УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина IV

Харків – 2021

Методичні вказівки і завдання розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 22 вересня 2020 р., протокол № 2.

Методичні вказівки призначено для студентів освітнього рівня «бакалавр» факультету УПП усіх форм навчання.

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк (ХНУ)

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1. Комплексні числа

Завдання 1.1. Задано комплексні числа z_1 та z_2. Обчислити $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $az_1 + bz_2$, записавши відповідь в алгебраїчній формі.

Варіант	z_1 , z_2, a , b	**Варіант**	z_1 , z_2, a , b
1	$z_1 = 1+3i, \quad z_2 = -2+9i,$ $a = -3, \quad b = 1$	**16**	$z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 11+i,$ $a = -7, \quad b = 3$
2	$z_1 = 4-6i, \quad z_2 = 2+5i,$ $a = 4, \quad b = -2$	**17**	$z_1 = -1+6i, \quad z_2 = 9-2i,$ $a = 6, \quad b = -2$
3	$z_1 = 9+i, \quad z_2 = 1-7i,$ $a = 2, \quad b = 3$	**18**	$z_1 = 8+i, \quad z_2 = 1-6i,$ $a = 2, \quad b = -3$
4	$z_1 = -8-2i, \quad z_2 = 5-4i,$ $a = -2, \quad b = 2$	**19**	$z_1 = 7-5i, \quad z_2 = -3+2i,$ $a = -1, \quad b = 4$
5	$z_1 = 10+3i, \quad z_2 = -6-i,$ $a = 1, \quad b = -4$	**20**	$z_1 = -3+4i, \quad z_2 = 6+i,$ $a = -3, \quad b = 2$
6	$z_1 = 4-4i, \quad z_2 = 5+i,$ $a = 3, \quad b = 2$	**21**	$z_1 = 11+2i, \quad z_2 = -2-i,$ $a = 2, \quad b = -8$
7	$z_1 = 1+7i, \quad z_2 = 2-i,$ $a = 4, \quad b = -3$	**22**	$z_1 = -2-3i, \quad z_2 = -5+i,$ $a = 6, \quad b = -2$
8	$z_1 = 2+5i, \quad z_2 = -4-i,$ $a = -1, \quad b = -3$	**23**	$z_1 = 9+11i, \quad z_2 = 4-6i,$ $a = 1, \quad b = -3$
9	$z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 1-2i,$ $a = 5, \quad b = -8$	**24**	$z_1 = 5-6i, \quad z_2 = 7+2i,$ $a = -3, \quad b = 4$
10	$z_1 = -3-i, \quad z_2 = 2+4i,$ $a = -7, \quad b = 1$	**25**	$z_1 = 1-10i, \quad z_2 = 2-8i,$ $a = -1, \quad b = 2$
11	$z_1 = 9+2i, \quad z_2 = 3-5i,$ $a = 1, \quad b = -2$	**26**	$z_1 = -4-3i, \quad z_2 = 8+3i,$ $a = 1, \quad b = -2$
12	$z_1 = 1-2i, \quad z_2 = -4+i,$ $a = -2, \quad b = 6$	**27**	$z_1 = -7-2i, \quad z_2 = 3-5i,$ $a = 2, \quad b = -3$
13	$z_1 = -2+4i, \quad z_2 = 7+2i,$ $a = 3, \quad b = 1$	**28**	$z_1 = 10+i, \quad z_2 = -1-4i,$ $a = -1, \quad b = 3$

14	$z_1 = 5 + i, \quad z_2 = -1 - i,$ $a = -4, \quad b = 3$	**29**	$z_1 = 4 - 4i, \quad z_2 = 5 + i,$ $a = 3, \quad b = -3$
15	$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 2 + 3i,$ $a = 2, \quad b = -1$	**30**	$z_1 = -3 + i, \quad z_2 = 6 + 3i,$ $a = 8, \quad b = -2$

Завдання 1.2. Знайти комплексні корені квадратного рівняння.

Варіант	Квадратне рівняння	**Варіант**	Квадратне рівняння
1	$x^2 - 2x + 17 = 0$	**16**	$x^2 + 2x + 26 = 0$
2	$x^2 - 10x + 50 = 0$	**17**	$x^2 - 4x + 40 = 0$
3	$x^2 + 8x + 52 = 0$	**18**	$x^2 + 8x + 17 = 0$
4	$x^2 + 6x + 34 = 0$	**19**	$x^2 - 10x + 29 = 0$
5	$x^2 - 4x + 20 = 0$	**20**	$x^2 + 12x + 37 = 0$
6	$x^2 + 2x + 10 = 0$	**21**	$x^2 - 12x + 40 = 0$
7	$x^2 + 8x + 41 = 0$	**22**	$x^2 + 8x + 25 = 0$
8	$x^2 - 6x + 25 = 0$	**23**	$x^2 + 6x + 18 = 0$
9	$x^2 + 4x + 13 = 0$	**24**	$x^2 + 6x + 10 = 0$
10	$x^2 - 2x + 5 = 0$	**25**	$x^2 - 8x + 20 = 0$
11	$x^2 - 2x + 37 = 0$	**26**	$x^2 + 10x + 34 = 0$
12	$x^2 + 4x + 29 = 0$	**27**	$x^2 + 12x + 45 = 0$
13	$x^2 - 6x + 45 = 0$	**28**	$x^2 - 10x + 41 = 0$
14	$x^2 + 10x + 26 = 0$	**29**	$x^2 - 6x + 13 = 0$
15	$x^2 - 10x + 61 = 0$	**30**	$x^2 + 4x + 5 = 0$

ЗАВДАННЯ 2. Невизначений інтеграл

Завдання 2.1. Методом безпосереднього інтегрування знайти невизначений інтеграл.

Варіант	Умова завдання
1	$\int \left(2^x - \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} + 1 \right) dx$

2	$\int\left(e^{x}+\frac{7}{x^{2}+9}+2\cos x-2\right)dx$
3	$\int\left(x^{3}+\frac{6}{x^{2}-16}+\sin x+3\right)dx$
4	$\int\left(\sqrt[3]{x^{2}}-35^{x}+\frac{4}{\sqrt{4-x^{2}}}-4\right)dx$
5	$\int\left(\frac{5}{x^{2}}+3\sin x+\frac{4}{\sqrt{x^{2}+9}}+5\right)dx$
6	$\int\left(\sqrt[5]{x^{3}}-\frac{6}{x}+\frac{4}{\sqrt{36-x^{2}}}-6\right)dx$
7	$\int\left(5^{x}+\frac{7}{\sin^{2}x}-\frac{4}{\sqrt{12+x^{2}}}+7\right)dx$
8	$\int\left(e^{x}+\frac{3}{\cos^{2}x}+\frac{8}{12+x^{2}}-8\right)dx$
9	$\int\left(\sqrt[5]{x^{2}}+9^{x}+\frac{14}{\sqrt{16-x^{2}}}+9\right)dx$
10	$\int\left(\sqrt[4]{x^{3}}+65^{x}+\frac{10}{81+x^{2}}-10\right)dx$
11	$\int\left(32^{x}+\frac{11}{\cos^{2}x}+\frac{1}{\sqrt{x^{2}+64}}+11\right)dx$
12	$\int\left(e^{x}+\frac{12}{x^{2}+100}-4\cos x-12\right)dx$
13	$\int\left(x^{13}+\frac{7}{x^{2}+16}-8\sin x+13\right)dx$
14	$\int\left(\sqrt[7]{x^{3}}+14^{x}+\frac{7}{\sqrt{4+x^{2}}}-14\right)dx$

15	$\int\left(\frac{15}{x^2}-9\sin x+\frac{11}{\sqrt{x^2+49}}+15\right)dx$
16	$\int\left(\sqrt[8]{x^5}-\frac{16}{x}+\frac{24}{\sqrt{36-x^2}}-16\right)dx$
17	$\int\left(52^x+\frac{17}{\sin^2 x}+\frac{4}{\sqrt{25-x^2}}+17\right)dx$
18	$\int\left(e^x-\frac{9}{\cos^2 x}+\frac{18}{121+x^2}-18\right)dx$
19	$\int\left(\sqrt[7]{x^9}+37^x+\frac{19}{\sqrt{81+x^2}}+19\right)dx$
20	$\int\left(\sqrt[6]{x^5}+51^x+\frac{20}{144+x^2}-20\right)dx$
21	$\int\left(12^x+\frac{5}{\sin^2 x}-\frac{21}{x^2-16}+21\right)dx$
22	$\int\left(e^x+\frac{22}{\sqrt{49-x^2}}+2\sin x-22\right)dx$
23	$\int\left(x^{23}+\frac{3}{x^2+16}+7\cos x+23\right)dx$
24	$\int\left(\sqrt[5]{x^3}-5^x+\frac{24}{\sqrt{64-x^2}}-24\right)dx$
25	$\int\left(\frac{25}{x^6}+5\cos x+\frac{3}{\sqrt{169-x^2}}+25\right)dx$
26	$\int\left(\sqrt[9]{x^7}+\frac{7}{x^6}+\frac{26}{\sqrt{121-x^2}}-26\right)dx$
27	$\int\left(27^x+\frac{9}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sqrt{81+x^2}}+27\right)dx$

28	$\int\left(e^{x}+\frac{28}{\cos^{2}x}-\frac{8}{121+x^{2}}-28\right)dx$
29	$\int\left(\sqrt[7]{x^{4}}+29^{x}+\frac{14}{\sqrt{169+x^{2}}}+29\right)dx$
30	$\int\left(\sqrt[11]{x^{8}}+30^{x}+\frac{10}{256+x^{2}}-30\right)dx$

Завдання 2.2. Методом заміни змінної знайти невизначені інтеграли.

Варіант 1 а) $\int 3\sin(5x+1)dx$; б) $\int\frac{5}{3x-1}dx$; в) $\int\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}dx$; г) $\int\frac{3x}{2x^{2}+1}dx$	**Варіант 16** а) $\int 5^{16x-9}dx$; б) $\int\frac{1}{\sqrt[6]{5x+1}}dx$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; г) $\int\frac{7x+2}{\sqrt{1-6x^{2}}}dx$
Варіант 2 а) $\int e^{7x-2}dx$; б) $\int\frac{2}{\sin^{2}(5x+6)}dx$; в) $\int(\cos x+5)^{2}\sin x dx$; г) $\int\frac{2x}{\sqrt{3x^{2}+5}}dx$	**Варіант 17** а) $\int e^{17x+2}dx$; б) $\int\cos(17x-8)dx$; в) $\int\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^{2}}dx$; г) $\int\frac{5x}{1+7x^{2}}dx$
Варіант 3 а) $\int\frac{dx}{2x+1}$; б) $\int\sqrt[3]{(3x+5)}dx$; в) $\int x^{2}e^{3x^{3}}dx$; г) $\int\frac{3x}{x^{2}-8}dx$	**Варіант 18** а) $\int\sqrt{(7x+18)}dx$; б) $\int\frac{5}{7x+18}dx$; в) $\int\frac{\cos x}{\sin^{2}x}dx$; г) $\int\frac{18x}{\sqrt{x^{2}+12}}dx$
Варіант 4 а) $\int\frac{5}{\cos^{2}(5x+6)}dx$; б) $\int e^{4-5x}dx$; в) $\int x^{2}\sqrt{4+x^{3}}dx$; г) $\int\frac{4x}{\sqrt{7-x^{2}}}dx$	**Варіант 19** а) $\int\frac{19}{2x^{2}+2}dx$; б) $\int 19^{5-2x}dx$; в) $\int\frac{\sin x}{\cos^{2}x+16}dx$; г) $\int\frac{19x}{21-3x^{2}}dx$

Варіант 5 а) $\int\sqrt{5x+8}\,dx$; б) $\int\frac{5}{7x+13}dx$; в) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; г) $\int\frac{3x}{4-x^2}dx$	**Варіант 20** а) $\int\frac{20}{11-3x}dx$; б) $\int\frac{9}{4x^2-25}dx$; в) $\int 3^x\sin\left(3^x+2\right)dx$; г) $\int\frac{20x}{\sqrt{5x^2+1}}dx$
Варіант 6 а) $\int e^{5-6x}dx$; б) $\int\frac{1}{\sqrt[4]{6x+5}}dx$; в) $\int\frac{\ln^6 x}{x}dx$; г) $\int\frac{6x}{\sqrt{x^2+7}}dx$	**Варіант 21** а) $\int(21x-3)^4dx$; б) $\int e^{21x-9}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{ctgx}\,dx}{\sin^2 x}$; г) $\int\frac{2x}{21x^2-8}dx$
Варіант 7 а) $\int\frac{7}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}dx$; б) $\int\sin(7x+11)dx$; в) $\int xe^{x^2+7}dx$; г) $\int\frac{x}{7x^2-4}dx$	**Варіант 22** а) $\int\frac{5}{9x^2+22}dx$; б) $\int\frac{15}{2x+2}dx$; в) $\int e^x\cos\left(e^x-2\right)dx$; г) $\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+2}}dx$
Варіант 8 а) $\int\cos(8x-1)dx$; б) $\int 5^{6x+7}dx$; в) $\int\frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{1+x}dx$; г) $\int\frac{8x}{3x^2+5}dx$	**Варіант 23** а) $\int\frac{1}{\sin^2(2x+3)}dx$; б) $\int(2x+3)^8dx$; в) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$; г) $\int\frac{3x}{23x^2+19}dx$
Варіант 9 а) $\int\sqrt[4]{(5x+9)^3}dx$; б) $\int\frac{1}{sin^2(9x+1)}dx$; в) $\int\frac{\ln(2x+3)}{2x+3}dx$; г) $\int\frac{9x}{7-3x^2}dx$	**Варіант 24** а) $\int(7x+24)^6dx$; б) $\int\frac{24}{36-25x^2}dx$; в) $\int x^2\sin\left(x^3+8\right)dx$; г) $\int\frac{24x}{\sqrt{2x^2+6}}dx$

Варіант 10 а) $\int 100^{7-2x}dx$; б) $\int \frac{10}{7x+9}dx$; в) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int \frac{10x+2}{5+3x^2}dx$	**Варіант 25** а) $\int e^{2-5x}dx$; б) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2x+5)^3}}dx$; в) $\int (\sin x+5)^3 \cos x dx$; г) $\int \frac{7x}{25x^2-6}dx$
Варіант 11 а) $\int \sin(5x+11)dx$; б) $\int \sqrt[5]{(3x+11)^2}\,dx$; в) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; г) $\int \frac{x}{11x^2+3}dx$	**Варіант 26** а) $\int 2^{6x-3}dx$; б) $\int (3x-26)^{11}dx$; в) $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx$; г) $\int \frac{7x}{\sqrt{2x^2+6}}dx$
Варіант 12 а) $\int (x+2)^5 dx$; б) $\int 12^{3x-5}dx$; в) $\int \frac{\cos \ln x}{x}dx$; г) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+12}}dx$	**Варіант 27** а) $\int \frac{27}{16-49x^2}dx$; б) $\int \frac{27}{6x+13}dx$; в) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int \frac{x}{2-7x^2}dx$
Варіант 13 а) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(13x+5)}}dx$; б) $\int \cos(7x+13)dx$; в) $\int \frac{x^3}{x^8-2}dx$; г) $\int \frac{3x}{13x^2+8}dx$	**Варіант 28** а) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+8}}dx$; б) $\int \frac{1}{sin^2(28x+7)}dx$; в) $\int \frac{x^2dx}{x^6+81}$; г) $\int \frac{28x}{\sqrt{4x^2-3}}dx$
Варіант 14 а) $\int \frac{14}{8-6x}dx$; б) $\int \frac{1}{\cos^2(14x+1)}dx$; в) $\int xe^{5-x^2}dx$; г) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2+14}}dx$	**Варіант 29** а) $\int \cos(29x+6)dx$; б) $\int 2^{9x-1}dx$; в) $\int \frac{x^4}{9+x^5}dx$; г) $\int \frac{29x}{3x^2-7}dx$

Варіант 15	Варіант 30
а) $\int \sin(15x+9)dx$; б) $\int e^{1+5x}dx$; в) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$; г) $\int \frac{2x}{1-5x^2}dx$	а) $\int (15x+3)^{30}dx$; б) $\int e^{1-30x}dx$; в) $\int \frac{\sin x}{(\cos x+3)^2}dx$; г) $\int \frac{5x}{\sqrt{4x^2+30}}dx$

Завдання 2.3. Методом інтегрування частинами знайти невизначений інтеграл.

Варіант	**а)**	**б)**
1	$\int (x+1)\cos 2x dx$	$\int \ln(x-5)dx$
2	$\int x^2 \sin 3x dx$	$\int \arcsin x dx$
3	$\int (2x+3)\cos 2x dx$	$\int arctg x dx$
4	$\int (x+4)e^x dx$	$\int (x+1)\ln x dx$
5	$\int (5x+2)\cos x dx$	$\int \arccos x dx$
6	$\int (6x+5)\sin 3x dx$	$\int arcctg x dx$
7	$\int x^2 e^{-5x}dx$	$\int \left(\sqrt{x}-7\right)\ln x dx$
8	$\int \frac{8x+1}{\sin^2 x}dx$	$\int x arctg(x+1)dx$
9	$\int (9x+4)e^{-x}dx$	$\int arctg 2x dx$
10	$\int (3x+10)\cos x dx$	$\int \left(x^2+10\right)\ln x dx$
11	$\int \frac{x+1}{\sin^2 x}dx$	$\int 3x arctg x dx$
12	$\int \left(x^2+12\right)e^x dx$	$\int \arcsin 2x dx$
13	$\int (x-13)\cos 5x dx$	$\int x arctg \frac{x}{2}dx$
14	$\int \frac{14x}{\cos^2 x}dx$	$\int \ln(x+14)dx$
15	$\int (x+15)e^{3x}dx$	$\int \frac{x}{5} arctg x dx$
16	$\int (x+16)\cos 7x dx$	$\int \arccos \frac{3x}{2}dx$
17	$\int \frac{17x}{\cos^2 x}dx$	$\int \left(x^3+17\right)\ln 3x dx$

18	$\int x^3 \sin x dx$	$\int \arcsin 8x dx$
19	$\int \left(x^2+9\right) e^x dx$	$\int \arccos 5x dx$
20	$\int 2x^2 \cos x dx$	$\int \ln(2x+10) dx$
21	$\int \frac{2x+1}{\sin^2 x} dx$	$\int arctg\, 3x dx$
22	$\int (2x+2) e^x dx$	$\int \arcsin 6x dx$
23	$\int \frac{8x+1}{\cos^2 x} dx$	$\int (2x+3) \ln x dx$
24	$\int (2x+4) \cos x dx$	$\int \frac{x}{3} arctg x dx$
25	$\int x^2 \sin 5x dx$	$\int arctg\, 5x dx$
26	$\int \left(x^2+26\right) e^{2x} dx$	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
27	$\int \frac{2x+7}{\sin^2 x} dx$	$\int \arcsin(x-1) dx$
28	$\int x^2 \sin 8x dx$	$\int (x-28) \ln 3x dx$
29	$\int (x+29) \cos 5x dx$	$\int \arccos 4x dx$
30	$\int \frac{8x+1}{\cos^2 x} dx$	$\int \ln(x+30) dx$

Завдання 2.4. Знайти невизначені інтеграли.

Варіант	Умова завдання	**Варіант**	Умова завдання
1	$\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$	**16**	$\int \frac{2x+6}{2x^2+2x+3} dx$
2	$\int \frac{2x-13}{4x^2+6x+1} dx$	**17**	$\int \frac{x-17}{\sqrt{2x^2+4x-3}} dx$
3	$\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$	**18**	$\int \frac{3x+18}{9x^2+24x+41} dx$
4	$\int \frac{x-4}{4x^2+2x+3} dx$	**19**	$\int \frac{7x+19}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$

5	$\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+8x-4}}dx$	**20**	$\int \frac{5x-20}{4x^2+36x+90}dx$
6	$\int \frac{6x-1}{x^2+12x+40}dx$	**21**	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$
7	$\int \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+6x+1}}dx$	**22**	$\int \frac{2x+2}{x^2+18x+90}dx$
8	$\int \frac{x-4}{4x^2+2x+3}dx$	**23**	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$
9	$\int \frac{x+9}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	**24**	$\int \frac{3x-25}{3x^2+12x+15}dx$
10	$\int \frac{10x+4}{9x^2+12x+8}dx$	**25**	$\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$
11	$\int \frac{11x+6}{\sqrt{4x^2+16x+1}}dx$	**26**	$\int \frac{5x+1}{4x^2+4x+10}dx$
12	$\int \frac{2x-1}{4x^2-16x+25}dx$	**27**	$\int \frac{2x+7}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx$
13	$\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx$	**28**	$\int \frac{2x+8}{5x^2+30x+136}dx$
14	$\int \frac{x-4}{x^2-6x+25}dx$	**29**	$\int \frac{2x+9}{\sqrt{16-6x-x^2}}dx$
15	$\int \frac{x+15}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$	**30**	$\int \frac{3x}{4x^2-12x+58}dx$

Завдання 2.5. Знайти невизначені інтеграли від раціональних функцій.

Варіант	**а)**	**б)**
1	$\int \frac{2x+5}{6x^2-x-1}dx$	$\int \frac{x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-5\right)}dx$

2	$\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx$	$\int \frac{2x-3}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x+2\right)}dx$
3	$\int \frac{3x+5}{x^2-x-2}dx$	$\int \frac{3x+4}{\left(x^2+9\right)\left(x-3\right)}dx$
4	$\int \frac{4x-3}{12x^2-x-1}dx$	$\int \frac{x+3}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-4\right)}dx$
5	$\int \frac{3x+5}{2x^2-3x+1}dx$	$\int \frac{x-5}{\left(x^2+16\right)\left(x+3\right)}dx$
6	$\int \frac{x-6}{6x^2-5x+1}dx$	$\int \frac{x+6}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x+2\right)}dx$
7	$\int \frac{x+7}{x^2-17x+72}dx$	$\int \frac{x^2+4}{\left(x^2+49\right)\left(x-7\right)}dx$
8	$\int \frac{x+5}{12x^2-7x+1}dx$	$\int \frac{3x+8}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x+3\right)}dx$
9	$\int \frac{5x+9}{3x^2-4x+1}dx$	$\int \frac{2x+1}{\left(x^2+9\right)\left(x-1\right)}dx$
10	$\int \frac{3x-10}{5x^2+4x-1}dx$	$\int \frac{x^2+10}{\left(x^2+4x+8\right)\left(x-1\right)}dx$
11	$\int \frac{x-11}{2x^2+x-1}dx$	$\int \frac{3x+11}{\left(x^2+49\right)\left(x+8\right)}dx$
12	$\int \frac{3x+12}{x^2-13x+42}dx$	$\int \frac{x+12}{\left(x^2+6x+13\right)\left(x-3\right)}dx$
13	$\int \frac{6x-13}{x^2+9x+8}dx$	$\int \frac{13x+1}{\left(x^2+25\right)\left(x-8\right)}dx$

14	$\int \frac{14x+1}{x^2+10x+21}dx$	$\int \frac{x-14}{\left(x^2+8x+20\right)(x-1)}dx$
15	$\int \frac{2x+5}{x^2-10x+9}dx$	$\int \frac{15x-3}{\left(x^2+81\right)(x+7)}dx$
16	$\int \frac{3x-16}{5x^2-6x+1}dx$	$\int \frac{x+16}{\left(x^2-4x+5\right)(x-7)}dx$
17	$\int \frac{x+17}{x^2-14x+48}dx$	$\int \frac{5x+17}{\left(x^2+64\right)(x+3)}dx$
18	$\int \frac{18x+5}{3x^2-4x+1}dx$	$\int \frac{x-18}{\left(x^2-6x+10\right)(x+5)}dx$
19	$\int \frac{4x+19}{x^2-10x+21}dx$	$\int \frac{3x+19}{\left(x^2+36\right)(x+3)}dx$
20	$\int \frac{2x+20}{x^2-4x+3}dx$	$\int \frac{2x}{\left(x^2-x+1\right)(x+2)}dx$
21	$\int \frac{3x+21}{5x^2-4x-1}dx$	$\int \frac{2x+1}{\left(x^2+3\right)(x+5)}dx$
22	$\int \frac{2x+2}{x^2-10x+9}dx$	$\int \frac{2x-2}{\left(x^2-6x+18\right)(x-4)}dx$
23	$\int \frac{2x+5}{3x^2-4x+1}dx$	$\int \frac{2x+3}{\left(x^2+5\right)(x-6)}dx$
24	$\int \frac{2x+4}{x^2-2x-24}dx$	$\int \frac{2x-4}{\left(x^2-10x+26\right)(x+3)}dx$
25	$\int \frac{2x+5}{12x^2+7x+1}dx$	$\int \frac{2x+5}{\left(x^2+10\right)(x+7)}dx$

26	$\int \frac{7x+26}{x^2+2x-24}dx$	$\int \frac{2x-6}{\left(x^2+2x+10\right)\left(x+2\right)}dx$
27	$\int \frac{2x+7}{x^2-14x+48}dx$	$\int \frac{2x+7}{\left(x^2+12\right)\left(x+5\right)}dx$
28	$\int \frac{2x+8}{x^2-8x-9}dx$	$\int \frac{3x+8}{\left(x^2-8x+41\right)\left(x-9\right)}dx$
29	$\int \frac{3x+4}{2x^2-x-1}dx$	$\int \frac{2x+9}{\left(x^2+8\right)\left(x+6\right)}dx$
30	$\int \frac{5x-1}{x^2-x-30}dx$	$\int \frac{3x}{\left(x^2+14x+50\right)\left(x-2\right)}dx$

Завдання 2.6. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій.

Варіант	**а)**	**б)**
1	$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
2	$\int \frac{2x}{\sqrt{x+3}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$
3	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}}dx$	$\int \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt{x}+16\right)}dx$
4	$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x-3}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
5	$\int \frac{5}{x\sqrt{x-7}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}dx$
6	$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-6}dx$	$\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt{x}+6\right)}dx$

7	$\int \frac{x}{\sqrt{x-7}}dx$	$\int \frac{7}{\left(\sqrt[3]{x}+7\right)\sqrt{x}}dx$
8	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+8}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+8\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
9	$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x-5}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+9}+\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+9}}dx$
10	$\int \frac{2}{x\sqrt{x-10}}dx$	$\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt{x}+10\right)}dx$
11	$\int \frac{6}{(x+11)\sqrt{x-5}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+11\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
12	$\int \frac{1}{12+\sqrt{x+5}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+12}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{x+12}}dx$
13	$\int \frac{13x}{\sqrt{x-4}}dx$	$\int \frac{13}{\left(\sqrt[4]{x}+9\right)\sqrt{x}}dx$
14	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+14\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
15	$\int \frac{\sqrt{x+15}}{x-1}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+15}+\sqrt{x+15}}{\sqrt{x+15}}dx$
16	$\int \frac{16}{x\sqrt{x-4}}dx$	$\int \frac{7}{\left(\sqrt[4]{x}+16\right)\sqrt{x}}dx$
17	$\int \frac{17}{\sqrt{x}-7}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+7\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
18	$\int \frac{1}{\sqrt{x+7}-18}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+18}+\sqrt{x+18}}{\sqrt{x+18}}dx$
19	$\int \frac{x}{\sqrt{x+19}}dx$	$\int \frac{19}{\left(\sqrt[3]{x}-11\right)\sqrt{x}}dx$

20	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-20}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+20\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
21	$\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-21}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{x+21}+\sqrt{x+21}}{\sqrt{x+21}}dx$
22	$\int \frac{7}{x\sqrt{x-22}}dx$	$\int \frac{9}{\left(\sqrt[4]{x}+22\right)\sqrt{x}}dx$
23	$\int \frac{23}{\sqrt{x}+2}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
24	$\int \frac{1}{24+\sqrt{x-4}}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+4}}dx$
25	$\int \frac{25x}{\sqrt{x-6}}dx$	$\int \frac{5}{\left(\sqrt[4]{x}+25\right)\sqrt{x}}dx$
26	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+26}}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+13\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
27	$\int \frac{\sqrt{x+27}}{x-6}dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{2x+7}+\sqrt{2x+7}}{\sqrt{2x+7}}dx$
28	$\int \frac{28}{x\sqrt{x+6}}dx$	$\int \frac{13}{\left(\sqrt[3]{x}-28\right)\sqrt{x}}dx$
29	$\int \frac{29}{\sqrt{x}+8}dx$	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-9\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
30	$\int \frac{1}{30-\sqrt{x+11}}dx$	$\int \frac{6}{\left(\sqrt[3]{x}-30\right)\sqrt{x}}dx$

Завдання 2.7. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій.

Варіант	а)	б)
1	$\int \frac{1}{5+2\sin x+3\cos x}dx$	$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$
2	$\int \frac{1}{2+3\cos x}dx$	$\int \frac{\sin^3(2x)}{\cos^4(2x)}dx$
3	$\int \frac{3\sin x}{1+\sin x}dx$	$\int 3\sin^3 x\cos^3 x\,dx$
4	$\int \frac{1}{4-4\sin x+3\cos x}dx$	$\int \frac{\cos(4x)}{\sin^5(4x)}dx$
5	$\int \frac{1}{4+5\sin x}dx$	$\int 5\sin^4 x dx$
6	$\int \frac{\sin x}{4\sin x-6\cos x}dx$	$\int \frac{6\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$
7	$\int \frac{1}{5+7\cos x}dx$	$\int 7\sin^5 x dx$
8	$\int \frac{8}{5-4\sin x+2\cos x}dx$	$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
9	$\int \frac{9}{3-2\sin x}dx$	$\int 9\sin^5 x\cos^2 x\,dx$
10	$\int \frac{10}{1-4\cos x}dx$	$\int \frac{10\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$
11	$\int \frac{11}{8+\sin x+3\cos x}dx$	$\int 11\sin^5 x dx$
12	$\int \frac{12}{7+2\sin x}dx$	$\int 12\cos^6 x dx$
13	$\int \frac{13\sin x}{6+\cos x}dx$	$\int \frac{13}{\sin^4 x}dx$

14	$\int \frac{14}{4-\sin x+7\cos x}dx$	$\int 14\sin^3 x\cos^3 x dx$
15	$\int \frac{15}{3-2\sin x}dx$	$\int \frac{15}{\cos^4 x}dx$
16	$\int \frac{16\sin x}{7-\cos x}dx$	$\int 16\sin^3 x\cos^6 x dx$
17	$\int \frac{17}{8+\sin x+3\cos x}dx$	$\int \frac{17\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$
18	$\int \frac{18}{9+5\sin x}dx$	$\int 18\sin^4 x\cos^3 x dx$
19	$\int \frac{19\sin x}{16-\cos x}dx$	$\int \frac{19\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$
20	$\int \frac{20}{6+7\sin x+\cos x}dx$	$\int 20\sin^6 x dx$
21	$\int \frac{2\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$	$\int \frac{21\cos^3 x}{\sin^7 x}dx$
22	$\int \frac{22}{8-3\sin x+\cos x}dx$	$\int 22\cos^5 x dx$
23	$\int \frac{23}{1-7\sin x}dx$	$\int \frac{23}{\cos^3 x}dx$
24	$\int \frac{24\sin x}{1-4\cos x}dx$	$\int 24\sin^4 x\cos^5 x dx$
25	$\int \frac{25}{3-2\sin x+\cos x}dx$	$\int \frac{25}{\sin^3 x}dx$
26	$\int \frac{26}{5-9\cos x}dx$	$\int \cos^4(26x)dx$
27	$\int \frac{27\sin x}{3+2\cos x}dx$	$\int \frac{27\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$
28	$\int \frac{28}{2-9\sin x+\cos x}dx$	$\int \sin^3(28x)dx$

29	$\int \frac{29}{3+7\cos x}dx$	$\int \frac{29}{\sin^4 x}dx$
30	$\int \frac{30\sin x}{9-2\cos x}dx$	$\int 30\sin^2 x\cos^3 x dx$

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1 Комплексні числа

В таблиці 1 надано необхідний теоретичний матеріал для виконання завдання 1.

Таблиця 1 – Дії над комплексними числами

Назва	Формула
Алгебраїчна форма запису	$z = x + iy$, $i^2 = -1$
Рівність чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
Сума (різниця) чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
Добуток чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$	$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Спряжене число $\bar{z}$ до числа $z = x + iy$	$\bar{z} = x - iy$
Частка чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
Модуль комплексного числа $z = x + iy$	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Завдання 1.1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = 1 - 4i$. Обчислити $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $5z_1 + 2z_2$**,** записавши відповідь в алгебраїчній формі.

Розв'язання. За таблицею 1 обчислюємо

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1-4i) = 2+3i-8i-12i^2 = 14-5i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{2+3i+8i+12i^2}{1+16} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17} + i\frac{11}{17};$$

$$5z_1 + 2z_2 = 5(2+3i) + 2(1-4i) = 10+15i+2-8i = 12+7i.$$

Відповідь: $z_1 \cdot z_2 = 14-5i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{17} + i\frac{11}{17}$, $5z_1 + 2z_2 = 12+7i$.

Завдання 1.2. Знайти комплексні корені квадратного рівняння

$$x^2 - 8x + 41 = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо дискримінант

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 41 = -100 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-100} = \sqrt{100 \cdot (-1)} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{-1} = 10i$$

та за формулою знаходження коренів квадратного рівняння отримаємо

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 10i}{2} = 4 \pm 5i.$$

Відповідь: $x_1 = 4+5i$, $x_2 = 4-5i.$

2 Невизначений інтеграл

Для знаходження невизначеного інтеграла скористаємося його властивостями (таблиця 2) і таблицею інтегрування елементарних функцій (таблиця 3).

Таблиця 2 – Властивості невизначеного інтеграла

1	$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$
2	$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3	$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R$
4	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблиця 3 – Таблиця основних інтегралів

1	$\int dx = x + C$	8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	13	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	14	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$

Завдання 2.1. Методом безпосереднього інтегрування знайти невизначений інтеграл

$$\int (2^x + \frac{5}{x^2 - 16} + \frac{7}{\sqrt{x^2 + 8}} - \frac{3}{\sin^2 x}) dx.$$

Розв’язання.

$$\int (2^x + \frac{5}{x^2 - 16} + \frac{7}{\sqrt{x^2 + 8}} - \frac{3}{\sin^2 x}) dx = \int 2^x dx + 5\int \frac{dx}{x^2 - 16} + 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8}} -$$

$$-3\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{2^x}{\ln 2} + 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \ln\left\lvert\frac{x-4}{x+4}\right\rvert + 7\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + 8}\right\rvert + 3ctgx + C \ .$$

Відповідь: $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5}{8} \ln\left\lvert\frac{x-4}{x+4}\right\rvert + 7\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + 8}\right\rvert + 3ctgx + C$.

Завдання 2.2. Методом заміни змінної знайти невизначені інтеграли:

а) $\int e^{3x+10} dx$;

б) $\int \frac{3}{\sin^2(5x-6)}\,dx$;

в) $\int \frac{\cos x}{(\sin x-5)^3}\,dx$;

г) $\int \frac{3x^5}{\sqrt[3]{1-x^6}}\,dx$.

Розв'язання. За додатком Б обчислюємо:

$$\text{а) } \int e^{3x+10}dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x+10 \\ dt = (3x+10)'\,dx = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x+10} + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{3}{\sin^2(5x-6)}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x-6 \\ dt = (5x-6)'\,dx = 5dx \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{3}{5}ctgt + C =$$

$$= -\frac{3}{5}ctg(5x-6) + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{\cos x}{(\sin x-5)^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x - 5 \\ dt = (\sin x-5)'\,dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(\sin x-5)^2} + C;$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^5}{\sqrt[3]{1-x^6}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^6 \\ dt = \left(1-x^6\right)'dx = -6x^5dx \\ 3x^5dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(1-x^6\right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Відповідь: а) $\int e^{3x+10}dx = \frac{1}{3}e^{3x+10} + C$;

б) $\int \frac{3}{\sin^2(5x-6)}\,dx = -\frac{3}{5}ctg(5x-6) + C$;

в) $\int \frac{\cos x}{(\sin x - 5)^3}\,dx = -\frac{1}{2(\sin x - 5)^2} + C$;

г) $\int \frac{3x^5}{\sqrt[3]{1-x^6}}\,dx = -\frac{3}{4}\left(1-x^6\right)^{\frac{2}{3}} + C$.

Для обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами використовуємо таблицю 4.

Таблиця 4 – Інтегрування частинами

<table>
<tr><td colspan="3">Формула інтегрування частинами
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$</td></tr>
<tr><td>І тип</td><td>$\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)\cos(ax+b)dx\\ \int P_n(x)\sin(ax+b)dx\\ \int P_n(x)a^{kx+m}dx\\ \int P_n(x)e^{kx+m}dx\end{array}\right\}$</td><td>$u(x) = P_n(x)$.
Як dv вибираємо все, що залишилось під знаком інтеграла</td></tr>
<tr><td>ІІ тип</td><td>$\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)\arcsin(ax+b)dx\\ \int P_n(x)\arccos(ax+b)dx\\ \int P_n(x)arctg(ax+b)dx\\ \int P_n(x)arcctg(ax+b)dx\\ \int P_n(x)\ln^m(ax+b)dx\end{array}\right\}$</td><td>$dv = P_n(x)dx$.
Як du вибираємо все, що залишилось під знаком інтеграла</td></tr>
<tr><td>ІІІ тип</td><td>$\left.\begin{array}{l}\int e^{kx+m}\cdot\cos(cx+d)dx\\ \int e^{kx+m}\cdot\sin(cx+d)dx\\ \int a^{kx+m}\cdot\cos(cx+d)dx\\ \int a^{kx+m}\cdot\sin(cx+d)dx\end{array}\right\}$</td><td>Розбиття довільне</td></tr>
</table>

Завдання 2.3. Методом інтегрування частинами знайти невизначений інтеграл:

а) $\int (3x+2)e^{4x}dx$;

б) $\int x^2 \ln x\, dx.$

Розв'язання:

$$а)\ \int (3x+2)e^{4x}dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\textit{інтеграл I типу (табл. 4)}} \\ u = 3x+2 & dv = e^{4x}dx \\ du = (3x+2)'\,dx = 3dx & v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot (3x+2) - \frac{3}{4}\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}(3x+2)\cdot e^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C;$$

$$б)\ \int x^2 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\textit{інтеграл II типу (табл. 4)}} \\ u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = (\ln x)'\,dx = \frac{dx}{x} & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

Відповідь: а) $\int (3x+2)e^{4x}dx = \frac{1}{4}(3x+2)\cdot e^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C$;

б) $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$

Завдання 2.4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2x+1}{2x^2 - 4x + 3}\, dx$;

б) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$.

Розв'язання:

а) $$\int \frac{2x+1}{2x^2-4x+3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Виділяємо повний квадрат (див. Додаток 1)} \\ 2x^2-4x+3 = 2(x^2-2x)+3 = 2(x-1)^2+1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2x+1}{2(x-1)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна} \\ t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = (t+1)'\,dt = dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+1)+1}{2t^2+1}\,dt = \int \frac{2t+3}{2t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{2t^2+1}\,dt + \int \frac{3dt}{2t^2+1} = \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна} \\ z = 2t^2+1 \\ dz = \left(2t^2+1\right)'dt = 4tdt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\,arctg\left(\frac{t}{\sqrt{1/2}}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|2t^2+1\right| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,arctg\left(\sqrt{2}\,t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x^2-4x+3\right| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,arctg\left(\sqrt{2}(x-1)\right) + C;$$

б) $$\int \frac{5x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Виділяємо повний квадрат (див. Додаток 1)} \\ 3-2x-x^2 = 3-\left(x^2+2x\right) = 4-(x+1)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5x+2}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна} \\ t = x+1 \\ x = t-1 \\ dx = (t-1)'\,dt = dt \end{array} \right| = \int \frac{5(t-1)+2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \int \frac{5t-3}{\sqrt{4-t^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{5t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt - \int \frac{3dt}{\sqrt{4-t^2}} = \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна} \\ z = 4 - t^2 \\ dz = \left(4-t^2\right)' dt = -2tdt \end{array} \right| = -\frac{5}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{z} - 3\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + C = -5\sqrt{4-t^2} - 3\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C =$$

$$= -5\sqrt{3-2x-x^2} - 3\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Відповідь:

а) $\int \frac{2x+1}{2x^2-4x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|2x^2-4x+3\right| + \frac{3\sqrt{2}}{2} arctg\left(\sqrt{2}(x-1)\right) + C;$

б) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = -5\sqrt{3-2x-x^2} - 3\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

Завдання 2.5. Знайти невизначені інтеграли від раціональних функцій:

а) $\int \frac{7x-5}{x^2+x-6}\,dx;$

б) $\int \frac{3x+1}{(x-2)\left(x^2+4x+6\right)}dx.$

Розв’язання. Для розв’язання цього завдання необхідно правильний дріб (*додаток В*) розкласти на елементарні дроби (таблиця 5):

Таблиця 5 – Елементарні дроби

	Елементарні дроби	Відповідні невизначені інтеграли
1	2	3
I	$\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
II	$\frac{A}{(x-a)^k}, k \in N, k \geq 2$	$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$

Продовження таблиці 5

1	2	3
III	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0$	$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{\left(x+{p}/{2}\right)^2+\left(q-{p^2}/{4}\right)}dx$
IV	$\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k},\ k\in N, k\ge 2,$ $p^2-4q<0$	Необхідно застосовувати відповідні рекурентні формули
A, B, a, p, q – дійсні числа		

а) розкладемо правильний дріб $\dfrac{7x-5}{x^2+x-6}$ на елементарні дроби. Оскільки

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3),$$

де $x_1=2, x_2=-3$ - корені квадратного рівняння $x^2+x-6=0$, то

$$\frac{7x-5}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3},$$

де A і B – невідомі сталі.

Приводимо дроби до спільного знаменника та отримуємо тотожність

$$7x-5\equiv A(x+3)+B(x-2).$$

Згідно з умовою рівності двох многочленів коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності рівні. Прирівнюючи таким чином коефіцієнти, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c\|l} x & A+B=7; \\ x^0 & 3A-2B=-5; \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=\dfrac{9}{5}; \\ B=\dfrac{26}{5}. \end{cases}$$

Отже, розкладання має вигляд

$$\frac{7x-5}{x^2+x-6}=\frac{9}{5(x-2)}+\frac{26}{5(x+3)}.$$

Звідси

$$\int\frac{7x-5}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{9}{5(x-2)}+\frac{26}{5(x+3)}\right)dx=\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{26}{5}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{26}{5}\ln|x+3|+C;$$

б) розклавши підінтегральний правильний дріб $\frac{3x+1}{(x-2)(x^2+4x+6)}$ на елементарні дроби

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x^2+4x+6)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+6},$$

отримаємо тотожність для знаходження сталих A, B, C

$$3x+1\equiv A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях в обох частинах тотожності, складемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c\|c} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & 4A+C-2B=3, \\ x^0 & 6A-2C=1; \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=\dfrac{7}{18}, \\ B=-\dfrac{7}{18}, \\ C=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Розкладання підінтегрального дробу має вигляд

$$\frac{3x+1}{(x-2)\left(x^2+4x+6\right)}=\frac{\frac{7}{18}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}.$$

Тоді

$$I=\int\frac{3x+1}{(x-2)\left(x^2+4x+6\right)}\,dx=\int\left(\frac{\frac{7}{18}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}\right)dx=$$

$$=\frac{7}{18}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}\,dx.$$

Обчислюємо другий інтеграл окремо:

$$\int\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}\,dx=-\frac{1}{18}\int\frac{7x-12}{x^2+4x+6}\,dx=-\frac{1}{18}\int\frac{7x-12}{(x+2)^2+2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=x+2 \\ x=t-2 \\ dt=(x+2)'\,dx=dx \end{array}\right|=-\frac{1}{18}\int\frac{7(t-2)-12}{t^2+2}\,dt=-\frac{1}{18}\int\frac{7t-26}{t^2+2}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{18}\left[\int\frac{7t}{t^2+2}dt-26\int\frac{dt}{t^2+2}\right]=\left|\begin{array}{l} z=t^2+2 \\ dz=\left(t^2+2\right)'dt=2tdt \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}\int\frac{dz}{z}-26\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]+C=-\frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}\ln|z|-\frac{26}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]+C=$$

$$=-\frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}\ln\left|t^2+2\right|-\frac{26}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right]+C=$$

$$=-\frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}\ln\left|x^2+4x+6\right|-\frac{26}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right]+C\ .$$

Отже,

$$I=\frac{7}{18}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}dx=\frac{7}{18}\ln|x-2|-\frac{7}{36}\ln\left|x^2+4x+6\right|+$$
$$+\frac{13}{9\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.$$

Відповідь:

а) $\int\frac{7x-5}{x^2+x-6}dx=\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{26}{5}\ln|x+3|+C$;

б) $\int\frac{3x+1}{(x-2)\left(x^2+4x+6\right)}dx=$

$$=\frac{7}{18}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-\frac{7}{18}x+\frac{2}{3}}{x^2+4x+6}dx=\frac{7}{18}\ln|x-2|-\frac{7}{36}\ln\left|x^2+4x+6\right|+$$
$$+\frac{13}{9\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.$$

Інтеграли типу

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

де $m_1, n_1, m_2, n_2, ..., m_k, n_k$ – натуральні числа, раціоналізується підстановкою

$$x=t^n,$$

де n – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_k}{n_k}$.

Завдання 2.6. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-5}}$;

б) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,dx$.

Розв’язання:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x-5}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x-5} \\ x=t^2+5 \\ dx=\left(t^2+5\right)' dt = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{\left(t^2+5\right)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\, \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \sqrt{\frac{x-5}{5}} + C\,;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x}-3}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}} \\ x=t^6 \\ dx=\left(t^6\right)' dt = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3-3}{t^6\cdot\left(t^2+1\right)}\cdot 6t^5 dt =$$

$$= 6\int \frac{\left(t^3-3\right)\cdot t^5}{t^6\cdot\left(t^2+1\right)}\,dt = 6\int \frac{t^3-3}{t\left(t^2+1\right)}dt = I\,.$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділяючи цілу частину (д*одаток Г*), одержимо

$$\begin{array}{r|l} -\ t^3-3 & t^3+t \\ \cline{2-2} \underline{t^3+t} & 1 \\ -t-3 & \end{array}$$

$$\frac{t^3-3}{t\left(t^2+1\right)} = 1 + \frac{-t-3}{t\left(t^2+1\right)} = 1 - \frac{t+3}{t\left(t^2+1\right)}.$$

Тоді

$$I=6\int\frac{t^3-3}{t\left(t^2+1\right)}dt=6\int\left(1-\frac{t+3}{t\left(t^2+1\right)}\right)dt=6\left(t-\int\frac{t+3}{t\left(t^2+1\right)}dt\right).$$

Для знаходження останнього інтеграла запишемо розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби (*додаток В*)

$$\frac{t+3}{t\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

звідки

$$t+3=A\left(t^2+1\right)+(Bt+C)\cdot t;$$

$$\begin{array}{c\|\|l} t^2 & A+B=0, \\ t^1 & C=1, \\ t^0 & A=3; \end{array}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases} A=3, \\ B=-3, \\ C=1. \end{cases}$$

Тоді

$$\int\frac{t+3}{t\left(t^2+1\right)}dt=\int\left(\frac{3}{t}+\frac{-3t+1}{t^2+1}\right)dt=3\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{tdt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z=t^2+1 \\ dz=\left(t^2+1\right)'dt=2tdt \end{array}\right|=3\ln|t|-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z}+arctgt+C=$$

$$=3\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|z|+arctgt+C=3\ln|t|-\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|+arctgt+C.$$

Повертаючись до інтеграла I, отримаємо

$$I=6\left(t-3\ln|t|+\frac{3}{2}\ln\left|t^2+1\right|-arctgt\right)+C.$$

Таким чином, враховуючи заміну $t=\sqrt[6]{x}$, одержимо кінцевий результат

$$I=6\left(\sqrt[6]{x}-3\ln\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

Відповідь: а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\sqrt{\frac{x-5}{5}}+C$;

б) $\int\frac{\sqrt{x}-3}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=6\left(\sqrt[6]{x}-3\ln\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$

Завдання 2.7. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int\frac{\sin x}{2\sin x-3\cos x}\,dx$;

б) $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$.

Розв'язання:

а) використовуючи універсальну тригонометричну підстановку $t=tg\frac{x}{2}$ (*додаток Ж*), отримаємо

$$\int\frac{\sin x}{2\sin x-3\cos x}dx=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int\frac{tdt}{4t-3+3t^2}=\frac{4}{3}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{4}{3}t-1}=\frac{4}{3}\int\frac{tdt}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{13}{9}}=\left|\begin{array}{l} z=t+\frac{2}{3} \\ t=z-\frac{2}{3} \\ dt=\left(z-\frac{2}{3}\right)'dz=dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{z-\frac{2}{3}}{z^2-\frac{13}{9}}dz=\frac{4}{3}\left[\int\frac{zdz}{z^2-\frac{13}{9}}-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2-\frac{13}{9}}\right]=\begin{vmatrix} u=z^2-\frac{13}{9} \\ du=2zdz \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{13}{9}}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{\frac{13}{9}}}{z+\sqrt{\frac{13}{9}}}\right|\right]+C=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3z-\sqrt{13}}{3z+\sqrt{13}}\right|\right]+C=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|z^2-\frac{13}{9}\right|-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3t+2-\sqrt{13}}{3t+2+\sqrt{13}}\right|\right]+C=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|3t^2+4t-3\right|-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3t+2-\sqrt{13}}{3t+2+\sqrt{13}}\right|\right]+C.$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо

$$\int\frac{\sin x}{2\sin x-3\cos x}dx=\frac{2}{3}\ln\left|3tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}-3\right|-\frac{4}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{13}}{3tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{13}}\right|+C;$$

б) $$\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx=\begin{vmatrix} \textit{Див. Додаток } 7 \\ \sin^5 x=\sin^4 x\cdot\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)^2\cdot\sin x \\ t=\cos x \\ dt=(\cos x)'dx=-\sin xdx \end{vmatrix}=$$

$$=-\int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt=-\int\left(\frac{1-2t^2+t^4}{t^4}\right)dt=-\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+1\right)dt=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}-t+C=$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C.$$

Відповідь:

а) $\int \frac{\sin x}{2\sin x - 3\cos x}dx = \frac{2}{3}\ln\left| 3tg^2\frac{x}{2} + 4tg\frac{x}{2} - 3\right| - \frac{4}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{13}}{3tg\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{13}}\right| + C$;

б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

2 Поняття первісної для функції. Геометричний зміст первісної.

3 Визначення невизначеного інтеграла.

4 Властивості невизначеного інтеграла.

5 Таблиця основних інтегралів.

6 Метод інтегрування заміною змінної.

7 Метод інтегрування частинами.

8 Типи підінтегральних функцій, що інтегруються частинами.

9 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику.

10 Визначення дробово-раціональної функції.

11 Розклад многочлена на множники.

12 Розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

13 Інтегрування елементарних дробів перших трьох типів.

14 Інтегрування дробово-раціональних функцій.

15 Універсальна тригонометрична підстановка.

16 Інтегрування тригонометричних функцій.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то чому дорівнює $\int f(ax+b)dx$?

A	B	C	D	E
$aF(ax+b)+C$	$aF(ax+b)$	$bF(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)+C$	Інша відповідь

2 Які функції потрібно брати за $u(x)$ при знаходженні інтегралів $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \cos axdx$, $\int x^n \sin axdx$ методом інтегрування частинами?

A	B	C	D	E
$u(x)=e^{ax}$ або $u(x)=\sin ax$, або $u(x)=\cos ax$	$u(x)=x^n e^{ax}$ або $u(x)=x^n \cos ax$, або $u(x)=x^n \sin ax$	$u(x)=1$	$u(x)=x^n$	Інша відповідь

3 Знайти $\int \frac{dx}{(2x-7)^3}$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{(2x-7)}+C$	$\frac{1}{4(2x-7)^4}+C$	$-\frac{1}{4(2x-7)^2}+C$	$\frac{1}{(2x-7)^2}+C$	Інша відповідь

4 Знайти $\int \frac{dx}{3x-4}$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}\ln\|3x-4\|+C$	$\frac{1}{4}\ln\|3x-4\|+C$	$\ln\|3x-4\|+C$	$\frac{1}{(3x-4)^2}+C$	Інша відповідь

5 Знайти $\int e^{5x+6}dx$.

A	B	C	D	E
$5e^{5x+6}+C$	$e^{5x+6}+C$	$\frac{1}{6}e^{5x+6}+C$	$\frac{1}{5}e^{5x+6}+C$	Інша відповідь

6 Знайти $\int \sin^2 x \cos xdx$.

A	B	C	D	E
$\sin^2 x+C$	$\frac{\sin^3 x}{3}+C$	$\sin^3 x+C$	$\frac{\cos^2 x}{2}+C$	Інша відповідь

7 Знайти $\int \frac{x}{\sqrt{9-\left(x^2\right)^2}}dx$.

A	B	C	D	E
$\arcsin\frac{x}{3}+C$	$\frac{1}{6}\arcsin\frac{x^2}{3}+C$	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3}+C$	$\sqrt{9-x^2}+C$	Інша відповідь

8 Знайти $\int \frac{x^2}{\cos^2\left(x^3-8\right)}dx$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{\cos\left(x^3-8\right)}+C$	$\frac{1}{3}tgx^3+C$	$tg\left(x^3-8\right)+C$	$\frac{1}{3}tg\left(x^3-8\right)+C$	Інша відповідь

9 Знайти $\int \ln^5 x\cdot\frac{dx}{x}$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}\ln^6 x+C$	$\frac{1}{4}\ln^5 x+C$	$5\ln^4 x+C$	$\frac{1}{6}x^6+C$	Інша відповідь

10 Знайти $\int (2x+1)e^x dx$.

A	B	C	D	E
$\left(2x+1\right)e^x-2x+C$	$\left(2x+1\right)e^x-2e^x+C$	$\left(2x+1\right)e^x+C$	$2e^x+C$	Інша відповідь

11 Знайти $\int x\sin(2x+1)dx$.

A	B	C	D	E
$-\frac{1}{2}x\cos(2x+1)+$ $+\frac{1}{4}\sin\left(2x+1\right)+C$	$-\frac{1}{2}x\cos(2x+1)+C$	$\frac{1}{4}\sin\left(2x+1\right)+C$	$\frac{1}{4}x\cos(2x+1)-$ $-\frac{1}{2}\sin\left(2x+1\right)+C$	Інша відпо-відь

12 Знайти $\int \ln(3x+8)dx$.

A	B	C	D	E
$x-x\ln\left(3x+8\right)+C$	$\frac{8}{3}\ln\left(3x+8\right)+$ $+x+C$	$x\ln\left(3x+8\right)+$ $+8\ln\left(3x+8\right)+C$	$x\ln\left(3x+8\right)-x+$ $+\frac{8}{3}\ln\left(3x+8\right)+C$	Інша відпо-відь

13 Знайти $\int arctg3xdx$.

A	B	C	D	E
$6xarctg3x+$ $+\frac{1}{9}\ln\left(1+9x^2\right)+C$	$\frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+C$	$xarctg3x-$ $-\frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+C$	$xarctg3x+C$	Інша відпо-відь

14 Знайти $\int \frac{x}{(x-2)^2+4}dx$.

A	B	C	D	E
$arctg\frac{x-2}{2}+C$	$\frac{1}{2}\ln\left\|(x-2)^2+4\right\|+$ $+2arctg(x-2)+C$	$\frac{1}{2}arctg(x+2)+C$	$\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-4x+8\right\|+C$	Інша відпо-відь

15 Знайти $\int \frac{x+2}{(x+1)(x-3)}dx$.

A	B	C	D	E
$-\ln\|x+1\|+$ $+5\ln\|x-3\|+C$	$4\ln\left\|\frac{x+1}{x-3}\right\|+C$	$-\frac{1}{4}\ln\|x+1\|+$ $+\frac{5}{4}\ln\|x-3\|+C$	$\ln\|x-3\|+C$	Інша відпо-відь

16 Знайти $\int \frac{3x+2}{(x-4)(x-2)}dx$.

A	B	C	D	E
$7\ln\|x-4\|-$ $-4\ln\|x-2\|+C$	$2\ln\left\|\frac{x-4}{x-2}\right\|+C$	$-4\ln\|x-4\|+$ $+7\ln\|x-2\|+C$	$\ln\|x-4\|+C$	Інша відпо-відь

17 Знайти $\int \frac{x+8}{(x-6)^2}dx$.

A	B	C	D	E
$\ln\|x-6\|+\frac{8}{x-6}+C$	$\frac{14}{x-6}+C$	$14\ln\|x-6\|+C$	$\ln\|x-6\|-\frac{14}{x-6}+C$	Інша відпо-відь

18 Вказати розкладання дробу $f(x)=\frac{x+4}{(x-1)x^2}$ на елементарні дроби.

A	B	C	D	E
$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x^2}$	$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_3}{x}$	$\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x^2}$	$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}$	Інша відпо-відь

19 Вказати розкладання дробу $f(x)=\frac{x+5}{(x+1)(x^2+4)}$ на елементарні дроби.

A	B	C	D	E
$\frac{A_1x}{x+1}+\frac{A_2}{x^2+4}$	$\frac{A_1}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$	$\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x^2+4}$	$\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2x}{x^2+4}$	Інша відпо-відь

20 Задано $\int\frac{x+1}{x(x+3)(x+4)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+3}+\frac{A_3}{x+4}\right)dx$. Знайти коефіцієнт A_1.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	Інша відпо-відь

21 Задано $\int\frac{x+1}{x(x+3)(x+4)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+3}+\frac{A_3}{x+4}\right)dx$. Знайти коефіцієнт A_2.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	Інша відпо-відь

22 Задано $\int\frac{x+1}{x(x+3)(x+4)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+3}+\frac{A_3}{x+4}\right)dx$. Знайти коефіцієнт A_3.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	Інша відпо-відь

23 За допомогою універсальної тригонометричної підстановки звести інтеграл $I=\int\frac{dx}{2+3\cos x}$ до раціонального дробу.

A	B	C	D	E
$I=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}$	$I=\int\frac{2dt}{5+t^2}$	$I=\int\frac{dt}{2+t^2}$	$I=\int\frac{dt}{4+t^2}$	Інша відпо-відь

24 Знайти $\int\sin 3x\cos 5xdx$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{4}\cos 3x\cos 8x+C$	$\frac{1}{16}\cos 8x+C$	$\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$	$\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 8x+C$	Інша відпо-відь

25 Знайти $\int\left(3ctg^2x+4\right)\left(1+ctg^2x\right)dx$.

A	B	C	D	E
$-4ctg^3x+C$	$-ctg^3x-4x+C$	$4ctg^3x-ctgx+C$	$-ctg^3x-4ctgx+C$	Інша відпо-відь

26 Знайти $\int\left(\sin^3 x+5\right)\cos xdx$.

A	B	C	D	E
$\sin^4 x+5x+C$	$\frac{\sin^4 x}{4}+5\sin x+C$	$2\sin^2 x+5\sin x+C$	$\sin^2 x+C$	Інша відпо-відь

27 Знайти $\int\frac{4-5\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

A	B	C	D	E
$12\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x^5}+C$	$6\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x^5}+C$	$12\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x^2}+C$	$12\sqrt[3]{x}+C$	Інша відпо-відь

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А. С. К., 2001. 648 с.

2 Вища математика: Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.

3 Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчиннікова. Київ : Техніка, 2003. 600 с.

4 Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. Київ : Книги України ЛТД, 2010. 470 с.

5 Коляда Р. В. Вища математика : навч. посіб. для ВНЗ / Р. В. Коляда, І. О. Мельник, О. М. Мельник. Вид. 2-ге, випр. та допов. Львів : Магнолія 2006, 2015. 342 с.

6 Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. Москва : Астрель; АСТ, 2001. 656 с.

7 Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська; за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль : Видавництво Карп’юка, 2003. 480 с.

8 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Завдання до контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студентів факультету ОПУТ заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. Ч. ІІ. 50 с.

ДОДАТОК А

Формули скороченого множення	
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Різниця квадратів
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	Квадрат суми (різниці)
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	Сума кубів
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	Різниця кубів
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Куб суми
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Куб різниці
$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, де $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$. Корені також можна знайти за теоремою Вієта: якщо x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$	Розкладання квадратного тричлена на множники
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$	Виділення повного квадрата
$x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$	Виділення повного квадрата для приведеного рівняння

ДОДАТОК Б

Типи заміни у невизначеному інтегралі	
Тип 1. Лінійна заміна	$\int f(ax+b)dx = \begin{vmatrix} ax+b=t \\ dx=\frac{1}{a}dt \end{vmatrix} =$ $\frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$
Тип 2	$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{vmatrix} t=g(x) \\ dt=g'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t)+C = F(g(x))+C$
Тип 3	$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=h(t) \\ dx=h'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(h(t))h'(t)dt = H(t)+C = H(g(x))+C$, де $t=g(x)$ є розв’язком рівняння $x=h(t)$

ДОДАТОК В

<table>
<tr><th colspan="2">Схема розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів</th></tr>
<tr><td>Правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$, ($n<m$) можна подати у вигляді суми елементарних дробів:
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{H_1}{x-x_r}+\frac{H_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{H_{k_r}}{(x-x_r)^{k_1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{l_1}x+C_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{B_{l_s}x+C_{l_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}\right).$$
Елементарні дроби знаходять, розклавши знаменник вихідного дробу на множники:
$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s},$$
де $k_1,\ldots,k_r$ – кратність дійсних коренів $x_1,\ldots,x_r$ відповідно, квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$ ($i=1,\ldots,s$), які не мають дійсних коренів</td>
<td>Кількість доданків у цій сумі та їх вигляд визначаються коренями знаменника $Q_m(x)$ за правилом:
1) якщо у знаменнику вихідного дробу присутній множник $(x-x_1)^{k_r}$, то до суми елементарних дробів входять дроби першого та другого типів з показниками степеня від 1 до k_r включно:
$$\frac{A_1}{x-x_r}+\frac{A_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{A_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}};$$
2) якщо у знаменнику вихідного дробу присутній множник $\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}$, то до суми елементарних дробів входять дроби третього та четвертого типів з показниками степеня від 1 до l_s включно:
$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{B_{l_s}x+C_{l_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}$$</td></tr>
</table>

ДОДАТОК Г

Схема розкладання неправильного раціонального дробу на суму елементарних дробів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0} \quad (n \geq m).$$

Якщо раціональний дріб неправильний, то виконавши ділення, його можна подати у вигляді суми многочлена $L_{n-m}(x)$ і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{W_r(x)}{Q_m(x)},$$

де $L_{n-m}(x)$ – ціла частина;

$\dfrac{W_r(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Після цього правильний раціональний дріб $\dfrac{W_r(x)}{Q_m(x)}$ розкладаємо на суму елементарних дробів (*додаток В*)

ДОДАТОК Д

Дії зі степенями	
1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	8) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
2) $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$	9) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
3) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	10) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$
4) $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$	11) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, якщо $a \neq 0$	12) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
6) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	13) $\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = a\sqrt[n]{a^m}$
7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m, n \in N$	14) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

ДОДАТОК Е

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x},\ ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x},$ $tg\,x \cdot ctg\,x = 1,$ $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
Формули додавання	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$ $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$ $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$ $tg(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y},\ tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x\,tg\,y},$ $ctg(x+y) = \frac{ctg\,x\,ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y},$ $ctg(x-y) = -\frac{ctg\,x\,ctg\,y + 1}{ctg\,x - ctg\,y}$
Формули подвійного аргументу	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$ $tg\,2x = \frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x} = \frac{2}{ctg\,x - tg\,x},$ $ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2\,ctg\,x} = \frac{ctg\,x - tg\,x}{2}$
Формули половинного аргументу (зниження степенів)	$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},\ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2},$ $tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},\ ctg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x},$ $tg\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$ $ctg\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

Формули перетворення добутку в суму	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$, $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$, $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$
Вираз тригонометричних функцій через тангенс половинного кута	$\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $tg\,x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $ctg\,x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$

Значення тригонометричних функцій для деяких значень аргументу

$f(x)$ \ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	0	Не існує	0
$\operatorname{ctg} x$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не існує	0	Не існує

ДОДАТОК Ж

		Вид інтеграла	Метод інтегрування
I		$\int R(\sin x, \cos x)dx$	*Універсальна тригонометрична підстановка* $t = tg\frac{x}{2},\ x \in (-\pi;\pi)$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dt = \frac{2dt}{1+t^2}$
II	1	$\int R(\sin x)\cos x dx$	*Заміна:* $t = \sin x$
	2	$\int R(\cos x)\sin x dx$	*Заміна:* $t = \cos x$
	3	$\int R(tgx)dx$	*Заміна:* $t = tgx$
III	1	$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2m} x dx$, n, m - цілі числа, $n \geq 0$	*Заміна:* $t = \cos x$
	2	$\int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^{2m} x dx$, n, m - цілі числа, $n \geq 0$	*Заміна:* $t = \sin x$
IV	1	$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$, $m - n = 2k \geq 0$, k - ціле	*Заміна:* $t = tgx$
	2	$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$, $m - n = 2k \geq 0$, k - ціле	*Заміна:* $t = ctgx$
V		$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x dx$, n, m – цілі невід'ємні числа	*Зниження степеня* $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$
VI		$\int \sin nx \cdot \cos mx dx$; $\int \cos nx \cdot \cos mx dx$; $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$, n, m – дійсні числа	*Заміна добутку функцій сумою* $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$, $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$, $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина IV

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 30.10.20 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,0. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.