

Міністерство транспорту України  
Українська державна академія залізничного транспорту

**Григор'єва Тетяна Ігорівна**

УДК 519.216.8

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КАНАЛІВ, СИГНАЛІВ І  
СИСТЕМ ЗВ'ЯЗКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕНЗОРНИХ МЕТОДІВ**

05.12.02 – телекомунікаційні системи та мережі

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Харків – 2003

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеській національній академії зв'язку ім. О.С. Попова Державного комітету зв'язку та інформатизації України.

**Науковий керівник** – доктор технічних наук, професор  
Поповський Володимир Володимирович, зав. кафедрою  
телекомунікаційних систем Харківського національного  
університету радіоелектроніки.

**Офіційні опоненти:** - доктор технічних наук, професор Борщ Валентин Іванович,  
зав. кафедрою автоматичного електрозв'язку Одеської національної  
академії зв'язку ім. О.С. Попова;  
- кандидат технічних наук Титаренко Лариса Олександрівна,  
старший науковий співробітник, докторант кафедри  
телекомунікаційних систем Харківського національного  
університету радіоелектроніки.

**Провідна установа:** Український науково – дослідний інститут радіо і телебачення  
Державного комітету зв'язку та інформатизації України, відділ  
систем радіозв'язку, м. Одеса.

Захист відбудеться „\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2003р. о „\_\_\_” годині на засіданні  
спеціалізованої вченої ради Д 64.820.01 при Українській державній академії залізничного  
транспорту за адресою: Україна, 65050, м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Української державної академії  
залізничного транспорту за адресою: Україна, 65050, м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7.

Автореферат розісланий „\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2003р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

к. т. н., доцент

М.В. Книгавко

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Запропонована дисертація присвячена розробці методики побудови математичних моделей каналів, сигналів і систем зв'язку за допомогою апарату тензорного аналізу, що розширює можливості аналізу і синтезу цих моделей порівняно с традиційним математичним апаратом.

**Актуальність теми.** У процесі пізнання й у повсякденній діяльності винятково важливу роль відіграють моделі, тому що в будь-якій дії, процесі або стані в тім чи іншому вигляді присутні моделі. Особливу роль відіграють математичні моделі, де строгість визначень і постановок задач, формалізований підхід дозволяє, абстрагуючись від конкретного змісту задачі, одержувати на основі використовуваних моделей усі можливі висновки і рішення, а потім, повернувшись до змістовної частини, проаналізувати отримані результати і досягти необхідних властивостей. Спроби віддалитися від математики, як правило, приводять до втрати якості рішень, або дотримуючись М. Месаровича, «відмовляючись від використання точної мови (тобто математики) ми нічого не виграємо».

Сучасні телекомунікаційні системи (ТКС) будуються на базі семирівневої еталонної моделі взаємодії відкритих систем, що визначає можливість їхнього спільного функціонування і використання цифрових технологій типу PDH, SDH, FR, ATM і ін. Семирівнева модель є досить загальною декларативною моделлю, відповідно до якої, в основному, і здійснюється синтез ТКС. Функціональні моделі ТКС і їхні фрагменти можуть бути статичними або динамічними. Для моделювання реальних динамічних систем використовують, в основному диференціальні моделі. Для математичного моделювання структурних властивостей ТКС застосовуються мережні методи, в основі яких лежить теорія графів. Як математичний об'єкт конкретних мереж застосовують матриці інциденцій, зв'язності, суміжності та ін. З використанням матричних методів дослідження структурних властивостей ТКС можливо вирішити багато практично важливих задач. Однак, деякі задачі дуже важко піддаються вирішенню цим методом, тому що дані матриці не мають властивості інваріантності при переході від однієї системи координат до іншої, або при переході від однієї структури до іншої. Розв'язувана з використанням цих матриць задача аналізу носить багато в чому локальний, статичний та ендемічний характер. Крім того, результати спектрального аналізу цих матриць мають обмежене застосовання в силу того, що компоненти їхнього спектру залежать не тільки від стану окремих напрямків, але і від порядку нумерації елементів графа мережі. Ми ж

спробували за допомогою іншого математичного апарату одержати більш загальні моделі, що поєднують як функціональні так і структурні властивості телекомунікаційних систем.

Забезпечення адекватності моделі при моделюванні систем є однією з головних проблем. Варто мати на увазі, що найкращою моделлю є сама система. Тому, створювана модель не обов'язково повинна відображати всі властивості реальної системи. Очевидно, чим синтезована модель більш адекватна реальній системі, тим вона складніша і тим важче з нею працювати. З іншого боку, надмірна спрощеність моделі приводить до втрати адекватності.

Багато проблем у виборі адекватного математичного апарату і коректному його використанні. У зв'язку зі швидким і стрімким розвитком ТКС виникла необхідність розробки їх принципово нової математичної моделі. Для аналізу і синтезу ТКС доцільно перейти до математичних методів, що дозволяють при переході до нових систем координат, при конфігуруванні мережі зберігати інваріантними деякі властивості або параметри мережі. Серед таких методів можна вказати на тензорні методи, а при побудові математичних моделей доцільно використовувати метод симпліціальних комплексів, що дозволяє одержувати адекватну математичну модель як для планарних так і для об'ємних графів. Важливим моментом при цьому є те, що для синтезу структур за допомогою симпліціальних комплексів не обов'язково залучати матричні методи.

Актуальною задачею залишається вивчення каналів зв'язку з випадковою структурою або з розсіюванням. У таких каналах сигнал є багатопроменевим і, як наслідок, має випадковий характер. При вирішенні задач зі скількома характерними середовищами поширення, як це має місце в декаметровому діапазоні, де мають місце ділянки траєкторій поза межами анізотропної іоносфери, ділянка входу в іоносферу і виходу із неї, зв'язок між входом і виходом каналу в матричному вигляді стає складним і громіздким для практичного використання. Аналогічна ситуація виникає в складених радіолініях типу супутникових, стільникових і в каналі зв'язку з дискретними розсіювачами – гідрометеорами. У цих випадках конструктивним представляється перехід від традиційної матриці розсіювання до тензора розсіювання. У результаті чого спрощуються обчислювальні процедури, рішення задачі виходить більш загальним, незалежним від вибору системи координат.

Слід відмітити, що спроба використання тензорного апарату при вивченні каналів і сигналів здійснювалася багатьма авторами неодноразово. Наприклад, Кловським Д. Д. введено поняття тензора поляризованості еліпсоїда. Однак, ним розглядається прямокутна декартова система координат і її спеціальні перетворення, що істотно обмежує використання тензорного аналізу. Дослідження інших авторів також носили частковий

характер. У даній же роботі показана можливість розгляду тензору поляризованості й інших тензорів у довільній системі координат. Таким чином, тензорний апарат розширює можливості аналізу і синтезу моделей каналів зв'язку, а використання тензорних методів при моделюванні каналів спрощує процедури їхніх представлень і рішень.

У багатьох випадках рішення задач зв'язку вимагає використання нелінійних моделей сигналів або проведення відповідних нелінійних перетворень над лінійними сигналами, що проїзводять до тих або інших видів нелінійностей. Разом з тим, у всіх випадках рішення нелінійних задач необхідно хоча б для припущення про специфіку типу нелінійності, що дозволить виконати задачу ідентифікації. Слід зазначити, що відомі методи рішення нелінійних задач досить громіздкі і на практиці, як правило, намагаються звести нелінійну задачу до лінійної. Ситуація ще більш ускладнюється в тому випадку, якщо доводиться мати справу не зі скалярною функцією, а з векторними функціями або матричними рівняннями. Тоді розмірність задачі зростає не тільки пропорційно кількості векторів, але ця кількість повинна бути помножена на кількість членів розкладання. У цьому випадку задача здобуває незорозумілу розмірність, у якій малі обчислювальні погрішності можуть приводити до великих помилок, або така задача стає нестійкою за рішенням. У запропонованій роботі розглянуто інший нетрадиційний підхід до рішення нелінійних задач, заснований на використанні тензорних перетворень і переходу у ріманів простір із відповідною нелінійною метрикою за допомогою коваріантного диференціювання і з можливістю відповідного зворотнього перетворення.

Серед методів завадозахисту прийому сигналів просторово-часова обробка сигналів (ПЧОС) і використання адаптивних антенних решіток (ААР) є одними з найбільш ефективних. У даній роботі запропонована схема просторово-часової обробки, що складається в застосуванні тензорних методів. Таким чином, математичні моделі сигналів зв'язку так само адекватно відображаються в термінах тензорних операторів, крім того з'являється дуже конструктивна процедура рішення нелінійних рівнянь.

Приймаючи до уваги можливість введення нової методології моделювання, аналізу і синтезу каналів, сигналів і телекомунікаційних систем, що дозволяє більш адекватно й у більш загальному вигляді вирішувати ці задачі, а також вирішувати ряд задач по лінеаризації, адаптації й ін., представляється, що тема даної дисертації є актуальною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Досліджені в роботі проблеми безпосередньо впливають із задач в галузі науки, сформульованих у «Концепції розвитку ОАО «УКРТЕЛЕКОМ» до 2005 року», а також у «Переліку державних, наукових і науково – технічних програм по пріоритетних напрямках розвитку науки і техніки на 2002 – 2006 роки», затвердженому Постановою Кабінету Міністрів

України № 1716 від 24.12.2001. Крім того, дисертація пов'язана з виконанням держбюджетної НДР № 01-92, що виконується Харківським національним університетом радіоелектроніки за планом міносвіти.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є побудова математичних моделей каналів, сигналів і систем зв'язку за допомогою апарату тензорного аналізу.

Для досягнення поставленої мети в дисертації вирішені наступні наукові задачі:

1. Моделювання сигналів і каналів зв'язку з випадковими параметрами за допомогою тензорних методів.
2. Приведення нелінійних сигналів зв'язку до лінійного вигляду за допомогою переходу у ріманів простір із відповідною нелінійною метрикою, використовуючи поняття коваріантного диференціювання, і з можливістю відповідного зворотнього перетворення.
3. Задачі апроксимації випадкових процесів і полів за допомогою тензорних методів і сплайн-функцій.
4. Моделювання систем зв'язку, з використанням диференціальної геометрії, тензорного аналізу, комбінаторної топології. Застосування теорії моделей для строгого обґрунтування побудованої моделі.
5. Адаптація задачі багатошляхової маршрутизації до дейтаграмних мереж із застосуванням тензорних методів дослідження.

**Об'єктом досліджень** у роботі є процес моделювання каналів, сигналів і систем зв'язку.

**Предмет дослідження** - побудова узагальнених тензорних моделей каналів, сигналів і систем зв'язку.

**Методи досліджень.** Дослідження ведуться методами диференціальної геометрії, теорії систем, функціонального аналізу, лінійної алгебри, тензорного аналізу, комбінаторної топології, теорії моделей та імітаційного моделювання.

#### **Наукова новизна отриманих результатів**

1. Узагальнено відому математичну модель телекомунікаційної мережі - матрицю інцидентів за допомогою поняття тензора. З використанням методів теорії моделей показано, що метричний тензор ріманового простору - обґрунтована математична модель ТКС. Показано адекватність і досконалість тензорної моделі.
2. Розроблена принципово нова процедура перетворення нелінійного сигналу до виду лінійного диференціального рівняння в коваріантних похідних у рімановому просторі в спеціальній системі координат. Іншими словами, побудовано взаємно однозначне перетворення, що переводить дані нелінійні функціональні об'єкти за

допомогою поняття коваріантної похідної у ріманів простір, де вони вже мають лінійну форму. Запропоновано схему використання даного методу лінеаризації для різних процесів: при просторово-часовій обробці сигналів, в адаптивних антенних решітках.

3. Показана можливість представлення сигналів зв'язку і багатопробеневого каналу зв'язку в термінах тензорних операторів.

4. При відновленні дискретизованих полів, вперше пропонується узагальнити поняття сплайн-функції за допомогою поняття тензора, компонентами якого є сплайн-функції.

5. Представлено адаптацію задачі багатошляхової маршрутизації до дейтаграмних мереж із застосуванням тензорних методів дослідження.

**Практичне значення отриманих результатів.** Дослідження носить теоретичний характер з практичною спрямованістю. Основні результати дисертації можуть бути застосовані для подальшого розвитку теорії телекомунікаційних систем, математичного моделювання складних систем, теорії і методів обробки нелінійних сигналів, теорії каналів зв'язку і сигналів. Отримані результати становлять інтерес із практичної точки зору, оскільки можуть бути використані, наприклад, при рішенні задачі багатошляхової маршрутизації для дейтаграмних мереж, при просторово-часовій обробці сигналів, в адаптивних антенних решітках.

**Особистий внесок здобувача.** Автор самостійно виконав основні теоретичні дослідження. У роботах, опублікованих у співавторстві автору належать: [6] – здійснена адаптація тензорних рішень задачі багатошляхової маршрутизації до дейтаграмних мереж, [8,14] – застосування сплайн-функцій при рішенні нелінійних диференціальних рівнянь у задачах оптимального керування; [5,7,16] – розробка методології побудови математичної моделі системи зв'язку, використовуючи поняття диференціальної геометрії, а також обґрунтування отриманої моделі з позиції теорії моделей; [15] – застосування симпліціальних методів у сполученні з тензорними методами при дослідженні телекомунікаційних систем.

**Апробація роботи.** Результати досліджень, що включені в дисертацію доповідалися на наступних конференціях:

1. Український математичний конгрес на честь 200-річчя М. В. Остроградського. Київ, 2001;
2. Міжнародна науково-технічна конференція студентства і молоді «Мир інформації і телекомунікацій». Київ, 2002;
3. Міжнародна науково-практична конференція “Динаміка наукових досліджень”. Дніпропетровськ, 2002;

4. Міжнародний Форум «Прикладна радіоелектроніка. Стан і перспективи розвитку». Харків, 2002.

**Публікації.** По темі дисертаційної роботи опубліковано 16 наукових праць, у тому числі 8 статей (4 у співавторстві) у спеціалізованих науково-технічних журналах, 8 доповідей (3 у співавторстві) у збірниках праць науково-технічних конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів та висновків. Загальний обсяг дисертаційної роботи становить 122 сторінки, із них 99 сторінок основної частини, 26 сторінок із малюнками, 4 сторінки з таблицями. Список використаних джерел включає 84 найменування на 7 сторінках.

### ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність проблеми досліджень, проведених у дисертаційній роботі, сформульовані мета і задачі роботи, наукова новизна і практичне значення отриманих результатів. Приведені дані про публікації по темі дисертаційної роботи, а також про особистий внесок автора.

Перший розділ дисертації присвячений аналізу методів математичного моделювання каналів, сигналів і телекомунікаційних систем. Спочатку приводиться огляд сучасних систем зв'язку і мережних технологій. Поряд з цифровою технологією PDH відзначені такі перспективні технології, як SDH, FR, ATM, AON, а також LAN-технології, що взаємодіють з перерахованими вище технологіями при організації віддаленого доступу до локальних мереж через міські (MAN) і глобальні (WAN) мережі. Приведені найбільш важливі якісні показники сучасних технологій.

Далі викладені деякі основні поняття з теорії моделей і формулюються основні вимоги, що підлягають обліку при складанні математичної моделі. Виявляється, що для того щоб побудувати модель  $M$  деякої несуперечливої теорії  $T$  алгебраїчної системи  $U$  сигнатури  $\Sigma$ , необхідно

- 1) на множині  $M$  задати алгебраїчну систему  $V$  сигнатури  $\Sigma$ ;
- 2) установити ізоморфізм  $f : U \rightarrow V$ , тобто довести, що алгебраїчні системи  $U$  і  $V$  ізоморфні.

Потім з позицій теорії моделей приводиться обґрунтування побудови відомої математичної моделі структури системи зв'язку – матриці інциденцій.

Розглянуто матрицю інциденцій, де

$$\mu_{ij} = \mu(x_i, j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \text{ і } j \text{ інцидентні,} \\ 0, & \text{якщо } x_i \text{ і } j \text{ не інцидентні} \end{cases}$$



можна розглянути як її елементи. Показано, що система зв'язку  $U$  ізоморфна матриці інциденцій  $\|\mu_{ij}\|$ , тобто будь-якому елементу  $j$  системи зв'язку  $U$  із множини  $R$  і будь-якої комутації  $x_i$  із  $F$  можна поставити у відповідність елемент  $\mu_{ij}$  матриці інциденцій, і, навпаки, кожному елементу  $\mu_{ij}$  матриці інциденцій можна поставити у відповідність елемент системи зв'язку  $j$  і комутацію  $x_i$ .

Також показано, що після зміни порядку нумерації елементів графа мережі, що можна інтерпретувати як перетворення системи координат, змінюється сигнатура моделі. Між старою і новою сигнатурами взаємно однозначна відповідність відсутня, а, отже, взаємно однозначна відповідність і між моделями, породженими цими сигнатурами, теж відсутня. Таким чином, можна стверджувати, що математична модель - матриця інциденцій не може бути адекватною, оскільки одній і тій же мережі ставиться у відповідність лічильна множина моделей. Те ж можна сформулювати й у відношенні матриці зв'язності і матриці суміжності. Отже перелічені матриці не являються досконалими моделями. Оскільки, тензор узагальнює поняття матриці і має властивість інваріантності при перетворенні системи координат, то при математичному моделюванні системи зв'язку доцільно використовувати як тензор, наприклад, метричний тензор ріманового простору.

Розглянуто наступні моделі сигналів і каналів зв'язку. Представлення сигналу на виході каналу через системні функції останнього погодиться з відомими представленнями електромагнітної хвилі, що виражаються через функцію Гріна у вільному просторі

$$E_m(r) = k^2 \int G_{nm}(r-r') \alpha_{mp}(r') E_p(r') dr',$$

де  $G(r-r') = \frac{\exp\{-jk|r-r'\}}{|r-r'|}$  - функція Гріна для вільного простору;  $r, r'$  - радіуси-вектори

відповідно точки спостереження і точки інтегрування,  $\alpha_{mp}(r')$  - тензор розсіювання, що описує стан  $m$ -го компонента, викликаного  $p$ -им компонентом поля;  $m, n, p$  - відповідні координати  $m=(x,y,z), n=(x',y',z'), p=(x'',y'',z'')$ . У припущенні плоского фронту падаючої хвилі  $E_0$ , тензор для однорідного розсіювання

$$\alpha_{mp}(k_s, k_o, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int [\varepsilon_{mp}(r, \omega) + j \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{mp}(r, \omega) - \delta_{mp}] e^{j(k_o - k_s) \cdot r} dr,$$

де  $\delta_{mp} = \begin{cases} 1, & \text{при } m = p \\ 0, & \text{при } m \neq p \end{cases}$ ,  $k_i = b_i \frac{\omega}{e}$ , ( $i = \overline{0, \infty}$ ) – хвильові вектори падаючої і розсіяної

хвиль, визначені відповідно в координатах  $\{\mathbf{b}_o\}$  і  $\{\mathbf{b}_s\}$ ,  $\epsilon_{mp}(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\sigma_{mp}(\mathbf{r}, \omega)$  – тензори відповідно діелектричній проникненості і провідності каналу.

Як відомо, у каналах з розсіюванням і відбиттям від неоднорідності середовища сигнал є багатопробним і, як правило, має випадковий характер розсіювання і багатопробності. Сигнал на виході цього каналу представляється у вигляді

$$y(t, \bar{r}, \bar{p}) = \sum_{k=1}^n H_k(t, \tau_k, \bar{r}, \bar{p}) x(t - \tau_k) + n(t, \bar{r}, \bar{p}),$$

де  $\tau_k$  – затримка k-го променя,  $H_k$  – коефіцієнт передачі по кожному променю. Розглянуті характеристики каналів у загальному випадку являють собою багатомірні функції, отже слід відносити їх до класу тензорів.

Далі приводиться огляд математичних моделей телекомунікаційних систем і мереж. Розрізняють структурні і функціональні моделі, або моделі структурних і функціональних властивостей систем. Вивчення структурних властивостей систем разом з функціональними властивостями складає предмет структурно – функціонального аналізу, що є основним принципом системних досліджень. Структурні властивості відображаються взаємозв'язками між елементами системи. Для телекомунікаційних систем цим відображенням є мережа; її математична інтерпретація можлива за допомогою теорії графів. Функціональні властивості системи характеризують поведінку системи в часі і просторі, а математичний опис цих властивостей адекватно представляється диференціальними рівняннями. Функціональними і структурними властивостями цілком вичерпуються усі властивості системи. Однак, об'єднати функціональні і структурні властивості в одній математичній моделі дуже складно. У даній роботі показана можливість побудови математичної моделі системи зв'язку з застосуванням тензорних методів, у рамках якої вдається об'єднати функціональні і структурні властивості системи.

Другий розділ присвячений математичному моделюванню каналів і сигналів зв'язку за допомогою тензорних методів. Запропоновано метод лінеаризації нелінійного сигналу, математична модель якого описується наступним рівнянням стану

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) + g(t)u(t), \quad (1)$$

де  $f(x, t)$  – деяка векторна нелінійна відносно  $x$  функція,  $g(t)$  – масштабуючий коефіцієнт збурюючого систему білого гаусового шуму, або визначає рівень керування при  $u(t)$  – керуючому впливі. Рівняння стану може бути доповнено рівнянням спостереження, що

може бути як лінійним, так і нелінійним, і містить у собі перешкоди в каналі спостереження  $n(t)$ , і має вигляд

$$y(t) = c(t)x(t) + n(t) .$$

Схема генерації процесу  $x(t)$  і спостереження  $y(t)$  представлені на рис. 1.

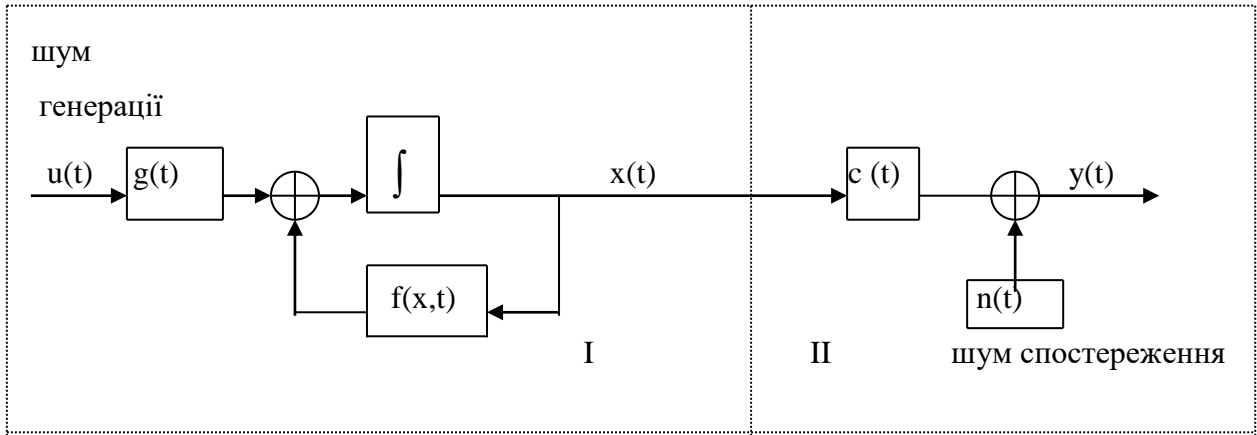


Рис. 1. Схема генерації процесу  $x(t)$  (I) і спостереження  $y(t)$  (II)

Показана можливість побудови взаємно однозначного перетворення, що переводить дані функціональні об'єкти за допомогою поняття коваріантної похідної у ріманів простір. Схема перетворення нелінійної тензорної функції у лінійну з евклідового у ріманів простір представлена на рис. 2. При лінійності функції коваріантна похідна перетворюється у звичайну часткову похідну.

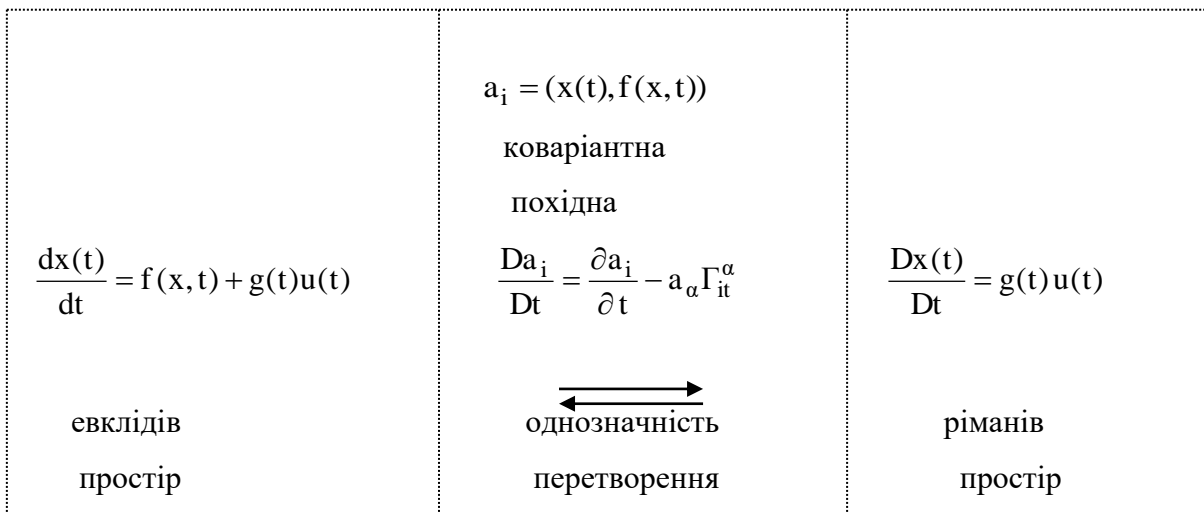


Рис. 2. Схема перетворення нелінійної тензорної функції у лінійну із евклідового у ріманів простір

Тобто показано, що рівняння (1) у рімановому просторі в спеціальній системі координат має наступний вигляд

$$\frac{Dx(t)}{Dt} = g(t)u(t) . \quad (2)$$

Рівняння (2) – диференціальне рівняння в коваріантних похідних, лінійне щодо функції  $x(t)$ . Таким чином, математичну модель нелінійного сигналу можна привести до лінійного вигляду за допомогою коваріантного диференціювання у рімановому просторі .

Далі запропонована наступна схема просторово-часової обробки сигналу (ПЧОС), що полягає в застосуванні тензорних методів. Зробимо перетворення, що переводить дані нелінійні функціональні об'єкти за допомогою поняття коваріантної похідної в ріманів простір. Потім можна, наприклад, використовувати лінійний алгоритм адаптивних решіток і, якщо є необхідність, за допомогою зворотного перетворення зробити відповідний перехід у вихідний сигнальний простір. Структурна схема ПЧОС такого алгоритму представлена на рис. 3. Остання процедура може не виконуватися, оскільки для подальших досліджень можна використовувати лише отриману лінійну форму сигналу.

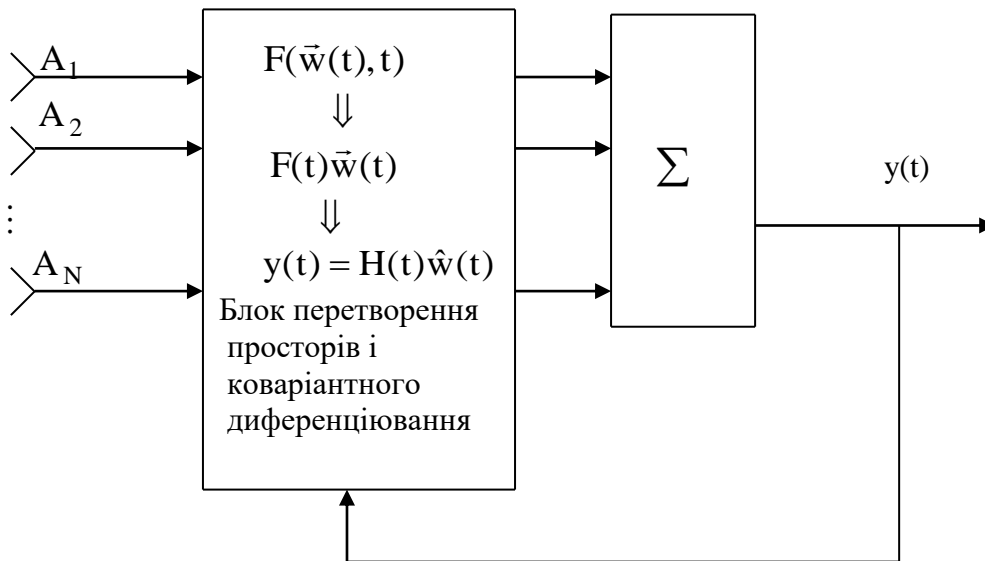


Рис. 3. Алгоритм просторово – часової обробки сигналів з перетворенням просторів представлення

Побудовано математичну модель каналу зв'язку з розсіюванням за допомогою тензора розсіювання, що узагальнює відомий метод  $S$  - матриці. Зв'язок між входом і виходом каналу представлено в тензорному вигляді

$$E_j = LS_j^\alpha E_\alpha, \quad (3)$$

де  $E_j$ ,  $E_\alpha$  - вектори сигналу на вході і на виході каналу,  $S_j^\alpha$  - тензор розсіювання,

$$L = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr}. \text{ Співвідношення (3) у тензорному вигляді на відміну від матричного вигляду}$$

можна досліджувати, використовуючи апарат тензорного аналізу.

Далі розглядаються задачі апроксимації випадкових процесів і полів. При відновленні вихідного стану дискретизованного сигналу як правило використовують лінійну інтерполяцію. У даній роботі пропонується робити інтерполяцію за допомогою сплайн-функцій. При відновленні дискретизованих полів, на відміну від процесів, виникає необхідність в інтерполяції не простих функцій, а вектор-функцій. У цьому випадку нами пропонується узагальнити поняття сплайн-функції за допомогою поняття тензора, компонентами якого є сплайн-функції, що дає змогу розширити клас вирішуваних задач.

У третьому розділі побудовані тензорні моделі телекомунікаційних систем.

З використанням методів теорії моделей показано, що метричний тензор  $n$ -мірного ріманового простору – обґрунтована математична модель системи зв'язку з  $n$  комутаціями.

1. Нехай у кожній системі координат  $(x)$  даного ріманового простору  $V_n$  компоненти метричного тензору  $g_{ij}(x)$  задають значення інтенсивності потоку каналу, що з'єднує  $i$ -тий і  $j$ -тий вузли системи зв'язку  $U$ . Визначимо сигнатуру  $\Sigma$  системи зв'язку  $U$  таким чином:  $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ , де  $R$  – множина вузлів,  $F$  – множина комутацій  $a_{ij}$ , що з'єднують  $i$ -тий і  $j$ -тий вузли системи зв'язку  $U$ . Тоді місцеву операцію  $\mu$  задамо таким чином:  $\mu(a_{ij}) = g_{ij}$ .

2. Показано, що система зв'язку  $U$  ізоморфна рімановому простору  $V_n$  (кожному каналу  $a_{ij}$  можна поставити у відповідність інтенсивність потоку  $g_{ij}$  цього каналу, і навпаки, кожній функції  $g_{ij}(x)$  можна поставити у відповідність канал  $a_{ij}$ , для якого значення функції  $g_{ij}(x)$  - значення інтенсивності потоку).

Структура ріманового простору може бути різною й ускладнюватися в залежності від режиму роботи системи зв'язку. При перерозподілі інформаційних потоків по мережі, тобто при перетворенні системи координат  $((x) \rightarrow (y))$ , компоненти метричного тензора, як відомо, змінюються за формулою

$$g'_{ij}(y) = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}.$$

Відзначимо, що для матриці інциденцій подібні зміни, а відповідно і формули відсутні, оскільки матриця інциденцій не має властивості інваріантності щодо перетворення системи координат. Отже, математичну модель мережі - матрицю інциденцій можна використовувати лише в окремих випадках. Тензор же є загальною моделлю, задається однозначно і має властивість інваріантності.

Далі в роботі побудовано тензорну модель телекомунікаційної системи за допомогою загальної методології, розробленої А. В. Лемешко. Представлена модель використана для вирішення часткових задач. Тензорні методи дозволяють сконцентрувати основну увагу на властивостях системи зв'язку незалежно від системи координат, у якій розглядається дана система зв'язку. Більш того, рішення будь-якої задачі можна звести до дослідження системи зв'язку в найбільш кращій (примітивній) системі координат. Перехід від вихідної системи координат, у якій здійснювалася постановка задачі, до примітивної і назад здійснюється за допомогою відомих перетворень. Оскільки при дослідженні системи зв'язку виникає необхідність в одержанні різних характеристик системи при зміні навантаження в мережі, а за допомогою тензорних методів ми можемо обчислювати ці характеристики при переході від однієї системи координат до іншої, то система координат у заданому просторі – структурі задається спеціальним способом, запропонованим Г. Кроном, зокрема, для телекомунікаційних систем така специфіка задання системи координат вперше була використана В. В. Поповським і А. В. Лемешко. Відзначимо, що структурні і функціональні властивості системи представляються в рамках однієї і тієї ж тензорної моделі.

Показана можливість використання теорії симплексів у сполученні з апаратом тензорного аналізу для ефективного дослідження структурних і функціональних властивостей системи зв'язку. Представлення мережі у вигляді симпліціального комплексу дозволяє функціонально вивчати глобальну структуру мережі. При цьому перехід від розгляду графа мережі до розгляду симплексів можна інтерпретувати як перехід від однієї системи координат до іншої. Даний симпліціальний метод, являється альтернативним існуючим, котрі засновані на матрицях суміжності і зв'язності. Цей метод вільний від таких недоліків, як залежність структури моделі від порядку нумерації, неоднозначності в зворотних перетвореннях і ін. Використання алгебри симплексів відкриває можливість розвитку нового математичного апарату, переваги якого варто ще досліджувати.

У четвертому розділі пропонується адаптація рішень задачі багатошляхової маршрутизації до дейтаграмних мереж за допомогою тензорної моделі. Відомо, що потенційно дейтаграмний режим передачі даних забезпечує більш повне завантаження

мережних ресурсів, сприяючи тим самим підвищенню продуктивності ТКС в цілому. У цьому зв'язку особливу актуальність здобуває задача контролю якості у дейтаграмних мережах. На комплексне рішення цієї задачі претендує стратегія багатошляхової маршрутизації, що забезпечує гарантовану доставку абонентського трафіку по множині альтернативних шляхів. Тензорна інтерпретація основних мережних термінів і понять дозволяє значно спростити процес розрахунку шуканих параметрів ТКС, додавши йому необхідну системність. Це досягається шляхом зведення рішення вихідної задачі до розрахунку примітивної мережі, вибір якої відповідає переходу до найбільш кращого аспекту розгляду. У свою чергу, перехід від вихідної постановки до примітивної здійснюється за допомогою нескладних перетворень.

Далі в роботі продемонстровано рішення задачі багатошляхової маршрутизації на наступному прикладі. Нехай структура мережі зв'язку задана 1-мережею (рис.4), що

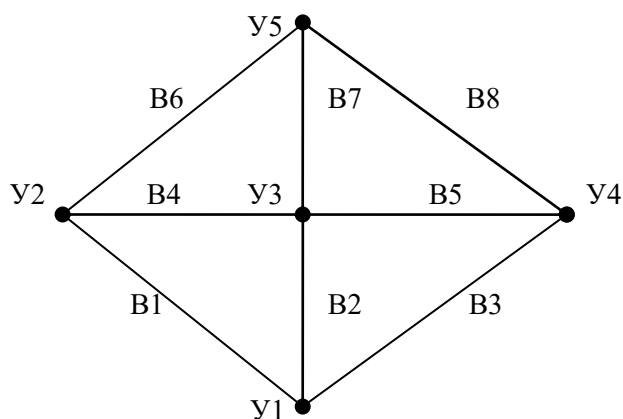


Рис.4. Структурна модель телекомунікаційної мережі

містить п'ять вузлів (U1-U5) і вісім дуг (U1-U8). Необхідно забезпечити передачу абонентського трафіку від вузла 1 до вузла 5 обсягом 100 од. т. за мінімальний час. Пропускні здібності дуг мережі, передбачаються відомими (табл.1). У результаті рішення поставленої задачі за допомогою тензорної моделі системи зв'язки знайдені компоненти вектора  $H_v$ , що характеризують інформаційні навантаження в кожній із дуг мережі,

$$H_v^t = [35.6; 41.47; 22.93; 12.56; 10.13; 48.16; 18.78; 33.06],$$

Таблиця – 1

№ дуги	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8
Величина пропускної здібності дуги (од. т./с)	50	90	40	50	90	70	20	40

а також мінімальний час багатошляхового доведення абонентського трафіка обсягом 100 од.т., рівний 1.4 секунди. Отже, якщо якість обслуговування оцінюється мінімальним часом доведення, то в даній мережі абонентський трафік заданого обсягу буде прийнятий до обслуговування тільки з гарантованим часом доставки не менш 1.4 секунди. Для порівняння, у рамках приведенного прикладу доставка заданого обсягу трафіка по

найкоротшому шляху В1-В6 у метриці пропускних здібностей дуг мережі була б забезпечена не раніше за 3.4 секунди, що підтверджує переваги багатопляхової доставки.

Таким чином, у рамках дейтаграмних мереж можуть бути виконані оптимізаційні процедури не тільки по найбільш раціональному використанню ресурсів, але й одночасно можна забезпечити рішення задачі по якості обслуговування, мінімізуючи час доставки повідомлень, виключаючи проблеми зациклення й ін. Очевидно, що існуючими досі засобами і методами таке рішення не могло бути отримане раніше.

## ВИСНОВКИ

1. Дисертація присвячена розробці нової методики моделювання, аналізу і синтезу систем телекомунікацій, а також їхніх елементів з використанням єдиного математичного прийому тензорних методів. У роботі продемонстрована можливість застосування тензорного аналізу до моделювання сигналів, каналів зв'язку, функціональних і структурних властивостей телекомунікаційних систем. Більш того, тензорний підхід дозволяє одержати не тільки єдину методологію аналізу і синтезу телекомунікаційних систем і їхніх елементів, але і дозволяє вирішувати ці задачі в більш загальному вигляді при менш жорстких обмеженнях. Важливою перевагою тензорних методів є можливість збереження інваріантними ті або інші властивості системи зв'язку при різних змінах режимі. Існуючі матричні методи аналізу і синтезу таких властивостей не мають.

2. Приведено строге обґрунтування побудови відомої математичної моделі системи зв'язку - матриці інциденцій за допомогою теорії моделей. Показано недосконалість цієї моделі. При зміні порядку нумерації елементів графа мережі змінюється сигнатура моделі, тому що матриці не мають властивості інваріантності при переході від однієї системи координат до іншої, або при переході від однієї структури до іншої. При математичному моделюванні систем зв'язку доцільно використовувати тензор, що узагальнює поняття матриці і має, на відміну від матриці, властивість інваріантності при перетворенні системи координат. З використанням методів теорії моделей показано, що метричний тензор ріманового простору – є досконалою і обґрунтованою математичною моделлю телекомунікаційної системи. Структура ріманового простору може бути різноманітною й ускладнюватися в залежності від режиму роботи системи зв'язку.

3. Запропоновано принципово новий метод вирішення нелінійних задач з приведенням їх до лінійного вигляду. Метод заснован на використанні невивіржених взаємно обернених перетворень за допомогою коваріантного диференціювання із вихідного евклідового, де ці функції нелінійні, у ріманів простір, де вони представляються вже лінійними залежностями. У цьому просторі можуть бути виконані відповідні процедури, а отримане рішення при необхідності може бути трансльоване знову у вихідний простір.



Розроблений метод лінеаризації дає можливість вирішувати різноманітні задачі. Він продемонстрований на задачах просторово-часової обробки сигналів, а також може бути використаний в адаптивних антенних решітках.

4. Показана можливість побудови математичної моделі каналу зв'язку з розсіюванням за допомогою тензора розсіювання, що узагальнює відомий метод  $S$  - матриці. Для анізотропних середовищ тензорна модель співпадає з класичними.

5. При відновленні дискретизованих полів, вперше пропонується узагальнити поняття сплайн-функції за допомогою поняття тензору, компонентами якого є сплайн-функції, що забезпечує можливість робити інтерполяції як функцій, так і полів за допомогою тензора.

6. Використовуючи тензорні методи, побудована математична модель телекомунікаційної системи, у рамках якої можна досліджувати як структурні, так і функціональні її властивості. При цьому застосовується штучний прийом представлення метричного тензора у вигляді функціональних характеристик телекомунікаційної системи, а як координати використовуються параметри окремих напрямків зв'язку: пропускні здібності, рівні навантаження та ін. Це дає можливість за рахунок перетворення системи координат здійснювати перерозподіл зазначених властивостей за обраними критеріями.

7. Представлення мережі у виді симпліціального комплексу забезпечує можливість вивчати задачі аналізу і синтезу глобальної структури мережі. Перехід від розгляду графа мережі до розгляду симплексів пропонується інтерпретувати як перехід від однієї системи координат до іншої. Показана можливість використання теорії симплексів у сполученні з апаратом тензорного аналізу для ефективного дослідження структурних і функціональних властивостей системи зв'язку.

8. Показана можливість практичної реалізації тензорної моделі для синтезу дейтаграмних процедур маршрутизації, що функціонують за критерієм мінімуму часу витрати на доставку інформації. Очевидно, не існує альтернативної методики, яка так просто і ефективно вирішувала дану задачу.

9. У роботі продемонстрована різноманітність типових для аналізу і синтезу телекомунікаційних задач, у яких адекватно застосована тензорна методологія, що дозволяє зробити висновок про можливість прийняття цієї методології в якості однієї з основних узагальнюючих відомі раніше моделі і рішення.

### **ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Григорьева Т. И. Тензорная модель телекоммуникационной сети // Праці УНДІРТ, 2002. – № 2 (30). – С. 74 – 75.

2. Григорьева Т. И. Г-преобразование параболически келеровых пространств, находящихся в почти геодезическом отображении  $\pi_2(\epsilon=0)$  // Украинский математический журнал. – 2001. – Т. 53. – № 4. – С. 449 – 454.
3. Григор'єва Т. І. Інваріантні геометричні об'єкти майже геодезійного відображення  $\pi_2(\epsilon=0)$  // Математичні Студії. – 2001. – Т. 16. – № 2. – С. 213 – 216.
4. Григор'єва Т. І. Майже геодезичне відображення  $\pi_2(\epsilon=0)$  узагальнено – еквідистантних просторів // Наукові вісті НТУУ “КПР”. – 2001. – № 5. – С. 114 – 119.
5. Григорьева Т. И., Яковчук О. П. Применение дифференциальной геометрии в математическом моделировании телекоммуникационных систем // Праці УНДІРТ, 2003. – № 1 (33). – С. 45 – 47.
6. Лемешко А. В., Григорьева Т. И. Адаптация тензорных решений задачи многопутевой маршрутизации к дейтаграммным сетям // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2003. – № 1. – С. 72 – 76.
7. Поповский В. В., Григорьева Т. И. Перспективы теории и практики телекоммуникаций // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – 2002. Вып. 128. – С. 4 – 10.
8. Стрелковская И. В., Григорьева Т. И. Математическое моделирование динамики в системах управления // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2002. – № 2. – С. 26 – 27.
9. Григорьева Т. И. Математическое моделирование телекоммуникационных систем // Междунар. научно-технич. конф. студенчества и молодежи «Мир информации и телекоммуникаций»: Тез. докл. – Киев, 2002. – С. 22 – 24.
10. Григорьева Т. И. К вопросу о почти геодезическом отображении  $\pi_2(\epsilon=0)$  // Материалы междунар. конференции, посвящ. 90 – летию со дня рожд. Г. Ф. Лаптева. М.: Изд. ЦПИ при мех. – мат. ф-те МГУ, 1999. – С. 14 – 15.
11. Григорьева Т. И. Метрики специальных параболически келеровых пространств // Междунар. школа - семинар по геометрии и анализу, посвящ. 90-летию Н.В. Ефимова: Тез. докл. – Абрау-Дюрсо, 2000. – С. 30 – 31.
12. Григорьева Т. И. Почти геодезическое отображение  $\pi_2(\epsilon=0)$  специальных параболически келеровых пространств // Український математичний конгрес, на честь 200-річчя М.В.Остроградського: Тези доповідей. - Київ, 2001. – С. 17 – 18.
13. Григорьева Т. И. Специальные типы Г-преобразования римановых пространств с общими геодезическими // Воронежская весен. матем. школа «Понтрягинские чтения X»: Тез. докл. – Воронеж, 1999. – С. 74.

14. Григорьева Т. И., Стрелковская И. В., Зуев С. И. Применение сплайн-функций в математическом моделировании телекоммуникационных систем // Вісник Будинку економічних та науково – технічних знань, 2002. – № 2. – С. 81 – 87.
15. Григорьева Т. И., Яковчук О. П. Математическое моделирование телекоммуникационных систем с применением симплицальных методов // Матеріали Міжнар. науково-практичної конф. “Динаміка наукових досліджень”. – Том 1. Сучасні комп’ютерні інформаційні технології. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2002. – С. 8 – 9.
16. Поповский В. В., Стрелковская И. В., Григорьева Т. И. Методы теории моделей в задачах анализа и синтеза телекоммуникационных сетей // Междунар. Форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития»: Сб. научн. трудов. – Харьков: АН ПРЭ, ХНУРЭ, 2002. – С. 400 – 401.

### Анотація

Григор'єва Т. І. Математичне моделювання каналів, сигналів і систем зв'язку з використанням тензорних методів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук зі спеціальності 05.12.02 – телекомунікаційні системи і мережі. Українська державна академія залізничного транспорту, Харків, 2003.

Дисертаційна робота присвячена розробці єдиної методології побудови математичних моделей каналів, сигналів і систем зв'язку за допомогою апарата тензорного аналізу, що розширює можливості аналізу і синтезу цих моделей. З використанням методів теорії моделей показано, що метричний тензор ріманового простору – є більш досконалою і обґрунтованою математичною моделлю телекомунікаційної системи. Розроблена принципово нова процедура перетворення нелінійного сигналу до лінійного виду в рімановому просторі за допомогою поняття коваріантної похідної. Показано можливість використання теорії симплексів у сполученні з апаратом тензорного аналізу для ефективного дослідження структурних і функціональних властивостей системи зв'язку. Приведено практичну реалізацію тензорної моделі мережі і застосування цієї моделі для синтезу дейтаграмних процедур маршрутизації, що функціонують за критерієм мінімуму часу витрати на доставку інформації.

Ключові слова: нелінійний сигнал, багатопроменевий канал зв'язку, функціональні і структурні властивості системи зв'язку, тензор.

### Аннотация

Григорьева Т. И. Математическое моделирование каналов, сигналов и систем связи с использованием тензорных методов. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук по специальности 05.12.02 – телекоммуникационные системы и сети. Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков, 2003.

Диссертация посвящена разработке новой методики моделирования, анализа и синтеза систем телекоммуникаций, а также их элементов с использованием единого математического приема тензорных методов. В работе продемонстрирована возможность применения тензорного анализа к моделированию сигналов, каналов связи, функциональных и структурных свойств телекоммуникационных систем. Более того, тензорный подход позволяет получить не только единую методологию анализа и синтеза телекоммуникационных систем и их элементов, но и позволяет решать эти задачи в более общем виде при менее жестких ограничениях. Важным достоинством тензорных методов является возможность сохранения инвариантными те или иные свойства телекоммуникационной связи при различных изменениях режимов или других преобразований. Существующие матричные методы анализа и синтеза такими свойствами не обладают. Приведено строгое обоснование построения известной математической модели системы связи – матрицы инцидентий с помощью теории моделей. Показано, что при изменении порядка нумерации элементов графа сети изменяется сигнатура модели, что приводит к тому, что одной и той же сети ставиться в соответствие счетное число моделей. В настоящей работе при математическом моделировании систем связи предлагается использовать тензор, обобщающий понятие матрицы и обладающий, в отличие от матрицы, свойством инвариантности при преобразовании системы координат. С использованием методов теории моделей показано, что метрический тензор риманова пространства – строго обоснованная и совершенная математическая модель телекоммуникационной системы. Тензор является адекватной, общей моделью, задается однозначно и обладает свойством инвариантности.

Показана возможность представления сигналов связи и многолучевого канала связи в терминах тензорных операторов. Построена математическая модель канала связи с рассеянием при помощи тензора рассеяния, обобщающая известный метод S - матрицы.

Разработана принципиально новая процедура преобразования нелинейного сигнала к линейному виду в некотором римановом пространстве с помощью понятия ковариантной производной. В этом пространстве могут быть выполнены соответствующие процедуры и

при необходимости полученное решение может быть возвращено в исходное пространство. Предложенная схема продемонстрирована при использовании данного метода линеаризации для различных процессов: при пространственно-временной обработке сигналов, в адаптивных антенных решетках и др.

Показана возможность использования теории симплексов в сочетании с аппаратом тензорного анализа для эффективного исследования структурных и функциональных свойств системы связи. Переход от рассмотрения графа сети к рассмотрению симплексов предлагается интерпретировать как переход от одной системы координат к другой, при этом поведение телекоммуникационной системы можно исследовать с помощью тензоров.

При восстановлении дискретизированных полей, впервые предлагается обобщить понятие сплайн-функции с помощью понятия тензора, компонентами которого являются сплайн-функции, что позволяет производить интерполирование компонентов поля с помощью тензора.

Моделирование телекоммуникационных систем с помощью тензорных методов дает возможность исследовать как структурные, так и функциональные свойства системы связи в рамках одной модели.

В работе продемонстрировано решение задачи многопутевой маршрутизации с использованием тензорной модели, а также предлагается адаптация решений задачи многопутевой маршрутизации к дейтаграммным сетям с помощью тензорной модели. Известно, что потенциально дейтаграммный режим передачи данных обеспечивает значительно более полную загрузку сетевых ресурсов, способствуя тем самым повышению производительности ТКС в целом. В этой связи особую актуальность приобретает задача контроля качества в дейтаграммных сетях. На комплексное решение этой задачи претендует стратегия многопутевой маршрутизации, обеспечивающая гарантированную доставку абонентского трафика по множеству альтернативных путей. Введенная тензорная интерпретация основных сетевых терминов и понятий позволяет значительно упростить процесс расчета искомых параметров ТКС. Это достигается путем сведения решения исходной задачи к расчету примитивной сети. В свою очередь, переход от исходной постановки к примитивной осуществляется с помощью известных тензорных преобразований. Таким образом, в работе приведена практическая реализация тензорной модели сети и применение этой модели для синтеза дейтаграммных процедур маршрутизации, функционирующих по критерию минимума времени затраты на доставку информации.

Ключевые слова: нелинейный сигнал, многолучевой канал связи, функциональные и структурные свойства системы связи, тензор.

**Annotation**

Grigorieva T. I. Mathematical modeling of channels, signals and systems of communication with use of tensor methods. - Manuscript.

Thesis to apply for scientific degree of candidate of technical science, speciality 05.12.02 - telecommunication systems and networks. The Ukrainian State Academy of a railway transport, Kharkov, 2003.

Dissertation is devoted to development of uniform methodology of construction of mathematical models of channels, signals and systems of communication with the help of the device of the tensor analysis expanding opportunity of the analysis and synthesis of these models. Using methods of the theory of models we show that metric tensor of Riemann`s space is strictly proved mathematical model of telecommunication system. The essentially new procedure of transformation of a nonlinear signal to a linear kind in the Riemann`s space with the help of concept by covariant derivative is developed. The opportunity using the theory of simplexes in a combination with the device of the tensor analysis for effective research of structural and functional properties of communication system is shown. The adaptation of a task of multipath routing to data - networks is offered with application of tensor methods of research.

Key words: a nonlinear signal, multibeam channel of communication, functional and structural properties of system of communication, tensor.