

УДК 621.313.2+621.3.011.71

РОЗРАХУНОК ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ ЯКОРЯ КОЛЕКТОРНОГО ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ НА БАЗІ ПАРАМЕТРИЧНОГО ПОДАВАННЯ ЙОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Канд. техн. наук М. Г. Давиденко

CALCULATION OF THE ARMATURE ROTATION SPEED OF A BRUSHED DC MOTOR BASED ON THE PARAMETRICAL REPRESENTATION OF ITS ELECTRICAL CIRCUIT

PhD (Tech.) M. G. Davidenko

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.217.2026.371326>



***Анотація.** Для визначення швидкості обертання якоря колекторного двигуна постійного струму з послідовним збудженням в коло якоря вводять невелику тестову синусоїдну напругу з відомими параметрами. Показано, що спектр викликаного дією цієї напруги струму якоря складається з трьох компонент, при цьому частоти двох із них певним чином пов'язані зі швидкістю обертання якоря і частотою тестової напруги. Розглянуто шляхи технічної реалізації можливостей розрахунку вказаної швидкості, які впливають із цієї залежності.*

***Ключові слова:** швидкість обертання якоря, двигун постійного струму, інжекція напруги, спектр струму.*

***Abstract.** The armature rotation speed of a brushed DC motor is a defining characteristic for controlling the train movement layout or the operating mode of any electric drive. In practice, direct and indirect methods are used to measure this speed.*

ISSN (p) 1994-7852

ISSN (online) 2413-3795

© Давиденко М. Г., 2026.

The application of the direct method requires installing special sensors on the motor shaft. Such sensors are negatively affected by contamination and

ambient temperature. The indirect method is based on monitoring either the armature current and voltage, or only its current. The equipment required for the indirect method is located in more favorable operating conditions. Its algorithmic flexibility and adaptability are prerequisites for creating an optimal motor control system. The objectivity of the speed measurement result increases if it is based on the use of informational signals whose intensity does not depend on the effects caused by the continuous DC supply voltage of the motor. This paper considers a series-wound brushed DC motor. The informational signal is an incremental armature current generated by injecting a small sinusoidal voltage in series into the armature circuit. To determine the time variation law of this current, a mathematical model of the armature electrical circuit of the aforementioned motor is formulated. A formal description of the time dependence of the mutual inductance between the armature winding and the field winding during constant speed armature rotation is provided. This inductance is a positive quantity that periodically varies in time at twice the armature rotation speed. As a result, the total inductance of the armature circuit is time-varying, meaning the specified circuit is a parametric electrical circuit. The intensity of such a parametric effect does not depend on the motor operating mode. The resulting description is integrated into the aforementioned mathematical model. It is shown that the time variation law of the incremental current is determined by a first-order linear non-homogeneous differential equation with variable coefficients. An analytical solution to this equation is obtained. According to this solution, the incremental current consists of three sinusoidal components, the frequencies of which simply depend on the known frequency of the injected voltage and the unknown armature rotation speed. By obtaining estimates of the frequencies of these components, the armature rotation speed can be calculated.

Keywords: armature rotation speed, brushed DC motor, electric rolling stock, current spectrum.

Вступ. Колекторні двигуни постійного струму (КДПС, brushed DC motors) широко використовують на залізниці як тягові, а також у допоміжних системах локомотивів. Поточна швидкість обертання якоря такого двигуна є визначальною характеристикою для керування режимом руху поїзда, синхронізації роботи двигунів, захисту від юзу та боксування, захисту двигуна від розносу. На практиці використовують прямі та непрямі способи вимірювання цієї швидкості. Для перших використовують фізичні датчики, частина конструкції яких закріплена на валу двигуна (оптичні, індукційні, гальваномагнітні). Другі базовані на математичній моделі двигуна, вхідними даними для якої є поточні напруга і струм, а швидкість обертання ротора є похідною величиною. Можливе також вимірювання швидкості підрахуванням пульсацій струму, викликаних комутацією. Непрямі способи вільні від потреби мати на валу двигуна датчики, на які негативно впливають забруднення та температурні

коливання. Відповідне обладнання розташоване в більш сприятливих для роботи умовах. Їхня алгоритмічна гнучкість і можливість адаптації параметрів моделі в реальному масштабі часу є передумовами побудови всеохоплюючої системи оптимального автоматичного керування тяговим рухомим складом. У свою чергу, це забезпечило б мінімізацію технічних, організаційних і фінансових витрат на його експлуатацію. Отже, розроблення нових підходів для непрямого вимірювання швидкості обертання якоря КДПС є в умовах суворого ресурсозбереження дуже актуальною проблемою.

Постановка проблеми та аналіз досліджень і публікацій. Використання стабільних періодичних компонент струму якоря КДПС дає фізичну можливість для визначення величини швидкості обертання його якоря непрямыми способами. Джерелом таких компонент є явище комутації. Розрізняють два види: комутаційні пульсації (ripples) і комутаційні

сплески (spikes); у подальшому будемо скорочено називати їх відповідно пульсаціями та сплесками. Пульсації є фундаментальним періодичним перехідним процесом, який викликаний перемиканнями в індуктивно-резистивному колі якоря як наслідком почергового проходження пластин колектора під щітками. Сплески виникають під час комутації внаслідок розриву кола кожної секції якоря з переходом краю щітки з однієї пластини колектора на сусідню пластину та дуже короткочасного електричного пробігу проміжку між щіткою та попередньою пластиною. Загалом як пульсації, так і сплески є носіями інформації про швидкість обертання якоря. Однак, оскільки сплески є потужним джерелом електромагнітних завад, їх приглушують різними засобами. Тому визначення швидкості обертання на базі спостереження послідовності сплесків не набуло суттєвого поширення та висвітлене лише в невеликій кількості робіт [1, 2]. Підхід, який опосередковано використовує й інформацію, що міститься в сплесках, розглянуто в роботі [3]. Запропоновано обчислити амплітудний спектр струму якоря та знайти його автокореляційну функцію. Але на застосовність цього методу негативно впливає зменшення корисного сигналу зі зменшенням швидкості обертання.

Переважає кількість публікацій присвячена способам вимірювання швидкості, які базовані на спостереженні пульсацій (ripples) струму якоря. Згідно з роботою [4], метод визначення швидкості обертання по пульсаціях був запропонований В. Чжаном у китайськомовній статті «Метод тестування швидкості обертання мікромотора постійного струму», опублікованій у журналі КНР «Радіо», № 3 за 1978 рік. У роботі [4], як розвиток цього питання, опубліковано співвідношення між швидкістю обертання і частотою пульсацій для всіх можливих схемних конфігурацій обмотки якоря. Зазначимо, що на сьогодні такий безпосередній перерахунок без

вторинної обробки часової послідовності пульсацій використовують лише для дослідження суто конструкторських питань [5, 6]. Автори роботи [7] розглянули три способи вторинної обробки: спектральний аналіз із застосуванням швидкого перетворення Фур'є, адаптивну фільтрацію та виявлення комутації з використанням компаратора. Автори дійшли висновку, що для досліджених зразків двигунів найкращу точність показав спектральний аналіз, але обмежилися цим окремим випадком. У роботі [8] описано спосіб оцінювання швидкості обертання, базований на підрахунку пульсацій і вимірюванні інтервалів часу між ними із подальшим розпізнаванням образу кожної пульсації. Але застосування цього способу потребує використання комп'ютера, що не завжди можливе на борту локомотива. Отримання додаткової інформації про часове розташування пульсацій передбачено і в статті [9]: для корегування результату вимірювання за пульсаціями використовують дані від тахометра з відбивачем інфрачервоного випромінювання, закріпленим на валу двигуна. На стабільність показань такого тахометра суттєво впливають забруднення відбивача і відхилення температури. У роботі [10] продемонстровано стабілізацію характеристик пульсацій їх обробкою адаптивним підсилювачем ліній спектра. Спосіб визначення частоти обертання якоря авторами не вказано, однак текст статті дає підстави зрозуміти, що цю частоту зчитували з графіка спектра. Автори роботи [11] запропонували процедуру двоетапної фільтрації пульсацій. Реалізація такого фільтра для серійного виробу може виявитися непростю задачею. Спосіб фільтрації пульсацій за допомогою вейвлетів розглянуто в роботі [12]. Має місце також використання пульсацій лише для калібрування системи керування КДПС перед робочим запуском [13].

Принципово інший підхід для визначення швидкості обертання якоря

базований на ідентифікації коефіцієнтів системи рівнянь, складеної поєднанням другого закону Кірхгофа для кола якоря, виразу для ЕРС реакції якоря («проти-ЕРС») і динамічного рівняння двигуна як механічної системи. Така сукупність рівнянь являє собою математичну модель КДПС і дає змогу виразити швидкість обертання якоря через миттєві значення струму якоря та напруги на ньому. У найбільш загальному вигляді такий зв'язок був описаний для електроприводів у роботі [14]. У пізнішій роботі [15] величина швидкості обертання подана як змінна, оцінку якої формує фільтр Калмана, який, зокрема, містить математичну модель двигуна. Використання такої моделі тільки для розрахунку швидкості потребує надлишкових обчислювальних ресурсів. У роботі [16] модель спрощено, унаслідок чого для отримання швидкості обертання достатньо тільки знання миттєвого значення струму якоря. Однак ця модель не враховує взаємної індуктивності між обмотками якоря та збудження і тому її не можна вважати коректною. Фільтр Калмана застосовано і в способі, описаному в роботі [17]. Його використано для уточнення оцінки величини швидкості обертання, отриманої описаним вище пульсаційним методом. Головним недоліком цього методу є суттєве зменшення амплітуди корисного сигналу зі зменшенням вказаної швидкості.

Щоб позбутися такої закономірності, потрібно визначити швидкість обертання через параметри двигуна, інтенсивність впливу яких на струм якоря не залежить від цієї швидкості, і використати незалежне від двигуна джерело тестового сигналу. Таким параметром є взаємна індуктивність обмоток якоря та збудження [18]. У роботі [19] розроблено математичну модель процесу розповсюдження високочастотного струму, викликаного введенням джерела малої тестової синусоїдної напруги в коло якоря КДПС із послідовним збудженням. Показано, що струм описано лінійним диференціальним рівнянням другого

порядку зі змінними коефіцієнтами. Аналітичне розв'язання цього рівняння вкрай ускладнене, а числове розв'язання потребує критично великої кількості кроків інтегрування. Авторам роботи [20] вдалося уникнути цих складнощів. Вони розробили модель аналогічного призначення, оминувши математичний опис роботи колекторно-щіткового вузла. Вони показали, що за дії тестової напруги у вигляді меандру спектральні складові струму якоря розташовані на частотах, які є комбінаційними частотами гармонік тестового сигналу і частоти комутації (вона пропорційна частоті обертання якоря). Усебічне викладення проблем і їх розв'язання в цій роботі дещо перенасичене розглядом деталей, пов'язаних із формою застосованої тестової напруги, унаслідок чого не є прозорим фізичний бік зроблених авторами кроків. Зокрема, поза межами явного висвітлення залишився вплив на досліджені явища змінної в часі взаємної індуктивності обмоток якоря та збудження.

Отже, існує певна кількість теоретичних напрацювань і практичних розробок у сфері бездатчикового визначення величини швидкості обертання якоря КДПС. Але не вдалося виявити публікацій, у яких був би обґрунтовано поданий вплив взаємної індуктивності обмоток на існування та кількісні характеристики вказаних ефектів. Розв'язання задачі такого обґрунтування надало б коректності результатам вимірювання швидкості обертання якоря КДПС останнім способом і об'єктивності – експлуатаційним заходам, що пов'язані з ними.

Мета та задачі дослідження. Мета дослідження – встановлення кількісного зв'язку між швидкістю обертання якоря і параметрами додаткового струму якоря, що викликаний введенням джерела тестової синусоїдної напруги до його кола, з урахуванням взаємної індуктивності обмоток якоря та збудження.

Для досягнення поставленої мети були розв'язані три задачі:

1) формування математичної моделі кола якоря КДПС із послідовним збудженням як параметричного кола;

2) математичний опис часової залежності взаємної індуктивності обмотки якоря та обмотки збудження;

3) визначення виразу для миттєвого значення струму якоря КДПС і встановлення зв'язку параметрів цього струму зі швидкістю обертання якоря.

Основна частина

Формування математичної моделі кола якоря КДПС із послідовним збудженням

Будемо аналізувати електричне коло якоря в рамках його лінійного подання. За дотримання цієї умови принцип накладання дає змогу описувати електричні явища, викликані джерелом синусоїдної тестової

напруги, окремо від явищ, викликаних дією постійної напруги живлення. Розглядатимемо КДПС з однією парою полюсів і двома пластинами колектора. Наведемо класичну електричну схему КДПС із послідовним збудженням [21], додавши до неї позначення об'єктивно існуючого індуктивного зв'язку між обмоткою якоря та обмоткою збудження (рисунок). Умовні позначення: $e(t)$ – електрорушійна сила (ЕРС) джерела тестової напруги; R_f – активний опір обмотки збудження; L_f – власна індуктивність обмотки збудження; R_a – активний опір обмотки якоря; L_a – власна індуктивність обмотки якоря; $M(t)$ – взаємна індуктивність обмоток; $i(t)$ – миттєве значення струму якоря; $u_a(t)$ і $u_f(t)$ – миттєві значення напруг відповідно якоря та збудження.

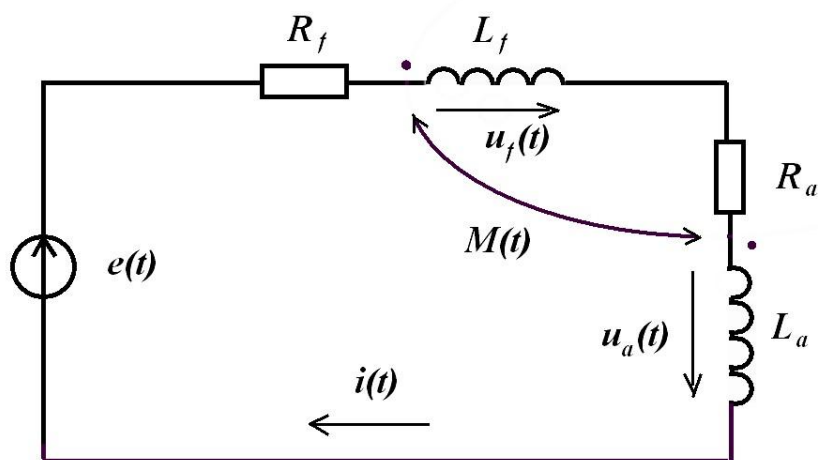


Рис. Електрична схема КДПС із послідовним збудженням

Величина тестової ЕРС є достатньо малою, щоб не впливати на параметри режиму роботи КДПС.

За другим законом Кірхгофа,

$$e(t) = i(t) \cdot (R_f + R_a) + u_f(t) + u_a(t). \quad (1)$$

Виразимо $u_f(t)$ і $u_a(t)$ через потокозчеплення $\Psi_f(t)$ і $\Psi_a(t)$ відповідних обмоток:

$$u_f(t) = \frac{d\Psi_f(t)}{dt}; \quad (2)$$

$$u_a(t) = \frac{d\Psi_a(t)}{dt}. \quad (3)$$

З урахуванням наявності взаємної індукції між обмотками якоря та збудження отримаємо

$$\Psi_f(t) = L_f \cdot i(t) + M(t) \cdot i(t) ; \quad (4)$$

$$\Psi_a(t) = L_a \cdot i(t) + M(t) \cdot i(t) . \quad (5)$$

Тому

$$e(t) = \left[R_f + R_a + 2 \cdot \frac{dM(t)}{dt} \right] \cdot i(t) + \left[L_f + L_a + 2M(t) \right] \cdot \frac{di(t)}{dt} . \quad (8)$$

Це рівняння є математичною моделлю поведінки в часі струму якоря за будь-якої введеної ЕРС. Вираз у перших квадратних дужках має фізичний сенс змінного в часі активного опору кола якоря. Вираз у других квадратних дужках має фізичний сенс змінної в часі індуктивності цього кола. Отже, математична модель (8) описує лінійне параметричне резистивно-індуктивне коло.

Часова залежність взаємної індуктивності обмоток якоря та збудження

Взаємна індуктивність обмоток якоря та збудження без урахування випрямної дії колекторно-щіткового вузла та спеціальної конфігурації полюсів змінюється в часі за законом

$$M(t) = M_0 \cdot \cos(\omega_a \cdot t) , \quad (9)$$

де M_0 – максимальна величина взаємної індуктивності;

ω_a – кутова частота обертання якоря.

Згідно з наведеним у роботі [22] аналізом перетворення електромагнітної енергії обертовим перетворювачем, у КДПС залежність (9) за рахунок випрямної дії колекторно-щіткового вузла має такий вигляд:

$$u_f(t) = [L_f + M(t)] \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot \frac{dM(t)}{dt} , \quad (6)$$

$$u_a(t) = [L_a + M(t)] \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot \frac{dM(t)}{dt} . \quad (7)$$

Підстановка цих формул до виразу (1) призводить до такого диференціального рівняння:

$$M(t) = M_0 \cdot |\cos(\omega_a \cdot t)| . \quad (10)$$

Пульсації взаємної індуктивності фундаментально притаманні КДПС; їхній розмах (інтенсивність) не залежать від швидкості обертання якоря. Нескладно показати, що

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} \cdot \cos(2nx) .$$

Доданки під знаком суми швидко зменшуються зі зростанням величини n , тож можна вважати, що

$$|\cos x| \approx \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(2x) . \quad (11)$$

Тому вираз (10) набуває вигляду

$$M(t) \approx \frac{2M_0}{\pi} \cdot \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \cos(2\omega_a \cdot t) \right] . \quad (12)$$

Отже, взаємна індуктивність обмоток якоря та збудження є пульсуючою додатною величиною.

Виведення виразу для миттєвого значення струму якоря та його параметрів, які залежать від швидкості обертання

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (8) можна подати в такому вигляді:

$$\frac{e(t)}{(L_f+L_a) \cdot \left[1 + \frac{2M(t)}{L_f+L_a} \right]} = \frac{R_f+R_a+2 \cdot \frac{dM(t)}{dt}}{(L_f+L_a) \cdot \left[1 + \frac{2M(t)}{L_f+L_a} \right]} \cdot i(t) + \frac{di(t)}{dt} . \quad (13)$$

На практиці $L_a \ll L_f$. Оскільки $M_0 = \sqrt{L_f \cdot L_a}$, а середнє геометричне менше за середнє арифметичне або дорівнює йому, то $M_0 \ll (L_f + L_a)$. Із урахуванням цього рівняння (13) набуває вигляду

$$\frac{e(t)}{L_w} \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right] = \frac{R_w + 2 \frac{dM(t)}{dt}}{L_w} \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right] \cdot i(t) + \frac{di(t)}{dt}, \quad (14)$$

де

$$L_w = L_f + L_a, \quad (15)$$

$$R_w = R_f + R_a. \quad (16)$$

Введемо сталу часу кола

$$\tau_w = L_w / R_w. \quad (17)$$

Також застосуємо синусоїдну ЕРС тестового сигналу

$$e(t) = E_{mT} \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T), \quad (18)$$

де E_{mT} – амплітуда цієї ЕРС;
 φ_T – її початкова фаза;
 ω_T – її кутова частота.

З урахуванням введених позначень вираз (14) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{E_{mT}}{L_w} \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right] \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T) = \\ = \left[\frac{1}{\tau_w} + \frac{2}{L_w} \cdot \frac{dM(t)}{dt}\right] \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right] \cdot i(t) + \frac{di(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (19)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{di(t)}{dt} + P(t) \cdot i(t) = Q(t). \quad (20)$$

Тут

$$P(t) = \left[\frac{1}{\tau_w} + \frac{2}{L_w} \cdot \frac{dM(t)}{dt}\right] \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right], \quad (21)$$

$$Q(t) = \frac{E_{mT}}{L_w} \cdot \left[1 - \frac{2M(t)}{L_w}\right] \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T). \quad (22)$$

Прийmemo як початкову умову, що $i(0) = 0$. Розв'язок такого рівняння відомий [23]:

$$i(t) = e^{-\int_0^t P(t)dt} \cdot \left\{ \int_0^t \left[Q(t) \cdot e^{\int_0^t P(t)dt} \right] dt \right\} + C, \quad (23)$$

де C – стала інтегрування.

Після підстановки до формули (21) виразу (12) для часової залежності взаємної індуктивності, урахування нерівності $M_0 \ll L_w$ і можливості, що впливає звідси,

користуватися за потреби рівністю $e^x \approx 1 + x$ отримаємо

$$\int_0^t P(t)dt = e^{\frac{t}{\tau_w}}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left[Q(t) \cdot e^{\int_0^t P(t) dt} \right] dt = & \frac{E_{mT}}{L_w \cdot \sqrt{\omega_T^2 + \frac{1}{\tau_w^2}}} \cdot \left[e^{\frac{t}{\tau_w}} \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T - \alpha) - \sin(\varphi_T - \alpha) \right] - \\
& - \frac{4E_{mT}M_0}{3\pi L_w^2 \cdot \sqrt{(\omega_T + 2\omega_a)^2 + \frac{1}{\tau_w^2}}} \left[e^{\frac{t}{\tau_w}} \sin[(\omega_T + 2\omega_a)t + \varphi_T - \beta] - \sin(\varphi_T - \beta) \right] - \\
& - \frac{4E_{mT}M_0}{3\pi L_w^2 \cdot \sqrt{(\omega_T - 2\omega_a)^2 + \frac{1}{\tau_w^2}}} \left[e^{\frac{t}{\tau_w}} \sin[(\omega_T - 2\omega_a)t + \varphi_T - \gamma] - \sin(\varphi_T - \gamma) \right], \quad (25)
\end{aligned}$$

де

$$\alpha = \arctg(\omega_T \tau_w), \quad (26)$$

$$\beta = \arctg[(\omega_T + 2\omega_a)\tau_w], \quad (27)$$

$$\gamma = \arctg[(\omega_T - 2\omega_a)\tau_w]. \quad (28)$$

Підставивши вирази (24) і (25) до формули (23) і врахувавши наведену вище початкову умову, а також рівність (17), отримаємо

$$\begin{aligned}
i(t) = & \frac{E_{mT}}{R_w \sqrt{1 + (\omega_T \tau_w)^2}} \cdot \sin(\omega_T t + \varphi_T - \alpha) - \\
& - \frac{0,424E_{mT}}{R_w \sqrt{1 + [(\omega_T + 2\omega_a)\tau_w]^2}} \cdot \frac{M_0}{L_w} \cdot \sin[(\omega_T + 2\omega_a)t + \varphi_T - \beta] - \\
& - \frac{0,424E_{mT}}{R_w \sqrt{1 + [(\omega_T - 2\omega_a)\tau_w]^2}} \cdot \frac{M_0}{L_w} \cdot \sin[(\omega_T - 2\omega_a)t + \varphi_T - \gamma]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Отже, струм якоря КДПС із послідовним збудженням є сумою трьох синусоїдних струмів із кутовими частотами ω_T , $(\omega_T + 2\omega_a)$ і $(\omega_T - 2\omega_a)$. Для визначення величини ω_a і подальшого розрахунку швидкості обертання n_a за відомої частоти ω_T тестового сигналу необхідно визначити величину другої або третьої з вказаних вище частот. Зокрема, для розглянутого в цій роботі КДПС з однією парою полюсів, двома пластинами колектора і двома щітками

$n_a = \frac{\omega_a}{120\pi} = f_a/60$ оберт/с, де f_a – частота обертання, Гц. Щоб визначити останню, можна, наприклад, виконати спектральний аналіз струму $i(t)$ із визначенням частот розташування піків спектра [24]. Іншим можливим шляхом є синхронне детектування [25] складової з частотою $(f_T - 2f_a)$, де f_T – частота тестового сигналу, Гц. У будь-якому випадку основною задачею для технічної реалізації можливостей розрахунку величини n_a , які впливають із виразу (29), є достатньо точна

локалізація на осі частот другої або третьої компонент струму $i(t)$ з урахуванням кінцевої протяжності в часі інтервалу спостереження цього струму, суттєвої різниці між амплітудами цих компонент і амплітудою першої компоненти, а також впливу електромагнітних завад.

Висновки

Розглянуте питання стосується сукупності методів визначення величини швидкості обертання якоря колекторного двигуна постійного струму. У цій роботі теоретично обґрунтовано можливість розрахунку цієї швидкості введенням тестової синусоїдної напруги до кола якоря

та визначенням величин частот спектральних складових додаткового струму, викликаного дією вказаної напруги. При цьому коректно враховано змінний у часі характер величини взаємної індуктивності між обмотками якоря та збудження. Результати роботи дають змогу вимірювати швидкість обертання якоря незалежно від тих електромагнітних процесів у двигуні, які викликані дією його джерела живлення. Це підвищує об'єктивність висновків щодо подальших експлуатаційних заходів. Завданням майбутніх досліджень є кількісне визначення впливу супроводжуючих факторів на результати такого вимірювання.

Список використаних джерел

1. Radcliffe, P., & Kumar, D. (2015). Sensorless speed measurement for brushed DC motors. *IET Power Electronics*, 8 (11), 2223–2228. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2015.0147>
2. Precision Microdrives. (2026). *Using DC Motor Commutation Spikes to Measure Motor Speed RPM*. URL: <https://www.precisionmicrodrives.com/using-dc-motor-commutation-spikes-measure-motor-speed-rpm>
3. Vasquez-Sanchez, E., Sottile, J., & Gomez-Gil, J. (2017). A Novel Method for Sensorless Speed Detection of Brushed DC Motors. *Applied Sciences*, 7 (14), 1–15. <https://doi.org/10.3390/app7010014>
4. Yuan, B., Hu, Z., & Zhou, Z. (2007). Expression of Sensorless Speed Estimation in Direct Current Motor with Simplex Lap Winding. *Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA 2007)*. IEEE. P. 816–821. <https://doi.org/10.1109/ICMA.2007.4303650>
5. Doshi, K., & Thompson, J. (2024). *Solving Sensorless Brushed DC Motor Speed and Position Control Using Ripple Counting* (Application Report SLVAFO8A). Texas Instruments. URL: <https://www.ti.com/lit/an/slvafo8a/slvafo8a.pdf>
6. Björnberg, A., & Vesterlund, J. (2024). *DC Motor Control without Encoder – A Ripple Based Approach* (Master's thesis, Lund University). URL: https://www2.iea.lth.se/publications/MS-Theses/Full%20document/5513_full_document.pdf
7. Vasquez-Sanchez, E., & Gomez-Gil, J. (2009). Analisis de tres metodos para la deteccion de la velocidad de giro de un motor DC, sin el empleo de sensores externos. *Revista Española de Electrónica (REE)*, 655, 72–79. URL: https://www.redeweb.com/_txt/655/72.pdf
8. Vasquez-Sanchez, E. et al. (2012). A New Method for Sensorless Estimation of the Speed and Position in Brushed DC Motors Using Support Vector Machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59(3), 1397–1408. <https://doi.org/10.1109/TIE.2011.2161651>
9. Chi, C.-T., & Yin, S.-A. (2012). Speed measurement of a general DC brushed motor based on sensorless method. *10th International Conference on Power and Energy (IPEC 2012)*. 332–337. <https://doi.org/10.1109/ASSCC.2012.6523288>
10. Ramli, R. M., Mikami, N., & Takahashi, H. (2010). Adaptive filters for rotational speed estimation of a sensorless DC motor with brushes. *10th International Conference on Information*

Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA 2010). P. 562–565. <https://doi.org/10.1109/ISSPA.2010.5605587>

11. Vidlak, M. et al. (2021). Sensorless Speed Control of a Brushed DC Motor Based at New Current Ripple Signal Processing. *Energies*, 14, 5359. <https://doi.org/10.3390/en14175359>

12. Cheng, S. et al. (2024). Sensorless Design and Analysis of a Brushed Motor Speed Regulation System for Branches Saving. *Agriculture*, 14, 2078. <https://doi.org/10.3390/agriculture14112078>

13. Ertl, D., & Weber, L. (2020). A Method for Real-Time Sensorless Speed Control of Brushed DC Motors in Cost Constrained Systems. *2020 IEEE 2nd Global Power, Energy and Communication Conference (GPECOM)*, 152–157. <https://doi.org/10.1109/GPECOM49333.2020.9248712>

14. Chang, Y.-C., & Lee, C.-H. (1999). Robust tracking control for constrained robots actuated by DC motors without velocity measurements. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 146 (2), 147–156. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19990517>

15. Praesomboon, S. et al. (2009). Sensorless speed control of the DC servo motor using Kalman filter. *7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS 2009)*, 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICICS.2009.5397682>

16. Tripathi, R. P. et al. (2022). Sensorless speed control of the DC motor using EKF estimator and TSK fuzzy logic controller. *Automatika*, 63 (2), 338–348. <https://doi.org/10.1080/00051144.2022.2039990>

17. Zhang, Q., Wen, B., & He, Y. (2021). Rotational speed monitoring of brushed DC motor via current signal. *Measurement*, 184, 109890. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109890>

18. Дідух Л. Д. (2020). *Електрика та магнетизм: підручник* (Серія «Загальна фізика»). Тернопіль: Підручники і посібники. 464 с.

19. Панченко С. В. та ін. (2023). Математична модель процесу розповсюдження високочастотних сигналів у колах живлення двигунів постійного струму. *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*, 28(1), 3–10. <https://doi.org/10.18664/iksz.v28i1.276286>

20. Kim, N.-S., Hwang, J.-S., & Choi, H.-G. (2025). Sensorless Speed Control of Brushed DC Motor Using High-Frequency Signal Injection. *IEEE Access*. Vol. 13, Art. no. 3646019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3646019>

21. Осташевський М. О., & Юр'єва О. Ю. (2018). *Електричні машини та трансформатори*: навч. посіб. Київ: Каравела. 454 с.

22. White, D. C., & Woodson, H. H. (1959). *Electromechanical Energy Conversion*. New York: Wiley. URL: <https://archive.org/details/electromechanica000whit>

23. Kamke, E. (1948). *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig: Akademische Verlagsanstalt Geest & Portig K.-G.

24. Kay, S. M. (1988). *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. URL: https://course.ece.cmu.edu/~ece792/handouts/LO_Chap_SpectralEstimation.pdf

25. Van Trees, H. L., Bell, K. L., & Tian, Z. (2013). *Detection, Estimation and Modulation Theory*. New York: John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/0471221082>

References

1. Radcliffe, P., & Kumar, D. (2015). Sensorless speed measurement for brushed DC motors. *IET Power Electronics*, 8 (11), 2223–2228. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2015.0147>

2. Precision Microdrives. (2026). Using DC motor commutation spikes to measure motor speed RPM. URL: <https://www.precisionmicrodrives.com/using-dc-motor-commutation-spikes-measure-motor-speed-rpm>.
3. Vasquez-Sanchez, E., Sottile, J., & Gomez-Gil, J. (2017). A novel method for sensorless speed detection of brushed DC motors. *Applied Sciences*, 7(14), 1–15. <https://doi.org/10.3390/app7010014>
4. Yuan, B., Hu, Z., & Zhou, Z. (2007). Expression of sensorless speed estimation in direct current motor with simplex lap winding. *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 816–821. <https://doi.org/10.1109/ICMA.2007.4303650>
5. Doshi, K., & Thompson, J. (2024). Solving sensorless brushed DC motor speed and position control using ripple counting (Application Report No. SLVAFO8A). Texas Instruments. URL: <https://www.ti.com/lit/an/slvafo8a/slvafo8a.pdf>
6. Björnberg, A., & Vesterlund, J. (2024). DC motor control without encoder – A ripple based approach [Master's thesis, Lund University]. Lund University Publications. URL: https://www2.iea.lth.se/publications/MS-Theses/Full%20document/5513_full_document.pdf
7. Vasquez-Sanchez, E., & Gomez-Gil, J. (2009). Analisis de tres metodos para la deteccion de la velocidad de giro de un motor DC, sin el empleo de sensores externos [Analysis of three methods for detecting the rotation speed of a DC motor, without the use of external sensors]. *Revista Española de Electrónica (REE)*, (655), 72–79. URL: https://www.redeweb.com/_txt/655/72.pdf
8. Vasquez-Sanchez, E., et al. (2012). A new method for sensorless estimation of the speed and position in brushed DC motors using support vector machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59 (3), 1397–1408. <https://doi.org/10.1109/TIE.2011.2161651>
9. Chi, C.-T., & Yin, S.-A. (2012). Speed measurement of a general DC brushed motor based on sensorless method. *Proceedings of the 10th International Conference on Power and Energy (IPEC2012)*, 332–337. <https://doi.org/10.1109/ASSCC.2012.6523288>
10. Ramli, R. M., Mikami, N., & Takahashi, H. (2010). Adaptive filters for rotational speed estimation of a sensorless DC motor with brushes. *Proceedings of the 10th International Conference on Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA2010)*, 562–565. <https://doi.org/10.1109/ISSPA.2010.5605587>
11. Vidlak, M., et al. (2021). Sensorless speed control of a brushed DC motor based at new current ripple signal processing. *Energies*, 14 (17), Article 5359. <https://doi.org/10.3390/en14175359>
12. Cheng, S., et al. (2024). Sensorless design and analysis of a brushed motor speed regulation system for branches saving. *Agriculture*, 14 (11), Article 2078. <https://doi.org/10.3390/agriculture14112078>
13. Ertl, D., & Weber, L. (2020). A method for real-time sensorless speed control of brushed DC motors in cost constrained systems. *Proceedings of the 2020 IEEE 2nd Global Power, Energy and Communication Conference (GPECOM)*, 152–157. <https://doi.org/10.1109/GPECOM49333.2020.9248712>
14. Chang, Y.-C., & Lee, C.-H. (1999). Robust tracking control for constrained robots actuated by DC motors without velocity measurements. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 146 (2), 147–156. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19990517>
15. Praesomboon, S., et al. (2009). Sensorless speed control of the DC servo motor using Kalman filter. *Proceedings of the 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS2009)*, 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICICS.2009.5397682>
16. Tripathi, R. P., et al. (2022). Sensorless speed control of the DC motor using EKF estimator and TSK fuzzy logic controller. *Automatika*, 63 (2), 338–348. <https://doi.org/10.1080/00051144.2022.2039990>

17. Zhang, Q., Wen, B., & He, Y. (2021). Rotational speed monitoring of brushed DC motor via current signal. *Measurement*, 184, Article 109890. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109890>
18. Didukh, L. D. (2020). *Elektryka ta mahnetizm* [Electricity and magnetism]: Textbook (Series "General Physics"). Ternopil: Pidruchnyky i Posibnyky, 464. [in Ukrainian].
19. Panchenko, S. V., et al. (2023). Matematychna model protsesu rozpovsiudzhennia vysokochastotnykh syhnaliv u kolakh zhyvlnnia dvyhuniv postiinoho strumu [Mathematical model of high-frequency signal propagation in DC motor power circuits]. *Informatsiino-Keruiuchi Systemy na Zaliznychnomu Transporti*, 28 (1), 3–10. <https://doi.org/10.18664/ikszt.v28i1.276286> [in Ukrainian].
20. Kim, N.-S., Hwang, J.-S., & Choi, H.-G. (2025). Sensorless speed control of brushed DC motor using high-frequency signal injection. *IEEE Access*, 13, Article 3646019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3646019>
21. Ostashevskiy, M. O., & Yurieva, O Yu. (2018). *Elektrychni mashyny ta transformatory* [Electrical machines and transformers]: Study Guide. Kyiv: Karavela. 454. [in Ukrainian].
22. White, D. C., & Woodson, H. H. (1959). *Electromechanical energy conversion*. Wiley. URL: <https://archive.org/details/electromechanica000whit>
23. Kamke, E. (1948). *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen* [Differential equations: Solution methods and solutions. Volume 1: Ordinary differential equations]. Akademische Verlaganstalt Geest & Portig K.-G.
24. Kay, S. M. (1988). *Modern spectral estimation: Theory and application*. Prentice Hall. URL: https://course.ece.cmu.edu/~ece792/handouts/LO_Chap_SpectralEstimation.pdf
25. Van Trees, H. L., Bell, K. L., & Tian, Z. (2013). *Detection, estimation and modulation theory*. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/0471221082>

Давиденко Михайло Георгійович, кандидат технічних наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна.
E-mail: davdenk@kart.edu.ua. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7255-3059>.

Mykhailo Davidenko, PhD, Associate Professor, Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine.
Email: davdenk@kart.edu.ua. ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7255-3059>.

Дата надходження статті: 28.07.2026 р.

Дата прийняття статті до друку: 04.09.2026 р.

Дата публікації (оприлюднення) статті: 16.10.2026 р.

Стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution License International CC-BY