БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Будівельні, колійні та вантажно-розвантажувальні машини»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання курсової роботи
з дисципліни**

«МЕТОДИ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ»

Харків - 2011

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри БКВРМ 7 грудня 2009 р., протокол № 4.

До курсової роботи «Складання оптимальних планів перевезень» з дисципліни «Методи транспортної логістики» наведені приклади алгоритмів розв'язання реальних задач, що постають перед транспортними підприємствами у взаємовідносинах із замовниками.

З математичної точки зору – це задачі лінійного програмування: транспортна збалансована; транспортна незбалансована та розподільна. Поданий аналіз чутливості отриманих результатів до можливих змін параметрів вихідної моделі.

Методичні вказівки призначені для магістрів спеціальності 8.090214 «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання» усіх форм навчання.

Укладач

доц. Л.М. Козар

Рецензент

доц. Є.В. Романович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання курсової роботи

з дисципліни

«МЕТОДИ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ»

Відповідальний за випуск Козар Л.М.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 23.12.09 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Українська державна академія залізничного транспорту

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Будівельні, колійні та вантажно-розвантажувальні машини»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання курсової роботи
з дисципліни**

«МЕТОДИ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ»

Харків 2011

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри БКВРМ 7 грудня 2009 р., протокол № 4.

До курсової роботи «Складання оптимальних планів перевезень» з дисципліни «Методи транспортної логістики» наведені приклади алгоритмів розв'язання реальних задач, що постають перед транспортними підприємствами у взаємовідносинах із замовниками.

З математичної точки зору – це задачі лінійного програмування: транспортна збалансована; транспортна незбалансована та розподільна. Поданий аналіз чутливості отриманих результатів до можливих змін параметрів вихідної моделі.

Методичні вказівки призначені для магістрів спеціальності 8.090214 «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання» усіх форм навчання.

Укладач доц. Л.М. Козар

Рецензент

доц. Є.В. Романович

ЗМІСТ

	Вступ …………………………………………………	4
1	Складання оптимального плану перевезень зі складів до споживачів (збалансована задача) ..……..	5
1.1	Математичне формулювання транспортної задачі…	5
1.2	Побудова опорного плану перевезень ………………	7
1.3	Побудова оптимального плану перевезень методом потенціалів …………………………………………	9
2	Складання оптимального плану перевезень від постачальників до виробників (незбалансована задача) ………………………………………………	16
3	Визначення оптимальних обсягів перевезень у замовників (розподільна задача)……………………..	17
3.1	Постановка розподільної задачі ……………………..	17
3.2	Побудова математичної моделі розподільної задачі..	18
3.3	Розв'язання задачі лінійним методом ……………….	20
4	Графічний аналіз чутливості оптимальних обсягів перевезень……………………………………………...	22
4.1	Постановка задач аналізу …………………………….	22
4.2	Аналіз чутливості оптимального рішення (задача 1)	23
4.3	Аналіз можливостей збільшення ресурсів (задача 2)	29
4.4	Аналіз зміни прибутковості перевезень (задача 3) …	31
	Висновки ………………………………………………	36
	Список літератури…………………………………….	37

ВСТУП

Запорукою комерційного успіху будь-якого підприємства є розв'язання задачі щодо отримання найбільшого прибутку з використання доступних ресурсів. Щоб досягти максимального ефекту, маючи обмежені можливості, треба скласти план дій. Наприклад, у транспортного підприємства існує величезна кількість можливих варіантів перевезень, а треба вибрати оптимальний план. Зробити це емпіричним або експертним шляхом вельми складно. Найбільш ефективними є математичні методи.

Розробленням та застосуванням методів знаходження найкращих рішень у будь-яких сферах людської діяльності займається математична дисципліна «дослідження операцій».

У наш час у рамках дослідження операцій сформовані окремі самостійні напрямки – лінійне програмування, опукле програмування, теорія ігор, теорія масового обслуговування тощо.

В низці основних задач транспортної логістики є визначення раціональних маршрутів доставок та оптимальних обсягів перевезень за наявності декількох замовників.

Існує широке коло задач з єдиною математичною моделлю, які поєднуються під назвою «транспортна задача», наприклад, складання найбільш ощадливого плану перевезень однорідного продукту з пунктів зберігання в пункти споживання.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування - розділу математики, що розробляє теорію та чисельні методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями.

Слід зазначити, що термін «програмування» у даному випадку не пов'язаний зі складанням програм для комп'ютерів. Він виник внаслідок неточного перекладу англійського «linear programming». Одне із значень слова «programming» – складання планів, планування. Отже, більш коректним перекладом було б «лінійне планування», що краще відображало б сутність задачі.

Серед багатьох методів розв'язання задач лінійного програмування зручними є симплекс-метод, який передбачає складання транспортних таблиць, та метод потенціалів для роботи з цими таблицями.

У курсовій роботі, до якої написані ці методичні вказівки, складаються оптимальні плани перевезень від пунктів відправлення до споживачів, визначаються оптимальні обсяги перевезень у замовників з аналізом наслідків можливих змін вихідних параметрів. Для розв’язання цих задач використовуються згадані вище математичні методи.

Робота виконується магістрами у відповідності до індивідуального завдання на окремому аркуші, який видається викладачем та є невід’ємною частиною пояснювальної записки.

1 СКЛАДАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ЗІ СКЛАДІВ ДО СПОЖИВАЧІВ (ЗБАЛАНСОВАНА ЗАДАЧА)

1.1 Математичне формулювання транспортної задачі

У першому розділі курсової роботи поставлена наступна задача. Автотранспортне підприємство отримало замовлення на перевезення виробів одного найменування з трьох складів A_1, A_2, A_3 до п'яти магазинів B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Відповідно до індивідуальних завдань відомо, що на складах відповідно зберігаються запаси у розмірі a_1, a_2, a_3 одиниць продукції, потреби магазинів b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 одиниць, вартість перевезення одиниці товару зі складу A_i (i=1, 2, 3) в магазин B_k (k=1, 2, ..., 5) $C_{i\,k}$, грн.

Потрібно скласти такий план перевезень вантажів, щоб були задоволені заявки усіх магазинів і при цьому сумарна вартість перевезень була мінімальною. Розглянемо чисельний приклад за вихідними даними, що наведені в таблицях1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані для розглядуваного чисельного прикладу

Кількість продукції на складі a_i, одиниць			Потреба магазину b_k, одиниць продукції				
A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
300	280	220	180	140	190	120	170

Таблиця 1.2 - Вартість перевезення одиниці продукції для розглядуваного чисельного прикладу, грн.

Пункт відправлення (склад)	Пункт призначення (магазин)				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$C_{11}=12$	$C_{12}=9$	$C_{13}=14$	$C_{14}=10$	$C_{15}=17$
A_2	$C_{21}=19$	$C_{22}=16$	$C_{23}=13$	$C_{24}=15$	$C_{25}=21$
A_3	$C_{31}=10$	$C_{32}=18$	$C_{33}=6$	$C_{34}=20$	$C_{35}=12$

Поставлена задача є транспортною збалансованою (закритою), бо сума всіх запасів дорівнює сумі всіх заявок

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Дамо нашій задачі математичне формулювання. Позначимо через X_{ik} кількість товару, що перевозиться зі складу A_i у магазин B_k ($i=1, 2, ..., m$; $k=1, 2, ..., n$, для нашого прикладу $m=3$; $n=5$). Таким чином, у завданні є $m\times n$ змінних, які припускаються такими, що є більшими нуля і задовольняють такі умови:

$$\left.\begin{array}{c}
X_{11}+X_{12}+...+X_{1n}=a_1; \\
X_{21}+X_{22}+...+X_{2n}=a_2; \\
.... \\
X_{m1}+X_{m2}+...+X_{mn}=a_m. \\
\\
X_{11}+X_{21}+...+X_{m1}=b_1; \\
X_{12}+X_{22}+...+X_{m2}=b_2; \\
.... \\
X_{1n}+X_{2n}+...+X_{mn}=b_n.
\end{array}\right\}$$

При цьому сумарна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною

$$C = \sum_{i=1;\, k=1}^{m;\, n} C_{ik} \cdot X_{ik} \to \min. \quad (1.1)$$

Скористаємося спрощеними варіантом симплексних таблиць, так званими таблицями перевезень (транспортними таблицями), що складаються за формою таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Форма таблиці перевезень

Склад	Магазин				Запас
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Заявка	b_1	b_2	...	b_n	

1.2 Побудова опорного плану перевезень

Задача розв'язується шляхом деяких перетворень таблиці перевезень. Ці перетворення відповідають послідовному переходу від одного плану перевезень до іншого. Оптимальне розв'язання знаходиться серед опорних (базисних) розв'язань. В базисному розв'язанні невідомі дорівнюють нулю. Зазвичай ці нулі в таблицю не вписують, залишаючи відповідні клітинки пустими. Таким чином, в таблиці перевезень, що відображає опорний план, маємо $m+n-1$ заповнених (базисних) та $(m-1)\cdot(n-1)$ пустих (вільних) клітинок.

Порожні клітинки транспортної таблиці відповідають вільним змінним, а заповнені – базисним.

Існує декілька методів побудови опорного плану перевезень. Розглянемо метод найменшої вартості для нашого чисельного прикладу. Спочатку заповнюємо клітинку таблиці з мінімальною вартістю C_{ik}. При цьому або задовольняється заявка відповідного магазину, або вичерпується запас на склад. Далі клітинки заповнюються в порядку зростання вартостей.

Запишемо вартості перевезень для нашого прикладу у порядку зростання з таблиці 1.2: C_{33}=6; C_{12}=9; C_{14}=10; C_{31}=10; C_{11}=12; C_{35}=12; C_{23}=13; C_{13}=14; C_{24}=15; C_{22}=16; C_{15}=17; C_{32}=18; C_{21}=19; C_{34}=20; C_{25}=21. Отже, кроки заповнення клітинок для кількості товару, що перевозиться, будуть такими (таблиця 1.4):

а) X_{33}=190 (потреба магазину B_3 повністю задоволена, залишок на складі A_3: 220 – 190 = 30 одиниць);

б) X_{12}=140 (потреба магазину B_2 повністю задоволена, залишок на складі A_1: 300 – 140 = 160 одиниць);

в) X_{14}=120 (потреба магазину B_4 повністю задоволена, залишок на складі A_1: 160 – 120 = 40 одиниць);

г) X_{31}=30 (це залишок зі складу A_3, до магазину B_1 ще треба завезти: 180 – 30 = 150 одиниць);

д) X_{11}=40 (це залишок зі складу A_1, до магазину B_1 ще треба завезти: 150-40=110 одиниць);

е) X_{35}=0, бо запас на складі A_3 вичерпаний;

ж) X_{23}=0, X_{13}=0, X_{24}=0, X_{22}=0, X_{32}=0, X_{34}=0, бо по потреби магазинів B_2, B_3, B_4 повністю задоволені;

к) X_{15}=0, бо запас на складі A_1 вичерпаний; X_{21}=110 (потреба магазину B_1 повністю задоволена, залишок на складі A_2 складе: 280 – 110 = 170 одиниць);

л) X_{25}=170 (потреби усіх магазинів задоволені, запаси на усіх складах вичерпані).

Таблиця 1.4 – Перший опорний план для розглядуваного прикладу

Склад	Магазин					Запас	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	**12** 40	**9** 140	***8*** **14**	**10** 120	***14*** **17**	300	0
A_2	**19** 110	***16*** **16**	***15*** **13**	***17*** **15**	**21** 170	280	7
A_3	**10** 30	***7*** **18**	**6** 190	***8*** **20**	***12*** **12**	220	–2
Заявка	180	140	190	120	170		
β_k	12	9	8	10	14		

Вартість усіх перевезень в опорному плані (таблиця 1.4) за формулою (1.1)

$$C=40\cdot 12+140\cdot 9+120\cdot 10+110\cdot 19+170\cdot 21+30\cdot 10+190\cdot 6=10040 \text{ грн.}$$

1.3 Побудова оптимального плану перевезень методом потенціалів

Для знаходження оптимального плану перевезень здійснюється послідовний перехід від одного опорного плану до іншого. При цьому на кожному кроці здійснюється заміна однієї базисної змінної на одну вільну, тобто в транспортній таблиці одна вільна клітинка стає базисною, а одна базисна - вільною. Вибір вільної клітинки, яка підлягає заміні на черговому кроці на базисну, здійснюється порівнянням псевдовартості та вартості перевезення в цій клітинці. Заміні на базисну підлягає та вільна клітинка, у якій псевдовартість більше вартості.

Перш ніж дати визначення псевдовартості, введемо поняття потенціалів складів і магазинів. Зіставимо кожному складу A_i

число α_i та кожному магазину B_k число β_k таким чином, щоб для будь-якої базисної клітинки плану виконувалася умова

$$\alpha_i + \beta_k = C_{i\,k}.$$

Числа α_i і β_k називаються потенціалами баз і магазинів. Через те що в опорному плані є m+n–1 базисних клітинок, для знаходження потенціалів потрібно розв'язати систему з m+n–1 рівнянь із m+n невідомими. Оскільки число невідомих на 1 більше числа рівнянь, значення одного потенціалу можна вибрати довільно, наприклад, $\alpha_1 = 0$.

Назвемо псевдовартістю $\tilde{c}_{ik}$ клітинки (A_i, B_k) суму потенціалів, що відповідають цій клітинці:

$$\tilde{c}_{ik} = \alpha_i + \beta_k.$$

Нижче наведений **алгоритм розв'язання транспортної задачі** методом потенціалів.

Крок 1 Будується опорний план перевезень методом найменшої вартості.

Крок 2 Для опорного плану розраховуються потенціали та псевдовартості. Якщо у всіх вільних клітинках псевдовартості не перевищують вартості, то розв'язання можна вважати закінченим, а вихідний опорний план – оптимальним.

Крок 3 Якщо хоча б в одній вільній клітинці псевдовартість перевищує вартість, слід здійснити перекидання товару за циклом перерахування, який відповідає цій клітинці.

Крок 4 Для нового опорного плану заново розраховуються потенціали та псевдовартості.

Крок 5 Якщо новий план не є оптимальним, здійснюється перехід до наступного (тобто перехід до кроку 3), і алгоритм повторюється, поки не буде отриманий оптимальний план.

Цикл перерахування – це замкнута ламана, яка з'єднує декілька клітинок таблиці та здійснює в кожній з них поворот на 90°. Ці клітинки називаються вершинами.

Цикл перерахування повинен відповідати таким вимогам:

а) для будь-якої вільної клітинки таблиці перевезень існує один і тільки один цикл, вершина-початок якого містить вільне невідоме із цієї клітинки, а інші вершини містять тільки базисні невідомі. Число вершин у циклі завжди є парним;

б) вершині-початку присвоюється знак «+», наступній «—», далі почергово «+» змінюється на «—»;

в) кожні два сусідніх невідомих знаходяться або в одному рядку, або в одній графі (стовпцю), тобто це означає, що у двох сусідніх невідомих у циклі або перші, або другі індекси однакові;

г) три послідовних невідомих не можуть перебувати в одному рядку або в одній графі;

д) якщо, починаючи з будь-якого невідомого, ми будемо послідовно переходити від одного до іншого, наступного за ним невідомого, то через декілька кроків ми повернемося до вихідного невідомого;

е) кількість товару, що перекидається за циклом, повинна дорівнювати найменшій з величин перевезень, що стоять у вершинах зі знаком «—».

Перейдемо до нашого чисельного прикладу.

Крок 1 Алгоритму здійснений раніше у підрозділі 1.2.

Крок 2 Розрахуємо потенціали та псевдовартості для опорного плану, поданого в таблиці 1.4:

$\alpha_1 = 0;$

$\alpha_1 + \beta_1 = 12;$ $\beta_1 = 12;$

$\alpha_1 + \beta_2 = 9;$ $\beta_2 = 9;$

$\alpha_1 + \beta_4 = 10;$ $\beta_4 = 10;$

$\alpha_2 + \beta_1 = 19;$ $\alpha_2 = 19 - 12 = 7;$

$\alpha_2 + \beta_5 = 21;$ $\beta_5 = 21 - 7 = 14;$

$\alpha_3 + \beta_1 = 10;$ $\alpha_3 = 10 - 12 = -2;$

$\alpha_3 + \beta_3 = 6;$ $\beta_3 = 6 - (-2) = 8;$

$\tilde{c}_{13} = 0 + 8 = 8;$ $\tilde{c}_{15} = 0 + 14 = 14;$

$\tilde{c}_{22} = 7 + 9 = 16;$ $\tilde{c}_{23} = 7 + 8 = 15;$ $\tilde{c}_{24} = 7 + 10 = 17;$

$\tilde{c}_{32} = -2 + 9 = 7;$ $\tilde{c}_{34} = -2 + 10 = 8;$ $\tilde{c}_{35} = -2 + 14 = 12.$

У відповідні клітинки таблиці 1.4 запишемо отримані потенціали α_i , β_k та псевдовартості $\tilde{c}_{ik}$. Останні для наочності запишемо підкресленим шрифтом.

Крок 3 В опорному плані (таблиця 1.4) знаходимо дві клітинки (A_2, B_3) і (A_2, B_4), у яких псевдовартість більше вартості. Слід здійснити перекидання товару за циклом перерахування, який починається з однієї з цих двох клітинок, наприклад, (A_2, B_4). Невідомому X_{24} відповідає цикл $X_{24} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{14} \rightarrow X_{24}$.

Перекидання товару означає зміну значення вільного невідомого X_{24}. Збільшимо його на деяке число ΔX. Переходячи послідовно від однієї вершини циклу до іншої, почергово зменшуємо та збільшуємо значення невідомих у циклі на те ж число ΔX, бо суми за рядками і за графами є незмінними. Наприклад, у зазначеному вище циклі для вільного невідомого X_{24}:

– старі значення: $X_{24} = 0$; $X_{21} = 110$; $X_{11} = 40$; $X_{14} = 120$;$X_{24} = 0$;

– нові значення: $X_{24} = \Delta X$; $X_{21} = 110 - \Delta X$; $X_{11} = 40 + \Delta X$; $X_{14} = 120 - \Delta X$; $X_{24} = \Delta X$.

Відповідно до вимоги е), якій повинен відповідати цикл перерахування, число ΔX слід приймати таким, що дорівнює найменшому з чисел, які стоять у вершинах, позначених знаком «–». За цієї умови принаймні одне з колишніх базисних невідомих прийме значення «нуль», і його можна перевести до вільних невідомих, зробивши замість нього базисним те невідоме, яке було вільним.

Так, у нашому циклі вершинами зі знаком «–» є X_{21} та X_{14}. Вибравши $\Delta X = \min \{110; 120\} = 110$, маємо:

– старі значення: $X_{24} = 0$; $X_{21} = 110$; $X_{11} = 40$; $X_{14} = 120$; $X_{24} = 0$ (таблиця 1.4);

– нові значення: $X_{24} = 110$; $X_{21} = 0$; $X_{11} = 150$; $X_{14} = 10$; $X_{24} = 110$ (таблиця 1.5).

Таблиця 1.5 – Другий опорний план для розглядуваного прикладу

Склад	Магазин					Запас	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	**12** 150 ⊕	**9** 140	***8*** **14**	**10** 10 ⊖	***16*** **17**	300	0
A_2	***17*** **19**	***14*** **16**	***13*** **13**	**15** 110 ⊕	**21** 170 ⊖	280	5
A_3	**10** 30 ⊖	***7*** **18**	**6** 190	***8*** **20**	***14*** **12** ⊕	220	-2
Заявка	180	140	190	120	170		
β_k	12	9	8	10	16		

Крок 4 Розрахуємо потенціали та псевдовартості для нового опорного плану (таблиця 1.5):

$\alpha_1 = 0;$

$\alpha_1 + \beta_1 = 12;$ $\beta_1 = 12;$

$\alpha_1 + \beta_2 = 9;$ $\beta_2 = 9;$

$\alpha_1 + \beta_4 = 10;$ $\beta_4 = 10;$

$\alpha_2 + \beta_4 = 15;$ $\alpha_2 = 15 – 10 = 5;$

$\alpha_2 + \beta_5 = 21;$ $\beta_5 = 21 – 5 = 16;$

$\alpha_3 + \beta_1 = 10;$ $\alpha_3 = 10 – 12 = –2;$

$\alpha_3 + \beta_3 = 6;$ $\beta_3 = 6 – (–2) = 8;$

$\tilde{c}_{13} = 0 + 8 = 8;$ $\tilde{c}_{15} = 0 + 16 = 16;$

$\tilde{c}_{21} = 5 + 12 = 17;$ $\tilde{c}_{22} = 5 + 9 = 14;$ $\tilde{c}_{23} = 5 + 8 = 13;$

$\tilde{c}_{32} = –2 + 9 = 7;$ $\tilde{c}_{34} = –2 + 10 = 8;$ $\tilde{c}_{35} = –2 + 16 = 14.$

Крок 5 В другому опорному плані (таблиця 1.5) є вільна клітинка (A_3, B_5), у якій псевдовартість перевищує вартість перевезень. Даний план неоптимальний, переходимо до кроку 3.

Крок 3. Невідомому X_{35} відповідає цикл $X_{35} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{14} \to X_{24} \to X_{25} \to X_{35}$. Найменше з чисел, що стоять у вершинах, позначених знаком «–»: $\Delta X = \min \{30; 10; 170\} = 10$. Отже, здійснюємо перекидання 10 одиниць товару за циклом перерахування:

– старі значення: $X_{35} = 0$; $X_{31} = 30$; $X_{11} = 150$; $X_{14} = 10$; $X_{24} = 110$; $X_{25} = 170$; $X_{35} = 0$ (таблиця 1.5);

– нові значення: $X_{35} = 10$; $X_{31} = 20$; $X_{11} = 160$; $X_{14} = 0$; $X_{24} = 120$; $X_{25} = 160$; $X_{35} = 10$ (таблиця 1.6).

Таблиця 1.6 – **Третій опорний план для розглядуваного прикладу**

Склад	Магазин					Запас	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	**12** 160	**9** 140	***8*** **14**	***8*** **10**	***14*** **17**	300	0
A_2	***19*** **19**	***16*** **16**	***15*** ⊕ **13**	**15** 120	**21** ⊖ 160	280	7
A_3	**10** 20	***7*** **18**	**6** ⊖ 190	***6*** **20**	**12** ⊕ 10	220	-2
Заявка	180	140	190	120	170		
β_k	12	9	8	8	14		

Крок 4 Розрахуємо потенціали та псевдовартості для третього опорного плану (таблиця 1.6):

$\alpha_1 = 0$;
$\alpha_1 + \beta_1 = 12$; $\beta_1 = 12$;
$\alpha_1 + \beta_2 = 9$; $\beta_2 = 9$;
$\alpha_3 + \beta_1 = 10$; $\alpha_3 = 10 - 12 = -2$;
$\alpha_3 + \beta_3 = 6$; $\beta_3 = 6 - (-2) = 8$;
$\alpha_3 + \beta_5 = 12$; $\beta_5 = 12 - (-2) = 14$;
$\alpha_2 + \beta_5 = 21$; $\alpha_2 = 21 - 14 = 7$;
$\alpha_2 + \beta_4 = 15$; $\beta_4 = 15 - 7 = 8$;
$\tilde{c}_{13} = 0 + 8 = 8$; $\tilde{c}_{14} = 0 + 8 = 8$; $\tilde{c}_{15} = 0 + 14 = 14$;
$\tilde{c}_{21} = 7 + 12 = 19$; $\tilde{c}_{22} = 7 + 9 = 16$; $\tilde{c}_{23} = 7 + 8 = 15$;
$\tilde{c}_{32} = -2 + 9 = 7$; $\tilde{c}_{34} = -2 + 8 = 6$.

Крок 5 В третьому опорному плані (таблиця 1.6) є вільна клітинка (A_2, B_3), у якій псевдовартість перевищує вартість перевезень. Даний план неоптимальний, переходимо до кроку 3.

Крок 3 Невідомому X_{23} відповідає цикл $X_{23} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{25} \to X_{23}$. Найменше з чисел, що стоять у вершинах, позначених знаком «–»: $\Delta X = \min \{190;\ 160\} = 160$. Отже, здійснюємо перекидання 160 одиниць товару за циклом перерахування:

– старі значення: $X_{23} = 0$; $X_{33} = 190$; $X_{35} = 10$; $X_{25} = 160$; $X_{23} = 0$; (таблиця 1.6);

– нові значення: $X_{23} = 160$; $X_{33} = 30$; $X_{35} = 170$; $X_{25} = 0$; $X_{23} = 160$; (таблиця 1.7).

Таблиця 1.7 - Четвертий опорний (оптимальний) план для розглядуваного прикладу

Склад	Магазин					Запас	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	**12** 160	**9** 140	***8*** **14**	***10*** **10**	***14*** **17**	300	0
A_2	***17*** **19**	***14*** **16**	**13** 160	**15** 120	***19*** **21**	280	5
A_3	**10** 20	***7*** **18**	**6** 30	***8*** **20**	**12** 170	220	-2
Заявка	180	140	190	120	170		
β_k	12	9	8	10	14		

Крок 4 Розрахуємо потенціали та псевдовартості для четвертого опорного плану (таблиця 1.7):

$\alpha_1 = 0$;

$\alpha_1 + \beta_1 = 12$; $\beta_1 = 12$;

$\alpha_1 + \beta_2 = 9$; $\beta_2 = 9$;

$\alpha_3 + \beta_1 = 10;$ $\alpha_3 = 10 - 12 = -2;$
$\alpha_3 + \beta_3 = 6;$ $\beta_3 = 6 - (-2) = 8;$
$\alpha_3 + \beta_5 = 12;$ $\beta_5 = 12 - (-2) = 14;$
$\alpha_2 + \beta_3 = 13;$ $\alpha_2 = 13 - 8 = 5;$
$\alpha_2 + \beta_4 = 15;$ $\beta_4 = 15 - 5 = 10.$
$\tilde{c}_{13} = 0 + 8 = 8;$ $\tilde{c}_{14} = 0 + 10 = 10;$ $\tilde{c}_{15} = 0 + 14 = 14;$
$\tilde{c}_{21} = 5 + 12 = 17;$ $\tilde{c}_{22} = 5 + 9 = 14;$ $\tilde{c}_{25} = 5 + 14 = 19;$
$\tilde{c}_{32} = -2 + 9 = 7;$ $\tilde{c}_{34} = -2 + 10 = 8.$

Крок 5 В опорному плані (таблиця 1.7) псевдовартості всіх вільних клітинок менше або дорівнюють вартостям, отже, даний план є оптимальним. Визначимо сумарну вартість перевезень даного плану за формулою (1.1)

$$C=160\cdot 12+ 140\cdot 9+160\cdot 13+120\cdot 15+20\cdot 10+30\cdot 6+170\cdot 12= 9480 \text{ грн.}$$

2 СКЛАДАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ВІД ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ДО ВИРОБНИКІВ (НЕЗБАЛАНСОВАНА ЗАДАЧА)

Наше підприємство отримало чергове замовлення на перевезення. В двох пунктах розташовані підприємства A і B, що виготовляють цеглу, а ще у двох пунктах – кар'єри C і D, які постачають пісок для виробництва цегли. Перевезення з кожного кар'єру можуть здійснюватись до обох споживачів. Відомі добові потреби підприємств у піску, продуктивності кар'єрів та вартості перевезень 1 т піску від кожного кар'єру до кожного підприємства.

Необхідно спланувати перевезення до споживачів A і B від постачальників C і D за умови мінімальних транспортних витрат.

Слід зазначити, що можливості постачальників (кар'єрів) перевищують запити споживачів (підприємств), тобто ця транспортна задача є незбалансованою (відкритою). Щоб перетворити задачу в збалансовану (закриту), яка розглянута у попередньому розділі, слід впровадити третього умовного споживача, до якого транспортують невикористані запаси кар'єрів. Вартості перевезень до цього споживача треба прийняти нульовими.

В цьому розділі методичних вказівок не наводиться приклад розв'язання незбалансованої транспортної задачі. Алгоритм подібний тому, що розглянутий у попередньому розділі. Чисельний приклад побудови оптимального плану перевезень для такої задачі наведений в [1].

3 ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ОБСЯГІВ ПЕРЕВЕЗЕНЬ У ЗАМОВНИКІВ (РОЗПОДІЛЬНА ЗАДАЧА)

3.1 Постановка розподільної задачі

У третьому розділі курсової роботи розв'язується наступна задача. До нашого транспортного підприємства звернулися два замовники щодо надання послуг з перевезення вантажів з терміналу до споживачів. Перший може замовити n_1 ходок, а другий – n_2 ходок за добу. Пробіг автомобіля за одну ходку у першого замовника складає l_1 км, а у другого – l_2 км. Відомо, що відповідно до можливостей нашого підприємства, добовий пробіг усіх автомобілів не може перевищувати L км. Підраховано, що прибуток від однієї ходки у першого замовника становить p_1 грн, а другого – p_2 грн. При цьому можливості нашого підприємства є недостатніми для повного задоволення обох замовників, тобто $(l_1 \cdot n_1 + l_2 \cdot n_2) < L$.

Потрібно визначити оптимальну кількість ходок у першого і другого замовника виходячи з умови отримання максимального прибутку.

Поставлена задача є розподільною. Такі задачі виникають у випадку, коли наявних ресурсів не вистачає для виконання кожної з намічених робіт і треба найкращим чином розподілити ресурси по роботах відповідно до вибраних критеріїв оптимальності.

Для розв’язання розподільних задач зручно використовувати метод лінійного програмування з графічною інтерпретацією.

Для прикладу приймемо довільні вихідні дані (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – Вихідні дані для розглядуваного чисельного прикладу

Найменування параметра	Чисельне значення	
	Перший замовник	Другий замовник
1 Кількість замовлених ходок за добу n_i	60	80
2 Пробіг автомобіля за одну ходку l_i, км	15	10
3 Прибуток від однієї ходки p_i, грн	40	20
4 Можливий добовий пробіг усіх автомобілів (у першого і другого замовника разом) L, км	950	

3.2 Побудова математичної моделі розподільної задачі

3.2.1 Змінні задачі

Треба встановити, скільки ходок за добу доцільно здійснювати у першого і другого замовника. Тому шуканими величинами, а отже, і змінними задачі є:

x_1 – кількість ходок за добу у першого замовника;

x_2 – кількість ходок за добу у другого замовника.

3.2.2 Цільова функція

Мета задачі – домогтися максимального прибутку від надання транспортних послуг. Тобто критерієм ефективності є параметр добового прибутку, який повинен бути якомога більшим. Щоб розрахувати величину добового прибутку від надання послуг обом замовникам, необхідно знати:

– добову кількість ходок у кожного з них, тобто x_1 та x_2;

– прибуток від однієї ходки (для нашого прикладу відповідно 40 і 20 грн).

Таким чином, прибуток від надання послуг першому замовнику буде складати $p_1 \cdot x_1$ грн/доб, а другому замовнику – $p_2 \cdot x_2$ грн/доб. Тому запишемо цільову функцію у вигляді суми прибутку від перевезень у першого і другого замовників:

$$P(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \rightarrow \max;$$

$$P(x) = 40x_1 + 20x_2 \rightarrow \max. \tag{3.1}$$

3.2.3 Обмеження

Можлива кількість ходок x_1 і x_2 обмежується такими умовами:

– сумарний добовий пробіг усіх автомобілів не може перевищувати максимально можливого L;

– кількість ходок за добу у першого замовника не може перевищувати n_1, у другого – n_2;

– кількість ходок не може набувати від’ємних значень.

Таким чином, усі обмеження задачі діляться на три групи, які обумовлені:

1) відстанню доставки;

2) замовленою кількістю ходок;

3) невід’ємністю значень кількості ходок.

Запишемо ці обмеження для нашого прикладу у математичній формі:

1) пробіги автомобілів за одну ходку складають: l_1 = 15 км, l_2 = 10 км, отже, дане обмеження має вигляд

$$l_1x_1 + l_2x_2 \le L;$$

$$15x_1 + 10x_2 \le 950;$$

2) обмеження щодо добової кількості ходок мають вигляд

$$x_1 \le n_1; \quad x_2 \le n_2;$$

$$x_1 \le 60; \quad x_2 \le 80;$$

3) те, що кількість ходок не може бути від'ємною, задається як

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Таким чином, математичне формулювання задачі можна записати таким чином:

на множині рішень системи обмежень

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 10x_2 \le 950; \\ x_1 \le 60; \\ x_2 \le 80; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

знайти максимальне значення цільової функції

$$P(x) = 40x_1 + 20x_2 \to \max.$$

3.3 Розв'язання задачі лінійним методом

Перші три нерівності системи (3.2) перетворимо у рівняння

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 10x_2 = 950; \\ x_1 = 60; \\ x_2 = 80. \end{array}\right\} \qquad (3.3)$$

Обчислимо координати точок перетину прямих, які описуються рівняннями (3.3), з осями координат:

пряма 1: x_1=0; x_2=95 та x_1=63,3; x_2=0;

пряма 2 проходить через точку x_1=60 паралельно осі Ox_2;

пряма 3 проходить через точку x_2=80 паралельно осі Ox_1.

Побудуємо ці прямі, які назвемо прямими обмежень (рисунок 3.1).

Визначимо область допустимих рішень. Наприклад, підставивши координати точки (0; 0) у першу нерівність системи обмежень (3.2), отримаємо $0 \le 950$, що є істинною нерівністю.

Стрілкою позначимо напівплощину, що містить точку (0; 0), тобто розташовану зліва і нижче прямої 1.

Аналогічно визначимо допустимі напівплощини для інших обмежень і позначимо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень (рисунок 3.1). Загальною областю, яка задовольняє усі обмеження, тобто областю допустимих рішень є багатокутник ABCDE.

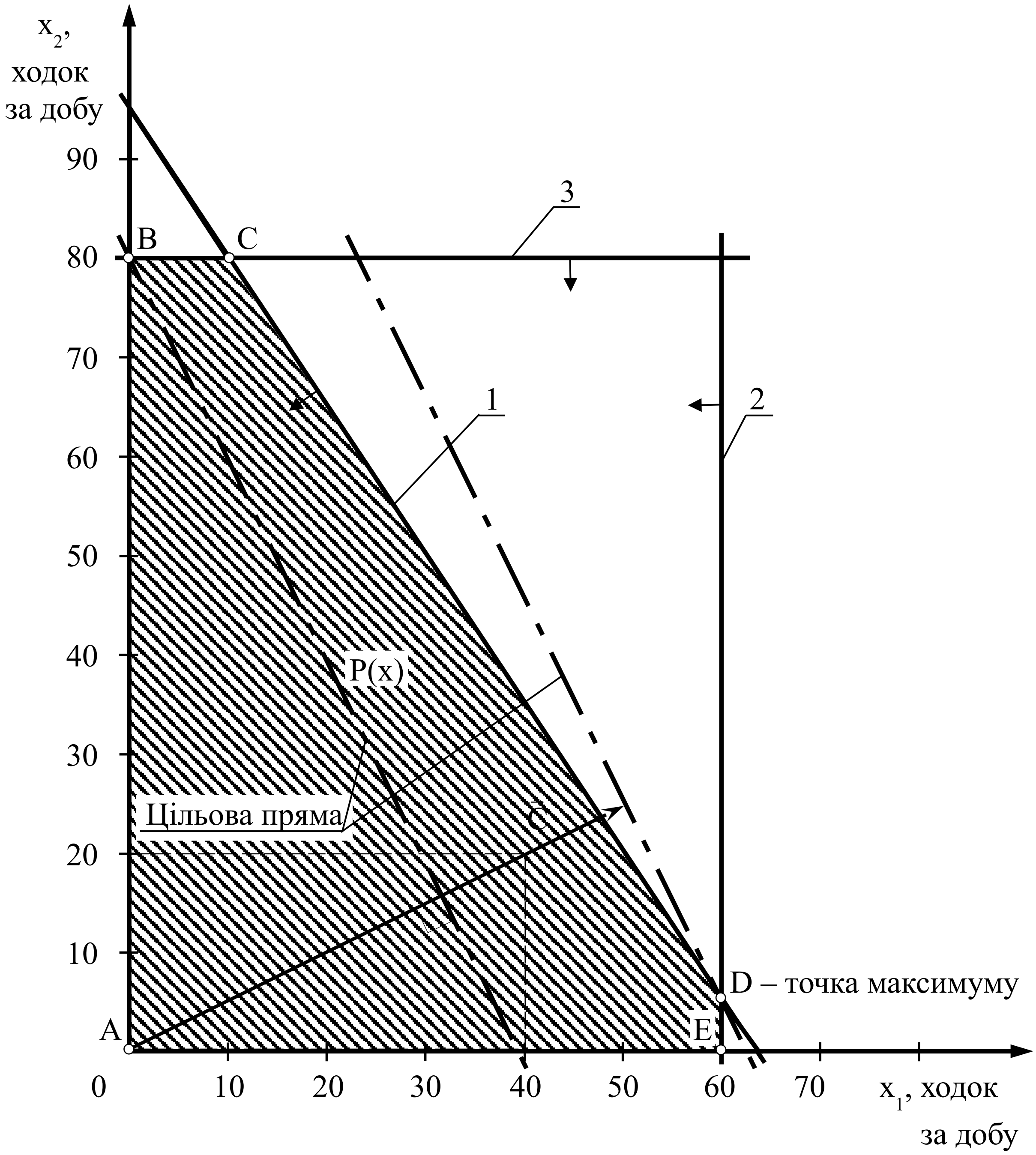

Рисунок 3.1 - Графічне розв'язання розподільної задачі

Прийнявши P(x) у розмірі, наприклад, максимально можливого прибутку у другого замовника $p_2 n_2$ (вихідні дані з таблиці 3.1), $20 \cdot 80 = 1600$ грн, за рівнянням (3.1) можна побудувати цільову пряму

$$40x_1 + 20x_2 = 1600.$$

Точки перетину цільової прямої з осями координат – (0; 80) і (40; 0).

Будуємо вектор $\vec{c}$ із точки (0; 0) у точку з координатами p_1 і p_2 (40; 20). Точка D – це остання вершина багатокутника допустимих рішень ABCDE, через яку проходить цільова пряма, рухаючись за напрямком вектора $\vec{c}$. Тому D – це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки D із системи рівнянь, які описують прямі обмежень 1 і 2:

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 10x_2 = 950; \\ x_1 = 60. \end{array}\right\}$$

Одержали координати точки D (60; 5).

Максимальне значення цільової функції в точці D:

$$P(x)_D = 40 \cdot 60 + 20 \cdot 5 = 2500 \text{ грн/доб.}$$

Таким чином, оптимальна добова кількість ходок: у першого замовника $x_{1D} = 60$, а у другого $x_{2D} = 5$. Загальний прибуток від надання транспортних послуг $P(x)_D = 2500$ грн/доб.

4 ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ОБСЯГІВ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

4.1 Постановка задач аналізу

Неминуче коливання значень економічних параметрів, таких як тарифи, попит на ринку послуг тощо, може привести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для урахування подібних ситуацій слід проводити аналіз чутливості, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отримане в попередньому розділі оптимальне розподілення кількості ходок.

Обмеження лінійної моделі класифікуються в такий спосіб. *Єднальні* обмеження проходять через оптимальну точку. *Неєднальні* обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс з єднальним обмеженням називають *дефіцитним*, а ресурс з неєднальним обмеженням – *недефіцитним*. Обмеження називають *надлишковим* у тому випадку, якщо його виключення не впливає на область допустимих рішень і, як наслідок, на оптимальне рішення.

У лінійному програмуванні можна виділити наступні три задачі налізу на чутливість.

Задача 1 Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:

– на скільки можна збільшити (обмеження типу $\leq$) запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення цільової функції?

– на скільки можна зменшити (обмеження типу $\leq$) запас *недефіцитного* ресурсу за умови збереження оптимального значення цільової функції?

Задача 2 Збільшення (обмеження типу $\leq$) **запасу якого з ресурсів є найбільш вигідним?**

Задача 3 Аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції: який діапазон зміни коефіцієнтів цільової функції, за якого не змінюється оптимальне рішення?

Проаналізуємо отримані результати для нашого прикладу відповідно до поставлених задач.

4.2 Аналіз чутливості оптимального рішення (задача 1)

Перша задача – це аналіз чутливості до правої частини обмежень (3.2).

Область допустимих рішень задачі (рисунок 3.1) – багатокутник ABCDE. В оптимальній точці D перетинаються прямі 1 і 2. Тому перше обмеження ($15x_1 + 10x_2 \leq 950$) та друге обмеження ($x_1 \leq 60$) є *єднальними*, а відповідні їм ресурси (можливий добовий пробіг усіх автомобілів L_D = 950 км та кількість ходок за добу у першого замовника x_{1D} = 60 – *дефіцитними* (відповідно до визначень, прийнятих у підрозділі 3.1).

Розглянемо економічний зміст цих понять. Точка максимуму цільової функції D (рисунок 3.1) відповідає 60 ходкам за добу у першого замовника та 5 ходкам у другого замовника. Добовий пробіг усіх автомобілів, який ми можемо забезпечити (L = 950 км), є правою частиною першого єднального обмеження. Відповідно до цих обмежень, добовий пробіг усіх автомобілів складе

$$L_D = 15 \cdot 60 + 10 \cdot 5 = 950 \text{ км},$$

у кожного замовника окремо

$$L_{1D} = 15 \cdot 60 = 900 \text{ км}; \quad L_{2D} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ км}.$$

За аналогією добова кількість ходок у першого замовника є правою частиною другого єднального обмеження (60 ходок). Відповідно до цих обмежень у точці D виконується 60 ходок за добу.

Таким чином, поняття перше і друге "*єднальні обмеження*" означає, що здійснення перевезень у точці D з координатами (60; 5) призводить до *повного* використання можливого пробігу і перший замовник задовольняється *у повному обсязі*. З цієї причини подальше нарощування обсягів перевезень є неможливим. У цьому полягає економічний зміст поняття *дефіцитності* ресурсів, тобто якщо наше підприємство зможе забезпечити більший добовий пробіг автомобілів або збільшити кількість ходок у першого замовника, це дозволить збільшити обсяги перевезень. У зв’язку з цим виникає питання про те, до якого рівня доцільно збільшувати дані ресурси, і на скільки при цьому збільшиться *оптимальний* обсяг перевезень?

Правило 1 Щоб графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення, необхідно пересувати відповідну пряму в напрямку поліпшення цільової функції доти, поки це обмеження не стане надлишковим.

Коли пряма 1 проходить через точку K (рисунок 4.1) прямокутник ABKE стає областю допустимих рішень, а перше обмеження – надлишковим. Дійсно, якщо видалити пряму 1, що проходить через точку K, то фігура ABKE не зміниться. Точка K стає оптимальною, а друге обмеження ($x_1 \le 60$) та третє обмеження ($x_2 \le 80$) у цій точці стають єднальними.

Правило 2 Щоб чисельно визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального рішення, необхідно:

а) визначити координати точки (x_1; x_2), у якій відповідне обмеження стає надлишковим;

б) підставити координати (x_1; x_2) у ліву частину відповідного обмеження.

У точці K з координатами (60; 80) у першого замовника буде здійснюватись 60 ходок за добу, а у другого замовника — 80 ходок за добу. Підставивши $x_{1K} = 60$ та $x_{2K} = 80$ у ліву частину обмеження (3.2), одержимо потрібний добовий пробіг усіх автомобілів

$$L_K = 15 \cdot 60 + 10 \cdot 80 = 1700 \text{ км.}$$

Подальше збільшення сумарного пробігу є недоцільним через те, що це не змінить області допустимих рішень і не приведе до іншого оптимального рішення (див. рисунок 4.1). Прибуток від перевезень в обсязі, що відповідає точці K, можна розрахувати, підставивши її координати у рівняння цільової функції (3.1)

$$P(x)_K = 40 \cdot 60 + 20 \cdot 80 = 4000 \text{ грн/доб.}$$

Розглянемо питання про доцільність збільшення обсягу перевезень у першого замовника. Згідно з правилом 1, відповідне обмеження $x_1 \le 60$ стає надлишковим у точці J (рисунок 4.2), де перетинаються пряма 1 і вісь абсцис (змінна x_1). Областю допустимих рішень стає трапеція ABCJ, а точка J з координатами (63,33; 0) (або (63; 0) – цілочислове розв’язання) – оптимальним рішенням.

P(x)

Отже, у точці J вигідно здійснювати перевезення тільки у першого замовника

$$x_{1J} = 63 \text{ ходки за доб.}$$

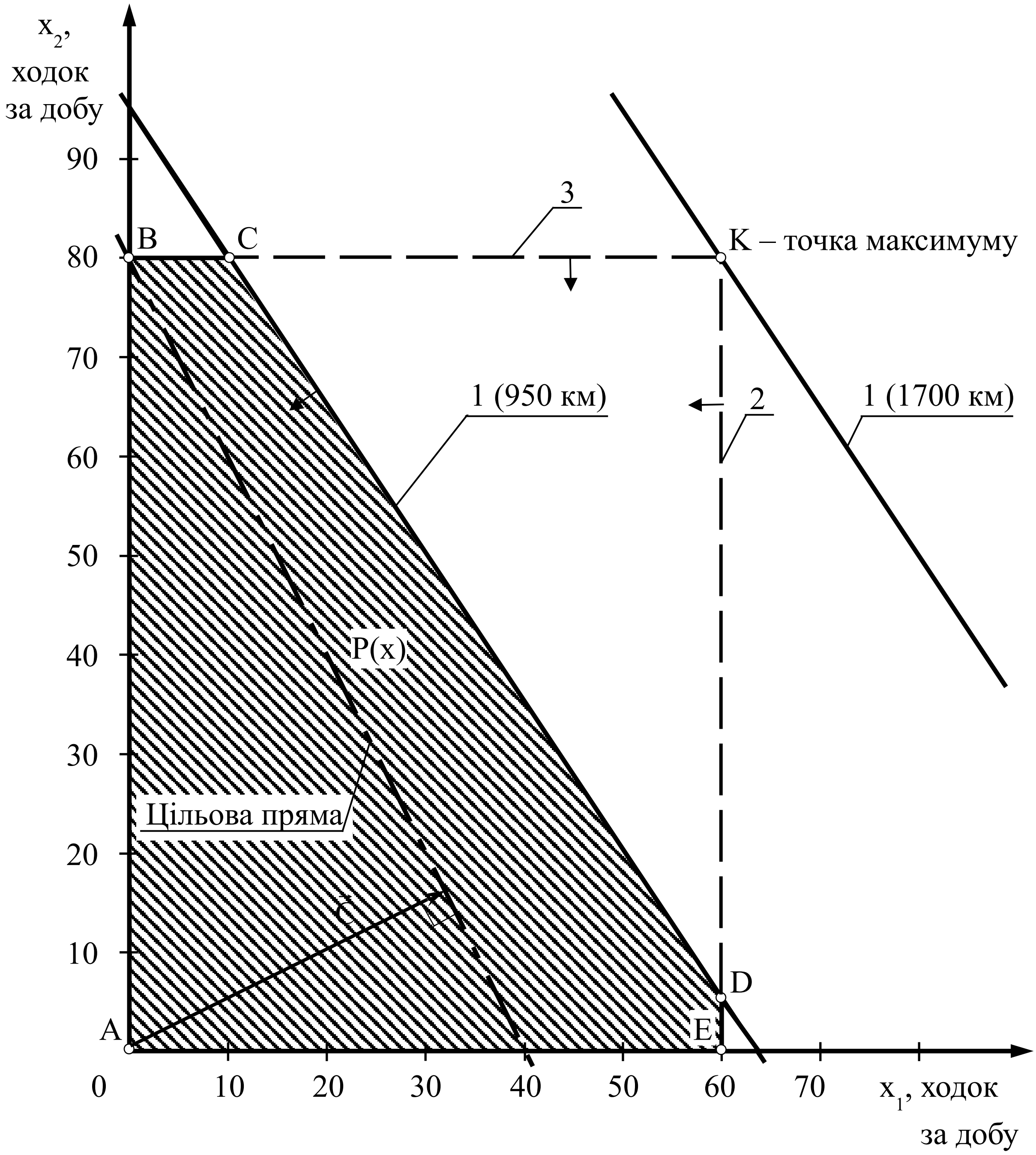

Рисунок 4.1 – Графічний аналіз збільшення можливого добового пробігу усіх автомобілів

Підставивши $x_{1J} = 63$ та $x_{2J} = 0$ у ліву частину обмеження (3.2), одержимо потрібний добовий пробіг усіх автомобілів

$$L_J = L_{1J} = 15 \cdot 63 = 945 \text{ км.}$$

Прибуток при цьому складе (формула 3.1)

$$P(x)_J = 40 \cdot 63 + 20 \cdot 0 = 2520 \text{ грн/доб.}$$

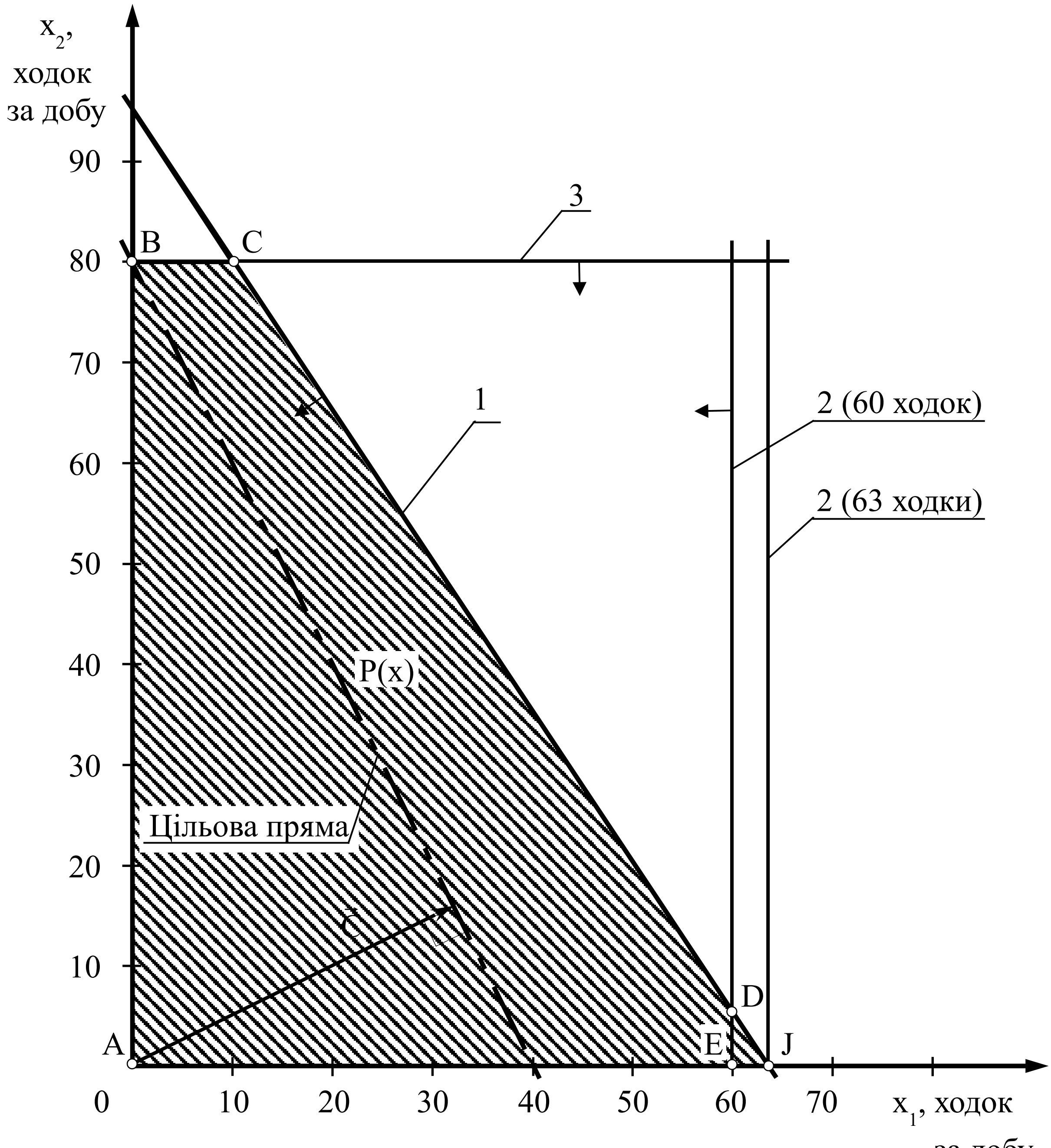

Рисунок 4.2 – Графічний аналіз збільшення обсягів перевезень у першого замовника

Обмеження $x_1 \leq 80$ є неєднальним, бо пряма 3 не проходить через оптимальну точку D (рисунок 4.3). Відповідний йому ресурс (кількість ходок у другого замовника $x_{1D} = 5$) є *недефіцитним*. З економічної точки зору це означає, що в цей момент кількість ходок у другого замовника безпосередньо не визначає загальний обсяг перевезень. Тому деяке її коливання може ніяк не вплинути на оптимальний обсяг перевезень у точці D.

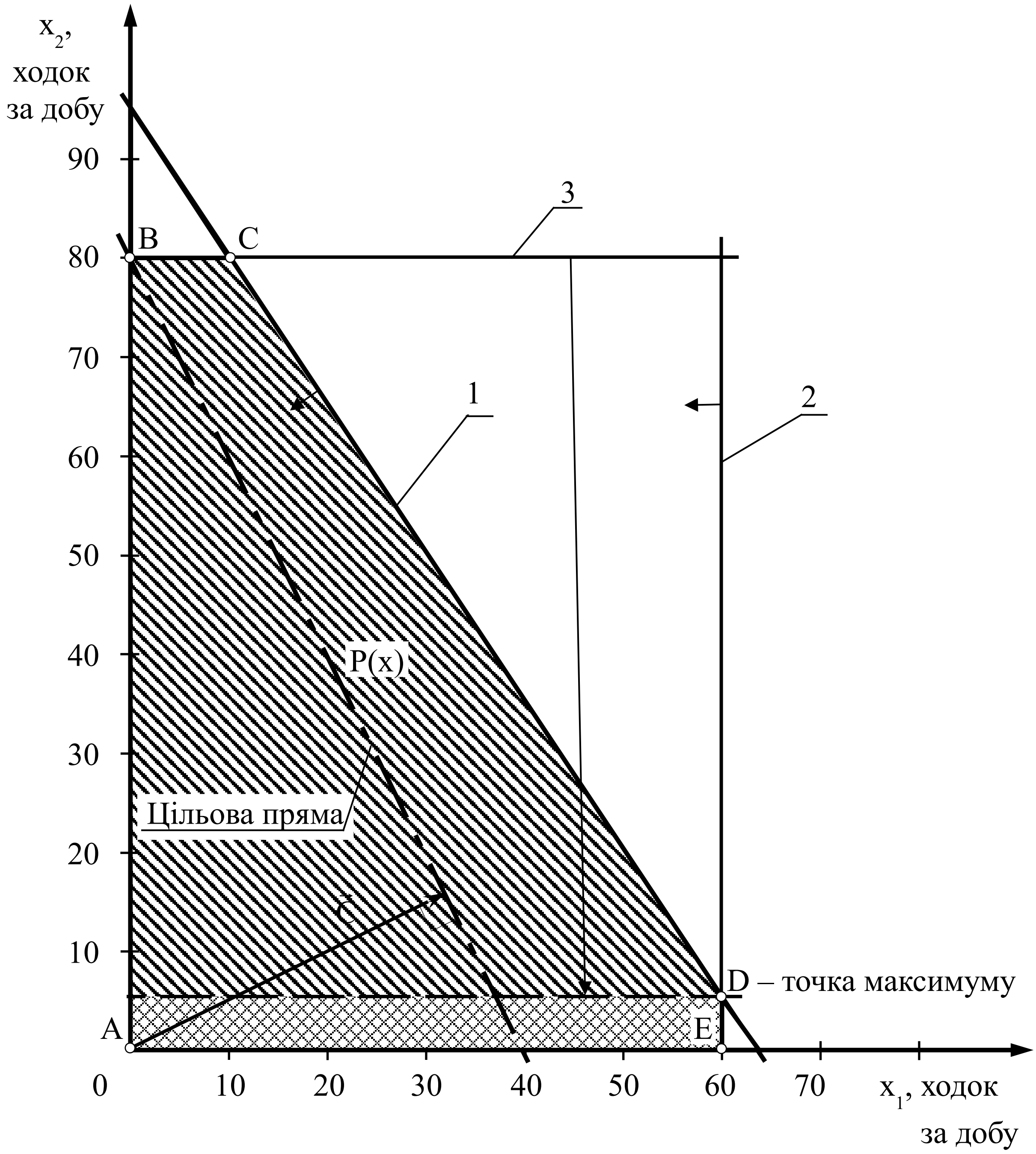

Рисунок 4.3 – Графічний аналіз зменшення обсягів перевезень у другого замовника

Наприклад, збільшення (зменшення) кількості ходок у другого замовника буде відповідати переміщенню прямої 3 (обмеження $x_2 \leq 80$) вгору (униз). Переміщення прямої 3 вгору ніяк не може змінити точку D максимуму цільової функції. Переміщення ж прямої 3 униз не впливає на існуюче оптимальне рішення тільки до точки D (див. нижче правило 3). З рисунка 4.3 видно, що подальше переміщення прямої 3 униз приведе до того, що точка D буде за межами нової області допустимих рішень, заштрихованої навхрест. Крім того, будь-яке оптимальне рішення для цієї нової області допустимих рішень буде гіршим точки D.

Правило 3 Щоб визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимальне рішення, необхідно пересувати відповідну пряму до оптимальної точки.

Правило 4 Щоб чисельно визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимальне рішення, необхідно підставити координати оптимальної точки у ліву частину відповідного обмеження.

Скориставшись правилом 4, отримаємо: $x_{2D} = 5$ ходок за добу. Це і є та межа, до якої зменшення кількості ходок у другого замовника не вплине на обсяг перевезень в точці D.

Висновок: граничний рівень, до якого може зменшитися кількість ходок у другого замовника, і за якого не зміниться оптимальність отриманого раніше рішення, дорівнює 5 ходок за добу.

4.3 Аналіз можливостей збільшення ресурсів (задача 2)

У другій задачі треба з’ясувати, збільшення якого ресурсу є найбільш вигідним.

До поліпшення оптимального рішення, тобто до збільшення добового прибутку приводить збільшення лише дефіцитних ресурсів, визначених у попередньому підрозділі (для нашого прикладу це можливий добовий пробіг усіх автомобілів і кількість ходок у першого замовника). Недефіцитні ресурси (кількість ходок у першого замовника) мають нульові цінності, оскільки зміна цих ресурсів не приводить до збільшення прибутку.

Для визначення вигідності збільшення дефіцитних ресурсів використовують поняття цінності додаткової одиниці ресурсу

$$y_1 = \frac{\max \Delta P(x')}{\max \Delta R}, \tag{4.1}$$

де $\max\ \Delta P(x')$ – максимальний приріст оптимального значення цільової функції;

$\max\ \Delta R$ – максимально допустимий приріст обсягу *i-го* ресурсу.

Використавши формулу 4.1, обробимо результати, отримані у попередніх підрозділах, та зведемо їх у таблицю 4.1.

З таблиці 4.1 видно, що кожен 1 км збільшення можливого добового пробігу усіх автомобілів (обмеження $(15x_1+10x_2 \le 950)$) приносить додатковий прибуток у розмірі 2 грн/доб, а збільшення обсягу перевезень у першого замовника (обмеження $(x_1 \le 60)$) принесе лише 0,44 грн за додатковий 1 км пробігу.

Таблиця 4.1 – Результати аналізу оптимального рішення на чутливість

Максимальна зміна ресурсу $\max\Delta R$, км/доб		Максимальна зміна прибутку, $\max\Delta P(x')$, грн/доб		Цінність додаткової одиниці ресурсу y_1, грн/км
Формула	Розрахунок	Формула	Розрахунок	
$L_K - L_D$	1700 – 950 = 750	$P(x)_K - P(x)_D$	4000–2500 = 1500	1500/750 = 2
$L_{1J} - L_{1D}$	945 – 900 = 45	$P(x)_J - P(x)_D$	2520–2500 = 20	20/45 = 0,44

Висновок: додаткові вкладення в першу чергу необхідно направляти на збільшення можливого добового пробігу усіх автомобілів. Збільшення обсягів перевезень у першого замовника за рахунок другого (коли з'явиться така можливість) є менш вигідним. Збільшувати обсяги перевезень у другого замовника за рахунок першого взагалі немає сенсу (недефіцитний ресурс).

4.4 Аналіз зміни прибутковості перевезень (задача 3)

В третій задачі треба визначити межі, в яких допустима зміна коефіцієнтів цільової функції. Зміна вартості перевезень (і, як наслідок, прибутку), тобто зміна коефіцієнтів цільової функції відображається на графіку обертанням цільової прямої навколо оптимальної точки. Так, збільшення коефіцієнта цільової функції p_1 або зменшення p_2 призводить до обертання цільової прямої за годинниковою стрілкою. І навпаки, якщо зменшується p_1 або збільшується p_2, цільова пряма обертається проти годинникової стрілки (рисунок 4.4).

За таких поворотів точка D буде залишатися оптимальною доти, поки нахил цільової прямої не вийде за межі, які обумовлені нахилами прямих обмежень 1 і 2. Так, наприклад, якщо нахил цільової прямої буде збігатись з нахилом прямої 1, то оптимальним рішенням будуть точки відрізка CD. У випадку збігу нахилу з прямою 2 оптимальним рішенням будуть точки відрізка DE.

Наявність альтернативних оптимумів свідчить про те, що одне й те ж оптимальне значення може бути досягнуто за різних значень змінних. Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу прямої 1, тоді оптимальною буде точка C (рисунок 4.4). Припустимо, що вартість (і, як наслідок, прибуток) від однієї ходки у другого замовника не змінюється, тобто зафіксуємо значення цільового коефіцієнта p_2. За цієї умови проаналізуємо графічно результати зміни значення цільового коефіцієнта p_1, тобто вартості однієї ходки у першого замовника. Оптимальне рішення в точці D не буде змінюватись зі збільшенням p_1 доти, поки цільова пряма не збіжиться з прямою 2. Аналогічно оптимальне рішення в точці D не буде змінюватись зі зменшенням p_1 доти, поки цільова пряма не буде збігатись з прямою 1.

Збіг у процесі обертання цільової прямої з прямою обмеження означає, що кути їхнього нахилу до горизонтальної осі зрівнялися, отже, зрівнялися і тангенси кутів нахилу цих прямих.

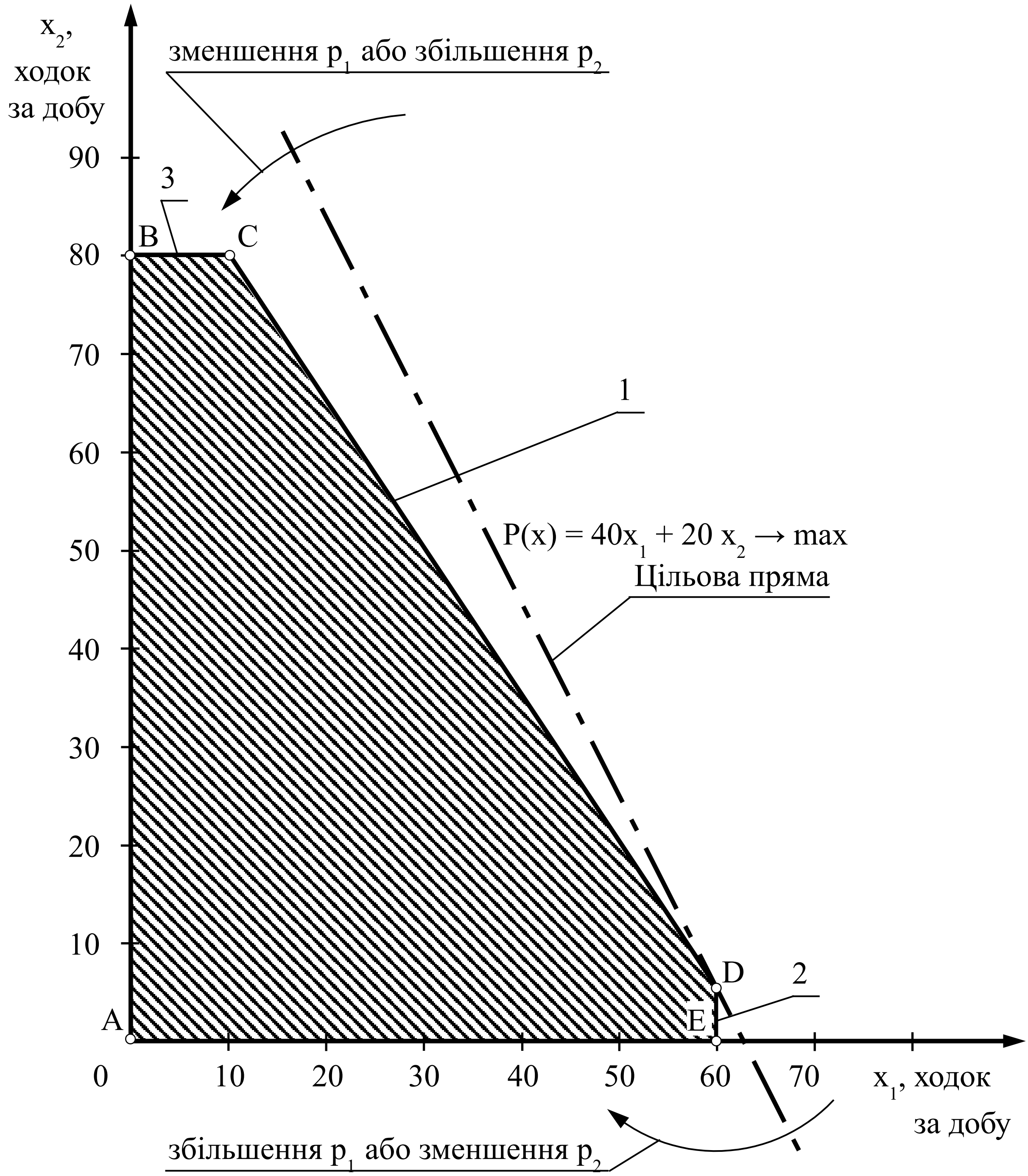

Рисунок 4.4 – Графічний аналіз зміни вартості перевезень

Правило 5 Для визначення межі допустимого діапазону зміни коефіцієнта цільової функції, наприклад min p_1 та max p_1, необхідно прирівняти тангенс кута нахилу цільової прямої $tg\alpha_{цф}$ по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих єднальних обмежень, наприклад $tg\alpha_1$ і $tg\alpha_2$ (рисунки 4.5 і 4.6).

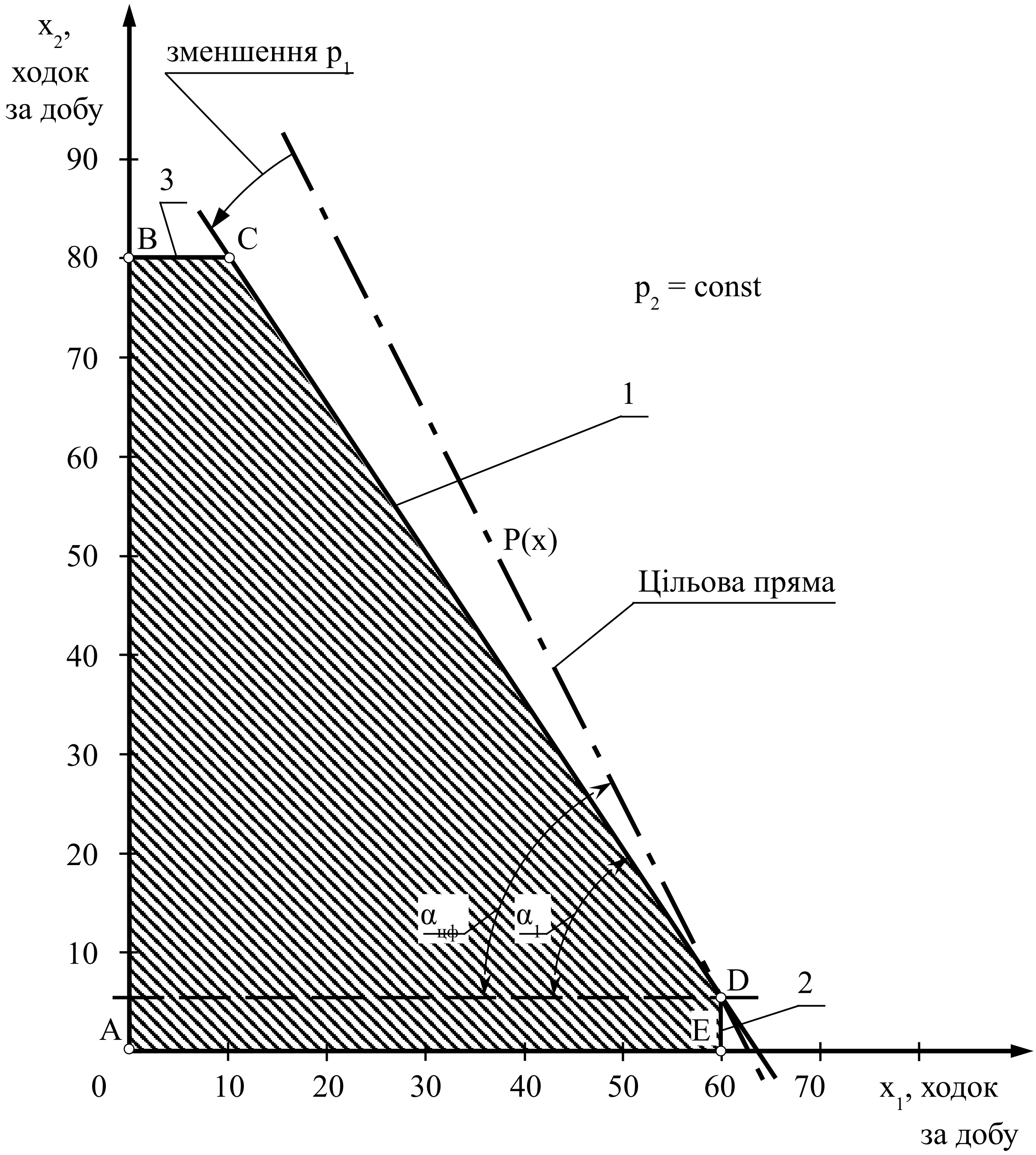

Рисунок 4.5 – Графічне визначення min p_1

Визначимо, наскільки максимально може знизитися прибуток від перевезень у першого замовника за умови, що не зміниться оптимальна точка D.

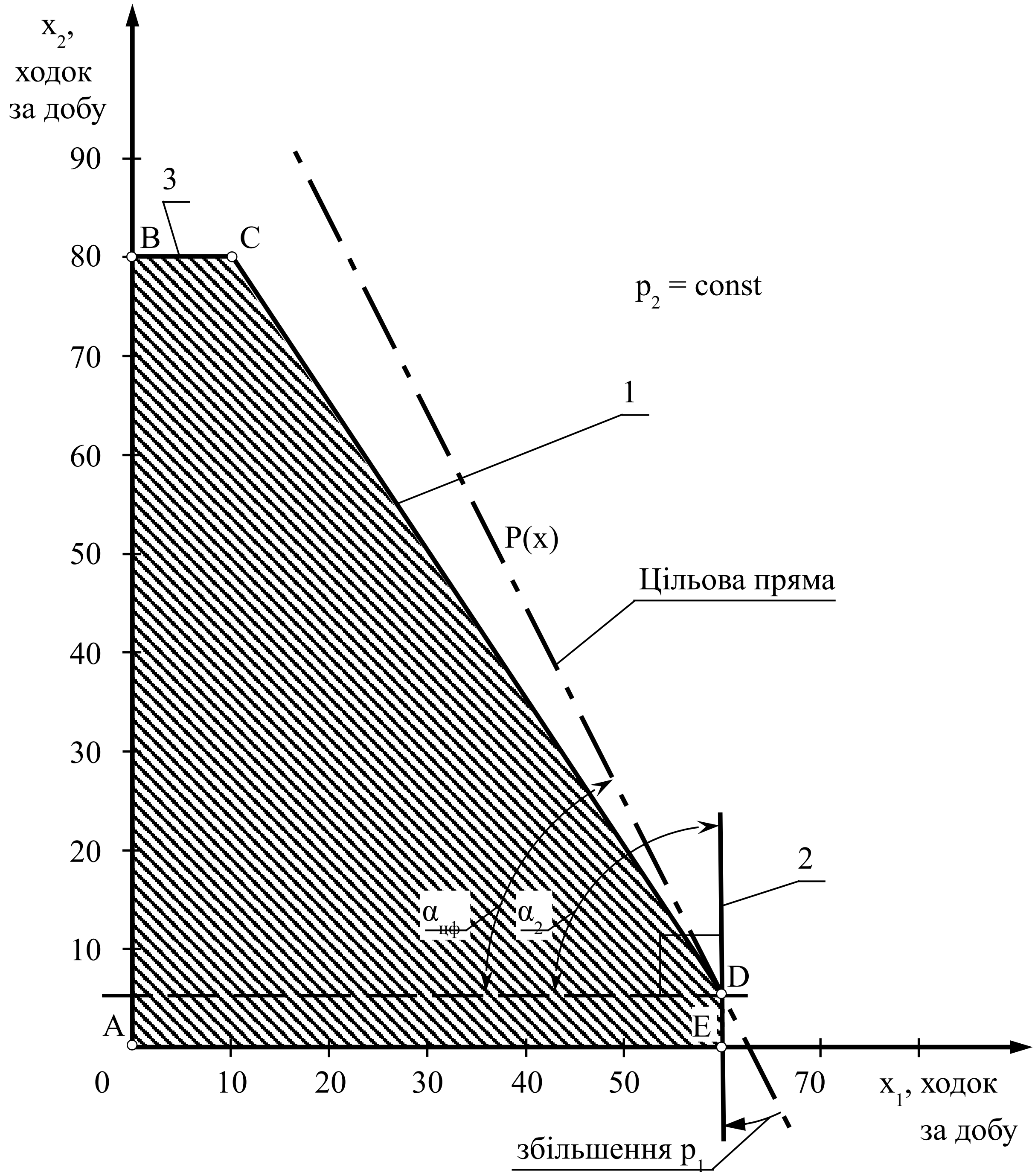

Рисунок 4.6 – Графічне визначення max p_1

З аналізу рівнянь (3.1), (3.3) та рисунків 3.1, 4.5 виразимо тангенси кутів нахилу цільової прямої P(x) і прямої 1:

$$\mathrm{tg}\alpha_{цф} = \frac{p_1}{p_2}; \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{x_2}{x_1}.$$

Зафіксуємо значення $p_2 = 20$ грн за одну ходку, а значення $x_1=60$ та $x_2=80$ візьмемо з виразу (3.3). Отримаємо

$$tg\alpha_{цф} = \frac{p_1}{20}; \quad tg\alpha_1 = \frac{80}{60} = 1,5.$$

Відповідно до правила 5, $tg\alpha_{цф} = tg\alpha_1$. Тоді з рівності $\frac{p_1}{20} = 1,5$ знаходимо $\min p_1 = 30$ грн за одну ходку.

Тепер визначимо, наскільки максимально може збільшитись вартість перевезень у першого замовника, щоб не змінилася оптимальна точка D.

З рисунка 4.6 видно, що значення p_1 можна збільшувати безмежно, тому що цільова пряма P(x) при $p_2 = 20$ і $p_1 \to +\infty$ ніколи не збігається з прямою 2. Отже, точка D за усіх значень коефіцієнта $p_1 \geq 30$ буде єдиною оптимальною.

З наведених вище розрахунків та їх графічної ілюстрації виходить, що у тому випадку, коли прибуток від однієї ходки у першого замовника стане меншим 30 грн, найбільш вигідними будуть перевезення у точці C (рисунок 4.5). При цьому потреби першого замовника будуть задоволені лише частково, що приведе до недефіцитності даного ресурсу (пряма 2), а дефіцитними будуть ресурси, що відповідають прямим 1 і 3.

Проведемо аналогічні дослідження для другого замовника. Для цього зафіксуємо значення $p_1 = 40$ грн за одну ходку. Знайдемо $\max p_2$:

$$tg\alpha_{цф} = \frac{40}{p_2}.$$

З рівності $\frac{40}{p_2} = 1,5$ знаходимо $\max p_2 = 26,67$ грн за одну ходку.

З рисунка 4.6 видно, що значення p_2 можна зменшувати до нуля, тому що цільова пряма P(x) при $p_1 = 40$ і $p_2 = 0$ збігається з прямою 2. Отже, точка D за усіх значень коефіцієнта $0 \leq p_2 \leq 26,67$ буде оптимальною.

Аналогічно можна зробити висновок про те, що у випадку, коли прибуток від однієї ходки стане вище 26,67 грн, найбільш вигідним будуть перевезення у точці C.

З економічної точки зору перевезення у точці С означають, що підприємству стане вигідніше повністю задовольнити потреби другого замовника.

ВИСНОВКИ

У ході виконання курсової роботи за індивідуальним завданням для трьох виробничих ситуацій побудовані оптимальні плани перевезень транспортного підприємства, з аналізу яких можна зробити наступні висновки.

1 Отриманий оптимальний план доставки продукції з трьох складів до п'яти магазинів (таблиця 1.7). Вартість усіх перевезень складає 9480 грн.

2 Отриманий оптимальний план перевезення піску з кар'єрів до підприємств, які виготовляють цеглу [1, таблиця 2.5]. Вартість перевезень для цього плану складає 290 грн [1, с. 27].

3 Оптимальна добова кількість ходок у першого замовника – 60, а у другого – 5. Загальний прибуток від надання транспортних послуг за цих умов складає 2500 грн/доб.

4 Межа збільшення можливого добового пробігу автомобілів складає 1700 км/доб. Подальше збільшення є недоцільним через те, що воно не змінює область допустимих рішень і не приводить до іншого оптимального рішення.

5 Межа збільшення кількості ходок за добу у першого замовника (дефіцитний ресурс) складає 63. Подальше збільшення обсягу перевезень у першого замовника не має сенсу, тому що значення цільової функції не покращиться.

6 Граничний рівень, до якого може зменшитися кількість ходок у другого замовника (недефіцитний ресурс) і який не приведе до зміни раніше отриманого оптимального рішення, складає 5 ходок за добу.

7 Збільшення можливого добового пробігу усіх автомобілів є пріоритетним ресурсом через те, що кожен 1 км додаткового пробігу приносить прибуток у розмірі 2 грн, а збільшення обсягу перевезень у першого замовника приносить лише 0,44 грн за додатковий 1 км пробігу.

8 Інтервали зміни прибутків від перевезень, на яких оптимальне рішення залишається незмінним, визначаються нерівностями, гривень за одну ходку: у першого замовника $30 \le p_1 \le +\infty$; у другого замовника $0 \le p_2 \le 26,67$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Козар Л.М., Романович Є.В. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Управління виробництвом і основи логістики». – Харків: УкрДАЗТ, 2007 – Ч.3. – 29 с.

2 Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.