition are formed, the seasonal staff planning model is supplemented with forecasting of document flow volumes, the procedure for validating analytical approximations using the method of discrete-event simulation modeling with estimation of the confidence interval of costs and quantitative agreement error is methodologically substantiated. **Practical significance.** The results obtained can be used to improve the work of the production unit «Station Operation Service» of JSC «Ukrzaliznytsia».

Keywords: transport technologies, electronic document management, transport document processing concentration point, queueing theory, forecasting, simulation modeling, risk-based technology, rail freight transportation.