УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра механіки і проектування машин

КОМПЛЕКСНЕ МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

до виконання розрахунково–графічних робіт з дисципліни

«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Харків – 2020

Методичні вказівки розглянуто і затверджено до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 13 лютого 2020 р., протокол № 11.

Методичні вказівки призначено для студентів усіх спеціальностей механіко-енергетичного та будівельного факультетів денної форми навчання.

Укладачі:

доценти Н. А. Аксьонова,
О. В. Оробінський

Рецензент

проф. О. В. Братченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з основних тенденцій подальшого розвитку вищої школи є комплексне методичне забезпечення навчального процесу.

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами на 1 та 2 курсах дисципліни «Теоретична механіка».

При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка». При цьому курс теоретичної механіки передбачає виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) і складання заліків та іспитів. У цьому методичному забезпеченні наведені основні за тематикою завдання з прикладами та індивідуальними варіантами.

Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичного забезпечення, яке дає змогу активізувати роботу студентів, сприяє перетворенню самостійної роботи у творчий процес.

Методичне забезпечення призначено для студентів денної форми навчання всіх спеціальностей (освітніх програм).

СТАТИКА

Завдання С-1

Визначення реакцій опор твердого тіла

Визначити реакції опор конструкції. Схеми конструкцій наведені на рисунку 1 (розміри – в метрах), навантаження вказане в таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	**G**	**P**	**M, кНм**	**q, кН/м**	**α, град**
	кН				
1	10	5	20	1	30
2	12	8	10	4	60
3	8	4	5	2	60
4	14	-	8	3	30
5	-	6	7	1	45
6	-	10	4	2	60
7	-	6	5	1	45
8	16	7	6	2	60
9	6	6	4	2	30
10	10	8	9	1	30
11	-	4	7	0,5	45
12	10	6	8	-	45
13	12	10	6	2	30
14	10	6	10	1	45
15	4	4	4	2	60
16	20	10	-	2	45
17	25	5	-	0,5	45
18	20	10	10	-	30
19	-	4	8	1	45
20	-	10	6	0,5	45
21	-	8	7	0,5	30
22	-	10	8	1	30
23	-	7	10	2	30
24	-	6	7	1,5	30
25	-	14	20	0,5	45
26	-	16	14	1	30
27	5	4	8	2,5	45
28	-	10	7	3	30
29	-	6	8	1	15
30	15	10	14	-	30

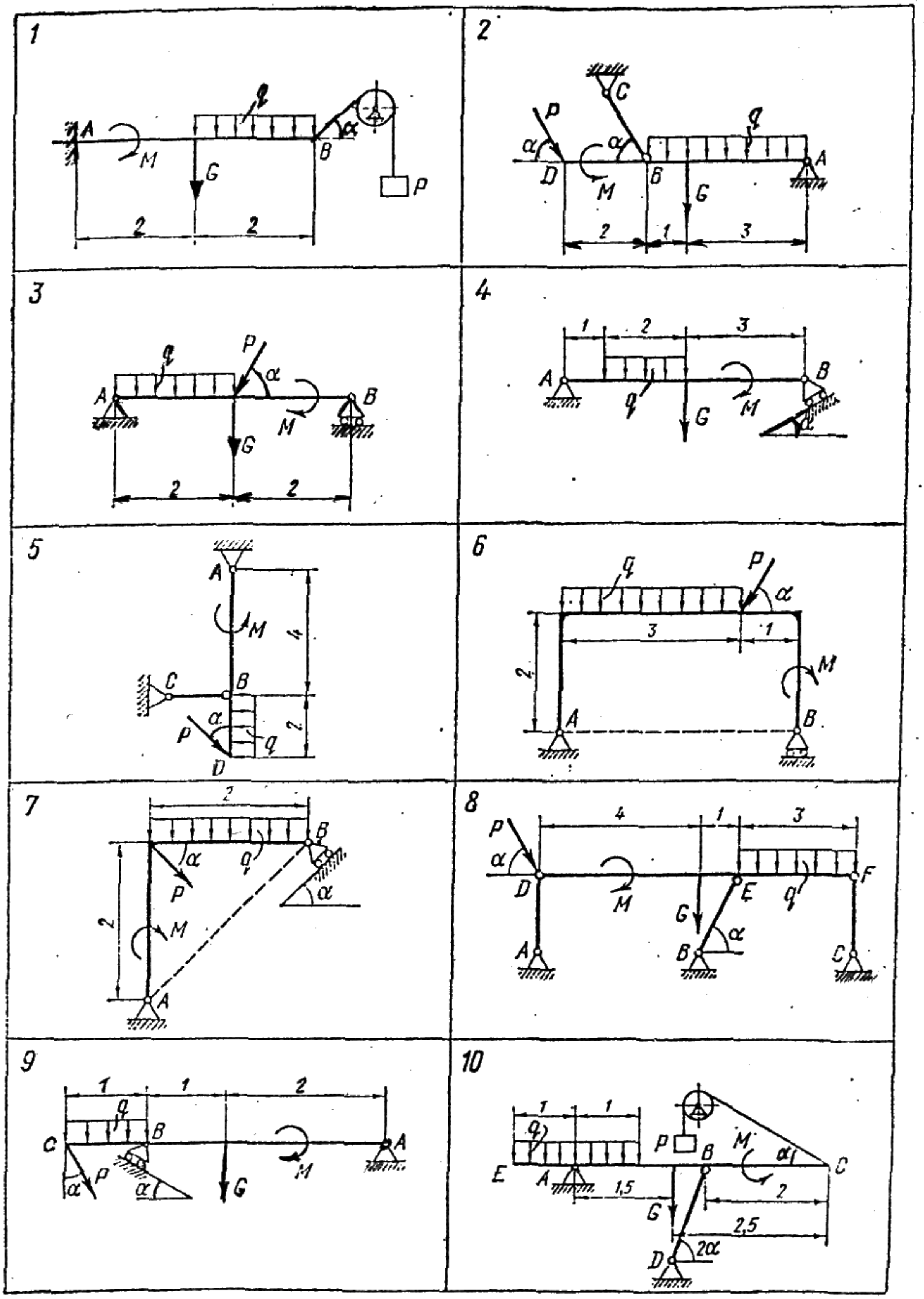

Рисунок 1, аркуш 1

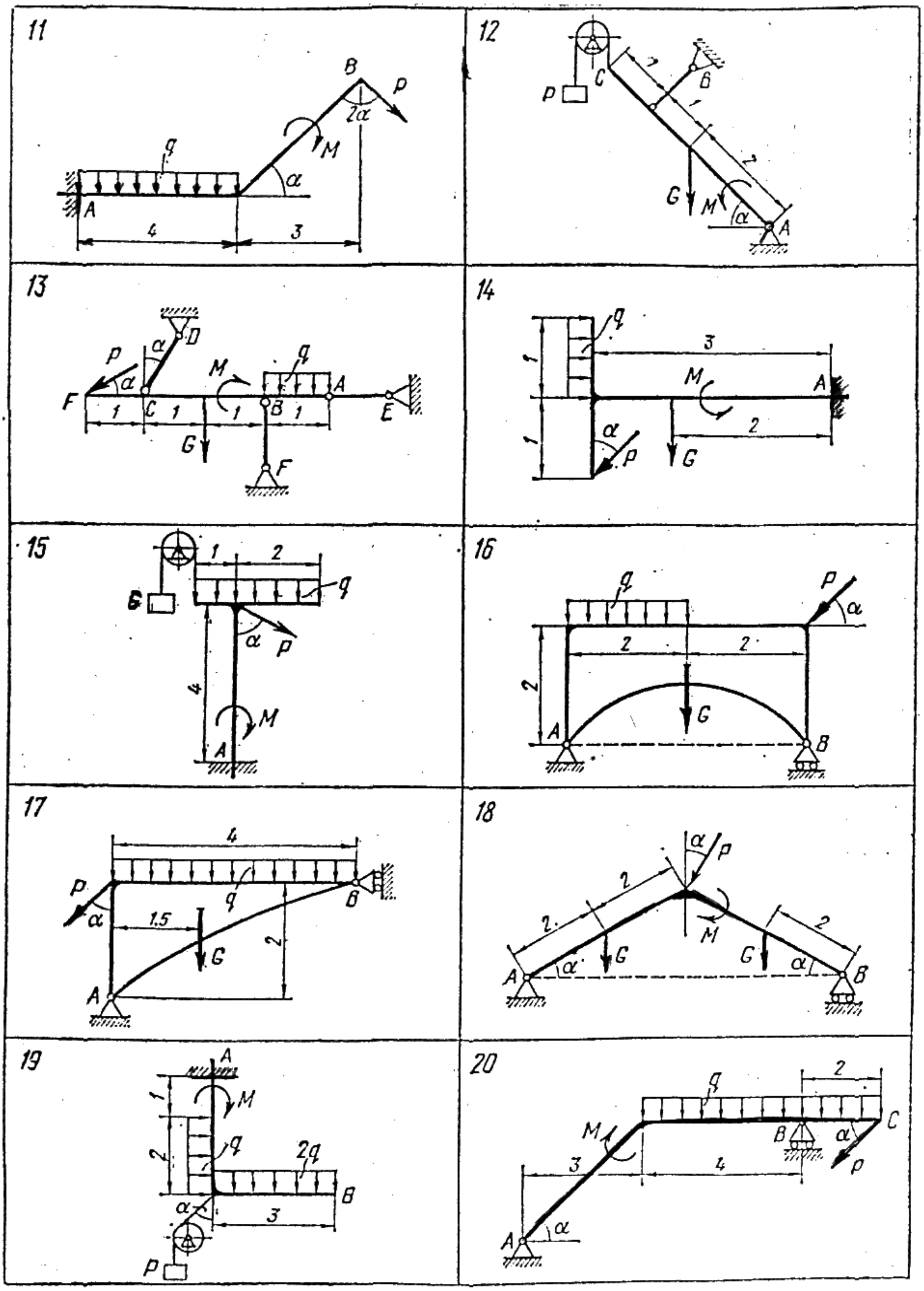

Рисунок 1, аркуш 2

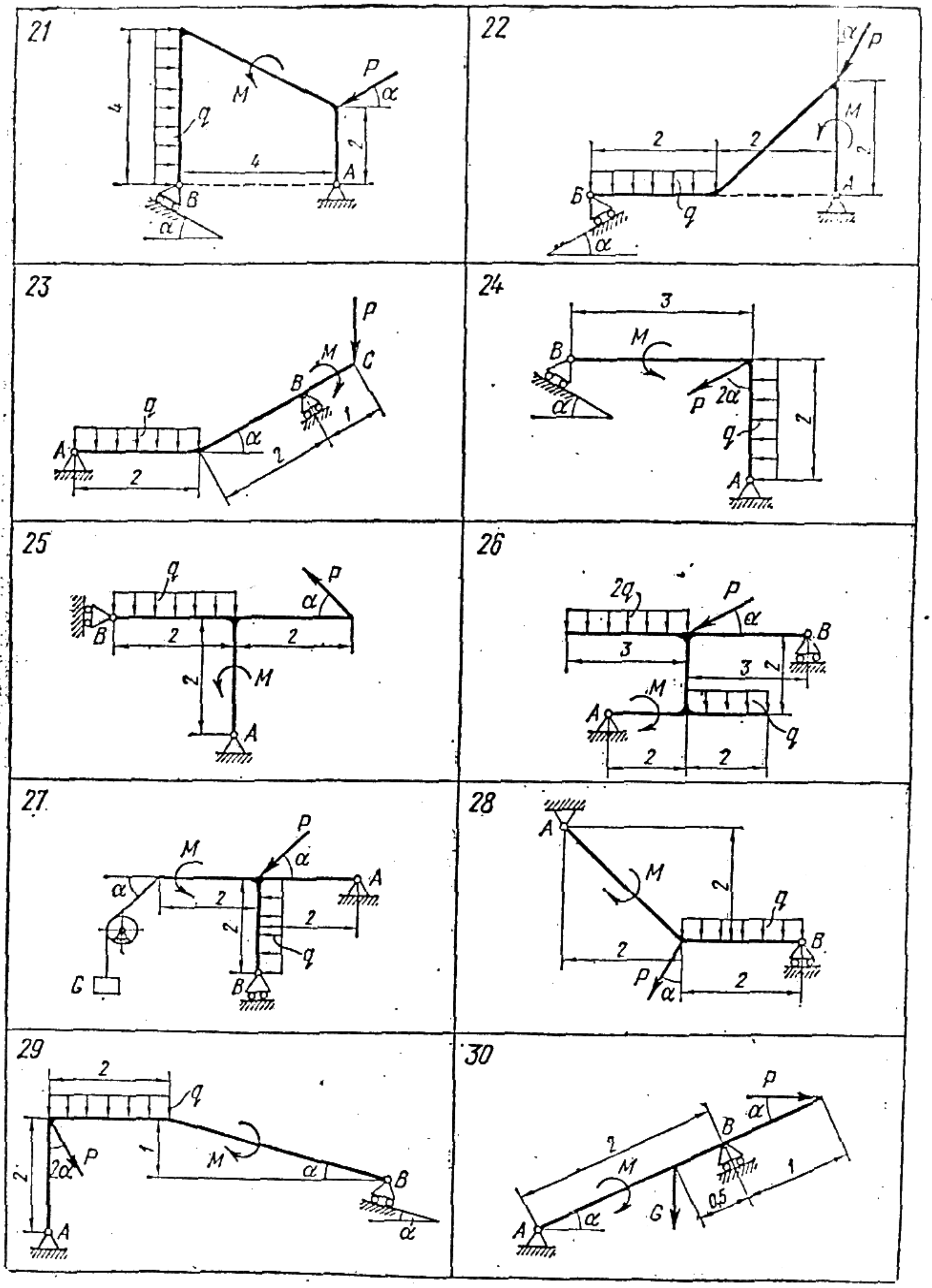

Рисунок 1, аркуш 3

Рекомендації та приклад виконання завдання С-1

Дано:
схему конструкції (рисунок 2), G =10 кН, P=5 кН, M=8 кНм, q =0,5 кН/м, $\alpha = 30^0$, розміри – в метрах.

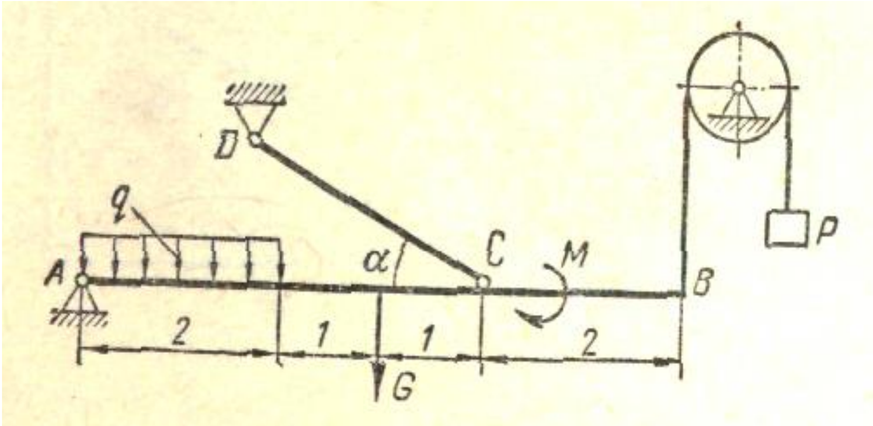

Рисунок 2

Визначити:
реакцію опори А і реакцію стержня CD.

Розв'язання

Розглянемо систему сил, що зрівноважуються [1], прикладених до балки АВ. Відкинемо зв'язки: шарнірно-нерухому опору А, стержень CD та нитку [1, 2]. Дію зв'язків на балку замінимо їх реакціями (рисунок 3).

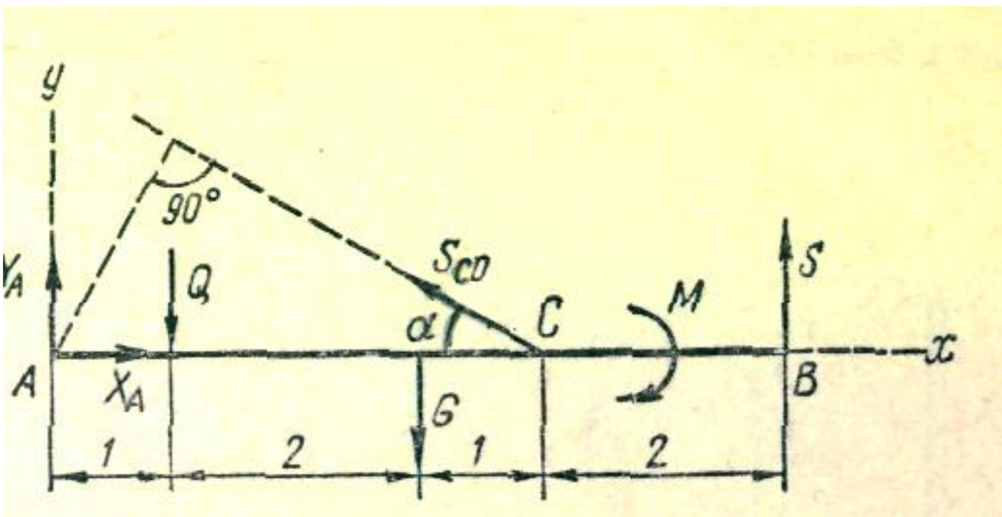

Рисунок 3

Тому що напрямок реакції шарнірно-нерухомої опори A невідомий [4], визначимо її складові $\overline{X_A}$ та $\overline{Y_A}$. Вкажемо також реакцію $\overline{S_{CD}}$ стержня CD і реакцію $\overline{S}$ нитки, модуль якої дорівнює P. Рівномірно-розподілене навантаження q замінимо зосередженою силою Q, яка дорівнює $Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ кН і прикладається в центрі ваги епюри цього навантаження.

Для плоскої системи сил, прикладених до балки, складаємо три рівняння рівноваги [1, 2, 4, 6]:

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A - S_{CD}\cos 30^0 = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - Q - G + S_{CD}\cos 60^0 + S = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iA} = 0; \qquad -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4\sin 30^0 - M + S \cdot 6 = 0. \tag{3}$$

З рівняння (1)

$$X_A = S_{CD}\cos 30^0 = 4{,}5 \cdot 0{,}866 = 3{,}90 \text{ кН.}$$

З рівняння (2)

$$Y_A = Q + G - S_{CD}\cos 60^0 - S = 1 + 10 - 4{,}5 \cdot 0{,}5 - 5 = 3{,}75 \text{ кН.}$$

З рівняння (3)

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - S \cdot 6}{4\sin 30^0} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0{,}5} = 4{,}5 \text{ кН.}$$

Значення X_A, Y_A та S_{CD} отримано додатними. Це вказує на те, що прийняті напрямки цих сил збігаються з їх дійсними напрямками.

КІНЕМАТИКА

Завдання К-1

Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху

Вивчення прямолінійного та криволінійного руху точки (розділ «Кінематика точки») [1-3].

За заданими рівняннями руху точки М установити вид її траєкторії і для моменту часу $t = t_1, c$, визначити положення точки на траєкторії, її швидкість, повне дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії у відповідній точці.

Дані для розв'язання наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	**Рівняння руху**		**t_1, с**
	x = x (t), см	***y = y (t), см***	
1	2	3	4
1	$-2\,t^2 + 3$	$-5\,t$	*1/2*
2	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	*1*
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	*1*
4	$4t + 4$	$-4 / (t + 1)$	*2*
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	*1*
6	$3\,t^2 + 2$	$-4\,t$	*1/2*
7	$3\,t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	*1*
8	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	*1*
9	$-3 / (t + 2)$	$3t + 6$	*2*
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	*1*

Продовження таблиці 2

1	2	3	4
11	$-4\,t^2 + 1$	$-3\,t$	$1/2$
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2\,t - 2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	$1/2$
17	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7\,t^2 - 3$	$5t$	$1/4$
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Рекомендації та приклад виконання завдання К-1

Дано:

$x = -2\cos(\frac{\pi}{4}t) + 3$ (см), $y = 2\sin(\frac{\pi}{8}t) - 1$ (см), $t_1 = 1$ с.

Визначити:

рівняння траєкторії точки; положення точки М для моменту часу t_1; її швидкість; повне, дотичне і нормальне прискорення; радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1 Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо із заданих рівнянь руху час *t*. Застосуємо формулу $cos2\alpha = 1\text{-}2sin^2\alpha$, тобто

$$\cos(\frac{\pi}{4}t) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{8}t),$$

тоді

$$\cos(\frac{\pi}{4}t) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{8}t) = \frac{y+1}{2},$$

отже,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Остаточно маємо рівняння траєкторії точки: $x = (y+1)^2 + 1$ – це парабола.

Положення точки M_1 при t_1=1c буде:

$$x_1 = -2\cos(\frac{\pi}{4}) + 3 = 1{,}6 \text{ см}, \qquad y_1 = 2\sin(\frac{\pi}{8}) - 1 = -0{,}23 \text{ см}.$$

2 Швидкість точки визначимо за її проекціями на координатні осі [6]:

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{4}t) \quad \text{при} \quad t_1 = 1c \quad V_X = 1{,}11 \text{ см/с},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{8}t) \quad \text{при} \quad t_1 = 1c \quad V_y = 0.73 \text{ см/с}.$$

Модуль швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1{,}11^2 + 0{,}73^2} = 1{,}33$ см/с.

3 Повне прискорення точки [1-4]:

$$a_x = \frac{dV_X}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos(\frac{\pi}{4}t) \quad \text{при} \quad t_1 = 1c \quad a_x = 0{,}87 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin(\frac{\pi}{8}t) \quad \text{при} \quad t_1 = 1c \quad a_y = -0{,}12 \text{ см/с}^2.$$

Модуль прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}87^2 + 0{,}12^2} = 0{,}88$ см/с^2.

4 Дотичне прискорення знайдемо за формулою

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_X \cdot a_X + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{1{,}11 \cdot 0{,}87 + 0{,}73 \cdot (-0{,}12)}{1{,}33} = 0{,}66 \text{ см/с}^2.$$

5 Нормальне прискорення точки буде

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0{,}88^2 - 0{,}66^2} = 0{,}58 \text{ см/с}^2.$$

6 Радіус кривизни траєкторії у точці M_1 знайдемо як

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1{,}33^2}{0{,}58} = 3{,}05 \text{ см.}$$

Відповідь: $x = (y+1)^2 + 1$, $V = 1{,}33$ см/с. $a = 0{,}88$ см/с^2, $a_\tau = 0{,}66$ см/с^2, $a_n = 0{,}58$ см/с^2, $R = 3{,}05$ см (рисунок 4).

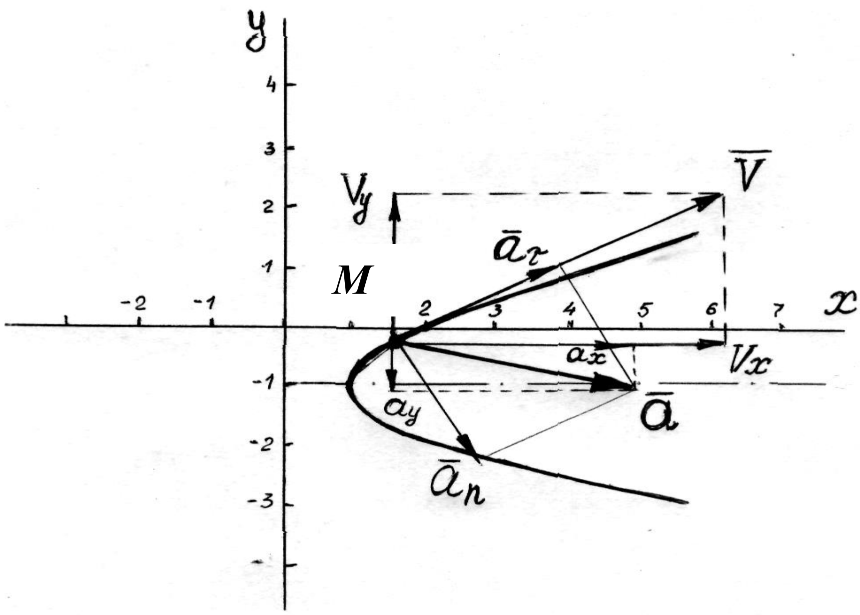

Рисунок 4

ДИНАМІКА

Завдання Д-1

Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що перебуває під дією постійних сил

Варіант 1 – 5 (рисунок 5).

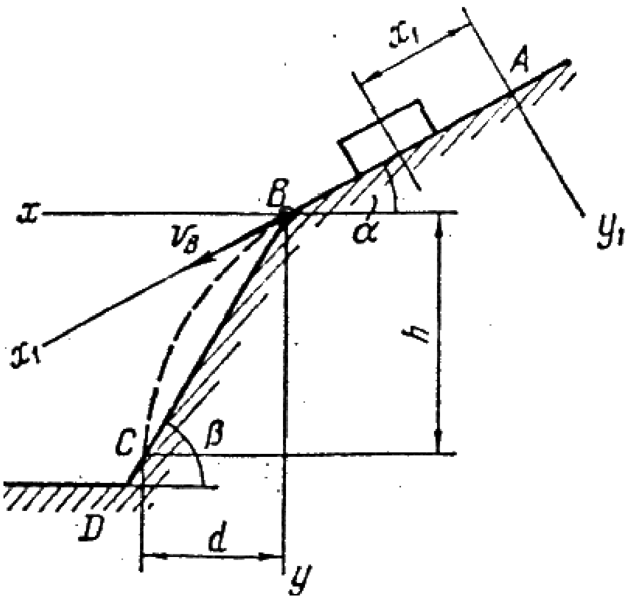

Рисунок 5

Тіло рухається із точки A по ділянці AB (довжиною l) похилої площини, яка складає кут α з горизонтом, протягом часу τ, с. Його початкова швидкість υ_A. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f.

У точці B тіло залишає площину зі швидкістю υ_B та влучає зі швидкістю υ_C у точку C площини BD, похилої під кутом β до горизонту. Тіло перебувало в повітрі T, с.

При розв'язанні завдання тіло прийняти за матеріальну точку [2]; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано: $\alpha = 30^o$, $\upsilon_A = 0$, $f = 0{,}2$, $l = 10$ м, $\beta = 60^o$.
Визначити τ і h

Варіант 2. Дано: $\alpha = 15^o$, $\upsilon_A = 2$ м/с, $f = 0.2$, $h = 4$ м, $\beta = 45^o$.
Визначити l та рівняння траєкторії точки на відрізку ВС.

Варіант 3. Дано: $\alpha = 30^o$, $\upsilon_A = 2{,}5$ м/с, $f \neq 0$, $l = 8$ м, $d = 10$ м, $\beta = 60^o$.
Визначити τ і υ_B.

Варіант 4. Дано: $\upsilon_A = 0$, $f = 0$, $\tau = 2$ с, $l = 9{,}8$ м, $\beta = 60^o$.
Визначити α і Т.

Варіант 5. Дано: $\alpha = 30^o$, $\upsilon_A = 0$, $l = 9{,}8$ м, $\tau = 3$ с, $\beta = 45^o$.
Визначити f і υ_C.

Варіант 6 – 10 (рисунок 6).

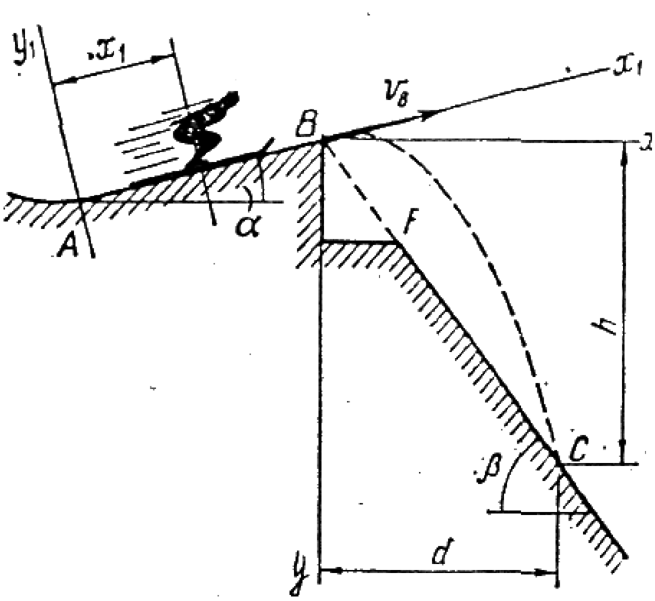

Рисунок 6

Лижник наближається до точки А ділянки трампліна АВ, похилого до горизонту під кутом α, зі швидкістю υ_A. Довжина трампліна АВ дорівнює l. Коефіцієнт тертя ковзання лиж на відрізку АВ дорівнює f. Лижник від А до В рухається τ, с, у точці В зі швидкістю υ_B він залишає трамплін. Через Т, с, лижник приземляється зі швидкістю υ_C в точці С гори, яка складає кут β з горизонтом.

При розв'язанні завдання прийняти лижника за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 6. Дано: α = 20°, f = 0,1, τ= 0,2 с, β = *30°*. h= *40* м.
Визначити l *і* υ_C.

Варіант 7. Дано: α = 15°, f = 0,1, l = *5* м, υ_A. = 16 м/с, β = *45°*.
Визначити Т *і* υ_B.

Варіант 8. Дано: υ_A. = 21 м/с, f = 0, τ= 0,3 с, υ_B= 20 м/с, β = *60*.
Визначити α *і* d.

Варіант 9. Дано: α = 15°, τ= 0,3 с, f = 0,1, h= $30\sqrt{2}$ м, β = *45°*.
. Визначити υ_A *і* υ_B.

Варіант 10. Дано: α = 15°, f = 0, υ_A = *12* м/с, d = *50* м, β = *60°*.
Визначити τ та рівняння траєкторії точки на відрізку ВС.

Варіант 11 – 15 (рисунок 7).

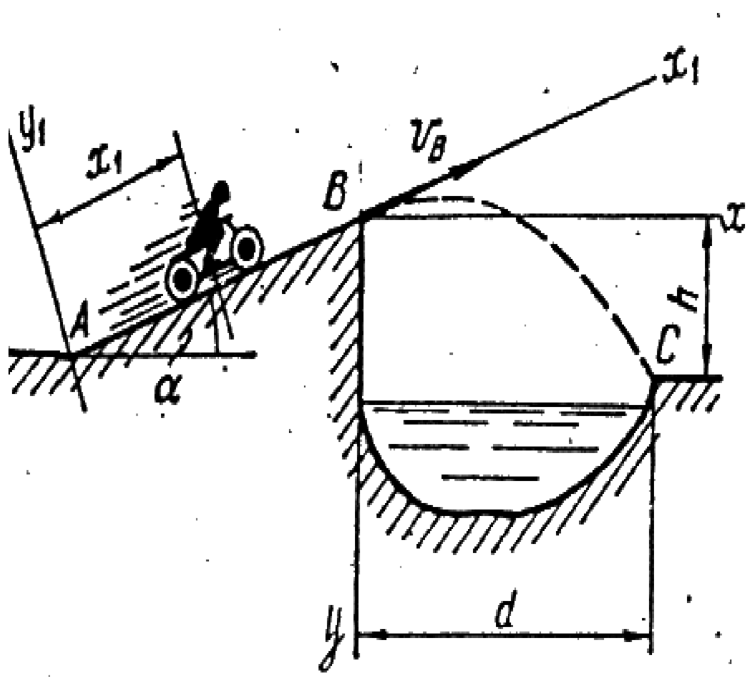

Рисунок 7

Маючи в точці А швидкість υ_A, мотоцикл піднімається τ, с, по відрізку АВ довжиною l, який складає з горизонтом кут α. При постійній на всьому відрізку АВ рушійній силі Р мотоцикл в точці В отримує швидкість υ_B та перелітає через рів шириною d, перебуваючи у повітрі Т, с, і приземляючись у точці С зі швидкістю υ_C.

Маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює m.

При розв'язанні завдання вважати мотоцикл з мотоциклістом за матеріальну точку і не враховувати сили опору руху.

Варіант 11. Дано: α = 30°, Р $\neq$ 0, l = 40 м, υ_A. = 0, υ_B= 4,5 м/с, d = *3* м.
Визначити τ і h.

Варіант 12. Дано: $\alpha = 30^o$, P = 0, l = 40 м, υ_B = 4,5 м/с,
h= 1,5 м.
Визначити υ_A. і d.

Варіант 13. Дано: $\alpha = 30^o$, m=400 кг, υ_A. =0, τ=20 с, d = 3 м,
h = 1,5 м.
Визначити l і P.

Варіант 14. Дано: $\alpha = 30^o$, m=400 кг, P=2,2 кН, l = 40 м,
υ_A.=0, d = 5 м.
Визначити υ_B і υ_C.

Варіант 15. Дано: $\alpha = 30^o$, P =2 кН, l = 50 м, υ_A. = 0, d = 4 м,
h = 2 м.
Визначити T і m.

Варіант 16 – 20 (рисунок 8).

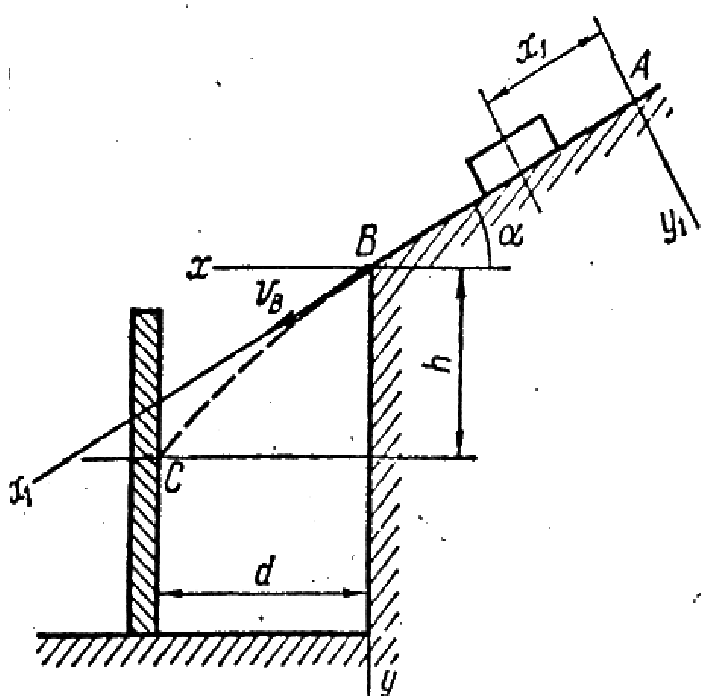

Рисунок 8

Камінь сковзає за період часу τ, с, по відрізку AB похилої площини, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l. Його початкова швидкість υ_A.

Коефіцієнт тертя ковзання каменя позначається f.

У точці B камінь мав швидкість υ_B Через T, c, він ударяється в точці C об вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні завдання вважати камінь за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 16. Дано: $\alpha = 30^o$, υ_A. = 1 м/с, l = 3 м, f =0,2, d = 2,5 м.
Визначити T і h.

Варіант 17. Дано: $\alpha = 45^o$, l = 6 м, υ_B. = 2υ_A , τ = 1с, h = 6 м.

Визначити f і d .

Варіант 18. Дано: $\alpha = 30^o$, $l = 2$ м, $\upsilon_A. = 0$, $f = 0{,}1$, $d = 3$ м.

Визначити τ і h.

Варіант 19. Дано: $\alpha = 15^o$, $l = 3$ м, $\upsilon_B. = 3$ м/с, $f \neq 0$, $d = 2$ м, $\tau = 1{,}5$ с.

Визначити $\upsilon_A.$ і h.

Варіант 20. Дано: $\alpha = 45^o$, $\upsilon_A. = 0$, $f = 0{,}3$, $d = 2$ м, $h = 4$ м.

Визначити τ і l .

Варіант 21 – 25 (рисунок 9).

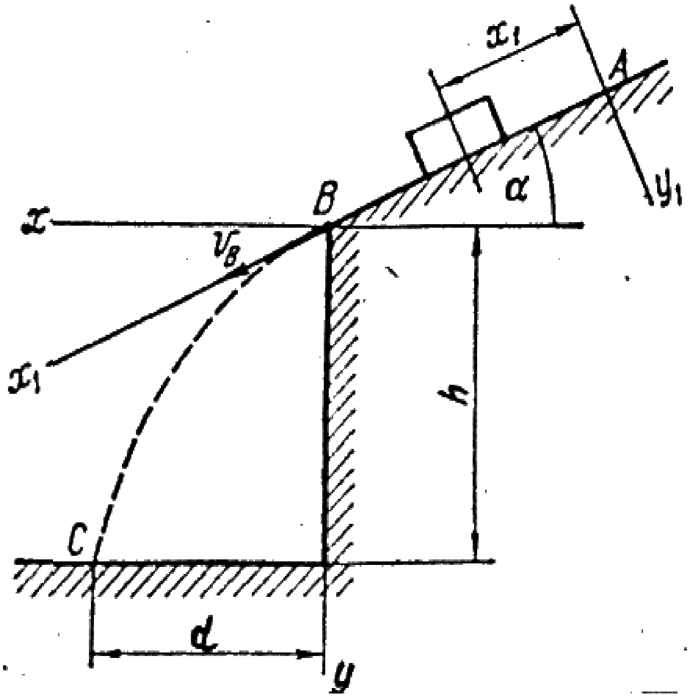

Рисунок 9

Тіло рухається із точки A по відрізку AB (довжиною l) похилої площини, яка складає кут α з горизонтом. Його початкова швидкість υ_A. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f. Через τ, с, тіло в точці B зі швидкістю υ_B. залишає похилу площину та падає на горизонтальну площину в точку C зі швидкістю υ_C; при цьому воно перебуває у повітрі T, с.

При розв'язанні завдання вважати тіло матеріальною точкою; опір повітря не враховувати.

Варіант 21. Дано: $\alpha = 30^o$, $f = 0{,}1$, $\upsilon_A. = 1$ м/с, $\tau = 1{,}5$ с, $h = 10$ м.

Визначити d і υ_B..

Варіант 22. Дано: $\alpha = 45^o$, $\upsilon_A. = 0$, $l = 10$ м, $\tau = 2$ с.

Визначити f і рівняння траєкторії на ділянці BC.

Варіант 23. Дано: f =0, υ_A. = 0, l = 9,81 м, τ = 2 с, h = 20 м.
Визначити α і Т.
Варіант 24. Дано: α = 30°, υ_A. = 0, f =0,2, d = 12 м, l = 10 м.
Визначити τ і h .
Варіант 25. Дано: α = 30°, υ_A. = 0, f =0,2, l = 6 м, h = 4,5 м.
Визначити τ і υ_C .

Варіант 26 – 30 (рисунок 10).

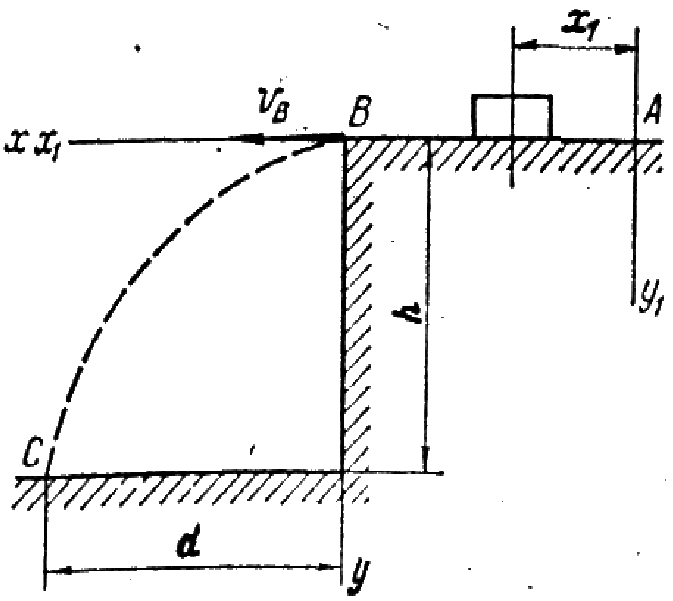

Рисунок 10

Маючи в точці А швидкість υ_A, тіло рухається по горизонтальному відрізку АВ довжиною l протягом часу τ, с.

Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f. Зі швидкістю υ_B тіло в точці В залишає площину і потрапляє в точку С зі швидкістю υ_C, знаходячись у повітрі Т, с.

При розв'язанні задачі вважати тіло за матеріальну точку, опором повітря знехтувати

Варіант 26. Дано: υ_A. = 7 м/с, f =0,2, l = 8 м, h = 20 м.
Визначити d і υ_C .
Варіант 27. Дано: υ_A. = 4 м/с, f =0,1, τ = 2 с, d = 2 м.
Визначити υ_B і h.
Варіант 28. Дано: υ_B. = 3 м/с, f =0,3, l = 3 м, h = 5 м.
Визначити υ_A. і Т.
Варіант 29. Дано: υ_A. = 3 м/с, υ_B = 1 м/с, l = 2,5 м, h = 20 м.
Визначити f і d.
Варіант 30. Дано: f = 0,25, l = 4 м, d = 3 м, h = 5 м.
Визначити υ_A. і τ.

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-1

У залізничних скальних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них з укосів кам'яних осипів споруджується «полиця» DC. Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки A укосу та вважаючи при цьому його початкову швидкість V_0 рівною нулю, визначити мінімальну ширину «полиці» b та швидкість V_C, з якою камінь падає на неї. Уздовж ділянки AB укосу, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l, камінь рухається τ, с.

При розв'язанні завдання вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя уздовж AB постійним, а опором повітря знехтувати.

Дано:

$V_A = 0$, $\alpha = 60^0$, $l = 4м$, $\tau = 1c$, $f \neq 0$, $h = 5м$, $\beta = 75^0$.

Визначити:

b та V_C.

Розв′язання

Розглянемо рух каменя на ділянці AB. Вважаючи, що камінь рухається прямолінійно вздовж поверхні AB, оберемо систему відліку ($x_1 y_1$) з початком у точці A в напрямку руху каменя. Приймаючи камінь за матеріальну точку, відобразимо (рисунок 11) сили, що діють на нього: вага $\overline{G}$, нормальна реакція $\overline{N}$ та сила тертя ковзання $\overline{F}$.

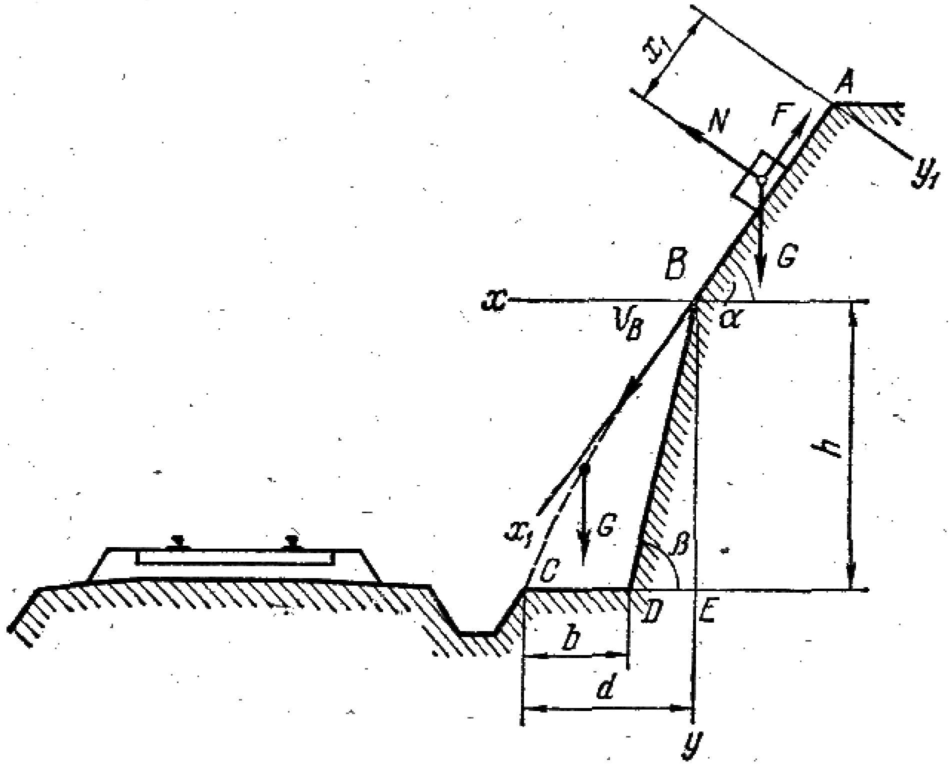

Рисунок 11

Складемо диференціальне рівняння руху [7] каменя вздовж AB:

$$mx_1'' = \sum X_{n1}, \qquad mx_1'' = G\sin\alpha - F.$$

Сила тертя $F = fN$, де $N = G\cos\alpha$.

Таким чином,

$$mx_1'' = G\sin\alpha - fG\cos\alpha \quad \text{або} \quad x_1'' = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння [1, 2] двічі, отримаємо:

$$x_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємось початковими умовами [5, 7] завдання: при $t = 0$ початкове положення $x_{10} = 0$ та початкова швидкість $x_{10}' = 0$. Склавши рівняння, отримані при інтегруванні, для $t = 0$ $x_{10} = C_1$ та $x'_{10} = C_2$, знайдемо постійні: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тоді

$$x'_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t\,,$$

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2\,.$$

Для моменту τ, коли камінь залишає ділянку АВ $x'_1 = V_B$, а $x_1 = l$ (швидкість $x'_1 = V_B$ та координата $x_1 = l$ каменя в точці В), тобто

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau\,;$$

$$l = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)\tau^2\,,$$

звідки $V_B = 2l/\tau$, тобто $V_B = (2\cdot 4)/1 = 8\,м/с$.

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С.

Систему відліку (xy) обираємо в напрямку падіння каменя з початком у точці В. Показавши силу тяжіння $\overline{G}$, що діє на камінь, складемо диференціальні рівняння його руху:

$$mx'' = 0,\quad my'' = G\,.$$

Інтегруємо перше рівняння:

$$x' = C_3,\qquad x = C_3 t + C_4\,.$$

Постійні інтегрування C_3 та C_4 визначимо з використанням початкових умов: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $x'_0 = V_B\cos\alpha$.

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні та складених для $t = 0$: $x'_0 = C_3$, $x_0 = C_4$, знайдемо, що

$$C_3 = V_B\cos\alpha \quad \text{та} \quad C_4 = 0\,.$$

Тоді

$$x' = V_B \cos\alpha, \qquad x = V_B \cos\alpha \cdot t.$$

Інтегруємо друге рівняння $my'' = G$:

$$y' = gt + C_5, \qquad y = \frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Початкові умови: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $y_0' = V_B \sin\alpha$. Із рівнянь, отриманих інтегруванням та складених для $t = 0$, $y_0' = C_5$, $y_0 = C_6$, знайдемо, що

$$C_5 = V_B \sin\alpha \qquad \text{та} \qquad C_6 = 0.$$

Остаточно

$$y' = gt + V_B \sin\alpha, \quad y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot t.$$

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = V_B \cos\alpha \cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії [1, 2] каменя знайдемо, виключивши параметр t з рівнянь руху. Визначивши t з першого рівняння та підставивши його в друге, отримаємо рівняння параболи

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2\alpha} + x \cdot tg\alpha.$$

У момент падіння $y = h = 5м$, а $x = d$, тобто

$$y = \frac{9{,}81 \cdot d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0{,}5^2} + d \cdot \sqrt{3},$$

звідки

$$d_{1,2} = -2{,}82 \pm 4{,}93,$$

тобто

$$d_1 = 2{,}11\,\text{м}, \quad d_2 = -7{,}75\,\text{м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d_1 = 2{,}11$ м.

Мінімальна ширина «полиці»

$$b = d - ED = d - \frac{h}{tg45^0} = 2{,}11 - \frac{5}{3{,}73} = 0{,}77\text{ м.}$$

Скориставшись рівнянням руху каменя $x = V_B \cos\alpha \cdot t$, знайдемо час Т руху каменя від точки В до точки С: $2{,}11 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot T$, звідки

$$T = 0{,}53\text{с.}$$

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$x' = V_B \cos\alpha, \qquad y' = gt + V_B \sin\alpha$$

за формулою

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,.$$

Для моменту падіння $(t = T = 0{,}53c)$

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos\alpha)^2 + (gT + V_B \sin\alpha)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0{,}5)^2 + (9{,}81 \cdot 0{,}53 + 8 \cdot 0{,}87)^2} = 12{,}8\,\text{м/с}.$$

Завдання Д-2

Динаміка механічної системи
Основні теореми динаміки механічної системи

Використання теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою. Ураховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1 – 3, 5, 6, 8 – 12, 17 – 23, 28 – 30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6 – 9, 11, 13 – 15, 20, 21, 24, 27, 29) (рисунок 12), нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у той момент, коли пройдений ним шлях стане рівним s.

У завданні прийнято такі визначення:

m_1, m_2, m_3, m_4 – маси тіл 1, 2, 3, 4;

R_2, r_2, R_3, r_3 – радіуси великих та малих кіл (коліс);

i_{2x}, $i_{3\xi}$ – радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри ваги;

α, β – кути нахилу площин до горизонту;

f – коефіцієнт тертя ковзання;

δ – коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 3.

Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі частки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

Таблиця 3

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	**δ. см**	**S, м**	**Примітки**
	кг				**см**		**см**		**град**					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	m	4m	1/5m	4/3m	-	-	-	-	60	-	0,10	-	2	
2	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2	
3	m	m	1/10m	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2	
4	m	2m	40m	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	$0{,}1\pi$	Масами ланок АВ, ВС і повзуна В знехтувати
5	m	2m	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	$0{,}28\pi$	Масою водила знехтувати
6	m	3m	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5	
7	m	2m	2m	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2	
8	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	2m	9m	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	
10	m	1/4m	1/4m	1/5m	-	-	-	-	60	-	0,10	-	3	
11	m	1/2m	1/4m	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	1/2m	1/5m	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5	
13	m	2m	5m	2m	30	20	26	-	30	-	-	0,24	2	
14	m	1/2m	5m	4m	-	25	-	-	-	-	-	0,20	2	Маси кожного з чотирьох коліс однакові
15	m	1/2m	4m	1/2m	20	15	18	-	60	-	-	0,25	1,5	
16	m	1/10m	1/20m	1/10m	10	12	-	-	-	-	-	-	$0{,}05\pi$	Масою водила знехтувати
17	m	1/4m	1/5m	1/10m	20	-	15	-	60	-	0,10	-	$0{,}16\pi$	Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	m	3m	m	-	35	15	32	-	60	-	0,15	-	0,2π	Масою водила знехтувати
19	m	1/3m	1/10m	m	24	-	20	-	60	-	0,15	-	1,5	
20	m	2m	20m	-	20	15	16	-	30	-	0,10	0,20	0,2π	Масами ланок AB, BC та повзуна B знехтувати
21	m	m	2m	-	20	20	16	-	30	45	0,20	0,32	1,2	
22	m	1/2m	1/4m	-	20	10	-	-	60	-	0,17	-	0,1π	Масою водила знехтувати
23	m	m	1/10m	4/5m	20	-	18	-	30	-	0,10	-	1	
24	m	3m	20m	-	20	30	18	-	-	-	-	0,60	0,08π	Масами ланок AB, BC та повзуна B знехтувати
25	m	1/3m	1/4m	-	16	20	-	-	-	-	-	-	0,04π	Масою водила знехтувати
26	m	1/2m	m	1/3m	30	-	20	-	-	-	-	-	0,6π	Маси та моменти інерції блоків 2 та 3 однакові. Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
27	m	m	6m	1/2m	20	20	16	-	30	-	-	0,20	2	
28	m	2m	3m	-	20	-	14	-	60	-	0,10	-	0,1π	Шатун 3 розглядати як тонкий однорід-ний стержень
29	m	1/4m	1/8m	-	-	35	-	-	15	30	0,20	0,20	2,4	
30	m	1/2m	3/10m	3/2m	26	20	20	18	30	-	0,12	-	2	

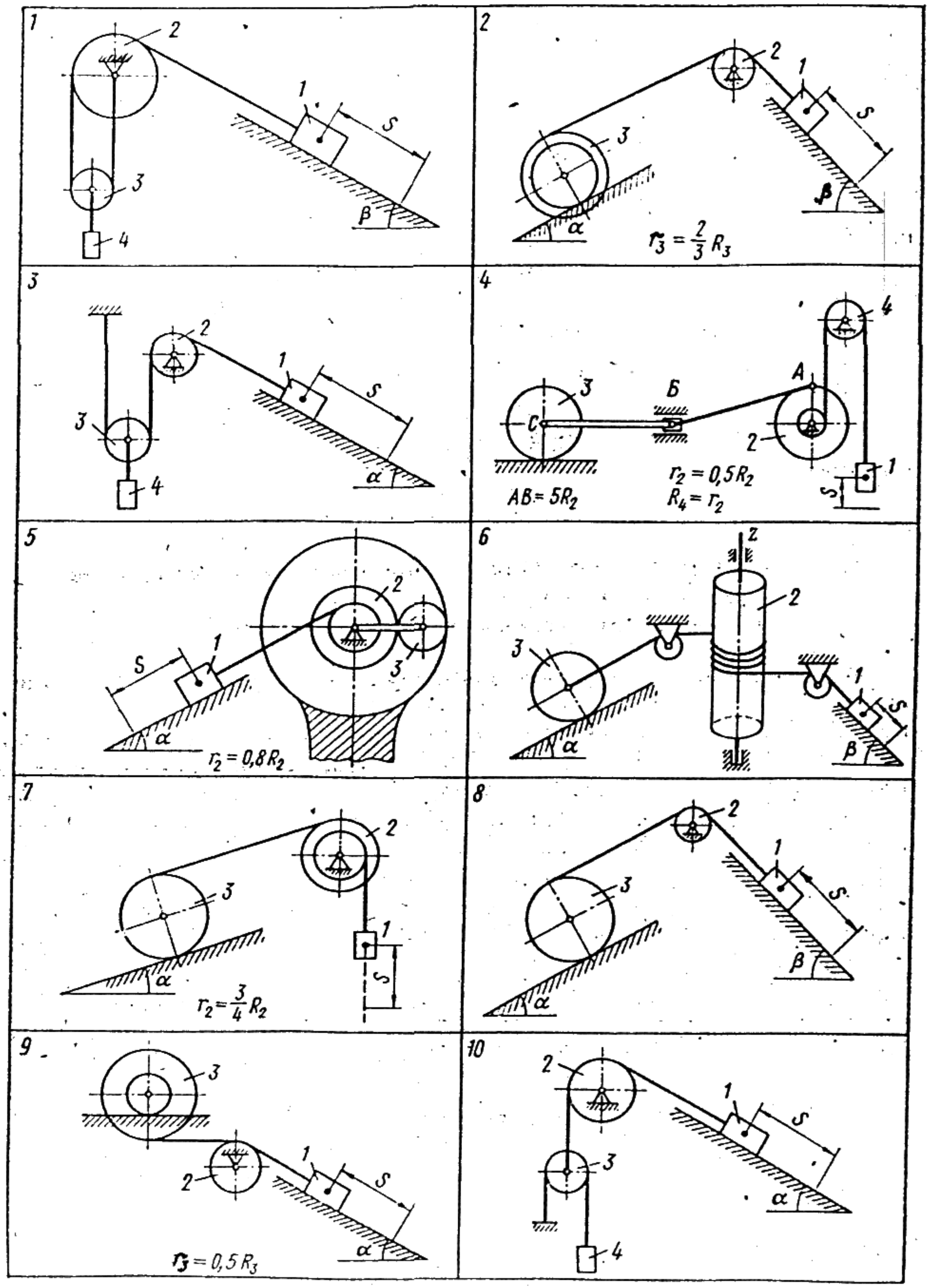

Рисунок 12, аркуш 1

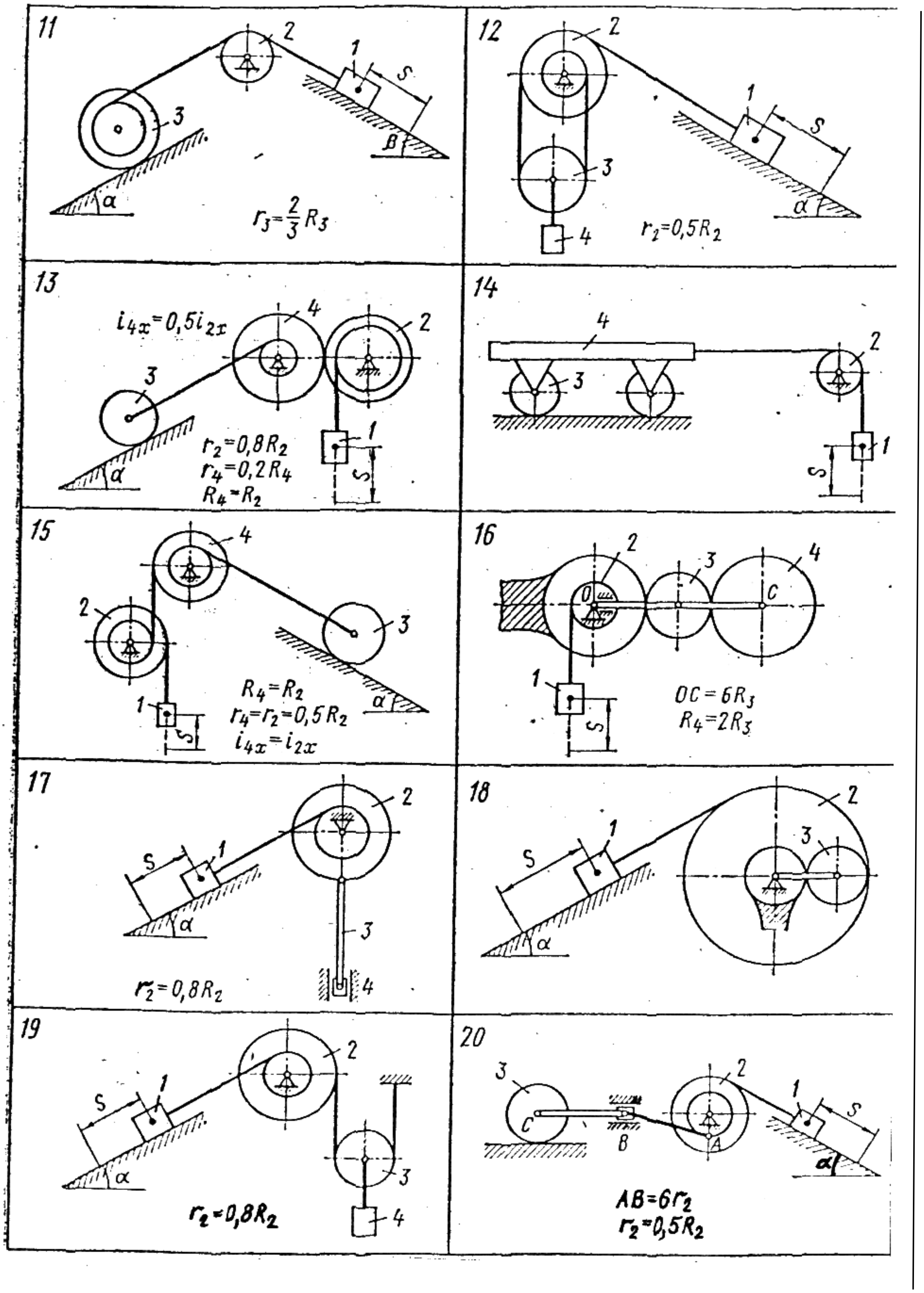

Рисунок 12, аркуш 2

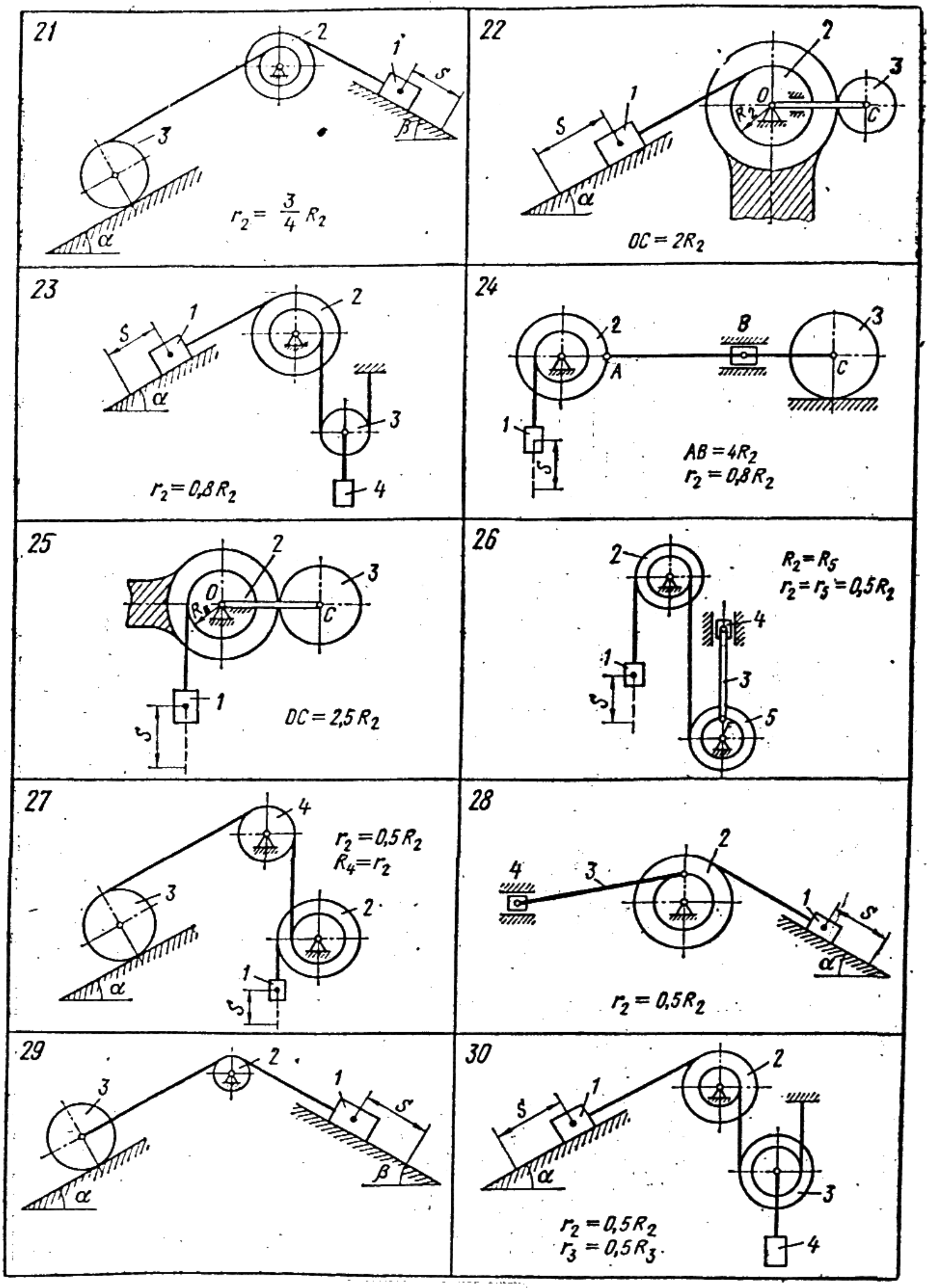

Рисунок 12, аркуш 3

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-2

Дано:

$$m_1 = 3m_2 = \frac{1}{2}m_3,\ R_3\text{=30 см},\ R_2\text{=20 см},\ r_2\text{=15 см},$$

$$i_{2x}\text{=17 см};\ \alpha=30^0,\ \beta=60^0,\ f=0{,}2,\ \delta=0{,}25,\ s=6\text{ м}.$$

Визначити:

V_1 (рисунок 13).

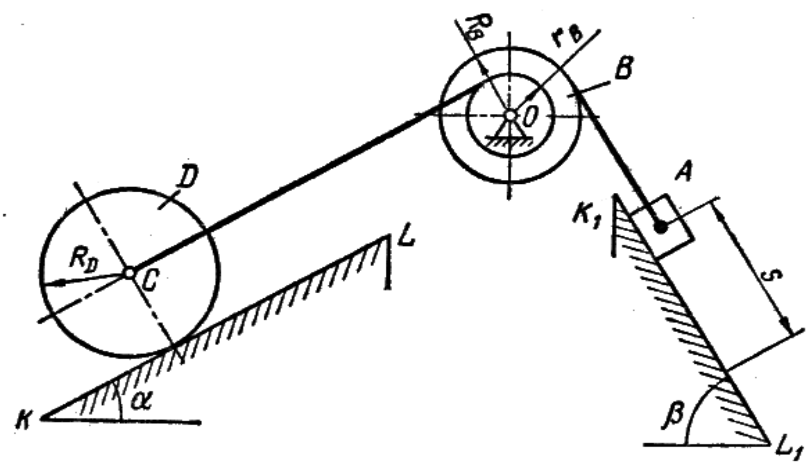

Рисунок 13

Розв'язання

Скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи [2, 7]:

$$T_2 - T_1 = \sum A_n\,,$$

де T_1 та T_2 – кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum A_n$ – сума робіт всіх сил, прикладених до системи.

Ураховуючи, що спочатку система перебувала в стані спокою, $T_1 = 0$, і рівняння теореми набуває вигляду:

$$T_2 = \sum A_n\ .$$

Знайдемо кінетичну енергію системи [1, 2] T_2 в кінцевому її положенні.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3:

$$T_2 = T_1 + T_2 + T_3 .$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально, дорівнює

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} .$$

Кінетична енергія блока 2, який рухається обертально навколо нерухомої осі, визначається так:

$$T_2 = \frac{J_{2x}\omega_2^2}{2} ,$$

де J_{2x} – момент інерції блока відносно осі обертання Ox:

$$J_{2x} = m_2 \cdot i_{2x}^2 ,$$

де ω_2 – кутова швидкість блока,

i_{2x} – радіус інерції блока.

Кінетична енергія котка 3, який здійснює плоский рух,

$$T_3 = \frac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \frac{J_{3\xi}\omega_3^2}{2} ,$$

де V_{C3} – швидкість центра мас (центра ваги) C котка;

$J_{3\xi}$ – момент інерції котка (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної поздовжньої осі $C\xi$.

$$J_{3\xi} = \frac{m_3 R_3^2}{2};$$

де ω_3 – кутова швидкість котка.

Підставляючи задані значення мас та значення моментів інерції у формулу запису теореми для кінетичної енергії системи, отримаємо

$$T_2 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + m_1 \cdot V_{C3}^2 + \frac{m_1 \cdot R_3^2 \cdot \omega_3^2}{2} =$$
$$= m_1 \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + V_{C3}^2 + \frac{R_2^2 \cdot \omega_2^2}{2} \right).$$

Виразимо швидкість V_{C3} та кутові швидкості ω_2 та ω_3 через швидкість V_1.

Обертальна швидкість точок обода кожного з барабанів блока дорівнює швидкості руху нитки, яка сходить з блока (рисунок 14).

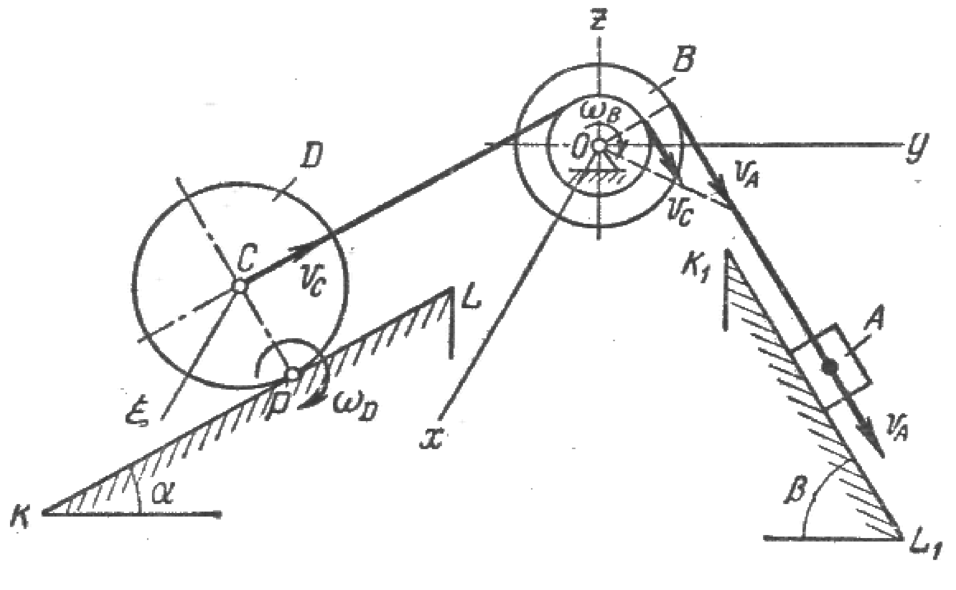

Рисунок 14

Тобто $\omega_2 = \dfrac{V_1}{R_2}$ та $\dfrac{V_{C3}}{V_1} = \dfrac{r_2}{R_2}$, звідки $V_{C3} = \dfrac{r_2}{R_2} \cdot V_1$.

Оскільки коток котиться без ковзання, миттєвий центр швидкостей котка лежить у точці Р. Тому

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{CP} = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot V_1 .$$

Після підстановки до останнього виразу теореми знайдених величин V_{C3}, ω_2 та ω_3 отримаємо таке значення кінетичної енергії системи:

$$T_2 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{i_{2x}^2}{R_2^2} + 3\frac{r_2^2}{R_2^2}\right) \quad \text{або} \quad T_2 = 2{,}93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} .$$

Знайдемо суму робіт усіх сил, прикладених до системи, на заданому переміщенні.

На вантаж 1 (рисунок 15) діють сили: вага $\overline{G}_1$, нормальна реакція $\overline{N}_1$ площі K_1L_1, сила тертя $\overline{F_1}$, спрямована протилежно швидкості вантажу 1, реакція нитки.

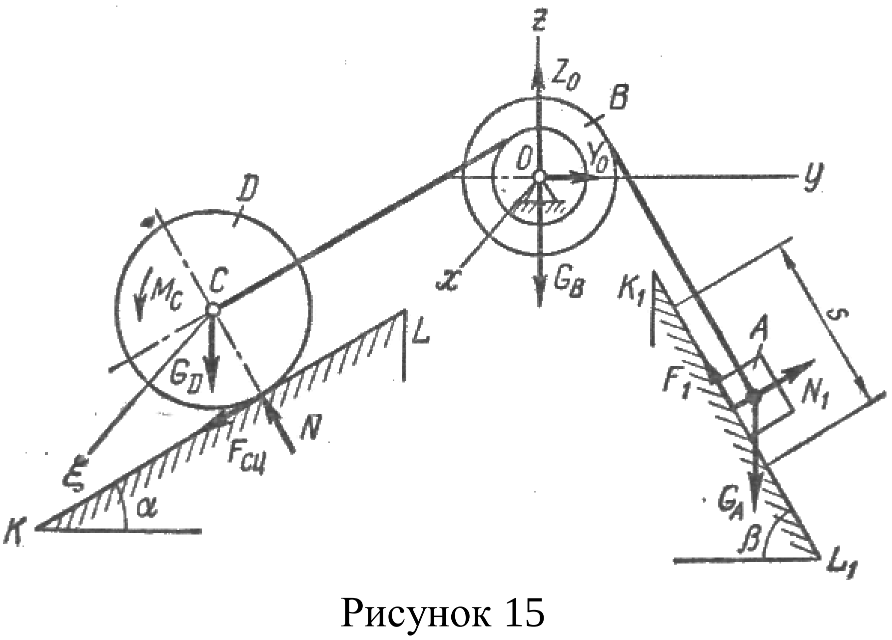

Рисунок 15

Силами, що діють на барабани 2, є їх вага $\overline{G_2}$, складові реакцій підшипників $\overline{Y_O}$ та $\overline{Z_O}$, а також реакції ниток.

До котка 3 прикладені сили: вага $\overline{G_3}$, сила зчеплення $\overline{F_{зч}}$ (сила тертя спокою), яка протистоїть ковзанню котка, нормальна реакція $\overline{N}$ площі KL, пара сил опору коченню з моментом M_C, а також реакція нитки.

Реакції ниток, прикладені до вантажу 1, барабанів 2 та котка 3, є внутрішніми силами розглянутої системи, робота яких при нерозтяжних нитках дорівнює нулю, тому реакції ниток на рисунку 15 не вказані.

Робота сили [1, 2, 4] $\overline{G_1}$ визначається рівнянням $A_{G1} = G_1 \cdot h$, де $h = s \cdot \sin\beta$ – відповідне вертикальне переміщення вантажу 1, тоді

$$A_{G1} = G_1 \cdot h = G_1 \cdot s \cdot \sin\beta .$$

Робота нормальних реакцій $\overline{N_1}$ та $\overline{N}$ дорівнює нулю тому, що кут між переміщенням s та цими силами дорівнює 90^0.

Робота сили тертя ковзання $\overline{F_1}$

$$A_F = -F_1 \cdot s .$$

Тому що $$F_1 = fN_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos\beta ,$$

$$A_F = -f \cdot G_1 \cdot \cos\beta \cdot s .$$

Сили $\overline{G_2}$, $\overline{Y_O}$ та $\overline{Z_O}$ не створюють роботи тому, що вони прикладені до нерухомої точки.

Робота $\overline{G_3}$

$$A_{G3} = -G_3 \cdot h_C = -G_3 \cdot s_C \cdot \sin\alpha ,$$

де s_C – переміщення центра мас котка.

Робота сили $\overline{F_{зч}}$ дорівнює нулю тому, що вона прикладена в миттєвому центрі швидкостей.

Робота пари сил опору коченню

$$A_{M_C} = -M_C \cdot \varphi_3,$$

де $M_C = \delta \cdot N = \delta \cdot G_3 \cdot \cos\alpha$ – момент пари сил опору коченню,

φ_3 – кутове переміщення котка 3 (кут обертання).

Отже,

$$A_{M_C} = -\delta \cdot G_3 \cdot \cos\alpha \cdot \varphi_3.$$

Сума робіт усіх сил, прикладених до системи, яка розглядається,

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin\beta - f \cdot G_1 \cdot \cos\beta \cdot s - G_3 \cdot s_C \cdot \sin\alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos\alpha \cdot \varphi_3.$$

Переміщення центра мас котка s_C та кут обертання φ_3 виразимо через переміщення вантажу *S*.

Оскільки лінійні (або кутові) переміщення перебувають у такій самій залежності, як відповідні лінійні (або кутові) швидкості, то

$$s_C = \frac{r_2}{R_2} \cdot s \quad \text{та} \quad \varphi_3 = \frac{s_C}{R_3} = \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s.$$

Підставимо ці значення в рівняння робіт

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin\beta - f \cdot G_1 \cdot \cos\beta \cdot s - G_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot s \cdot \sin\alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s$$

або

$$\sum A_n = m_1 \cdot g \cdot s\,(\sin\beta - f \cdot \cos\beta - 2 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin\alpha - 2\delta \cdot \cos\alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2}) =$$
$$= 0{,}004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s.$$

Прирівнюючи визначені значення T_2 та $\sum A_n$, отримаємо

$$2{,}93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} = 0{,}004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s,$$

звідки

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}004}{2{,}93} gs} = \sqrt{\frac{0{,}008}{2{,}93} \cdot 9{,}81 \cdot 6} = 0{,}40 \text{ м/с.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Аксьонова Н. А. Робочий конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Харків :УкрДАЗТ, 2005. 122 с.

2 Аксьонова Н. А., Оробінський О. В. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Харків : УкрДАЗТ, 2015. 152 с.

3 Аксьонова Н. А., Дунай Л. М. Комплексне методичне забезпечення до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Теоретична механіка». Харків : УкрДАЗТ, 2013. 70 с.

4 Бондаренко А. А. Теоретична механіка : підручник: у 2 ч. Ч. 1 : Статика. Кінематика. Київ : Знання, 2004. 599 с. (Вища освіта XXI століття). ISBN 966-8148-01-0.

5 Бондаренко А.А. Теоретична механіка. Частина 2. Динаміка. К.: Знання, 2004. - 590 с. - (Вища освіта XXI століття). ISBN 966-8148-02-9.

6 Теоретична механіка : навч. посіб. Ч. 1 : Статика, кінематика / В. Векерик, М. Лисканич, Я. Капелюх, О. Петрук, І. Цідило. Івано-Франківськ : Факел, 2002. 273 с.

7 Теоретична механіка : навч. посіб. Ч. 2 : Динаміка / В. Векерик, М. Лисканич, Я. Капелюх, О. Петрук, І. Цідило. Івано-Франківськ : Факел, 2002. 342 с.

КОМПЛЕКСНЕ МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

до виконання розрахунково-графічних робіт
з дисципліни

«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»

Відповідальний за випуск Аксьонова Н. А.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 19.06.20 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,5. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.