УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки і завдання
для студентів загальнотехнічних спеціальностей всіх форм навчання

Харків 2011

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 21 квітня 2009 року, протокол № 7.

Методичні вказівки підготовлені з метою допомогти студентам в їх самостійній роботі при вивченні тем “Лінійна та векторна алгебри”, “Аналітична геометрія на площині та в просторі”, а також при виконанні контрольної роботи 1 студентами заочної форми навчання та розрахункових робіт для студентів денної форми навчання.

Методичні вказівки призначені для студентів загальнотехнічних спеціальностей всіх форм навчання.

Укладачі:

доценти О.О. Думіна,
Н.С. Юрчак

Рецензент

проф. Ю.В. Куліш

ЗМІСТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ..4
Приклад 1..4
Приклад 2..11
Приклад 3..16
Приклад 4..20
Приклад 5..22
ЗАВДАННЯ..27
Завдання 1..27
Завдання 2..33
Завдання 3..34
Завдання 4..35
Завдання 5..36
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ..37

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Приклад 1

а) виконати дії над матрицями.

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}\left(3\mathbf{A}+4\mathbf{B}\right)^T$.

Розв'язання

Спочатку виконаємо дії в дужках

$$3\mathbf{A}+4\mathbf{B}=3\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+4\cdot 0 & 3\cdot(-3)+4\cdot 2 & 3\cdot 1+4\cdot(-1) \\ 3\cdot 0+4\cdot 3 & 3\cdot 4+4\cdot 1 & 3\cdot(-2)+4\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 16 & -14 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо отриману матрицю

$$\left(3\mathbf{A}+4\mathbf{B}\right)^T=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 16 & -14 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -1 & 16 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо множення матриць за правилом "рядок на стовпчик":

$$\mathbf{C}\left(3\mathbf{A}+4\mathbf{B}\right)^T=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -1 & 16 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1\cdot 6+2\cdot(-1)+3\cdot(-1) & -1\cdot 12+2\cdot 16+3\cdot(-14) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & -22 \end{pmatrix}.$$

б) розв’язати систему лінійних рівнянь:

1) матричним методом;

2) методом Крамера;
3) методом Гаусса.

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання

1) для розв’язання системи матричним методом випишемо матрицю системи та матрицю вільних коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$. Спочатку обчислюємо визначник матриці **A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-(-1) \cdot (-2) \cdot 4 = 8 + 0 + 4 - 0 - 6 - 8 = -2.$$

Можна обчислювати визначник за допомогою теореми Лапласа розкладанням за будь-яким рядком або стовпчиком, наприклад за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) + (4 \cdot (-2) - 3 \cdot 0) + (4 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) = 2 - 8 + 4 = -2).$$

$\det \mathbf{A} \neq 0$, отже, матриця $\mathbf{A}$ неособлива і має обернену $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо всі алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-8 - 0) = 8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 4) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

Отже,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{2} & \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{4}{2} & \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер потрібно перевірити, що побудована матриця дійсно є оберненою до матриці $\mathbf{A}$, тобто перевірити, що $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ або $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ дорівнює одиничній матриці.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1+4-2 & 1-2+1 & 1-1+0\\ -2+8-6 & 2-4+3 & 2-2+0\\ 0-4+4 & 0+2-2 & 0+1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрицю невідомих знайдемо за формулою $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, тоді

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\\ -4+4+3\\ -2+2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$$

Отже, розв’язок системи: $x_1=2,\quad x_2=3,\quad x_3=0.$

Зробимо перевірку:

$$\begin{cases}2\cdot 2-3+0=1\\ 4\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 0=2\\ 3-2\cdot 0=3\end{cases}.$$

2) спочатку запишемо та обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8+4+0-0-6-8 = -2 \neq 0 .$$

Система має єдиний розв'язок. Обчислимо $\Delta x_1,\ \Delta x_2$ та $\Delta x_3.$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+2-9+6-3-4 = -4 ,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8+12+0-0-18 = -6 ,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12+4+0-0-4+12 = 0 .$$

За правилом Крамера знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 0.$$

3) поділимо перше рівняння системи на $a_{11} = 2$, а далі виключимо невідоме x_1 із другого рівняння

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad |\div 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} & \times\ (-4) \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 & + \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases} .$$

Систему лінійних рівнянь привели до трикутного вигляду, закінчився прямий хід методу Гаусса, а далі розв'язуємо систему з кінця, тобто з третього рівняння $x_3 = 0$. Підставимо значення $x_3 = 0$ в друге рівняння і одержимо $x_2 = 2x_3 + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$. З першого рівняння знайдемо

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = 2.$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0.$$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

Розв'язання

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 12 - 18 - (-12 - 16 - 18) = 0.$$

Це означає, що система або несумісна (немає жодного розв'язку), або невизначена (має нескінченну кількість розв'язків). Розв'язання матричним методом та методом Крамера неможливо. Застосуємо метод Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & \mid \div 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \begin{matrix} \times\ (-4) \\ + \hookleftarrow \\ \ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \begin{array}{|l} \times\ (-6) \\ \\ + \hookleftarrow \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Отримали два однакових рівняння, одне з яких можна виключити. З двох інших рівнянь знаходимо

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Обираючи вільну невідому $x_2 = C$, знаходимо загальний розв'язок невизначеної системи:

$$x_1 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}, \quad x_2 = C, \quad x_3 = 0.$$

в) розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{X}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Як і при розв'язуванні алгебраїчного рівняння, спочатку відокремимо в лівій частині рівняння доданок, що містить невідому матрицю **X**

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отримали матричне рівняння вигляду $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$. Його розв'язок має вигляд $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$. Обчислимо обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ за допомогою матриці алгебраїчних доповнень:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -10 \neq 0;$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нарешті знайдемо невідому матрицю **X**:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) & -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку – підставимо знайдений **X** у початкове рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \cdot (-1) - 0,3 \cdot 3 & 0,1 \cdot 2 - 0,3 \cdot 4 \\ -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Рівність виконана.

Приклад 2

Задано координати вершин піраміди A, B, C, D. Використовуючи методи векторної алгебри, знайти:

1) скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ і кут між ребрами *AB* і *AC*;

2) вектор, паралельний бісектрисі кута *A* трикутника *ABC*;

3) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

4) площу грані *ABC*;

5) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$;

6) об'єм піраміди;

7) розвинення вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ за базисом векторів $\left\{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD}\right\}$.

$$A(2;3;1),\ B(-1;4;0),\ C(5;-2;-3),\ D(2;-1;4).$$

Розв'язання

1) знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{CD}$, віднімаючи від координат кінця вектора координати початку вектора:

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=\left(-1-2;4-3;0-1\right)=\left(-3;1;-1\right),$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A\right)=\left(5-2;-2-3;-3-1\right)=\left(3;-5;-4\right),$$

$$\overrightarrow{AD}=\left(x_D-x_A;y_D-y_A;z_D-z_A\right)=\left(2-2;-1-3;4-1\right)=\left(0;-4;3\right),$$

$$\overrightarrow{BD}=\left(x_D-x_B;y_D-y_B;z_D-z_B\right)=\left(2-(-1);-1-4;4-0\right)=\left(3;-5;4\right),$$

$$\overrightarrow{CD}=\left(x_D-x_C;y_D-y_C;z_D-z_C\right)=\left(2-5;-1-(-2);4-(-3)\right)=\left(-3;1;7\right).$$

Обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}=\left(AB_x,AB_y,AB_z\right)$ і $\overrightarrow{AC}=\left(AC_x,AC_y,AC_z\right)$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB_x\cdot AC_x + AB_y\cdot AC_y + AB_z\cdot AC_z = -3\cdot 3 + 1\cdot(-5) + (-1)\cdot(-4) =$$
$$= -10.$$

Обчислимо модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{AC_x^2 + AC_y^2 + AC_z^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Знайдемо косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-10}{\sqrt{11}\cdot 5\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{2}{11}} \approx -0{,}4264.$$

Таким чином, кут між векторами дорівнює

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right) \approx \arccos(-0{,}4264) \approx 115^\circ,$$

2) для знаходження вектора, паралельного бісектрисі кута *A*, знайдемо таку лінійну комбінацію векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ (це діагональ ромба, сторони якого лежать на сторонах *AB* і *AC*):

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3;1;-1) + \frac{1}{5\sqrt{2}}(3;-5;-4) =$$
$$= \left(\frac{-3}{\sqrt{11}} + \frac{3}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{11}} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\right).$$

3) обчислимо проекцію вектору $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB} == \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-10}{5\sqrt{2}} = -\sqrt{2};$$

4) для знаходження площі трикутника *ABC*

скористуємося тим фактом, що $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot S_{пар}$, $S_{пар}=\left|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,\right|$, де $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ – векторний добуток $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ AB_x & AB_y & AB_z\\ AC_x & AC_y & AC_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & -1\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-4-5\right)-\vec{j}\left(12-\left(-3\right)\right)+\vec{k}\left(15-3\right)=-9\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$$

(для обчислення визначника ми скористались розкладанням його по першому рядку).

Знайдемо тепер модуль векторного добутку

$$\left|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,\right|=\left|\left(-9;-15;12\right)\right|=$$
$$=\sqrt{\left(-9\right)^2+\left(-15\right)^2+12^2}=\sqrt{81+225+144}=\sqrt{450}=15\sqrt{2}.$$

Таким чином,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,\right|=\frac{15\sqrt{2}}{2}\text{ (кв. од.);}$$

5) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha=\frac{AB_x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-3}{\sqrt{11}},\quad \cos\beta=\frac{AB_y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1}{\sqrt{11}},\quad \cos\gamma=\frac{AB_z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{11}};$$

6) відомо, що об'єм піраміди дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда

$$V_{пір}=\frac{1}{6}V_{пар},\ V_{пар}=\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\,\right|.$$

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$, які є ребрами піраміди:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \\ AD_x & AD_y & AD_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}=45+12+0-(0+9-48)=96,$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\,\right|=\frac{1}{6}\cdot|96|=\frac{1}{6}\cdot 96=16 \text{ (куб. од.)};$$

7) розвинення вектора $\vec{a}$ за базисом векторів $\left\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\right\}$ – це знаходження коефіцієнтів α, β, γ лінійної комбінації в рівності $\vec{a}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}+\gamma\overrightarrow{e_3}$. Запишемо цю векторну рівність для нашого прикладу (вектор $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ було знайдено у пункті 3, вектори $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{CD}$ – у пункті 1):

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{BD}+\gamma\overrightarrow{CD};$$

$$\left(-9;-15;12\right)=\alpha\left(0;-4;3\right)+\beta\left(3;-5;4\right)+\gamma\left(-3;1;7\right);$$

$$\left(-9;-15;12\right)=\left(\alpha\cdot 0+\beta\cdot 3+\gamma\cdot\left(-3\right);\alpha\cdot\left(-4\right)+\beta\cdot\left(-5\right)+\gamma\cdot 1;\alpha\cdot 3+\beta\cdot 4+\gamma\cdot 7\right).$$

Запишемо векторну рівність у вигляді системи рівнянь, порівнявши відповідні координати векторів

$$\begin{cases} 3\beta-3\gamma=-9 \\ -4\alpha-5\beta+\gamma=-15 \\ 3\alpha+4\beta+7\gamma=12 \end{cases}$$

Розв’яжемо систему за методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0+48+9-\left(45-84+0\right)=96;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -15 & -5 & 1 \\ 12 & 4 & 7 \end{vmatrix}=315+180+36-\left(180-315-36\right)=702;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & -9 & -3\\ -4 & -15 & 1\\ 3 & 12 & 7\end{vmatrix}=0+144-27-(135+252+0)=-270;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}0 & 3 & -9\\ -4 & -5 & -15\\ 3 & 4 & 12\end{vmatrix}=0+144-135-(135-144+0)=18;$$

$$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{702}{96}=\frac{117}{16};$$

$$\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-270}{96}=-\frac{45}{16};$$

$$\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{18}{96}=\frac{3}{16}.$$

Зробимо перевірку – обчислимо лінійну комбінацію базисних векторів із знайденими коефіцієнтами

$$\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{BD}+\gamma\overrightarrow{CD}=\frac{117}{16}(0;-4;3)-\frac{45}{16}(3;-5;4)+\frac{3}{16}(-3;1;7)=$$
$$=\left(\frac{-45\cdot3-3\cdot3}{16};\frac{-4\cdot117+45\cdot5+3\cdot1}{16};\frac{3\cdot117-45\cdot4+3\cdot7}{16}\right)=$$
$$=\left(\frac{-144}{16};\frac{240}{16};\frac{192}{16}\right)=(-9;15;12)=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$

Бачимо, що знайдені коефіцієнти дійсно дають розвинення вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ за базисом векторів $\left\{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD}\right\}$.

Приклад 3

Відомі координати вершин трикутника ABC. Обчислити:

1) довжину сторони BC;
2) рівняння прямої BC;
3) рівняння висоти AD на сторону BC;
4) довжину висоти AD;

5) рівняння медіани BE;
6) точку перетину M висоти AD і медіани BE;
7) кут між прямими AD і BE;
8) накреслити рисунок.

$$A(-1;3),\quad B(3;-2),\quad C(5;3).$$

Розв'язання

1) обчислимо довжину сторони BC за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}:$$

$$BC=\sqrt{(3-5)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\ \text{(од.)}$$

2) запишемо рівняння прямої BC за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:$$

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+2}{3+2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{5}\quad\Rightarrow\quad\vec{S}=\{2;5\},$$

$$BC:\quad 5x-2y-19=0.$$

3) рівняння висоти можна записати кількома способами.

1 спосіб: $AD\perp BC\quad\Rightarrow\quad AD\perp\vec{S}$.

Запишемо рівняння висоти AD за формулою

$$\tilde{A}(x-x_0)+\tilde{B}(y-y_0)=0,$$

де $(x_0;y_0)$ координати точки A, $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ – координати вектора, перпендикулярного до AD, тобто $\{\tilde{A};\tilde{B}\}=\vec{S}=\{2;5\}$:

$$2\cdot(x+1)+5\cdot(y-3)=0;$$

$$AD:\ 2x+5y-13=0.$$

2 спосіб: $AD \perp BC \quad \Rightarrow \quad AD \parallel \vec{N}_{BC}$.

З рівняння прямої BC знаходимо координати вектора нормалі до цієї прямої $\vec{N}_{BC}=\{5;-2\}$. Тепер запишемо канонічне рівняння прямої AD за формулою $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}$, де p та q – координати вектора, паралельного AD, тобто $\{p;q\}=\vec{N}_{BC}=\{5;-2\}$:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-2};$$

$$-2(x+1)=5(y-3);$$

$$-2x-2=5y-15;$$

$$AD:\ 2x+5y-13=0.$$

3 спосіб: Запишемо рівняння прямої BC з кутовим коефіцієнтом:

$$5x-2y-19=0;$$

$$y=\frac{5}{2}x-\frac{19}{2}, \qquad k=\frac{5}{2}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої AD:

$$k_{\perp}=-\frac{1}{k}=-\frac{2}{5}.$$

Запишемо рівняння прямої AD за формулою $y-y_0=k_{\perp}(x-x_0)$:

$$y-3=-\frac{2}{5}(x+1);$$

$$y-3=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5};$$

$$AD:\ y=-\frac{2}{5}x+\frac{13}{5}.$$

4) обчислимо довжину висоти AD за формулою для відстані від точки *A* до прямої *BC*

$$AD=d=\left|\frac{A_{BC}x_A+B_{BC}y_A+C_{BC}}{\sqrt{A_{BC}^2+B_{BC}^2}}\right|:$$

$$AD=\left|\frac{5\cdot(-1)-2\cdot 3-19}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}\right|=\frac{30}{\sqrt{29}}\ \text{(од.)};$$

5) обчислимо координати точки E – середини відрізку AC

$$x_E=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+5}{2}=2;\quad y_E=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+3}{2}=3;\ \Rightarrow\quad E(2;3).$$

Запишемо рівняння медіани BE за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:$$

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+2}{3+2}\ \Rightarrow\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{5}\ \Rightarrow$$

$$BE:\ 5x+y-13=0;$$

6) визначимо точку перетину висоти AD і медіани BE, розв'язуючи систему, складену з рівнянь цих прямих:

$$+\begin{cases}2x+5y-13=0\\ 5x+y-13=0\end{cases}\begin{vmatrix} \\ \cdot(-5)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cdot(-5)\\ \cdot 2\end{vmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -23x+42=0; \\ -23y+39=0; \end{cases} \begin{cases} -23x=-42; \\ -23y=-39; \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{52}{23} \\ y=\dfrac{39}{23} \end{cases} \Rightarrow$$ точка $M\left(\frac{52}{23};\frac{39}{23}\right)$.

7) Обчислимо кут між прямими AD і BE:

$$AD:\quad 2x+5y-13=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{N}_1=\{2;5\},$$

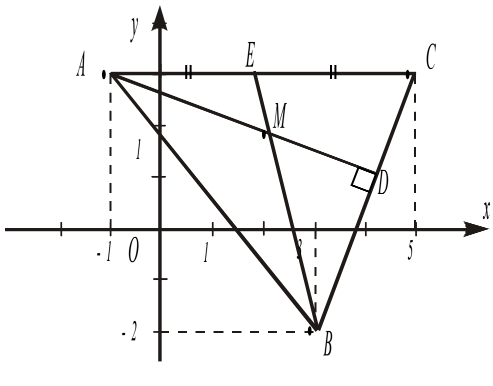
$$BE:\quad 5x+y-13=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{N}_2=\{5;1\},$$

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{N}_1\,\hat{,}\,\vec{N}_2\right)=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot5+5\cdot1}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{26}}=0,5463 \quad\Rightarrow$$

$$\varphi=56,89^\circ;$$

8) зробимо креслення



Приклад 4

Побудувати лінію $r=7/(5+2\sin\varphi)$. Записати рівняння лінії у прямокутній системі координат.

Розв'язання:

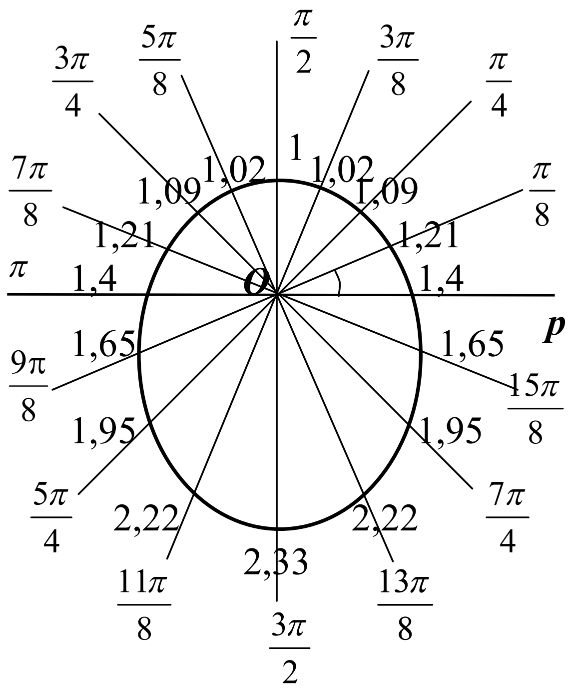
Для побудови лінії в полярній системі координат $r=f(\varphi)$ складаємо таблицю значень r в залежності від φ

через проміжок $\frac{\pi}{8}$, за допомогою якої будуємо криву. Враховуємо, що полярний радіус r може набувати тільки додатних значень.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{8\pi}{8}=\pi$
r	1,4	1,21	1,09	1,02	1	1,02	1,09	1,21	1,4

φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{10\pi}{8}=\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{12\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{14\pi}{8}=\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{16\pi}{8}=2\pi$
r	1,65	1,95	2,22	2,33	2,22	1,95	1,65	1,4

Зобразимо криву у полярній системі координат, відкладаючи значення r на відповідних променях.



Для переходу до прямокутної системи координат скористаємося співвідношеннями

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Маємо такий результат:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{7}{5+2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Приводячи до спільного знаменника та підносячи до квадрату обидві частини рівняння, отримаємо

$$5\sqrt{x^2+y^2}=-2y+7;$$

$$25\left(x^2+y^2\right)=4y^2-28y+49;$$

$$25x^2+21y^2+28y-49=0.$$

Приведемо рівняння лінії до канонічного вигляду, вилучивши повні квадрати

$$25x^2+21y^2+28y-49=25x^2+21\left(y^2+\frac{4}{3}y\right)-49=$$
$$=25x^2+21\left(y^2+2\cdot\frac{2}{3}y+\frac{4}{9}\right)-21\cdot\frac{4}{9}-49=25x^2+21\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{175}{3}=0,$$

$$25x^2+21\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{175}{3}.$$

Ділимо обидві частини рівняння на $\frac{175}{3}$:

$$\frac{x^2}{7/3}+\frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{25/9}=1.$$

Це еліпс, центр якого знаходиться в точці $M\left(0;-2/3\right)$ і півосі якого $a=\sqrt{7/3}$ (менша) та $b=5/3$ (більша).

Ексцентриситет цього еліпса $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{7/3}{25/9}}=\frac{2}{5}$, його фокуси розташовані в точках $O(0;0)$ та $K\left(0;-4/3\right)$. Отримане рівняння відповідає зробленому рисунку.

Приклад 5

Задано координати точок *A*, *B*, *C*. Знайти:

1) рівняння площини P_1, що проходить через точку *A* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$;
2) відстань від точки *C* до цієї площини;
3) рівняння площини P_2, що проходить через точки *A*, *B*, *C*;
4) канонічні рівняння прямої L_1, що проходить через точки *B* і *C*;
5) точку перетину прямої L_1 із площиною P_1;
6) кут між площиною P_1 і прямою L_2, що проходить через точки *A* і *C* (у градусах).

$$A(2;3;1),\ B(-1;4;0),\ C(5;-2;-3).$$

Розв'язання

1) знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BC}$, який є нормаллю до площини P_1:

$$\vec{N}=\overrightarrow{BC}=\left(x_C-x_B;y_C-y_B;z_C-z_B\right)=\left(5-(-1);-2-4;-3-0\right)=(6;-6;-3).$$

Скористаємося рівнянням площини, яка проходить через задану точку $A(x_0;\ \ y_0;\ \ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\left\{\tilde{A};\ \ \tilde{B};\ \ \tilde{C}\right\}$:

$$\tilde{A}(x-x_0)+\tilde{B}(y-y_0)+\tilde{C}(z-z_0)=0.$$

$$6(x-2)+(-6)(y-3)+(-3)(z-1)=0;$$

$$6x-12-6y+18-3z+3=0;$$

$$6x-6y-3z+9=0;$$

$$P_1: \quad 2x-2y-z+3=0.$$

2) для обчислення відстані від точки C до площини P_1 скористаємося формулою

$$d=\left|\frac{\tilde{A}x_0+\tilde{B}y_0+\tilde{C}z_0+\tilde{D}}{\sqrt{\tilde{A}^2+\tilde{B}^2+\tilde{C}^2}}\right|,$$

тут $C(x_0;\ \ y_0;\ \ z_0)$ – точка, яка знаходиться поза площиною, $\tilde{A}x_0+\tilde{B}y_0+\tilde{C}z_0+\tilde{D}=0$ – рівняння P_1. Значить,

$$d=\left|\frac{2\cdot 5-2\cdot(-2)-(-3)+3}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{20}{\sqrt{9}}\right|=\frac{20}{3} \text{ (од.).}$$

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини, яка проходить через три задані точки $A(x_1;\ \ y_1;\ \ z_1)$, $B(x_2;\ \ y_2;\ \ z_2)$ та $C(x_3;\ \ y_3;\ \ z_3)$. Підставимо координати точок до формули

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -1-2 & 4-3 & 0-1 \\ 5-2 & -2-3 & -3-1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриємо визначник за першим рядком:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-2)(-4-5)-(y-3)(12-(-3))+(z-1)(15-3)=0;$$

$$-9(x-2)-15(y-3)+12(z-1)=0;$$

$$-9x+18-15y+45+12z-12=0;$$

$$-9x-15y+12z+51=0 \quad \Big| \ :(-3);$$

$$P_2: \quad 3x+5y-4z-17=0;$$

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $C(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Підставимо координати:

$$\frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{y-4}{-2-4}=\frac{z-0}{-3-0};$$

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z}{-3} \quad \Big| \ \times(-3);$$

$$L_1: \quad \frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{1}.$$

5) розв’язок системи, складеної з рівнянь прямої L_1 і площини P_1

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z}{1} \\ 2x-2y-z+3=0 \end{cases}$$

і є координатами шуканої точки перетину. Для зручності розв’язання системи запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{1}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2t-1 \\ y=2t+4 \\ z=t \end{cases}$$

і підставимо в рівняння площини

$$2(-2t-1)-2(2t+4)-t+3=0;$$

$$-4t-2-4t-8-t+3=0 \quad \Rightarrow \quad -9t=7 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{7}{9},$$

тоді $\begin{cases} x=-2\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)-1=\frac{5}{9} \\ y=2\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)+4=\frac{22}{9} \\ z=-\frac{7}{9} \end{cases} \quad \Rightarrow$ точка перетину прямої і площини

$$M\left(\frac{5}{9};\ \ \frac{22}{9};\ \ -\frac{7}{9}\right).$$

6) кут між прямою та площиною

$$\sin\left(P_1 \hat{,} L_2\right)=\left|\cos\left(\vec{N} \hat{,} \vec{S}\right)\right|=\left|\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}\right|,$$

де $\vec{N}=\overrightarrow{BC}=(6;-6;-3)$ – нормальний вектор до площини P_1, $\vec{S}=\overrightarrow{AC}=(5-2;-2-3;-3-1)=(3;-5;-4)$ – напрямний вектор прямої L_2.

Обчислимо

$$\vec{N}\cdot\vec{S}=6\cdot 3+(-6)\cdot(-5)+(-3)\cdot(-4)=60;$$

$$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{81}=9;$$

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{3^2 + \left(-5\right)^2 + \left(-4\right)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,,$$

тобто

$$\sin\left(P_1 \hat{,} L_2\right) = \left|\frac{60}{9\cdot 5\sqrt{2}}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9428\,;$$

$$\left(P_1 \hat{,} L_2\right) = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx \arcsin 0{,}9428 \approx 70{,}53^\circ\,.$$

ЗАВДАННЯ

Завдання 1

а) виконати дії над матрицями.

1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти $\left(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}\right)\mathbf{C}^T$.

2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}\left(3\mathbf{A} + 4\mathbf{B}\right)^T$.

3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}^T\left(2\mathbf{B} - \mathbf{A}\right)$.

4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти $\left(2\mathbf{A} - 4\mathbf{B}\right)\mathbf{C}^T$.

5 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}\left(-\mathbf{A} - 2\mathbf{B}\right)^T$.

6 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & -2\\ 2 & -1\\ 4 & 10\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\\ -1 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$. Знайти $(3\mathbf{B}-\mathbf{A})\mathbf{C}^T$.

7 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\\ -7 & 8\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 4 & 6\\ 2 & -9\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 3 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $(3\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

8 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{A}\mathbf{B}^T-2\mathbf{C}$.

9 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 5 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}+2\mathbf{B}\mathbf{A}^T$.

10 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\\ 0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 5 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}\mathbf{A}-3\mathbf{B}^T$.

11 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Знайти $(3\mathbf{A}+2\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

12 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & 10 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$. Знайти $2\mathbf{A}\mathbf{B}^T-3\mathbf{C}$.

13 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{A}\mathbf{B}^T-2\mathbf{B}\mathbf{A}$.

14 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Знайти $3\mathbf{A}^T\mathbf{B}-2\mathbf{C}$.

15 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Знайти $(5\mathbf{A}-4\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

16 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $(3\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

17 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 0\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{A}\mathbf{B}^T+2\mathbf{C}$.

18 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$. Знайти $2\mathbf{A}^T\mathbf{C}+\mathbf{B}$.

19 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Знайти $(2\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

20 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{A}^T\mathbf{B}+3\mathbf{C}$.

21 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 5 & -4 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

22 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}$. Знайти $(3\mathbf{A}+2\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

23 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\\ -3 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}(3\mathbf{A}-\mathbf{B})^T$.

24 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\\ -1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 3\\ 4 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -4\\ 3\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}^T(\mathbf{B}-2\mathbf{A})$.

25 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Знайти $(2\mathbf{A}+3\mathbf{B})\mathbf{C}^T$.

26 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\-4&2&-6\\1&-3&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&-2&3\\2&0&1\\-2&5&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1&3&-5\end{pmatrix}$. Знайти $\mathbf{C}\left(-\mathbf{A}+2\mathbf{B}\right)^T$.

27 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\\2&0\\3&5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\\5&2\\0&-5\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&-1\end{pmatrix}$. Знайти $\left(\mathbf{B}-2\mathbf{A}\right)\mathbf{C}^T$.

28 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&5\\2&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\\5&-4\\1&0\end{pmatrix}$. Знайти $\left(\mathbf{A}+2\mathbf{B}\right)\mathbf{C}^T$.

29 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&2&-4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&-1&4\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5&0\\1&-2\end{pmatrix}$. Знайти $3\mathbf{A}\mathbf{B}^T+\mathbf{C}$.

30 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\\-1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&2\\4&-1\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&3&5\\-5&0&1\\3&-1&3\end{pmatrix}$. Знайти $2\mathbf{C}-\mathbf{B}\mathbf{A}^T$.

б) розв'язати системи лінійних рівнянь:

1) матричним методом (якщо можливо);
2) методом Крамера (якщо можливо);
3) методом Гаусса.

1) а) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6\\2x_1+3x_2-4x_3=18\\3x_1-2x_2+5x_3=6\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\-x_1+3x_2-5x_3=-3\\2x_1-5x_2+9x_3=6\end{cases}$	2) а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=4\\2x_1+3x_2+3x_3=-1\\2x_1+x_2+3x_3=9\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=0\\2x_1-3x_2+x_3=-3\\-x_1+4x_2-4x_3=3\end{cases}$	3) а) $\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=0\\2x_1+5x_2-3x_3=8\\5x_1+6x_2-2x_3=9\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\2x_1-x_2+x_3=10\\-x_1+2x_2=-4\end{cases}$
4) а) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$	5) а) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$	6) а) $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\2x_1-x_2-3x_3=1\\x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -x_1-x_2+x_3=15 \\ x_2+2x_3=18 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=3 \\ -x_1+x_2-x_3=-4 \\ 3x_1+2x_2-x_3=7 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$
7) а) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2=4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=5 \\ x_2+2x_3=-1 \end{cases}$	8) а) $\begin{cases} x_1-9x_2+4x_3=-9 \\ 3x_1+x_2+x_3=14 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3=3 \\ -6x_1+x_2-2x_3=-5 \\ 4x_1+x_2=2 \end{cases}$	9) а) $\begin{cases} 2x_1-8x_3=0 \\ -x_1+5x_2+x_3=14 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_3=-5 \\ 3x_1-x_2-x_3=-6 \\ x_2-x_3=1 \end{cases}$
10) а) $\begin{cases} 3x_1+2x_3=-1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=2 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3=9 \\ x_1+x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-4x_3=10 \end{cases}$	11) а) $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3=7 \\ 6x_2-6x_3=0 \\ 3x_1+x_2+x_3=11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_3=7 \\ -x_1+x_2+3x_3=2 \\ 2x_1-x_2-x_3=5 \end{cases}$	12) а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1-6x_2-4x_3=9 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=6 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_2+3x_3=6 \end{cases}$
13) а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2 \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-4x_2+5x_3=15 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \\ -x_1-3x_2+4x_3=10 \end{cases}$	14) а) $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=4 \\ 3x_1+x_2+x_3=6 \\ -3x_1+5x_2+6x_3=-5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ -x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \end{cases}$	15) а) $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31 \\ 4x_1+11x_3=-43 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=13 \\ -2x_1+2x_2+x_3=-9 \\ x_1+x_2+3x_3=4 \end{cases}$
16) а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+7x_3=26 \\ -x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1-x_2+4x_3=21 \end{cases}$	17) а) $\begin{cases} -3x_1+2x_3=-2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=3 \\ 4x_1+2x_2-3x_3=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3=16 \\ -x_1+2x_2-x_3=-17 \end{cases}$	18) а) $\begin{cases} -2x_1+x_2+4x_3=-4 \\ 6x_2+7x_3=-12 \\ 3x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_3=6 \\ -2x_1+x_2-3x_3=-3 \\ 3x_1-x_2+x_3=9 \end{cases}$
19) а) $\begin{cases} 9x_1-2x_2+4x_3=11 \\ 2x_1+3x_2+7x_3=-1 \\ 11x_1-5x_2+11x_3=16 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3=25 \\ -x_1+x_2+4x_3=13 \\ 2x_1+4x_2-x_3=12 \end{cases}$	20) а) $\begin{cases} 6x_1+x_2+5x_3=41 \\ 8x_1+3x_3=39 \\ -4x_1+x_2+2x_3=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=8 \\ x_1+5x_2-4x_3=11 \\ -x_1+2x_2-3x_3=3 \end{cases}$	21) а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ -x_1+2x_2-x_3=-10 \\ 2x_1-x_2+2x_3=11 \end{cases}$
22) а) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=7 \\ 5x_1+6x_2-2x_3=11 \end{cases}$	23) а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5 \\ 5x_1+3x_2-3x_3=7 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=10 \end{cases}$	24) а) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=9 \\ 3x_1+4x_3=16 \\ 2x_1-x_2-2x_3=3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 \qquad - 3x_3 = -16 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -28 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$
25) а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -16 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$	26) а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 15 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$	27) а) $\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$
28) а) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 12x_1 - x_2 + x_3 = 37 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$	29) а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	30) а) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 7x_1 \qquad + 4x_3 = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

в) розв’язати матричне рівняння.

1	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{X}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\mathbf{X}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} + \mathbf{X}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\mathbf{X}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \mathbf{X}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$
11	$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} + \mathbf{X}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

15	$\mathbf{X}\begin{pmatrix}7&2\\4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-6\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\3&-2\end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix}4&5\\7&-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}6&4\\1&5\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}4&5\\5&7\end{pmatrix}+\mathbf{X}\begin{pmatrix}2&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\3&0\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}4&7\\-9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4\\0&7\end{pmatrix}$
19	$\mathbf{X}\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&-5\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-6&8\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}-4&4\\5&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&-5\\4&7\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4&6\\-7&2\end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix}4&3\\-7&5\end{pmatrix}+\mathbf{X}\begin{pmatrix}6&5\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&9\\0&4\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}-4&3\\-6&4\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}1&6\\-5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}$
23	$\mathbf{X}\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&5\\-6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\4&-2\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}6&1\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-4\\-4&3\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4&3\\0&-2\end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix}1&9\\-7&6\end{pmatrix}+\mathbf{X}\begin{pmatrix}4&9\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-4&-2\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}6&7\\4&5\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}2&6\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&4\\5&6\end{pmatrix}$
27	$\mathbf{X}\begin{pmatrix}-8&5\\5&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1\\6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7\\9&5\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}5&2\\9&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4&5\\3&-2\end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix}4&1\\6&-4\end{pmatrix}+\mathbf{X}\begin{pmatrix}8&6\\7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\-4&2\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}4&-5\\-7&9\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}4&5\\-1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&6\end{pmatrix}$

Завдання 2

Задано координати вершин піраміди *A*, *B*, *C*, *D*. Використовуючи методи векторної алгебри, знайти:

1) скалярний добуток $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ і кут між ребрами *AB* і *AC*;

2) вектор, паралельний бісектрисі кута *A* трикутника *ABC*;

3) проекцію вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$;

4) площу грані *ABC*;

5) напрямні косинуси вектора $\vec{AB}$;

6) об’єм піраміди.

7) розвинення вектора $\overline{AB}\times\overline{AC}$ за базисом векторів $\left\{\overline{AD};\overline{BD};\overline{CD}\right\}$.

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(4;0;0)	(-2;1;2)	(-5;-3;2)	(3;2;-7)
2	(2;1;2)	(-3;2;7)	(-4;0;0)	(1;3;-2)
3	(1;3;2)	(-4;0;0)	(-3;-2;7)	(2;1;-2)
4	(3;2;7)	(-1;3;2)	(-2;-1;2)	(4;0;0)
5	(3;1;2)	(-1;2;1)	(-2;-1;0)	(6;2;-2)
6	(1;2;1)	(-2;1;0)	(-6;-2;2)	(3;1;-2)
7	(2;1;0)	(-6;2;2)	(-3;-1;2)	(1;2;-1)
8	(6;2;2)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)	(2;1;0)
9	(2;3;5)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)	(3;4;-1)
10	(1;4;1)	(-3;2;1)	(-3;-4;1)	(2;3;-5)
11	(3;2;1)	(-3;4;1)	(-2;-3;5)	(1;4;-1)
12	(3;4;1)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)	(3;2;-1)
13	(1;1;6)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)	(6;1;-5)
14	(1;5;2)	(-3;0;1)	(-6;1;-5)	(1;1;-6)
15	(3;0;1)	(-6;1;5)	(-1;1;-6)	(1;5;-2)

№	*A*	*B*	*C*	*D*
16	(6;1;5)	(-1;1;6)	(-1;5;-2)	(3;0;-1)
17	(2;5;4)	(-3;2;2)	(-4;5;-3)	(2;1;-3)
18	(3;2;2)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)	(2;5;-4)
19	(4;5;3)	(-2;1;3)	(-2;5;-4)	(3;2;-2)
20	(2;1;3)	(-2;5;4)	(-3;2;-2)	(4;5;-3)
21	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)	(6;2;-5)
22	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)	(2;4;-1)
23	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)	(3;4;-2)
24	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;-1)
25	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)
26	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)	(2;5;-3)
27	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-3)
28	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)	(1;4;-3)
29	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;-4)
30	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)	(4;5;-1)

Завдання 3

Задано координати вершин трикутника *ABC*. Знайти:

1)довжину сторони *BC*;
2)рівняння прямої *BC*;
3)рівняння висоти *AD* на сторону *BC*;
4)довжину висоти *AD*;
5)рівняння медіани *BE*;
6)точку перетину *M* висоти *AD* і медіани *BE*;
7)кут між прямими *AD* і *BE*;
8)подати креслення.

№№	*A*	*B*	*C*
1	(0,1)	(3,-5)	(-2,-3)
2	(0,2)	(-12,-9)	(-5,15)
3	(0,3)	(-2,1)	(-7,-1)
4	(0,4)	(-15,11)	(8,-13)
5	(0,5)	(-10,3)	(8,-7)
6	(0,6)	(-5,4)	(9,-1)
7	(0,7)	(-18,11)	(11,-3)
8	(0,8)	(-2,6)	(6,-3)
9	(0,9)	(-12,11)	(6,-3)
10	(1,0)	(-4,5)	(8,-2)

№№	*A*	*B*	*C*
11	(1,1)	(-2,7)	(-10,-9)
12	(1,2)	(-2,9)	(-6,-2)
13	(1,3)	(-6,2)	(10,-5)
14	(1,4)	(-5,5)	(4,-3)
15	(1,5)	(-8,2)	(4,-10)
16	(1,6)	(-9,1)	(7,-1)
17	(1,7)	(-11,3)	(2,-1)
18	(1,8)	(-6,3)	(10,-1)
19	(1,9)	(-6,2)	(2,-6)
20	(2,0)	(-8,2)	(1,-8)

№№	*A*	*B*	*C*
21	(2,1)	(-6,2)	(3,-5)

№№	*A*	*B*	*C*
22	(2,2)	(-4,3)	(2,-9)

№№	A	B	C
23	(2,3)	(-1,7)	(11,-2)
24	(2,4)	(-1,1)	(5,-1)
25	(2,5)	(-4,-10)	(10,-3)
26	(2,6)	(-7,1)	(5,-4)

№№	A	B	C
27	(2,7)	(-1,2)	(7,-10)
28	(2,8)	(-10,1)	(2,-5)
29	(2,9)	(-2,6)	(-2,-5)
30	(3,0)	(-8,4)	(4,-5)

Завдання 4

Дано рівняння лінії в полярній системі координат. Побудувати графік функції за точками для значень полярного кута φ , кратних $\pi/8$, у проміжку $0\le\varphi\le 2\pi$. Знайти рівняння цієї лінії в прямокутній декартовій системі координат, привести рівняння до канонічного вигляду, визначити тип кривої та її параметри.

1 $r=6/(2+\cos\varphi)$	11 $r=4/(3+2\cos\varphi)$	21 $r=10/(5+3\cos\varphi)$
2 $r=2/(3+2\sin\varphi)$	12 $r=1/(4+2\sin\varphi)$	22 $r=2/(6+3\sin\varphi)$
3 $r=6\cos\varphi$	13 $r=2/(1+\cos\varphi)$	23 $r=12\cos\varphi$
4 $r=3/(1+\sin\varphi)$	14 $r=8\sin\varphi$	24 $r=5/(3+3\sin\varphi)$
5 $r=3/(4+2\cos\varphi)$	15 $r=3/(5+2\cos\varphi)$	25 $r=3/(6+2\cos\varphi)$
6 $r=12/(6+\sin\varphi)$	16 $r=2/(5+\sin\varphi)$	26 $r=20/(5+3\sin\varphi)$
7 $r=4/(1+\cos\varphi)$	17 $r=2\cos\varphi$	27 $r=5/(3+3\cos\varphi)$
8 $r=10\sin\varphi$	18 $r=5/(2+2\sin\varphi)$	28 $r=2\sin\varphi$
9 $r=20/(4+\cos\varphi)$	19 $r=8/(3+\cos\varphi)$	29 $r=14/(7+2\cos\varphi)$
10 $r=5/(2+\sin\varphi)$	20 $r=2/(4+3\sin\varphi)$	30 $r=12/(6+5\sin\varphi)$

Завдання 5

Задано координати точок A, B, C. Знайти:

1) рівняння площини P_1, що проходить через точку A перпендикулярно вектору $\vec{BC}$;

2) відстань від точки C до цієї площини;

3) рівняння площини P_2, що проходить через точки A, B, C;

4) канонічні рівняння прямої L_1, що проходить через точки B і C;

5) точку перетину прямої L_1 із площиною P_1;

6) кут між площиною P_1 і прямою L_2, що проходить через точки A і C (у градусах).

№№	*A*	*B*	*C*
1	(4;0;0)	(-2;1;2)	(-5;-3;2)
2	(2;1;2)	(-3;2;7)	(-4;0;0)
3	(1;3;2)	(-4;0;0)	(-3;-2;7)
4	(3;2;7)	(-1;3;2)	(-2;-1;2)
5	(3;1;2)	(-1;2;1)	(-2;-1;0)
6	(1;2;1)	(-2;1;0)	(-6;-2;2)
7	(2;1;0)	(-6;2;2)	(-3;-1;2)
8	(6;2;2)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)
9	(2;3;5)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)
10	(1;4;1)	(-3;2;1)	(-3;-4;1)
11	(3;2;1)	(-3;4;1)	(-2;-3;5)
12	(3;4;1)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)
13	(1;1;6)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)
14	(1;5;2)	(-3;0;1)	(-6;1;-5)
15	(3;0;1)	(-6;1;5)	(-1;1;-6)

№№	*A*	*B*	*C*
16	(6;1;5)	(-1;1;6)	(-1;5;-2)
17	(2;5;4)	(-3;2;2)	(-4;5;-3)
18	(3;2;2)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)
19	(4;5;3)	(-2;1;3)	(-2;5;-4)
20	(2;1;3)	(-2;5;4)	(-3;2;-2)
21	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)
22	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)
23	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)
24	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)
25	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)
26	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)
27	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)
28	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)
29	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)
30	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1976.

2 Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

3 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.

4 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

5 Кулініч Г.Л. Вища математика. – К., 1995.

6 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высшая школа, 1999.

7 Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Методичні вказівки і завдання для студентів 1 курсу загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання (№19).– Харків: ХарДАЗТ, 2000.

8 Методичні вказівки і контрольні завдання «Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» (№913).– Харків: ХарДАЗТ, 2000.