УДК 621.391:681.518

АНАНЬЕВА О.М., канд. техн. наук,
ДАВИДЕНКО М.Г., канд. техн. наук,
БАБАЕВ М.М., д-р техн. наук (Украинский государственный университет железнодорожного транспорта)

Аппроксимация функции правдоподобия аддитивной смеси сигнала и двухкомпонентной помехи

Рассмотрен структурно-детерминированный сигнал, принимаемый на фоне аддитивной двухкомпонентной марковской помехи. Применена сложная аппроксимация функции правдоподобия такого сигнала, что позволило привести эту функцию к виду, представляющему собой сумму вычислительных блоков. Сделан вывод о том, что это описание является перспективным для последующего синтеза устройства оптимального приёма сигналов, наблюдаемых на фоне помехи указанного вида.

Ключевые слова: *аддитивная двухкомпонентная помеха, функция правдоподобия, статистическая связь, марковская последовательность, плотность распределения вероятностей.*

Введение

Для корректного решения задачи оптимального приёма сигналов необходимо учесть статистическую связь между отсчетами входного напряжения приемника. Всеобъемлющий учет такой связи невозможен, ввиду чего в автоматике, теории связи и в радиолокации используют приближенные модели статистической связи, из которых наиболее продуктивной в смысле получения технических решений является модель помехи в виде марковского процесса. К настоящему времени для подавления многокомпонентных помех в радиоэлектронных системах развит ряд методов, доведенных до различных стадий применения. Возможности технической реализации каждого из этих методов в значительной степени зависят от вида и объёма выражения, описывающего функцию правдоподобия смеси сигнала и помех.

Постановка задачи и анализ исследований

Для подавления многокомпонентных помех в радиоэлектронных системах развит ряд методов, доведенных до различных стадий применения [1,2,4]. В работе [2] получено вероятностное описание двухкомпонентной помехи в виде марковской последовательности, однако для его последующего применения требуется знание отсчетов второй компоненты помехи в отдельности. Это далеко не всегда возможно. Чтобы избежать этого, необходимо применить более сложную аппроксимацию функции правдоподобия.

Основной материал

Аппроксимацию функции правдоподобия (1) [2] получим на основе тождественного равенства

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = exp\left\{\sum_{k=1}^{K} ln x_k\right\}. \qquad (1)$$

Используя систему обозначений, принятую в работе [4], получаем, что при $\vec{\lambda} = const$

$$p(\vec{u}|\vec{\lambda}) = \ln p(u_1|\vec{\lambda}) + \sum_{k=1}^{K-1} \ln p(u_{k+1}, \Delta t|u_k;\vec{\lambda}). \qquad (2)$$

Разложим слагаемые, находящиеся под знаком суммы, в двухмерный ряд Тейлора по s_{k+1} в окрестности точки (0, 0) с удержанием первых трех членов ряда, пользуясь известной формулой [4],

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x,y) + [f_x'(x,y)\cdot\Delta x + f_y'(x,y)\cdot\Delta y] + \\ + \frac{1}{2}[f_{xx}''(x,y)\cdot\Delta x^2 + 2f_{xy}''(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y + f_{yy}''(x,y)\cdot\Delta y^2], \qquad (3)$$

где как f_{xx}'', f_{xy}'' и f_{yy}'' обозначены соответственно вторая частная производная по x, вторая частная производная по y и вторая смешанная производная.

Имеем

$$\ln p(u_{k+1}, \Delta t|u_k;\vec{\lambda}) = \ln p\,[u_{k+1} - s_{k+1}(\vec{\lambda}); \Delta t|u_k - s_k(\vec{\lambda})].$$

Опуская для краткости записи зависимость полезного сигнала s от информационного параметра $\vec{\lambda}$, получаем в соответствии с выражением (3):

$$\ln p\left(u_{k+1},\Delta t|u_k;\vec{\lambda}\right) \approx \ln p(u_{k+1},\Delta t|u_k) +$$

$$+\left[\frac{\partial \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} \cdot s_k + \right.$$

$$\left.+\frac{\partial \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_{k+1}}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} \cdot s_{k+1}\right] +$$

$$+0{,}5\left[\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} \cdot s_k^2 + \right.$$

$$+2\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k \partial s_{k+1}}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} \cdot s_k s_{k+1} +$$

$$\left.+\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_{k+1}^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} \cdot s_{k+1}^2\right]. \qquad (4)$$

Поскольку $\frac{\partial \ln p(x)}{\partial x} = \frac{1}{p(x)} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x}$, то для первых производных выражения (4) получаем

$$\frac{\partial \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} = \frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1},\Delta t|u_k)}, \qquad (5)$$

где

$$p'_{sk} = \frac{\partial p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}}, \qquad (6)$$

а также

$$\frac{\partial \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} = \frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1},\Delta t|u_k)}, \qquad (7)$$

где

$$p'_{sk+1} = \frac{\partial p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_{k+1}}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}}. \qquad (8)$$

Перейдем к вычислению вторых производных, входящих в состав выражения (4). Поскольку

$$\frac{\partial^2 \ln p(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{p(x)} \cdot \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} - \left[\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x}\right]^2,$$

то

$$\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} =$$

$$= \frac{p''_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\right]^2, \qquad (9)$$

где p'_{sk} определено выражением (6), а

$$p''_{sk} = \frac{\partial^2 p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}}. \qquad (10)$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} =$$

$$= \frac{p''_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\right]^2, \qquad (11)$$

где p'_{sk+1} определено выражением (8), а

$$p''_{sk+1} = \frac{\partial^2 p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_{k+1}^2}\bigg|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}}. \qquad (12)$$

Теперь найдем выражение для второй смешанной производной. В общем случае

$$\frac{\partial^2 \ln p(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{p(x,y)} \cdot \frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{p^2(x,y)} \cdot \frac{\partial p(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial p(x,y)}{\partial y},$$

В этом выражении для нашего случая имеем

$$\left.\frac{\partial^2 \ln p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k \partial s_{k+1}}\right|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} = \frac{p''_{sk,\ sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}, \tag{13}$$

где

$$p''_{sk,\ sk+1} = \left.\frac{\partial^2 p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k \partial s_{k+1}}\right|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}}, \tag{14}$$

а также

$$\frac{1}{p^2(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}\cdot\frac{\partial p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_k}\times$$

$$\times\left.\frac{\partial p(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}{\partial s_{k+1}}\right|_{\substack{s_k=0\\ s_{k+1}=0}} = \frac{p'_{sk}\cdot p'_{sk+1}}{p^2(u_{k+1}-s_{k+1};\Delta t|u_k-s_k)}, \tag{15}$$

где p'_{sk} и p''_{sk} определены соответственно выражениями (6) и (8).

С учетом выражений (6) - (15) разложение (8) принимает вид

$$\ln p\left(u_{k+1},\Delta t\middle|u_k;\vec{\lambda}\right) \approx \ln p(u_{k+1},\Delta t|u_k) +$$

$$+\frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_k + \frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_{k+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{p''_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\right]^2\right\}\cdot s_k^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{p''_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\right]^2\right\}\cdot s_{k+1}^2 -$$

$$-\frac{p'_{sk}\cdot p'_{sk+1}}{p^2(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_k\cdot s_{k+1} + \frac{p''_{sk,\ sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_k\cdot s_{k+1} =$$

$$= \ln p(u_{k+1},\Delta t|u_k) + \frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_k + \frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\cdot s_{k+1} +$$

$$+\frac{1}{2}f_{sk}(u_k,u_{k+1},\Delta t) + \frac{1}{2}f_{sk+1}(u_k,u_{k+1},\Delta t) + \varphi(u_k,u_{k+1},\Delta t), \tag{16}$$

где

$$\varphi(u_k,u_{k+1},\Delta t) = \left[\frac{p''_{sk,\ sk+1}}{p(u_{k+1};\Delta t|u_k)} - \frac{p'_{sk}\cdot p'_{sk+1}}{p^2(u_{k+1};\Delta t|u_k)}\right]\cdot s_k\cdot s_{k+1}, \tag{17}$$

$$f_{sk}(u_k, u_{k+1}, \Delta t) = \left\{\frac{p''_{sk}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)}\right]^2\right\} \cdot s_k^2, \tag{18}$$

$$f_{sk+1}(u_k, u_{k+1}, \Delta t) = \left\{\frac{p''_{sk+1}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)} - \left[\frac{p'_{sk+1}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)}\right]^2\right\} \cdot s_{k+1}^2. \tag{19}$$

Теперь выпишем выражение для функции правдоподобия (2) с учетом полученных результатов:

$$p(\vec{u}|\vec{\lambda}) = \ln p(u_1|\vec{\lambda}) + \sum_{k=1}^{K-1} \ln p(u_{k+1}, \Delta t|u_k; \vec{\lambda}) + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)} \cdot s_k +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K-1} f_{sk}(u_k, u_{k+1}, \Delta t) + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{p'_{sk}}{p(u_{k+1}; \Delta t|u_k)} \cdot s_{k+1} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K-1} f_{sk+1}(u_k, u_{k+1}, \Delta t) + \sum_{k=1}^{K-1} \varphi(u_k, u_{k+1}, \Delta t). \tag{20}$$

Это выражение может быть принято в качестве исходного для получения математического описания инженерно реализуемого устройства оптимального приёма сигнала на фоне двухкомпонентной марковской помехи.

Список литературы

1. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем [Текст] / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
2. Ананьева, О.М. Математическая модель двухкомпонентной аддитивной помехи в виде марковского процесса [Текст] / О.М. Ананьева, М.Г. Давиденко, М.М. Бабаев // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2016. – № 4. – С. 20-24.
3. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1973. – 872 с.
4. Djukanovic S., Popovic V. A Parametric Method for Multicomponent Interference Suppression in Noise Radars // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2012. – Vol. 48. – № 3. – P. 2730 – 2738.

О.М. Ананьєва, М.Г. Давиденко, М.М. Бабаєв. Апроксимація функції правдоподібності адитивної суміші сигналу й двокомпонентної завади. Розглянуто структурно-детермінований сигнал, прийнятий на фоні адитивної двокомпонентної марківської завади. Застосовано складну апроксимацію функції правдоподібності такого сигналу, що дало змогу привести цю функцію до вигляду, що являє собою суму обчислювальних блоків. Зроблено висновок про те, що цей опис є перспективним для подальшого синтезу обладнання оптимального приймання сигналів, що спостережуються на фоні завади зазначеного вигляду.

Ключові слова: адитивна двокомпонентна завада, функція правдоподібності, статистичний зв'язок, марківська послідовність, щільність розподілу ймовірностей.

O.M. Anan'yeva, M.G. Davidenko, M.M. Babaev. Approximation of function of credibility of additive mix of a signal and two-component hindrance. Currently, there is of number of the methods for suppression of multicomponent hindrances in radio-electronic systems which brought to different stages of application. Possibilities of technical implementation of each of these methods substantially depend on the type and the volume of the expression describing function of credibility of mix of signal and hindrances. Difficult approximation of function of credibility of such signal is applied. Representation of this function by two-dimensional number of Taylor at deduction of the first three members of row has allowed to lead this function to the look representing the sum of computing blocks. Each of these blocks makes cross processing in set of consecutive couples of counting of alarm and interfering mix and counting of basic signal. The received expressions are fair for any rather smooth function of credibility.

Keywords: additive two-component hindrance, credibility function, statistical communication, Markov sequence, distribution density of probabilities.

Ананьева О.М., *кандидат технических наук, докторант кафедры автоматики и компьютерного телеуправления движением поездов Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua*

Давиденко М.Г., *кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика, электротехника и электромеханика» Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua*

Бабаев М.М., *доктор технических наук, профессор кафедры «Электроэнергетика, электротехника и электромеханика» Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua*

Anan'yeva O.M., *Candidate of Technical Sciences, doctoral student of department of automation and computer telecontrol train traffic Ukrainian state university of railway transport. Kharkov, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua*

Davidenko M.G., *Candidate of Technical Sciences, associate professor of department of electroenergy, electrical equipment and electromecanics of the Ukrainian state university of railway transport. Kharkov, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua*

Babaev M., *Doctor of Engineering, professor of department of electroenergy, electrical equipment and electromecanics of the Ukrainian state university of railway transport. Kharkov, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96, eltech@kart.edu.ua <mailto:eltech@kart.edu.ua>*

Надійшла 01.09.2016 року