УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Вагони»

Р.І. Візняк, А.В. Рибін, І.О. Куденко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Частина 1

Харків 2012

Візняк Р.І., Рибін А.В., Куденко І.О. Основи теорії коливань

та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. – Ч. 1 – 25 с.

Даний конспект лекцій призначений для оволодіння студентами спеціалізації «Вагони» денної та заочної форм навчання курсом «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу» з метою підготовки та інтегрування отриманих знань у прикладний курс «Динаміка вагонів».

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вагони» 21 грудня 2009 р. протокол № 6.

Іл. 13, табл. 1, бібліогр.: 15 назв.

Рецензент

проф. І.Д. Борзилов

Р.І. Візняк, А.В. Рибін, І.О. Куденко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

ЧАСТИНА 1

Відповідальний за випуск Візняк Р.І.

Редактор Єткало О.О.

Підписано до друку 26..01.10 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 0,75. Тираж 200. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ’ЯЗКУ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

кафедра "Вагони"

Р.І. Візняк, А.В. Рибін, І.О. Куденко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій для студентів денної та заочної форм навчання

Частина 1

Харків 2012

Візняк Р.І., Рибін А.В., Куденко І.О. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу. Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. – Ч. 1 – 27 с.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вагони» 21 грудня 2009 р. протокол № 6.

Даний конспект лекцій призначений для оволодіння студентами спеціалізації «Вагони» курсом «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу» з метою підготовки та стійкості руху вагонів з метою підготовки та інтегрування отриманих знань у прикладний курс «Динаміка вагонів».

Іл. 13, табл. 1, бібліогр.: 15 назв.

Рецензент

проф. І.Д. Борзилов

1 КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ. ЕЛЕМЕНТИ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

1.1 Коливання. Види коливальних рухів

Коливання – це вид руху, що має певну міру повторюваності.

Найбільш поширеними видами коливальних рухів є:

Механічні коливання – коливання маятників, мостових конструкцій, будівель і споруд, кораблів на хвилі, струн музичних інструментів, будь-яких рухомих транспортних засобів, у т.ч. і вагонів у складі поїзда, елементів конструкції машин і механізмів у результаті відхилень від положення рівноваги.

Електромагнітні коливання – коливання напруженості електричних і магнітних полів, що збуджуються в коливальному контурі і поширюються у вигляді хвиль у просторі, об'ємному або відкритому резонаторі, тобто коливальній системі з явно вираженими резонансними властивостями.

Окрім цих, складніших видів, дуже поширені електричні, світлові, звукові, електромеханічні та ін.

За формою коливання розрізняють гармонічні, прямокутні, пилоподібні та ін.

Коливання різної природи лежать в основі великої кількості явищ і фізичних процесів, наприклад:

1 *Коливання кристалічної решітки* - коливання атомів, іонів або молекул біля положень рівноваги (вузлів кристалічної решітки). *Амплітуда* – максимальне переміщення при цих коливаннях, вона тим вища, чим більша температура.

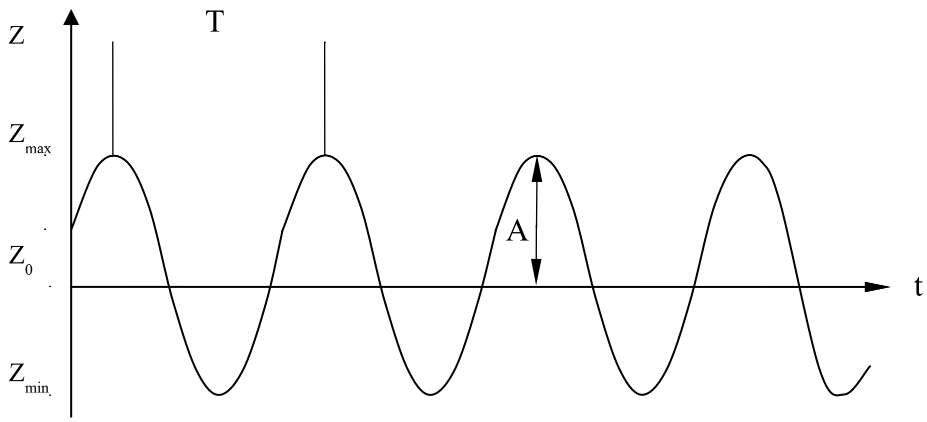
2 *Коливання земної кори* - постійні (const) повільні підйоми й опускання земної кори, що змінюють один одного в часі та просторі (швидкість цих коливань складає від 10^{-2} до *n* см в рік).

3 *Коливальні реакції* – хімічні реакції швидкості й концентрацій деяких проміжних речовин з'єднань від часток секунд до десятків хвилин.

4 *Важливі біологічні процеси організму людини* – генерації нервових імпульсів і біоритмів, робота серцево-судинної системи, скорочення м'язів та ін.

Тобто у всіх проявах життєдіяльності ми обов'язково пов’язані з дією коливань (хвиль).

Отже, *коливання* – це рухи або процеси, що відбуваються та механічних й інших системах і характеризуються певною повторюваністю у часі. Іншими словами, це зміни параметрів стану системи, що відбуваються більш-менш регулярно у часі, тобто періодично (рисунок 1.1).



T – період коливань, с; A – амплітуда коливань, м;
Z – переміщення, м; Z_0 – початкове переміщення, м; t – час, с

Рисунок 1.1 – Графік коливань механічної системи

Положення або стан системи, що коливається, визначається узагальненою координатою (переміщення *a*, кут *φ*, тиск *p*, електрична напруга $u_{ел}$, час *t*, швидкість *υ*). У теорії коливань досліджується її зміна Z у часі t: Z = z(t), при цьому особлива увага приділяється процесам, при яких ця зміна є періодичною, тобто

$$Z\ (t) = z(t + T), \qquad (1.1)$$

де T – період коливань, с.

Період – це час, за який здійснюється один повний цикл коливального процесу.

Величина, що є зворотною до періоду коливань Т, називається *лінійною частотою коливань* і показує число здійснюваних коливань за одиницю часу, наприклад, за 1 с, 1/с = Гц,

$$\nu = 1/T. \tag{1.2}$$

Наприклад, у системі *с*, якщо частота коливань ν = 6 Гц, відбувається 6 повних коливань за 1с.

Також у розрахунковій практиці часто використовують кругову частоту ω, а саме число коливань за 2π с, рад/с,

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T. \tag{1.3}$$

Окрім T, ν, ω коливання характеризуються також амплітудою A, що складає ½ загального розмаху коливання (тобто виражає зміну узагальнених координат Z за Т). Якщо Z_{max} - найбільше, а Z_{min} - найменше значення X протягом періоду, то

$$A = 1/2\ (Z_{max} - Z_{min}). \tag{1.4}$$

При періодичних коливаннях значення Z коливається біля середнього значення X_0. Середнє значення може бути або задане, або визначене як

$$Z_0 = 1/2(Z_{max} - Z_{min}).$$

При симетричних коливаннях це значення водночас відповідає стану спокою або положенню рівноваги.

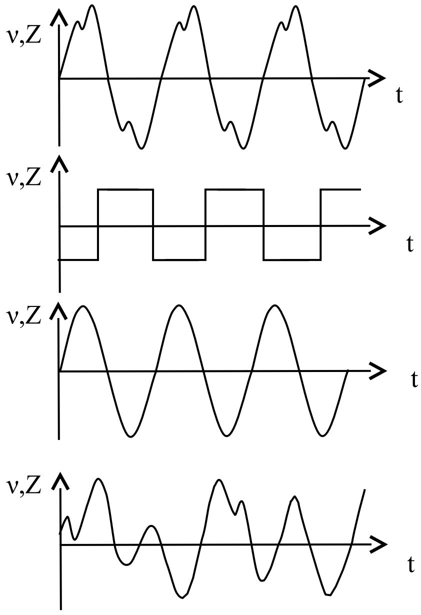
Якщо Z (t) задовольняє умові періодичності, тобто виразу (1.1) з достатнім наближенням, то мається на увазі майже періодичний процес коливань, вважаючи, що:

$$|\ Z(t) = z(t + T)| < \varepsilon, \tag{1.5}$$

де ε – раніше задана мала величина.

Проведемо класифікацію коливань за різними ознаками і результати зведемо у таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Класифікація коливань за різними ознаками

Ознака	Вид коливань	Пояснюючі відомості
Характер фізичних процесів	1 Механічні 2 Електромагнітні 3 Електромеханічні 4 Світлові 5 Звукові	Коливання різної фізичної природи описуються однаковими характеристиками і рівняннями, а отже, до їх вивчення здійснюється єдиний підхід
Характер залежності від часу $f(t)$	1 Періодичні (коливання, що характеризуються такими функціями, що при будь-якому значенні часу t, $f(t+T)=f(t)$) 2 Гармонічні (окремий випадок періодичних коливань) 3 Неперіодичні (якщо $f(t+T) \neq f(t)$);	
Спосіб збудження (породження процесу)	1 Вільні або власні	Відбуваються за рахунок початкової передачі енергії при послідовній відсутності зовнішніх впливів на коливальну систему
	2 Вимушені	Відбуваються при періодичній зовнішній дії
	3 Параметричні	Відбуваються при періодичній зміні за рахунок зовнішньої дії деякого параметра коливальної системи
	4 Автоколивання	Незатухаючі коливання, що виникають і підтримуються в дисипативній* системі за рахунок const зовнішнього джерела енергії, причому властивості цих коливань визначаються самою системою

*(лат *dissipatio*), розсіяння. Дисипативні механічні системи ті, повна енергія яких (сума кінетичної та потенційної енергій) при русі убуває переходячи в інші види енергій, наприклад в теплову, тобто відбувається дисипація енергії. Наприклад, тіло, що рухається по поверхні іншого тіла за наявності тертя, або рух тіла у водному середовищі.

** (грецьк. phasis), поява. Це стан коливального процесу в окремий момент часу.

З усіх видів коливань важливо виділити саме гармонічні коливання, оскільки всі коливання, що зустрічаються в природі й техніці, близькі до гармонічних коливань, а також різні періодичні процеси (наприклад будь-які повторення через однакові проміжки часу). Їх можна представити як накладання гармонічних коливань, які описуються рівняннями такого типу:

$$Z = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

або (1.6)

$$Z = A\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

де A – амплітуда коливань, м;
ω_0 - кругова (циклічна) частота, рад/с;
φ – початкова фаза** коливань, рад;
$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань в момент часу t, рад;
Z – миттєве значення коливальної величини, м.

З виразу (1.6) при $t = 0$; $Z = A\cos\varphi$; $Z_{max} = A$; тому що зміна $\cos\varphi$ як функції, знаходиться у межах [-1;1], при цьому $Z = [-A;A]$; T – період або проміжок часу t, протягом якого фаза коливань отримує приріст 2π, тобто $\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + T) + 2\pi$, звідки $T=2\pi/\omega_0$ (або T – тривалість одного повного коливання, с].

1.2 Коливальні системи

Коливальні системи – такі системи, у яких у результаті порушення стану рівноваги можуть збуджуватися власні коливання. Коливальні системи бувають:

1 *консервативні* (без втрат енергії в ідеальному випадку, що в реальності неможливо);
2 *дисипативні* (затухаючі внаслідок енергетичних втрат, наприклад, маятник і замкнуті коливальні контури);
3 *активні* (найбільш важливі з них автоколивання, втрати енергії в яких поповнюються за рахунок джерела енергії, наприклад генератори електричних коливань) та ін.

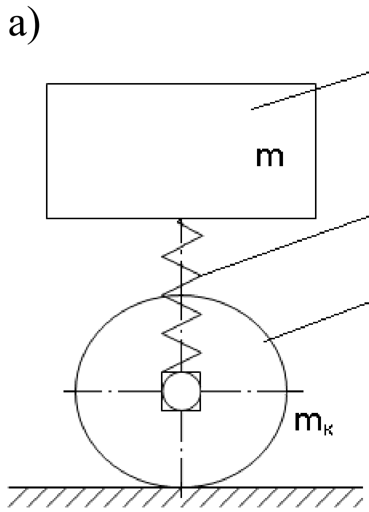
Коливальні системи розрізняють також за кількістю степенів вільності. У механічних системах (коливальних системах) як основні елементи застосовують тверді тіла, сполучені жорсткими й пружними складовими або спеціальними механізмами: якщо навіть вільний рух твердих тіл обмежується зовнішніми зв'язками (тобто тими, що не входять у систему, направляючими або стримуючими властивостями), то все це в сукупності носить назву *зв'язків*, що накладаються на коливальну систему.

Зв'язки бувають:

– *внутрішні* (усередині пристроїв системи);
– *зовнішні* (що не входять у систему).

Наприклад, коливальними механічними системами є автомобілі та вагони у складі поїзда, як транспортні засоби, що рухаються по авто- і залізничному полотну.

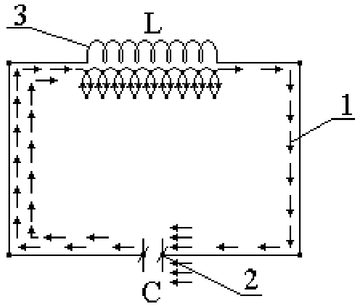
Розглянемо прості схеми коливальних систем (рисунки 1.2, 1.3).



а – одновісна модель вагона з постійними зв’язками;
б – одновісна модель вагона з пружними зв’язками та гідравлічними демпферами(гасниками коливань).

1 – кузов; 2 – пружний зв’язок (підвішування);
3 – необресорений елемент; 4 – в'язкий зв'язок (гідравлічний демпфер);
m – маса кузова; m_k – маса колеса

Рисунок1.2 – Схеми коливальних систем з одним степенем вільності



1 – електричний контур; 2 – конденсатор ємністю С, Ф;
3 – котушка індуктивності L, Тл.

Рисунок 1.3 – Коливальний контур замкнутого електричного ланцюга

Конденсатор 2 утримує й накопичує заряд, який перенаправляється в котушку 3 через дроти 1, у результаті цього виникає активний опір, обумовлений згасанням коливань, як і реальний коливальний контур у цій системі.

2 КЛАСИФІКАЦІЯ СИЛ

2.1 Позиційні сили

Зовнішні сили, що діють на механічну систему, яка складається з декількох тіл і множини точок, а також внутрішні реакції зв'язків різні за своєю природою та роллю, яку вони відіграють у коливальному русі.

Механічна система – множина матеріальних точок, об'єднаних наявністю механічних взаємодій між собою.

Матеріальна точка – точка, маса якої відмінна від нуля.

Опишемо властивості різних типів сил, стосовно системи з одним степенем вільності. У свою чергу *степені вільності* (у механіці) - незалежні між собою можливі переміщення механічної системи. Число степенів вільності залежить від числа матеріальних точок, що утворюють систему, їх числа й характеру накладених на систему механічних зв'язків. Так, відомо, що вільне тверде тіло має 6 степенів вільності: 3 поступальних (уздовж трьох осей декартової системи координат) та 3 обертальних (навколо цих осей).

Позиційні сили – $F=F^0\ (x)$ - такі сили, які визначають миттєву конфігурацію системи, тобто її відхилення від положення рівноваги. Іншими словами, *позиційні сили* – сили, що залежать від координат системи.

Узагальнені координати – незалежні між собою параметри, які позначаються q_i $\{q_1,q_2,...,q_n\}$, де $n=(3N-m)$, N – кількість точок системи, m – кількість голономних, тобто обмежуючих вибір можливих положень системи. Кількість незалежних координат n дорівнює числу степенів вільності механічної системи, що однозначно визначають її положення в просторі.

Зв'язками називають обмеження, що ускладнюють вільний рух системи, які створюються та здійснюються такими ж або іншими матеріальними тілами.

Якщо F^0 та x різних знаків, то F^0 – відновлювальна сила системи, тоді

$$F= - F^0\ (x). \qquad (2.1)$$

Наприклад, цьому повністю відповідає сила пружності, обумовлена деформацією зовнішніх або внутрішніх зв'язків. Згідно із законом Роберта Гука (1678 р.):

$$F^0= - c\ x, \qquad (2.2)$$

де c – узагальнений коефіцієнт жорсткості або пружності, Н/м,
x - подовження (деформація) тіла.

Розглянемо приклад, що ілюструє фізичну сутність закону Гука. Нехай вісь симетрії циліндричної пружини збігається з прямою AX (рисунок 2.1, а). Один кінець пружини закріплений в опорі в точці A, а другий - вільний і до нього прикріплене тіло M. Коли пружина не деформована, її вільний кінець знаходиться в точці C. Цю точку вважатимемо початком відліку координати x, що визначає положення вільного кінця пружини.

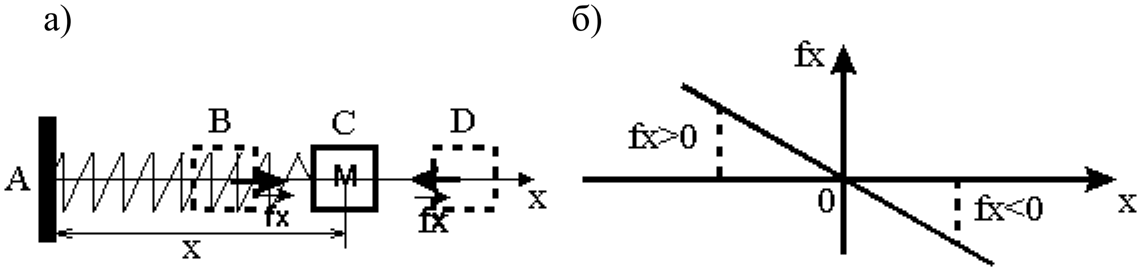


Рисунок 2.1 – Ілюстрація закону Гука

Розтягнемо пружину так, щоб її вільний кінець знаходився в точці D, координата якої x>0: у цьому положенні пружина діє на тіло M пружною силою

$$F^0 = - cx < 0. \qquad (2.3)$$

Стиснемо тепер пружину так, щоб її вільний кінець знаходився в точці B, координата якої x<0. У цьому положенні пружина діє на тіло M пружною силою

$$F^0 = -cx > 0. \qquad (2.4)$$

З рисунка видно, що проекція сили пружності пружини на вісь AX завжди має знак, протилежний до знака координати x, оскільки сила пружності направлена завжди до положення рівноваги C. На рисунку 2.1, б зображено графік закону Гука. На осі абсцис відкладають значення подовження x пружини, а на осі ординат - значення сили пружності. Залежність F^0 від x лінійна, тому графік є прямою, що проходить через початок координат.

Відновлювальна сила – сила такої механічної дії на матеріальну точку, тіло або систему, при якій відновлюється положення її рівноваги.

Наприклад, рисунок 2.2, а – архімедова сила плавучості, яка для тіла, що занурене у воду, пропорційна глибині занурення *h*.

Також відновлювальна сила обумовлена дією вантажу, яка присутня у механічних маятниках (рисунок 2.2, б), де G при малих відхиленнях маятника пропорційне куту відхилення φ.

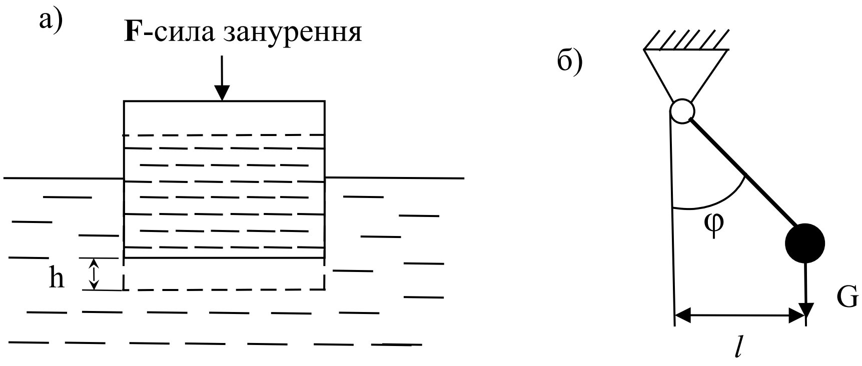
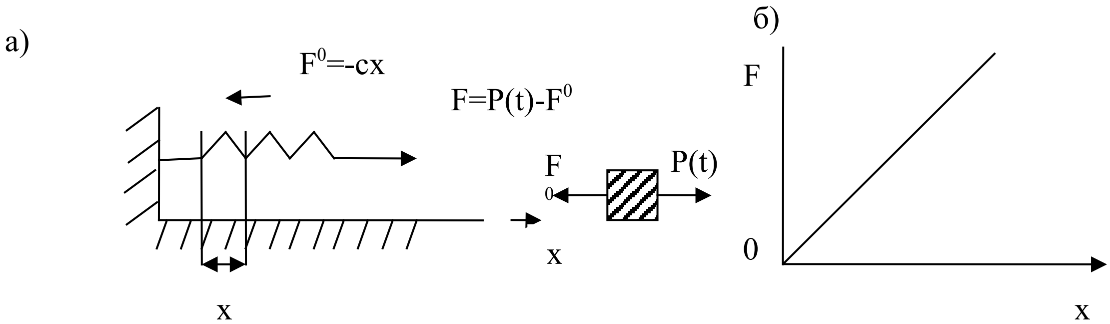


Рисунок 2.2 – Приклади дії відновлювальних сил

Часто відновлювальна сила F^0 має змішаний характер. Наприклад, при одночасній дії сил тяжіння і пружності пружин.

Система, для якої силова характеристика є прямою в координатах *x, F* – називається *лінійною* (рисунок 2.3).



а – дія сили F на пружину – зовнішня сила, що прикладається до системи;
б – силова характеристика системи (А – прямопропорційна х)

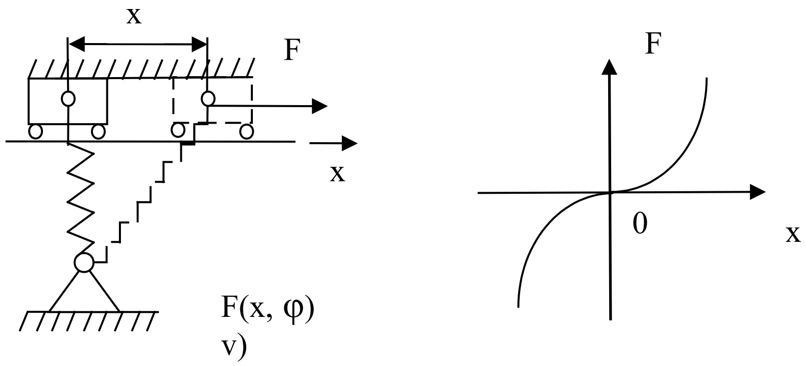
Рисунок 2.3 – Лінійна система

У практиці часто зустрічаються механічні системи, для яких зв'язок узагальненої координати з узагальненою силою не виражається лінійною залежністю *F(x),* (рисунок 2.2, б).

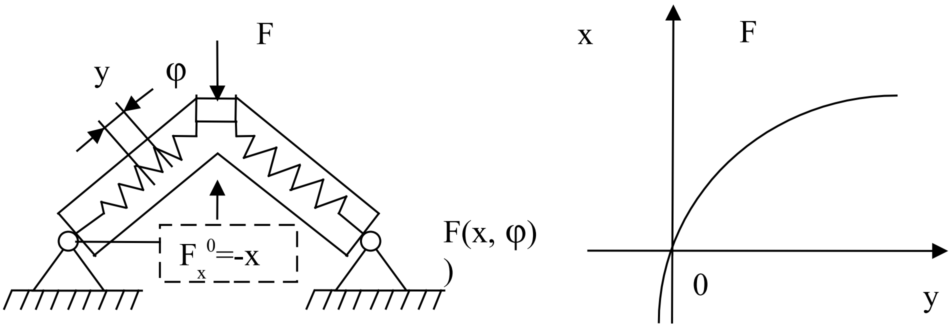
Нелінійні механічні системи – такі системи, властивості яких неможливо описати одним коефіцієнтом жорсткості. Отже, графіки силових характеристик цих систем або лінійні, або частково-лінійні.

Наведемо декілька прикладів нелінійних систем, а також їх силові характеристики (рисунок 2.4). При цьому прийнято розрізняти жорсткі (із зростаючою формою) і м'які (з тією, що убуває) нелінійні характеристики (рисунок 2.5).

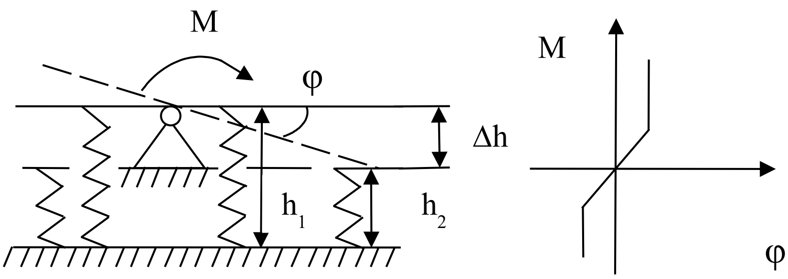
а)



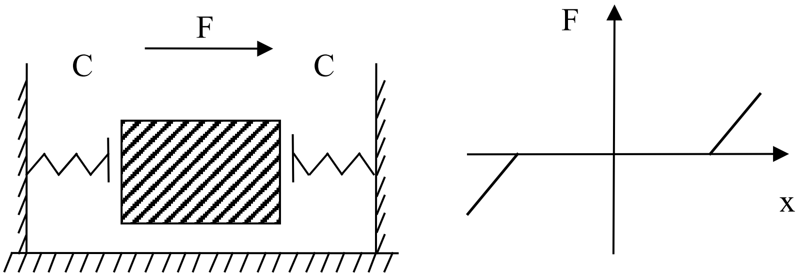
б)



в)



г)



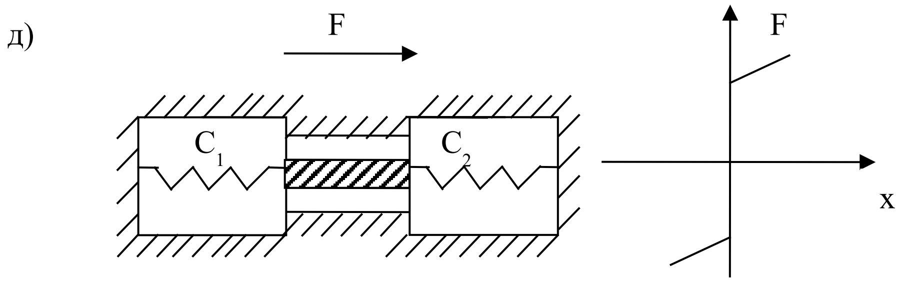


Рисунок 2.4 – Приклади нелінійних механічних систем та їх силових характеристик

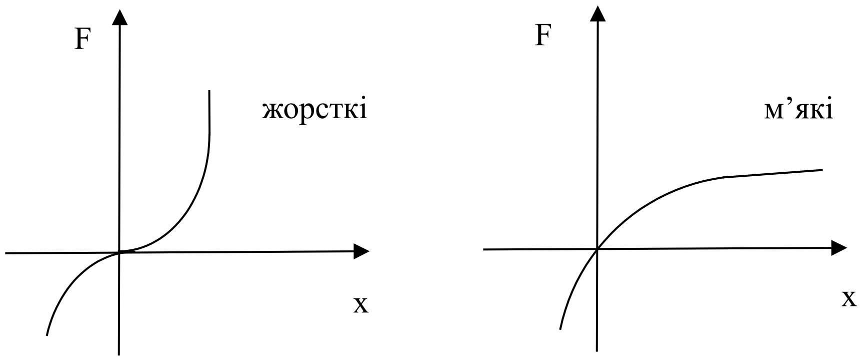


Рисунок 2.5 – Форми силових характеристик

Розглянемо кожен з наведених на рисунку 2.4 випадків:

а) поступальний рух тіла обмежено вертикальним пружним зв'язком із достатньою горизонтальною жорсткістю;

б) відновлювальний ефект у системі від сили F досягається за допомогою двох пружних елементів, розташованих під кутом α до опорної площини;

в) опора А системи, яка передає обертальний момент М через пружні елементи заввишки h_1 і h_2 на опорну площину. При збільшенні навантаження М послідовно включається в роботу елемент з h_2, тобто підресорювання в цьому випадку – білінійне (лат. *bi*-два), тобто воно складається з двох частин або подвоєне;

г) поперечні переміщення об'єкта в обидва боки обмежені однаковими горизонтальними пружними елементами, при контакті з якими відбувається відновлення і повернення об'єкта в первинне положення;

д) передача сили F на проміжний елемент приводить до послідовного включення в роботу однакових проміжньо-розташованих пружних елементів з деяким запізненням у результаті додаткової деформації поперечних розділювальних складових.

Позиційні сили в деяких лінійних механічних системах з декількома степенями вільності запишемо формулами:

$$
\begin{aligned}
F_1^0 &= -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 - \ldots - c_{1n}q_n; \\
F_2^0 &= -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 - \ldots - c_{2n}q_n; \\
F_n^0 &= -c_{n1}q_1 - c_{n2}q_2 - \ldots - c_{nn}q_n,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

де q, F_t^0 – узагальнені сили і координати;

n – число степенів вільності.

Або в іншому вигляді:

$$
\begin{aligned}
F_t^0 &= -\Sigma_k{}^n{}_{=0}\, c_i\, q_i \ (i = 1, 2, \ldots n); \\
F_t^0 &= -\Sigma_{k=0}\, c_i x_i \ (i = 1, 2, \ldots n),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

де q_k і F^0 – вектори узагальнених координат та узагальнених сил;

c_{ik} – коефіцієнти жорсткості елементів системи.

2.2 Дисипативні сили

Для опису властивостей системи введемо характеристику, що відображає її пружно-в’язкі властивості і яка має назву *коефіцієнт в'язкого опору* демпфера. *В'язкість* (абсолютна в'язкість, або динамічна в'язкість) - це властивість рідин і газів, що характеризує їх опір ковзанню або зрушенню, визначається за формулою $\left[\frac{Нс}{м}\right]$

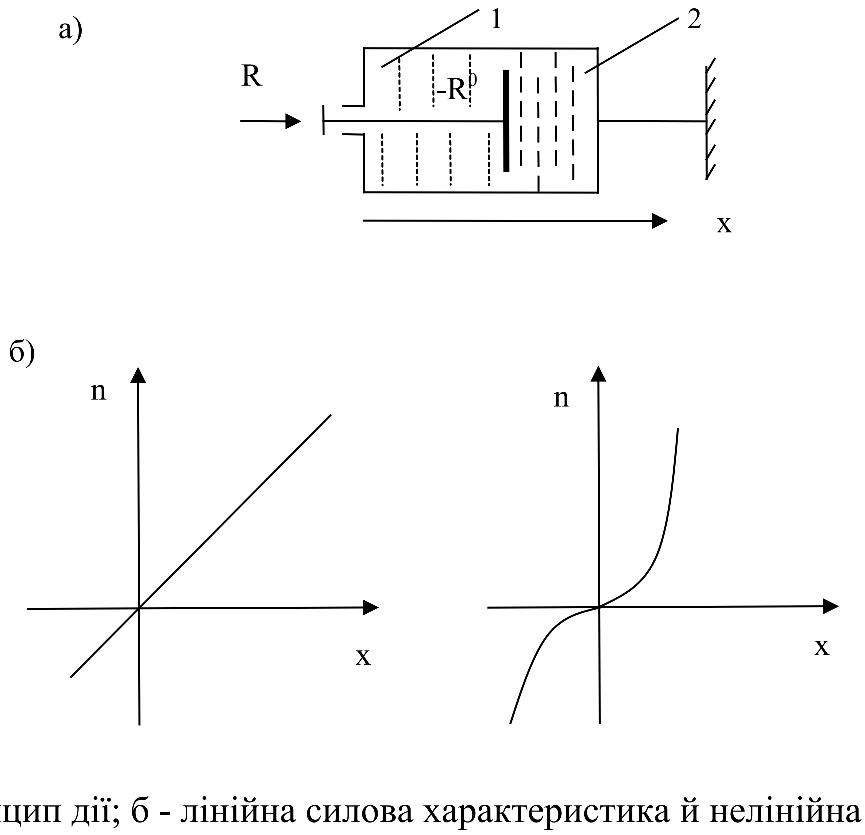
$$\beta = \frac{P}{V}, \qquad (2.7)$$

де P – сила, Н;

V – швидкість, м/с.

Окрім відновлювальних сил, у системі розвиваються сили опору R^0, що зв'язані зі швидкістю точок системи. Їх необоротна негативна робота здійснює дисипацію (розсіювання) механічної енергії. Наприклад, це сили тертя $F_{тр}$ в опорах та у зчленованих системах; сили опору середовища (рідкого і газоподібного), у яких відбуваються коливання; внутрішні сили тертя $F_{тр}$ в матеріалі системи (сили, що виникають при деформації спеціальних поглиначів енергії (демпферів (нім. *dämpfen* – зменшувати, заглушати).

Розглянемо простий гідравлічний демпфер горизонтальної дії руху поршня 1 уздовж циліндра 2 (рисунок 2.6, а):



а - принцип дії; б - лінійна силова характеристика й нелінійна

Рисунок 2.6 – Гідравлічний демпфер

У першому випадку опір демпфера пропорційний швидкості стиску рідини всередині циліндра, тому силова характеристика лінійна – у вигляді прямої. У другому – опір демпфера залежить від швидкості та інших факторів, що впливають на її величину, тому графік силової характеристики нелінійний – у вигляді кривої.

Опір демпфера пропорційний швидкості і може бути записаний формулою

$$R= - R^0(\dot{x}), \tag{2.8}$$

де R – зовнішня сила, прикладена до поршня, Н;

$\dot{x}$ – узагальнена швидкість, м/с;

R^0 – узагальнена сила лінійного опору або вектор сил опору, Н.

У механічних системах з декількома степенями вільності вектор сил опору записується у вигляді

$$R^0= - B\dot{x}, \tag{2.9}$$

де x – вектор узагальнених координат,

B – матриця коефіцієнтів опору.

2.3 Збурюючі сили

Розглянемо роботу неврівноваженого ротора (сердечника) в електричній машині (рисунок 2.7). Як відомо, він здійснює обертальний рух з великим числом обертів n, об/хв.

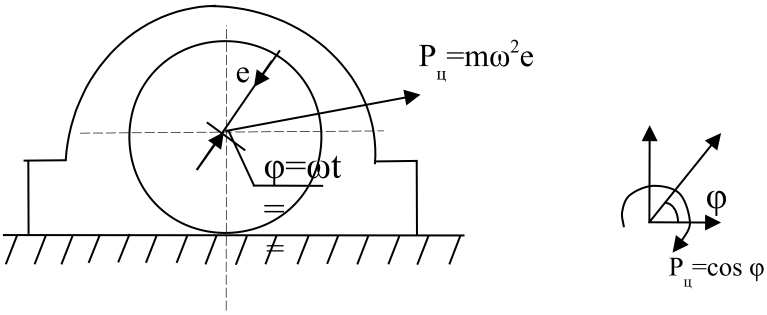


Рисунок 2.7 – Електрична машина на фундаменті з дисбалансом у роторі

$$P_{ц}=m\omega^2 e, \tag{2.10}$$

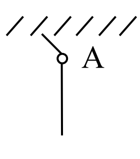
де e – ексцентриситет, м;
m – маса, кг;
ω – кутова швидкість, рад/с;
φ – переміщення, рад.

$P_{ц}=m\omega^2 e$ – відцентрова сила, яка є причиною створення в системі вимушених коливань. Вона практично постійна, але її напрям з горизонтальною і вертикальною складовою, а також момент відносно центра опори змінні.

Найбільш розповсюджений закон зміни збурюючих сил у часі – гармонічний (таблиця 1.1). Він діє в машинах з неврівноваженим ротором, що рівномірно обертає. Наприклад, використання вібраційної машини типу УРАЛЦНИИ-МПС для очищення вагонів від залишків насипних вантажів. Вона встановлюється на верхній обв'язувальний пояс і передає вагону періодичні вимушені коливання. Проявом збурюючих сил також може бути представлена дія нерівності рейок по відношенню до колісної пари.

Сили змішаного характеру розвиваються в складних механічних системах і розкладаються на суму зовнішніх, відновлюючих й дисипативних сил:

$$F^0(q)+R^0(\dot{q})+P(t)=0. \tag{2.11}$$



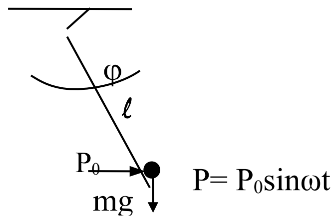


Рисунок 2.8 – Маятникова параметрична система

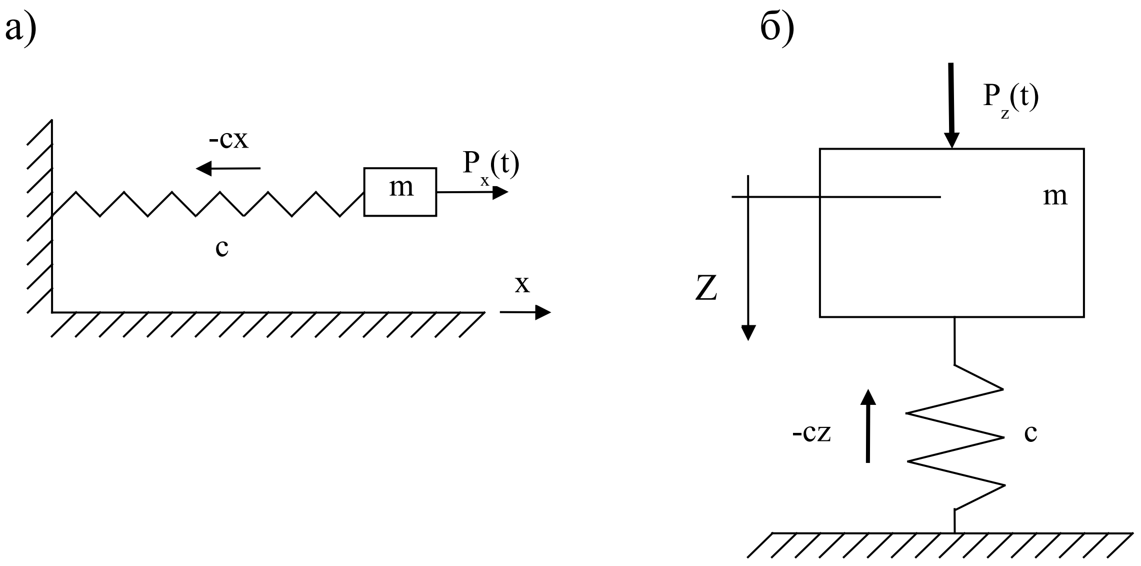
Розглянемо систему, зображену на рисунку 2.8. У момент відхилення маятника на вантаж діє не тільки сила тяжіння, а й зовнішня сила P, що викликає коливання системи. Тоді силовий момент відносно шарнірно-рухомої опори А маятника буде записаний у вигляді

$$M = -(mg + P_0 \sin\omega t)\cdot l\cdot \sin\varphi. \qquad (2.12)$$

Момент M залежить від кута та часу, тобто $M(\varphi,t)$, але його особливість полягає в тому, що неможливо чітко виділити його відновлюючу $M_1(\varphi)$ та збурюючу частини $M_2(t)$.

3 Вільні коливання. Лінійні системи з одним степенем вільності без непружного опору

Як приклади для дослідження даного явища, розглянемо одномасові системи, що моделюють сприйняття повздовжніх і вертикальних сил. Аналогом у цьому випадку може служити робота автозчепного пристрою при розтягуванні (рисунок 3.1, а) й кузова вантажного вагона на ресорах (рисунок 3.1, б), а також їх подальше відновлення. Тут *m* - маса системи, кг; *c* - жорсткість пружних елементів, виконаних у вигляді витих циліндричних пружин, Н/м; $P_x(t)$ і $P_z(t)$ відповідно зовнішня збурююча сила, прикладена у напрямі осей x і z; *-cx* і *-cz* відповідно відновлювальна (пружна) сила пружин.



а - з урахуванням передачі повздовжніх сил;
б - з урахуванням передачі вертикальних сил

Рисунок 3.1 – Схеми одномасових систем з одним ступенем волі без дисипації енергії:

Враховуємо, що збурююча сила *Pi(t)* відсутня, але вже здійснено порушення стану рівноваги. Як видно тепер, система буде представлена собі сама без повторних прикладань *Pi(t)*. Рухи, що при цьому виникли, - вільні. Вони отримали назву ***вільних*** або ***власних коливань*** системи, що відбуваються самі по собі до повного їх зведення до нуля або згасання. Спочатку на систему накладені умови x_0, z_0 - початкове переміщення υ_0 - початкова швидкість.

Рівноважне положення таких систем характеризується початковими умовами:

$$x(z) = x_0(z_0);\ \upsilon_{x(z)} = \upsilon_0,\ \text{при } t=0.$$

Складемо рівняння руху таких систем:

$$m\ddot{x} = \sum x_i = P_x;\ m\ddot{z} = \sum z_i = P_z, \qquad (3.1)$$

де P_x і P_z - відповідно відновлювальні сили (сили пружності пружин).

$$P_x = -cx;\ P_z = -cz. \qquad (3.2)$$

Тоді очевидно, що

$$m\ddot{x} + cx = 0\,; m\ddot{z} + cz = 0 \qquad (3.3)$$

або після нескладних перетворень:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}x = 0;\ \ \ddot{z} + \frac{c}{m}x = 0\,;$$

$$\ddot{x} + p^2x = 0;\ \ \ddot{z} + \nu^2 z = 0, \qquad (3.4)$$

де $p, \nu = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}$, - частоти вільних коливань системи, Гц*.

Вираз (3.4) являє собою звичайні лінійні диференційні рівняння другого порядку (однорідні з постійними коефіцієнтами при незалежних *x* і *z*).

Розв'язки цих рівнянь знаходять у вигляді (з урахуванням довільних постійних c_1 і c_2): ($c_1 = x_0(z_0)$ й $c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\nu}\left(\frac{\dot{z}_0}{\nu}\right)$):

$$x = x_0\cos pt + \frac{\dot{x}_0}{\nu}\sin pt, \quad z = z_0\cos\nu t + \frac{\dot{z}_0}{\nu}\sin\nu t. \qquad (3.5)$$

*1Гц (Герц (Herts), на честь нім. фізика Г.Р. Герца. Тобто частота періодичного процесу, при якій за час t=1с відбувається один цикл процесу.)

Вирази 3.5 це рівняння руху системи, розглянутих на рисунку 3.1.

В іншій, еквівалентній формі:

$$x = A sin(pt + \alpha), \quad z = B sin(\nu t + \beta), \qquad (3.6)$$

де A і B – амплітуди* коливань, м;

α і β – початкова фаза або величина положення системи в початковий момент часу t.

Амплітуда коливального процесу:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}}{p}\right)^2}; \qquad B = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}}{\nu}\right)^2}; \qquad (3.7)$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{px_0}{\dot{x}_0}\right), \ \beta = arctg\left(\frac{\nu z_0}{\dot{z}_0}\right), \qquad (3.8)$$

де $\dot{x}_0$ і $\dot{z}_0$ – перші похідні від переміщення за часом або швидкістю руху, м/с.

Окрім власних частот коливань даних систем *p* і *v*, залежних лише від їх фізичних властивостей, коливальний рух характеризується лінійною і кутовою (круговою) частотами коливань, тобто кількістю коливань, що здійснюються системою в одиницю часу. У даному випадку за 2π с.

$$p^* = \frac{1}{T}, \nu^* = \frac{1}{T}; \qquad (3.9)$$

$$\omega_1 = 2\pi p^* = \frac{2\pi}{T}; \ \omega_2 = 2\pi\nu^* = \frac{2\pi}{T}. \qquad (3.10)$$

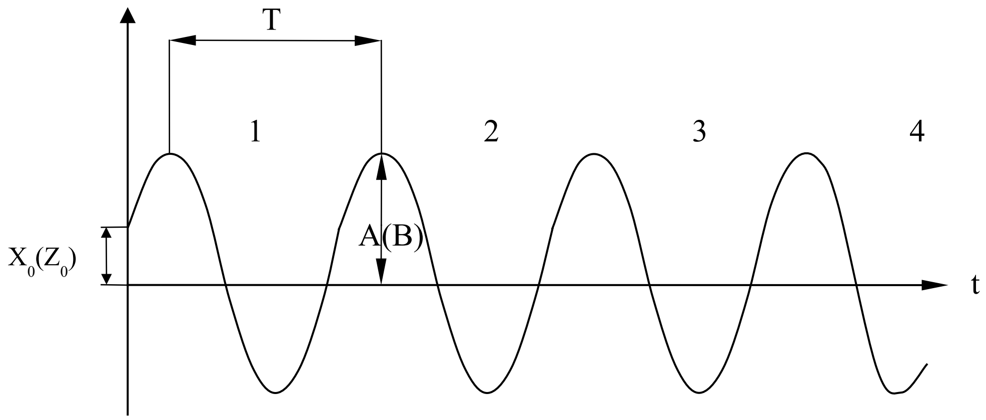
А час, за який здійснюється одне повне коливання, – період, с.

Власна або циклічна частота і період вільних коливань точок залежать лише від маси та жорсткості, що характеризують відновлювальну силу і не залежать від початкових умов.

***Амплітуда* (від лат. Amplitudo – величина) – найбільше відхилення від нульового значення величини, що коливається.

Період T_i збільшується при збільшенні маси m_i і зменшується при збільшенні c_i; у свою чергу частота p, ν зменшується при збільшенні маси m_i точки і збільшується при зростанні c_i.

Графік, що відображає характер руху точок системи при вільних коливаннях систем, поданий на рисунку 3.2. Це гармонічні коливання з вказаними частотами, які є кратними основній частоті першої гармоніки (характеру хвилі).



1, 2, 3, 4 – нумерація хвиль процесу.

Рисунок 3.2 – Графік вільних коливань точок системи

Для загального випадку диференційне рівняння коливального руху лінійної системи з одним степенем вільності без непружних опорів (тертя у зв'язках) запишемо в такій формі:

$$a\ddot{q} = -cq; \; a\ddot{q} + cq = 0, \tag{3.11}$$

де q – узагальнена координата;

a – коефіцієнт інерції;

c – узагальнений коефіцієнт жорсткості.

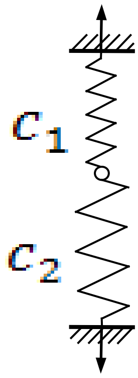
Тоді власну частоту за аналогією з виразом (3.4) можна записати у вигляді

$$P = \sqrt{\frac{c}{a}}. \tag{3.12}$$

Оскільки ресорне підвішування вагонів утворене декількома пружинами, а також їх конструкційним поєднанням, то доцільно розглянути такі приклади їх розташувань:

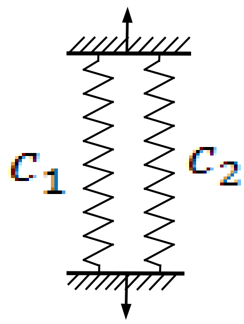
а) послідовне розташування

$$C = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} \tag{3.13}$$

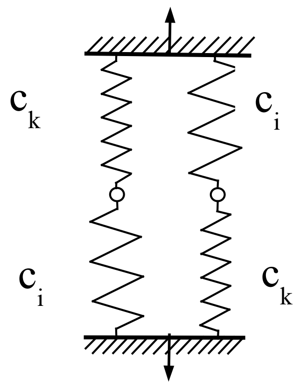


б) паралельне розташування:

$$C = C_1 + C_2 \tag{3.14}$$



в) система змішаного типу:



Визначимо коефіцієнт жорсткості для комбінованої системи:

$$c_1 = c_i c_k / (c_i + c_k); \tag{3.15}$$

$$c_2 = c_k c_i/(c_k + c_i); \quad (3.16)$$

$$c_1 + c_2 = \frac{c_i c_k}{(c_i + c_k)} + \frac{c_k c_i}{(c_k + c_i)};$$

$$c_1 + c_2 = 2[c_i c_k/(c_i + c_k)];$$

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2};$$

$$C = \left(\frac{C_i C_k}{(C_i + C_k)} * \frac{C_i C_k}{(C_i + C_k)}\right) / \frac{2 C_i C_k}{(C_i + C_k)}.$$

В остаточному вигляді маємо:

$$C = \frac{C_i * C_k}{2(C_i + C_k)} \quad (3.17)$$

Для пружного елемента, навантаженого масою m (рисунок 3.1, б), рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$mg - cf_{\text{ст}} = 0; \; cf_{\text{ст}} = mg, \quad (3.18)$$

де $f_{\text{ст}}$ – статичний прогин пружини, м.

Тоді коефіцієнт жорсткості буде мати вигляд

$$C = \frac{mg}{f_{\text{ст}}} = \frac{P}{f_{\text{ст}}}, \quad (3.19)$$

тобто величина сили,що викликала одиничне переміщення, Н/м.

Величина, обернена жорсткості - *гнучкість*.

$$\lambda = \frac{1}{C} = \frac{f_c}{F}, \quad (3.20)$$

тобто величина переміщення, викликаного одиничною силою, Н/м.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.

2 Пановко Я.Г., Губанова Н.Н. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. - 384 с.

3 Магнус Курт. Колебания: Введение и исследования колебательных систем – М. Мир, 1982. – 304 с.

4 Лазарян В.А. Динамика вагонов. – М.: Трансжелдориздат, 1964. – 255 с.

5 Вершинский С.В., Данилов В.Н., Челноков И.И. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1978. – 352 с.

6 Трофимова Т.Н. Физика в таблицах и формулах. – М.: Дрофа, 2004. – 432 с.

7 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1968. – 478 с.

8 Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1984. -423 с.

9 Вайнберг Д.В., Писаренко Г.С. Механические колебания и их роль в технике. – М.: Наука, 1965. – 276 с.

10 Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

11 Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – С.Пб.: Лань, 2005. – 440 с.

12 Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 256 с.

13 Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.

14 Лукин В.В., Шадур Л.А., Котуранов В.Н. и др. Конструирование и расчет вагонов. Под ред. В.В. Лукина. – М.: УМК МПС России, 2000. – 731 с.

15 Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1986. – 1600 с.