



**УКРАЇНСКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра „Механіка і проектування машин”

ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

*Опорний конспект лекцій з дисциплін
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА», «ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА»,
«ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА ТА ОСНОВИ
КОНСТРУЮВАННЯ», «ОПІР МАТЕРІАЛІВ ТА
ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА»*

Харків – 2012

Основи розрахунків на міцність: Опорний конспект лекцій / В.І. Мороз, О.А. Логвіненко, В.І. Іщенко, О.В. Фомін. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. – 124 с.

Призначений для студентів факультету управління процесами перевезень спеціальностей 7.100403 “Організація перевезень і управління на транспорті”, 7.100403.01 «Організація міжнародних перевезень», 7.100403.02 «Організація митного контролю», механічного факультету спеціальностей 7.090510 «Теплоенергетика», 7.092201 “Електричні системи та комплекси транспортних засобів”, 7.092202 “Електричний транспорт”, факультету автоматики, телемеханіки та зв’язку спеціальностей 7.092507 “Автоматика та автоматизація на транспорті”.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 27 листопада 2009 р., протокол № 4.

Лл. 54, бібліогр.: 7 назв.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисциплін «Технічна механіка», «Прикладна механіка»,
«Прикладна механіка та основи конструювання»,
«Опір матеріалів та прикладна механіка»

Відповідальний за випуск Логвіненко О.А.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 30.06.10 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,5. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.



УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Механіка і проектування машин»

ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

Опорний конспект лекцій з дисциплін «Технічна механіка»,
«Прикладна механіка», «Прикладна механіка та основи
конструювання»,
«Опір матеріалів та прикладна механіка»

Харків 2012

Мороз, В.І. Основи розрахунків на міцність [Текст]: конспект лекцій / В.І. Мороз, О.А. Логвіненко, В.І. Іщенко, О.В. Фомін. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. – 127 с.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 27 листопада 2009 р., протокол № 4.

Лл. 54, бібліогр.: 7 назв.

Призначений для студентів факультету управління процесами перевезень спеціальностей 7.100403 “Організація перевезень і управління на транспорті”, 7.100403.01 «Організація міжнародних перевезень», 7.100403.02 «Організація митного контролю», механічного факультету спеціальностей 7.090510 «Теплоенергетика», 7.092201 “Електричні системи та комплекси транспортних засобів”, 7.092202 “Електричний транспорт”, факультету автоматики, телемеханіки та зв’язку спеціальностей 7.092507 “Автоматика та автоматизація на транспорті”.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

ЗМІСТ

	Вступ	5
1	Загальні відомості	6
1.1	Основні поняття.....	6
1.2	Основні форми конструктивних елементів.....	7
1.3	Зовнішні навантаження.....	8
1.4	Внутрішні сили. Метод перерізів.....	9
1.5	Механічні напруження.....	12
1.6	Види деформацій.....	14
1.7	Основні гіпотези.....	15
2	Розтягання та стискання	16
2.1	Визначення напружень та деформацій.....	16
2.2	Механічні характеристики матеріалів. Діаграма розтягання.....	18
2.3	Допустимі напруження.....	25
2.4	Врахування власної ваги при розтягання.....	26
3	Зсув	28
3.1	Визначення напружень та деформацій.....	28
3.2	Приклад розрахунку на зсув.....	30
4	Геометричні характеристики плоских перерізів ...	33
5	Кручення	36
5.1	Напруження і деформації при крученні.....	37
5.2	Розрахунок гвинтових циліндричних пружин.....	41
6	Згинання	45
6.1	Опори та опорні реакції балок.....	46
6.2	Поперечна сила та згинальний момент.....	47
6.3	Диференціальні залежності.....	51
6.4	Нормальні напруження.....	55
6.5	Дотичні напруження.....	59
6.6	Деформації при згинанні. Пружна лінія балки.....	62
6.7	Універсальне рівняння пружної лінії балки.....	66
7	Основи теорії напружено-деформованого стану ...	70
7.1	Напруження в точці. Головні площадки та головні	70

	напруження.....	
7.2	Лінійний напружений стан.....	72
7.3	Плоский напружений стан.....	74
7.4	Об'ємний напружений стан.....	78
7.5	Теорії міцності.....	80
8	Розрахунки на стійкість.....	84
8.1	Стійка та нестійка пружна рівновага.....	84
8.2	Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стержня.....	86
8.3	Границі застосування формули Ейлера.....	88
8.4	Практичні методи розрахунку на стійкість.....	90
9	Міцність матеріалів при циклічно-змінних напруженнях.....	92
9.1	Поняття про втомлене руйнування матеріалу.....	92
9.2	Цикли напружень та їх характеристики.....	93
9.3	Крива втомленості.....	96
9.4	Діаграма граничних напружень.....	98
9.5	Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості.....	100
9.6	Розрахунок на міцність при змінних напруженнях...	103
10	Розрахунки при ударних навантаженнях.....	106
10.1	Явище удару. Коефіцієнт динамічності.....	106
10.2	Поздовжній удар.....	108
10.3	Поперечний удар.....	113
10.4	Крутний удар.....	114
11	Контактні напруження. Розрахунок тонкостінних резервуарів.....	117
11.1	Основні поняття.....	117
11.2	Формули для визначення контактних напружень.....	119
11.3	Розрахунок тонкостінних резервуарів.....	121
	Список літератури.....	124
	ВСТУП	

Навчальними планами для студентів факультетів управління процесами перевезень (спеціальностей «Організація перевезень і управління на транспорті», «Організація міжнародних перевезень», «Організація митного контролю»), автоматики, телемеханіки та зв'язку (спеціальності «Автоматика та автоматизація на транспорті») і механічного факультету (спеціальностей «Теплоенергетика», «Електричні системи та комплекси транспортних засобів», «Електричний транспорт») передбачено вивчення дисциплін «Технічна механіка», «Прикладна механіка та основи конструювання», «Опір матеріалів та прикладна механіка», «Прикладна механіка», які є складовими загальноінженерної підготовки майбутніх фахівців залізничного транспорту.

Обмеженість семестрових обсягів лекційних занять обумовлює певні труднощі при викладанні теоретичного курсу зазначених дисциплін. Це визначило відповідні вимоги до методичного забезпечення навчального процесу, особливо в умовах організації самостійної роботи студентів при впровадженні кредитно-модульної системи навчання.

Певними труднощами при створенні такого методичного забезпечення є вирішення проблеми його універсальності при максимальному урахуванні особливостей кожної спеціальності і спеціалізації, за якими ведеться підготовка студентів.

Для вирішення цієї проблеми на кафедрі «Механіка і проектування машин» впроваджено відповідний методичний підхід. Він полягає у розробленні інформаційно-довідкових робочих конспектів для студентів різних спеціальностей, які забезпечують кероване самостійне вивчення наведених вище дисциплін на основі використання базового конспекту лекцій, що охоплює усі розділи робочих програм.

Дана навчально-методична розробка є складовою частиною базового конспекту лекцій до змістового модуля «Основи розрахунків на міцність» вищевказаних загальноінженерних дисциплін, які викладаються в Українській державній академії залізничного транспорту.

З метою найбільш повного урахування особливостей висвітлення окремих розділів дисциплін для студентів різних спеціальностей. У розробленні і рецензуванні даного конспекту лекцій брали участь провідні викладачі випускних кафедр академії.

1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основні поняття

В *основах розрахунків на міцність* розглядаються і вирішуються на рівні інженерних методів питання про міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій (деталей машин та споруд).

Міцність – здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень.

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Типовими задачами розрахунків на міцність є:

1) *задача аналізу* (перевірка міцності та жорсткості): при заданих навантаженнях визначити напруження і деформації та перевірити, чи не перевищують вони допустимих значень;

2) *задача синтезу* (проектувальні розрахунки): підбір матеріалів та визначення розмірів елементів конструкцій при заданих навантаженнях;

3) *розрахунок вантажопідйомності*: при заданих параметрах конструкції визначення граничних або руйнівних навантажень.

Вперше питання про розрахунок на міцність було розглянуто у роботах відомого італійського вченого Галілео Галілея. Значний внесок у розвиток розрахунків на міцність зробили відомі вчені: Леонард Ейлер, Д.І. Журавський, Ф.С. Ясинський, С.П. Тимошенко, М.М. Беляєв, О.М. Крилов, С.В. Серенсен, Г.С. Писаренко та інші.

1.2 Основні форми конструктивних елементів

При всьому різноманітті видів конструктивних елементів, які зустрічаються в спорудах та машинах, їх можна звести до порівняно невеликої кількості основних форм. Тіла, які мають ці основні форми, і є об'єктами розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість. Це *стержні, оболонки, пластини та масивні тіла*.

Стержень (брус) – тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри. Стержні бувають: *прямолінійні* (рисунок 1.1, а), *криволінійні* (рисунок 1.1, б), *призматичні* постійного (рисунок 1.1, в) і змінного (рисунок 1.1, г) перерізів та *тонкостінні* (рисунок 1.1, д).

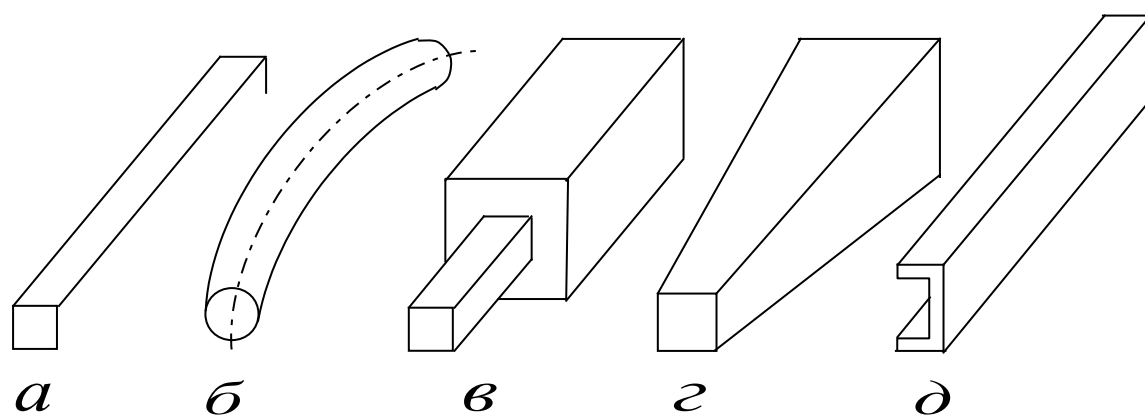


Рисунок 1.1 – Види стержнів

Оболонка – тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

Поверхня, яка ділить товщину оболонки на рівні частини, називається *серединною*. За формою серединної поверхні розрізняють *циліндричні* (рисунок 1.2, а), *конічні* (рисунок 1.2, б), *сферичні* (рисунок 1.2, в) та *тороїдальні* оболонки (рисунок 1.2, г).

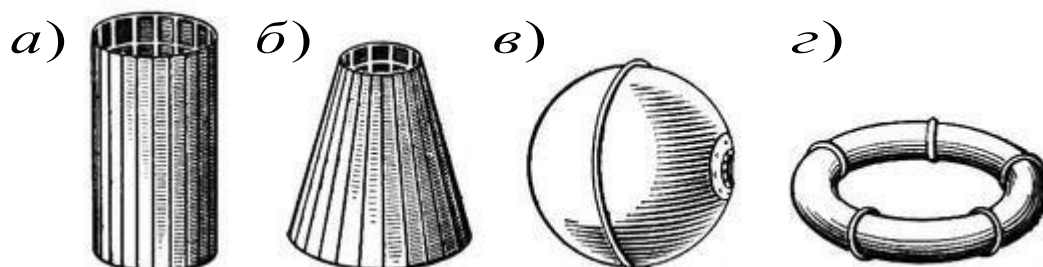


Рисунок 1.2 – Види оболонок

Пластина (рисунок 1.3) – оболонка, серединна поверхня якої являє собою площину.

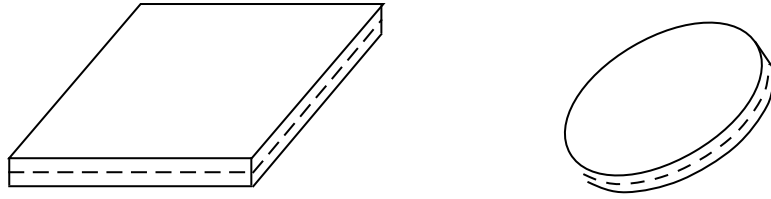


Рисунок 1.3 – Види пластин

Масивне тіло – тіло, у якого всі три розміри одного порядку.

1.3 Зовнішні навантаження

Навантаження, які діють на конструкцію (та які сприймають деталі машин і споруд у процесі їх експлуатації), є по відношенню до неї *зовнішніми силами*.

Навантаження, що прикладаються до елемента конструкції, можуть бути:

- *прикладені по ділянках його поверхні (поверхневі);*
- *розподілені по об'єму (об'ємні).*

Об'ємні навантаження – сили, які прикладені до кожної частки матеріалу деталі (*власна вага, сили інерції*). Розмірністю об'ємних навантажень – H / m^3 .

Поверхневі навантаження поділяються на *зосереджені* та *розподілені*.

Зосереджені – навантаження, які діють на досить малій площі порівняно з загальними розмірами деталі та умовно вважаються прикладеними у точці. Розмірність зосереджених навантажень є – H .

Розподілені – навантаження, які прикладені до ділянок деталі або конструкції більшої площі та які при складанні розрахункової схеми неможливо замінити зосередженими. Розмірність розподілених навантажень: за довжиною – H / m , за площею елемента конструкції – σ_2 .

За тривалістю дії розрізняють навантаження:

- *постійні* – навантаження, які діють протягом всього періоду експлуатації конструкції (власна вага конструкції);
- *тимчасові* – навантаження, які діють протягом обмеженого проміжку часу (вага потяга).

За характером впливу на конструкцію розрізняють навантаження:

- *статичні* – навантаження, які повільно зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незмінними;
- *динамічні* – навантаження, які викликають у конструкції або окремих її елементах великі прискорення, якими при розрахунках неможливо знехтувати.

Динамічні навантаження поділяються:

- *на миттєві* – дуже швидко сягають своєї повної величини (тиск колеса локомотива, коли він заїжджає на міст);
- *ударні* – діють протягом дуже короткого проміжку часу;
- *повторно-змінні* – змінюються за циклічним законом.

До зовнішніх сил, які діють на елементи конструкції, крім навантажень, – активних сил, належать також реакції зв'язків – реактивні сили.

1.4 Внутрішні сили. Метод перерізів

Внаслідок навантажування реальних тіл зовнішніми силами або за рахунок зміни температури в них виникають *внутрішні сили взаємодії* між частинками (сили міжмолекулярної взаємодії), які протидіють зовнішнім силам і намагаються повернути частинки тіла в положення, яке вони займали до деформації.

Визначення внутрішніх сил, які з'являються внаслідок

навантажування тіла, є основною задачею розрахунків на міцність. Для визначення внутрішніх сил використовується метод перерізів.

Суть цього методу визначається послідовністю наступних операцій:

- умовно робиться переріз деталі у місці визначення внутрішніх сил (рисунок 1.4, а);
- умовно відкидається одна з частин перерізаної деталі;
- дія відкинутої частини замінюється внутрішніми силами (які врівноважують сили, що прикладені до залишеної частини);
- визначаються невідомі внутрішні зусилля з рівнянь рівноваги.

У загальному випадку просторової задачі система внутрішніх сил зводиться до головного вектора сил \bar{R} (рисунок 1.4, б), прикладеного у центрі ваги перерізу, та головного моменту \bar{M} (рисунок 1.4, б), які розкладаються на складові за осями координат (внутрішні силові фактори в перерізі (див. рисунок 1.4, в)).

$$\bar{R} = \bar{N}_x + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z, \quad (1.1)$$

$$\bar{M} = \bar{T}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z. \quad (1.2)$$

Внутрішні силові фактори в перерізі:

- \bar{N}_x – поздовжня (нормальна) сила;
- \bar{Q}_y, \bar{Q}_z – поперечні (перерізувальні) сили;
- \bar{T}_x – крутний момент;
- \bar{M}_y, \bar{M}_z – згинальні моменти.



Рисунок 1.4 – До методу перерізів

Для визначення невідомих внутрішніх силових факторів використовують шість рівнянь рівноваги статички:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.5 Механічні напруження

Одним із головних понять основ розрахунку на міцність є механічне напруження. **Напруження** є локальною мірою внутрішніх сил і характеризує їх інтенсивність на нескінченно малій площадці перерізу. Одиниця вимірювання механічних напружень є – Па.

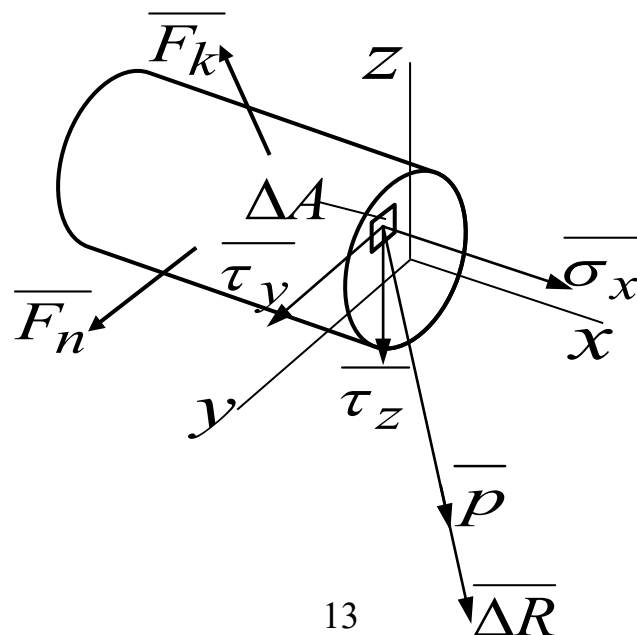
Повне напруження в точці на площадці ΔA (див. рисунок 1.5):

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A}, \quad (1.4)$$

де $\Delta \bar{R}$ – рівнодіюча внутрішніх сил на досить малій площадці ΔA

$$\Delta \bar{R} = \Delta \bar{N}_x + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z, \quad (1.5)$$

де $\Delta \bar{N}_x$ – нормальна складова
 \bar{Q}_y, \bar{Q}_z – дотичні складові.



Механічні напруження (рисунок 1.5):

- нормальне:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{N}_x}{\Delta A}, \quad (1.6)$$

- дотичні:

$$\tau_y = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{Q}_y}{\Delta A}, \quad \tau_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{Q}_z}{\Delta A}. \quad (1.7)$$

Модуль повного напруження на площадці ΔA :

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (1.8)$$

де $\sigma = \sigma_x$ – **нормальне напруження** в даній точці по визначеному перерізу (характеризує інтенсивність сил відриву або стискання часток елемента конструкції, розміщених по обидва боки цього перерізу та знаходиться в площині перпендикулярній до перерізу);

τ – **повне дотичне напруження** (характеризує інтенсивність сил, які зрушують ці частки в площині перерізу, що розглядається та знаходиться в площині перерізу);

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (1.9)$$

1.6 Види деформацій

Деформування – змінювання форми і розмірів деталі чи споруди під дією зовнішніх сил чи теплового впливу.

Деформація – кількісна характеристика деформування.

Геометрично деформації поділяють:

- *на лінійні деформації* – характеризують відносне подовження або укорочення нескінченно малого відрізка, уявно відкладеного у відповідному напрямку із заданої точки;
- *кутові деформації* – характеризують зміну початкових прямих кутів.

За фізичною ознакою деталь може деформуватися пружно чи пластично.

Пружне деформування – деформування, що зникає після припинення дії сил, які його спричинили (деталь повертається до своєї початкової форми і розмірів).

Залишкове деформування – деформування, що не зникає після припинення дії сил, які його спричинили (*деталь не повертається до своєї початкової форми і розмірів*). При цьому залишкове деформування без руйнування називають *пластичним*.

Деформації, які зникають після розвантаження, називають *пружними*, а ті, що залишаються, – *пластичними (або залишковими)*.

В опорі матеріалів залежно від характеру зовнішнього навантаження розрізняють такі основні види деформацій:

- *розтягання* або *стискання* – характеризуються подовженням або укороченням бруса;
- *зсув (зріз)* – характеризується відносним паралельним зміщенням двох суміжних поперечних перерізів;
- *кручення* – характеризується кутом взаємного закручування перерізів відносно осі бруса;
- *згинання* – супроводжується викривленням осі бруса і

характеризується в кожному перерізі величиною прогину та кута повороту.

Сполучення кількох основних видів деформацій називають *складною деформацією*.

1.7 Основні гіпотези

1 Гіпотеза про суцільність матеріалу. Припускається, що матеріал повністю (без пустот) заповнює форму тіла.

2 Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Матеріал вважається однорідним та ізотропним, тобто в різних об'ємах та різних напрямках властивості матеріалу вважаються однаковими.

3 Гіпотеза про малість деформацій. Припускається, що деформації тіла настільки малі порівняно з його розмірами, що не враховуються при складанні рівнянь рівноваги.

4 Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції). Припускається, що результат дії на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливів кожного навантаження окремо.

5 Принцип Сен-Венана. Припускається, що якщо в межах деякої області пружного тіла прикладена система сил, то на відстанях, що значно перевищують характерні розміри цієї області, напруження та деформації практично однакові для всіх статично еквівалентних систем сил.

6 Гіпотеза плоских перерізів. Припускається, що поперечні перерізи бруса, плоскі до прикладання до них навантаження, залишаються плоскими і при дії навантаження.

2 РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

2.1 Визначення напружень та деформацій

Осьове розтягання або стискання бруса – простий вид навантаження, при якому єдиним внутрішнім силовим фактором у його поперечному перерізі є *внутрішня поздовжня сила N* , а

всі інші дорівнюють нулю.

Простіше за все цей вид навантаження можна реалізувати, якщо прикласти до стержня зовнішні сили F_i , лінія дії котрих збігається з його віссю (рисунок 2.1, а).

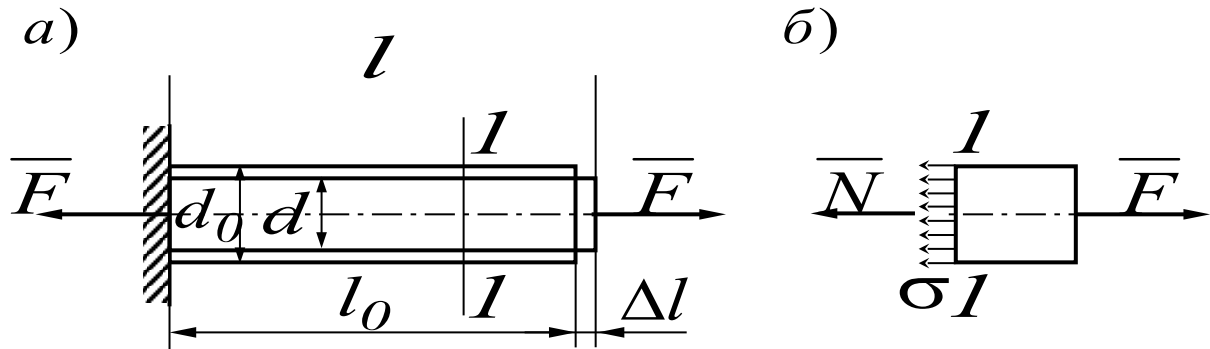


Рисунок 2.1 – Модель розтягання бруса

Застосовуючи метод перерізів, з умови рівноваги правої частини стержня (рисунок 2.1, б): $|N| = |F|$, $\bar{N} = -\bar{F}$.

Слід зазначити, що в загальному випадку поздовжня сила N у поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня зовнішніх сил, розташованих з одного боку перерізу.

Правило знаків:

- $N > 0$, якщо вона розтягує (скерована від перерізу);
- $N < 0$, якщо вона стискає (скерована до перерізу).

У поперечних перерізах діють тільки рівномірно розподілені нормальні напруження σ :

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A – площа перерізу.

Розтягнутий стержень деформується і змінює свої поздовжні та поперечні розміри на відповідні величини:

- при розтяганні: $\Delta l = l - l_0 > 0$, $\Delta d = d - d_0 < 0$;
- при стисканні: $\Delta l = l - l_0 < 0$ та $\Delta d = d - d_0 > 0$,

де l_0 , d_0 – початкова довжина та діаметр стержня;
 l , d – довжина та діаметр стержня після його деформування.

Відносні деформації:

- поздовжня:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.2)$$

- поперечна:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}. \quad (2.3)$$

Коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.4)$$

- $0 \leq \mu \leq 0,5$ – для ізотропних матеріалів;
- $\mu \approx 0,3$ – для конструкційних матеріалів;
- $\mu = 0$ – для пробки;
- $\mu \approx 0,5$ – для гуми та рідини.

Закон Гука – нормальні напруження прямо пропорційні відносній поздовжній деформації:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.5)$$

де E – модуль пружності першого роду, модуль Юнга, модуль поздовжньої пружності (розмірність Па).

Модуль E характеризує властивості матеріалу опиратися пружному деформуванню, тобто чим більше модуль, тим менше деформується матеріал.

Абсолютне подовження бруса:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}, \quad (2.6)$$

де $E \cdot A$ – жорсткість при розтяганні.

Формулою (2.6) можливо користуватися на ділянці стержня, в межах якої N і A залишаються постійними.

Умова міцності при розтяганні (стисканні)

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.7)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження (*більш докладно у п. 2.3*);
 N_{max} – максимальне значення нормальної сили.

2.2 Механічні характеристики матеріалів. Діаграма розтягання

Для визначення механічних характеристик матеріалів (*модуля пружності, коефіцієнта Пуассона, пластичності, твердості та ін.*) проводять спеціальні їх випробування.

Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтягання, оскільки при цьому виявляються найважливіші їх властивості. З випробувального матеріалу виготовляють спеціальні – *циліндричні* (рисунок 2.2, *а*) або *призматичні (плоскі)* (рисунок 2.2, *б*), які в свою чергу можуть мати різні розміри та форму, але при цьому треба дотримуватися таких співвідношень подібності:

- для довгих зразків: $l_0 = 11,3\sqrt{A_0}$; ($l_0 = 10d_0$);
- для коротких зразків: $l_0 = 5,65\sqrt{A_0}$; ($l_0 = 5d_0$).

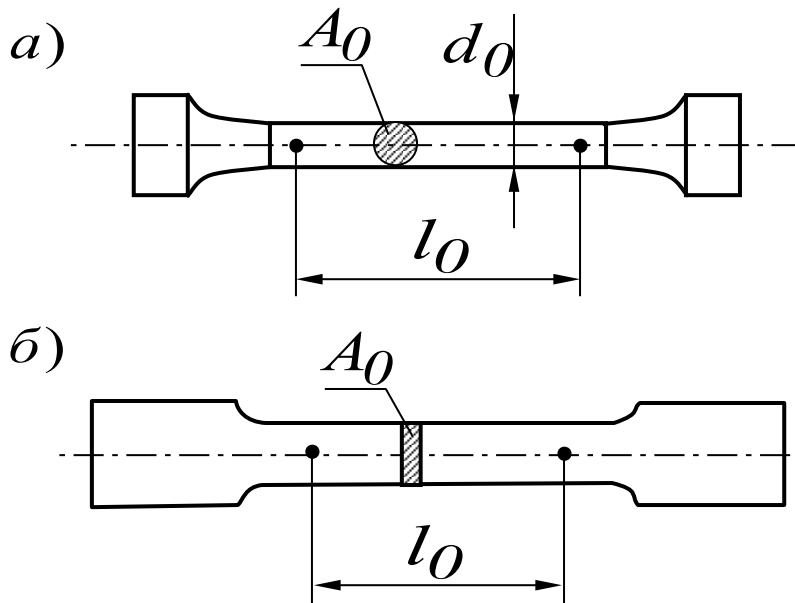


Рисунок 2.2 – Зразки для випробувань матеріалів на розтягання

Вимоги геометричної подібності дозволяють для одних і тих самих матеріалів отримувати схожі результати в різних лабораторіях на різних зразках.

Зразок встановлюється у тискачах та розтягується на спеціальній машині, яка автоматично вимірює навантаження F і абсолютне подовження Δl і записує **діаграму розтягання** $F = f(\Delta l)$, яку перебудовують у систему координат $\sigma = f(\varepsilon)$ ($\sigma = \frac{F}{A_0}, \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$).

Для прикладу розглянемо детально діаграму розтягання маловуглецевої сталі (рисунок 2.3). Наведемо назви ділянок і характерні точки діаграми.

Ділянка Oa – зона пропорційності.

Границя пропорційності $\sigma_{pr} = \frac{F_a}{A_0}$ – граничне напруження,

до котрого матеріал підкоряється закону Гука.

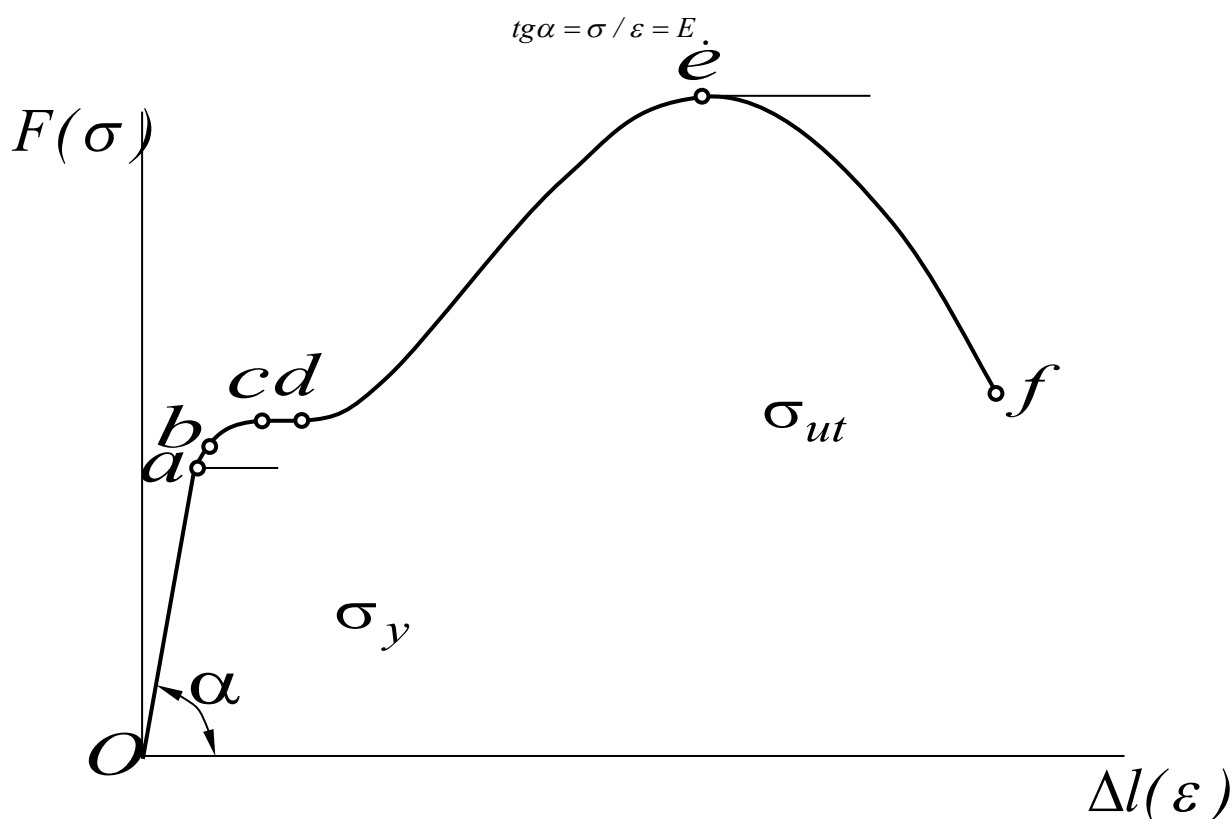


Рисунок 2.3 – Діаграма розтягання маловуглецевої сталі

Ділянка *ab* – зона пружності.

Границя пружності $\sigma_e = \frac{F_b}{A_0}$ – граничне напруження, до котрого матеріал деформується пружно. Точки *a* і *b* на діаграмі практично співпадають (**закон Гука вже не виконується з достатньою точністю**).

При подальшому збільшенні навантаження після точки *b* з'являються залишкові деформації.

Горизонтальна ділянка *cd* – площадка текучості.

Границя текучості $\sigma_y = \frac{F_d}{A_0}$ – напруження, при якому деформація зразка протікає при постійному розтягуювальному зусиллі.

Текучість – зростання деформації без підвищення

навантаження. При цьому має місце перебудова кристалевих решіток і матеріал зміцнюється. Також на поверхні зразка виникають похилі лінії, розташовані під кутом 45° .

Наклеп – зміна властивостей матеріалу внаслідок деформації за границею текучості – використовується для зміцнення деталей.

Ділянка de – зона зміцнення.

Границя міцності або тимчасовий опір $\sigma_{ut} = \frac{F_{max}}{A_0}$.

Після того як матеріал пройшов стан текучості, він “зміцнюється”, бо до нього повертається здатність опиратися розтяганню.

Ділянка ef – зона локальної текучості.

При досягненні на діаграмі точки e на зразку виникає місцеве звуження – **шийка**. При цьому деформації зростають лише поблизу шийки, яка швидко тоншає і, як наслідок, падає зусилля і умовне напруження. У точці f зразок розривається.

Крім перелічених вище **характеристик міцності**, при випробуваннях на розтягання визначають також **характеристики пластичності**:

- **відносне залишкове подовження при розриві**

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100 \%, \quad (2.8)$$

де l_p – розрахункова довжина зразка після розриву.

Величина δ залежить від співвідношення довжини та поперечних розмірів зразка;

- **відносне залишкове звуження при розриві**

$$\psi = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100 \%, \quad (2.9)$$

де A_u – площа найменшого поперечного перерізу шийки після розриву.

Величина ψ характеризує пластичні властивості матеріалу більш точно, ніж δ , бо вона менше залежить від форми зразка.

Залежно від відносного залишкового подовження при розриві всі матеріали поділяються на **пластичні та крихкі**.

Пластичність – властивість матеріалу сприймати великі залишкові деформації без руйнування.

Крихкість – властивість матеріалу руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій.

Слід зазначити, що для **пластичних** матеріалів (мідь, алюміній, латунь, маловуглецева сталь, свинець) – $\delta > 5 \%$, а для **крихких** матеріалів (загартована сталь, чавун, скло, камінь, бетон) – $\delta < 5 \%$.

У результаті механічних випробувань визначаються граничні (небезпечні) напруження $\sigma_{нб}$, при яких може порушитися працездатність конструкції.

За небезпечне напруження для пластичних матеріалів приймається границя текучості σ_y , для крихких – границя міцності на розтяг $\sigma_{ит}^+$ чи на стискання $\sigma_{ит}^-$.

Границя міцності крихкого матеріалу при стисканні у декілька разів більше порівняно з розтяганням, тому крихкий матеріал добре сприймає стискання і погано – розтягання.

При високих температурах спостерігається явище **повзучості** матеріалів, яке полягає в зростанні пластичної деформації з плином часу при постійному напруженні, яке не викликає пластичних деформацій при короткочасних діях навантаження.

Зменшення напружень з плином часу внаслідок повзучості в навантаженій деталі при незмінній її повній деформації називається **релаксацією**.

Для оцінки величини границі міцності (часто на

виробництві) використовують замірювання твердості.

Твердість – властивість матеріалу протидіяти прониканню в його поверхню більш твердого тіла – наконечника (індентора).

Для визначення твердості використовують методи **Брінелля, Роквелла та Вікерса.**

Найбільш поширеним методом визначення твердості є метод Брінелля. Згідно з цим методом стальна загартована кулька (індентор) діаметром D (рисунок 2.4) вдавлюється в поверхню зразка під дією навантаження F , прикладеного впродовж визначеного часу. Після припинення навантаження вимірюється діаметр отриманого відбитка, який залишився на поверхні зразка.

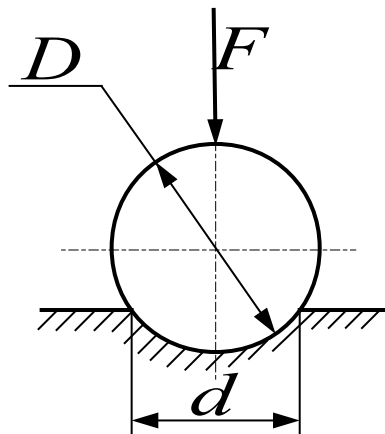


Рисунок 2.4 – До визначення твердості за методом Брінелля

Число твердості, за **Брінеллем**, (HB) являє собою відношення навантаження, з якою загартована кулька тисне на поверхню зразка, до площини одержаного при цьому сферичного відбитка (m^2) і може бути розраховано за формулою

$$HB = \frac{2F}{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (2.10)$$

де F – навантаження, H ;
 D – діаметр кульки, m ;
 d – діаметр відбитка, m .

Одиниця вимірювання числа твердості – MPa , але звичайно цю одиницю не вказують.

Між числом твердості та границею міцності для кожного матеріалу існує експериментально підтверджена залежність. Так, для вуглецевої сталі $\sigma_B = (0,35 \div 0,4)HB$.

Якщо твердість матеріалу $HB \geq 0,45 MPa$, то визначити її, вдавлюючи кульку, неможливо у зв'язку з помітною її деформацією. У цих випадках замість кульки у поверхню зразку вдавлюють **алмазний конус** (за Роквелом) або **алмазну пірамідку** (за Вікерсом).

Число твердості, за **Роквеллом** (HRC), відповідає різниці глибин проникнення в поверхню зразка алмазного конуса з кутом при вершині 120° під дією основного ($1500 H$) та попереднього ($100 H$) навантаження.

При визначенні твердості за методом Вікерса використовують індентор у вигляді правильної чотиригранної пірамідки з кутом між протилежними гранями 136° . Число твердості, за **Вікерсом** (HV), визначається відношенням навантаження F на індентор до площини A поперечного перерізу:

$$HV = \frac{F}{A}. \quad (2.11)$$

2.3 Допустимі напруження

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникають у них в процесі експлуатації, не перевищували небезпечних. Максимальне безпечне напруження називається **допустимим** і визначають за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{нб}}{[n]}, \quad (2.12)$$

де $\sigma_{нб}$ – небезпечне напруження (при якому виникає можливість руйнування деталі або порушення нормальної її експлуатації);

$[n]$ – нормативний коефіцієнт запасу (знаходиться в межах $1,5 \div 5$ і залежить від умов роботи деталі, точності методів розрахунку, властивостей матеріалу та призначення конструкції).

2.4 Врахування власної ваги при розтяганні

Довгі деталі, у яких довжина значно перевищує розміри поперечного перерізу (троси, канати та ін.), можуть зазнавати значних деформацій і напружень під дією власної ваги.

Розглянемо стержень постійного перерізу вагою G і довжиною l , затисненого верхнім кінцем і навантаженого власною вагою (рисунок 2.5, а). Для визначення напружень у поперечному перерізі на відстані x від нижнього кінця використаємо метод перерізів. Згідно з цим методом рівняння рівноваги нижньої частини бруса буде мати такий вигляд (рисунок 2.5, б):

$$\sum x = 0, \quad N_x - G_x = 0, \quad N_x = G_x, \quad (2.14)$$

де G_x – власна вага поперечного перерізу довжиною x ,

$$G_x = \gamma \cdot A \cdot x, \quad (2.15)$$

де γ – питома вага матеріалу стержня;
 A – площа поперечного перерізу.

The figure consists of two parts, (a) and (b). Part (a) shows a vertical rod of total length l fixed at the top. A cross-section is taken at a distance x from the bottom end. The weight of the lower part of the rod is denoted as G_x . Part (b) shows a free-body diagram of the lower part of the rod, with an upward normal force \overline{N}_x and a downward weight force \overline{G}_x . The length of this segment is x .

Рисунок 2.5

Напруження в поперечному перерізі

$$\sigma = \frac{N_x}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot x}{A} = \gamma \cdot x. \quad (2.16)$$

Очевидно, що небезпечний переріз стержня буде знаходитися у місці його затиснення, і напруження в цьому перерізі буде максимальним:

$$\sigma_{max} = \gamma \cdot l. \quad (2.17)$$

Для визначення абсолютного подовження стержня під дією власної ваги попередньо розглянемо елемент стержня довжиною dx , для якого абсолютне подовження буде визначатися за формулою

$$\Delta x = \varepsilon \cdot dx = \frac{\gamma \cdot x}{E} dx. \quad (2.18)$$

Тоді повне подовження стержня

$$\Delta l = \frac{\gamma}{E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}. \quad (2.19)$$

Помноживши у формулі (2.19) знаменник та чисельник на

площу поперечного перерізу A , отримаємо

$$\Delta l = \frac{\gamma \cdot l \cdot A \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad (2.20)$$

З формули (2.20) видно, що при визначенні подовження від власної ваги необхідно враховувати її половину.

3 ЗСУВ

3.1 Визначення напружень та деформацій

Зсув – один з простих видів деформування бруса, при якому у його поперечному перерізі діє тільки *внутрішня поперечна сила* ($Q \neq 0$) (від опору, при якому стержень навантажений двома рівними, протилежно скерованими і безкінечно близько розташованими силами, які викликають зріз по площині, що розташована між ними).

Чистий зсув – такий випадок плоского напруженого стану, при якому на гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження.

Розглянемо брус, перпендикулярно до осі якого прикладено дві рівні протилежно направлені сили F , лінії дії котрих паралельні і знаходяться на незначній відстані h (рисунок 3.1, а). При цьому елемент бруса довжиною h зазнає деформації зсуву.

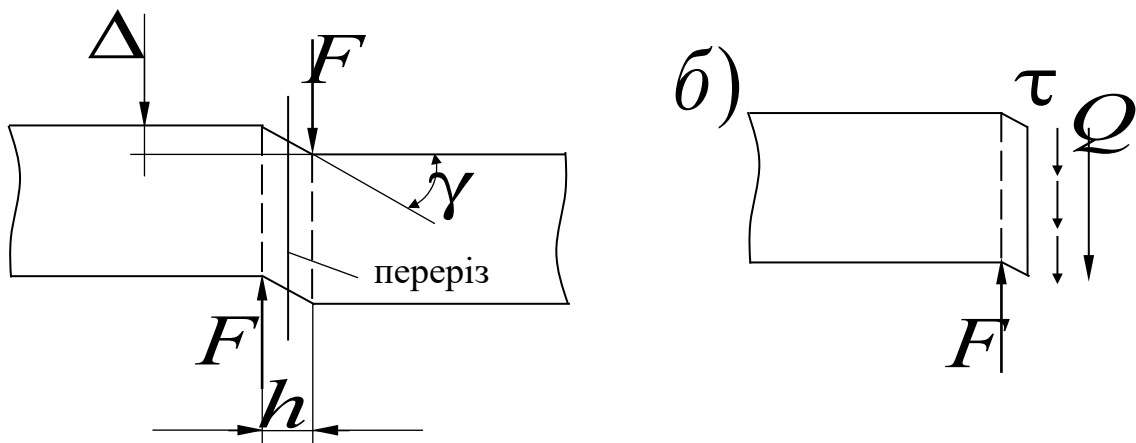


Рисунок 3.1 – Модель зсуву при різанні прутка

З умови рівноваги лівої частини бруса (рисунок 3.1, б) (з використанням методу перерізів) поперечна сила буде визначатися за формулою

$$Q = \int \tau dA = F. \quad (3.1)$$

Вважаючи, що дотичні напруження рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу, маємо вираз для визначення дотичних напружень в перерізі вала:

$$\tau = \frac{F}{A}. \quad (3.2)$$

З геометричної точки зору, зсув характеризується величинами:

- Δ – абсолютний зсув;
- Δ/h – відносний зсув (міра перекосу прямих кутів елемента).

При деформації елемента в межах пружності значення Δ/h дуже мале і його можливо виразити через **кут зсуву** γ :

$$\Delta/h = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (3.3)$$

Закон Гука при зсуві (дотичні напруження прямо пропорційні кутовим деформаціям):

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (3.4)$$

де G - модуль пружності другого роду або *модуль зсуву*, Па .

Співвідношення між модулем зсуву G , модулем Юнга E і

коефіцієнтом Пуассона μ виражається формулою

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.5)$$

Якщо прийнято, що $\tau = const$, то цю величину можна винести за знак інтеграла в рівнянні (3.1) і отримати таку розрахункову формулу:

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (3.6)$$

Підставивши в закон Гука (вираз (3.4)) вирази (3.3) і (3.6), отримаємо формулу для визначення абсолютного зсуву:

$$\Delta = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A}, \quad (3.7)$$

де $G \cdot A$ – жорсткість при зсуві.

Умова міцності при зсуві:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau_{зр}], \quad (3.8)$$

де $[\tau_{зр}]$ – допустиме напруження на зріз.

3.2 Приклад розрахунку на зсув

Як приклад розрахунку на міцність при деформації зсуву, розглянемо заклепкове з'єднання (рисунок 3.2).

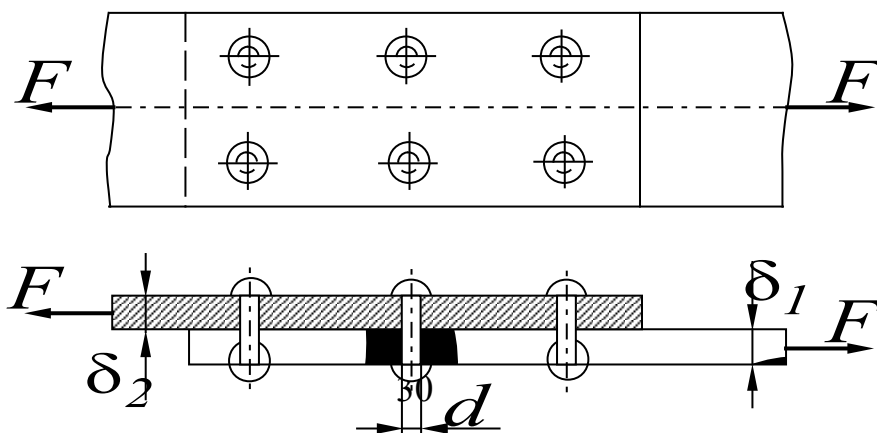


Рисунок 3.2 – Заклепкове з'єднання двох листів унапуск (однозрізне)

Чим більше заклепок у подовжньому ряду, тим більш нерівномірно розподіляється навантаження на окремі заклепки. Але для спрощення розрахунків приймається, що всі заклепки однаково навантажені. Руйнування з'єднання можливе внаслідок перерізання заклепок по лінії стикання листів. Відповідно до формули (3.8) маємо *умову міцності з'єднання на зріз*:

$$\tau = \frac{F_1}{A \cdot i} \leq [\tau_{zp}], \quad (3.9)$$

де F_1 – зусилля, що припадає на одну заклепку ($F_1 = F/6$),
 A – площа поперечного перерізу заклепки,
 i – кількість площин перерізу ($i = 1$),
 $[\tau_{zp}]$ – допустиме напруження на зріз.

Площа поперечного перерізу заклепки

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad (3.10)$$

де r – радіус поперечного перерізу заклепки;
 d – діаметр поперечного перерізу заклепки.

Підставивши у формулу (3.9) вираз (3.10), після відповідних перетворень отримаємо

$$d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi i [\tau_{zp}]}}. \quad (3.11)$$

Отвори в листах, що склепуються, мають діаметр на 0,5–1 мм більше від діаметра ще не поставленої заклепки. У розрахункові формули входить діаметр отвору, бо у виконаному

з'єднанні заклепка практично повністю заповнює отвір.

У заклепковому з'єднанні, крім зрізу, можливо також порушення суцільності внаслідок зминання листів або заклепок у місцях їх контакту по циліндричній поверхні. Як правило, при розрахунках беруть умовну площину зминання $A_{zm} = \delta_{min} d$.

Умова міцності з'єднання на зминання:

$$\sigma_{zm} = \frac{F_1}{A_{zm}} = \frac{F_1}{\delta_{min} \cdot d} \leq [\sigma_{zm}], \quad (3.12)$$

звідки

$$d \geq \frac{F_1}{\delta_{min} [\sigma_{zm}]}, \quad (3.13)$$

де A_{zm} – умовна площина зминання;

δ_{min} – менша товщина листа;

$[\sigma_{zm}]$ – допустиме напруження на зминання.

З двох діаметрів, визначених за формулами (3.11) і (3.13), обирають більше значення.

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

При розрахунках на міцність та жорсткість при розтяганні та зсуві використовувалась одна характеристика плоского перерізу – площа. У випадку згину та кручення використовуються наведені нижче геометричні характеристики плоских перерізів.

Статичними моментами перерізу (рисунок 4.1) відносно осей x і y називають інтеграли вигляду

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (4.1)$$

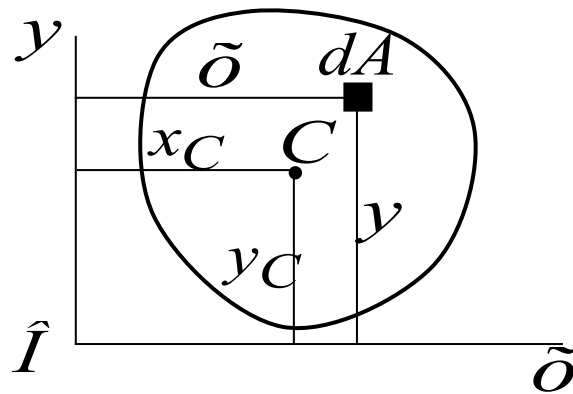


Рисунок 4.1

На підставі теореми про момент рівнодіючої

$$S_x = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot x_c, \quad (4.2)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги перерізу.

Статичні моменти перерізів відносно центральних осей (осей, що проходять через центр ваги перерізу) дорівнюють нулю.

Розмірністю статичних моментів перерізу – m^3 .

Осьовими (екваторіальними) моментами інерції перерізу (рисунок 4.2) відносно осей \tilde{x} і y називають інтеграли вигляду

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.3)$$

Розмірністю осьових моментів інерції перерізу – m^4 .

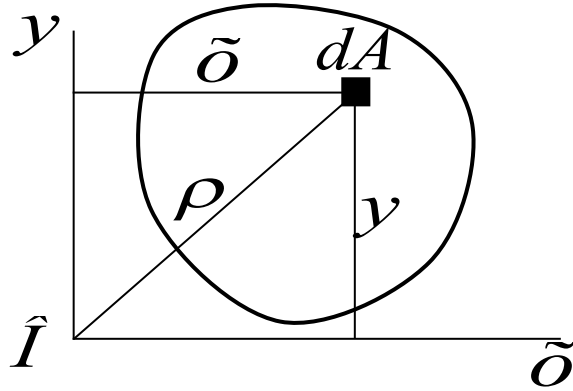


Рисунок 4.2

Полярним моментом інерції перерізу (рисунок 4.2) відносно даної точки (полюса O) називається інтеграл вигляду

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.4)$$

де ρ – відстань елементарної площини до початку координат.

Внаслідок того, що $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (4.5)$$

Розмірністю полярного моменту інерції перерізу є m^4 .

Відцентровим моментом інерції перерізу (рисунок 4.2) називається інтеграл виду

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.6)$$

Розмірність відцентрового моменту інерції перерізу – m^4 .

Залежно від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним або від'ємним, а також дорівнювати нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називають *головними осями інерції*.

Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, будуть її головними осями. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються *головними центральними осями*.

В якості прикладу визначимо моменти інерції круглого перерізу (рисунок 4.3):

$$dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho,$$

$$\begin{aligned} I_{\rho} &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi \cdot \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \end{aligned}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

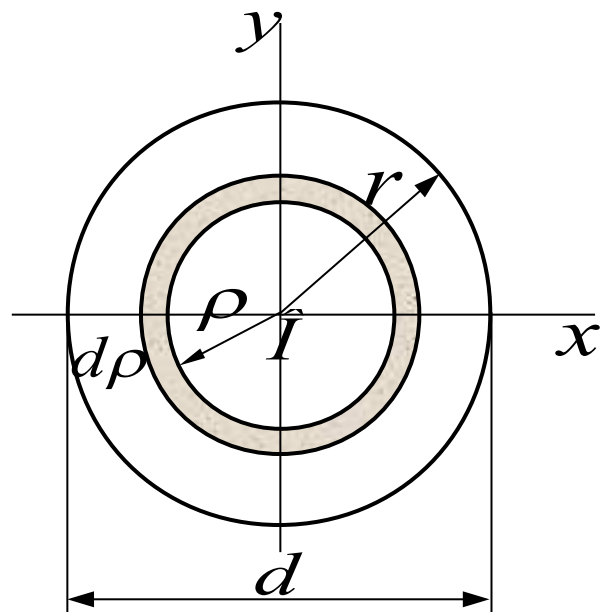


Рисунок 4.3

5 КРУЧЕННЯ

Кручення – простий вид навантаження, при якому в поперечному перерізі бруса діє тільки *внутрішній крутний момент* ($T_x \neq 0$).

Брус (стержень), що працює на кручення, незалежно від форми його перерізу називають валом.

Деформація кручення круглого вала полягає у повороті

поперечних перерізів відносно одне одного навколо осі (рисунок 5.1).

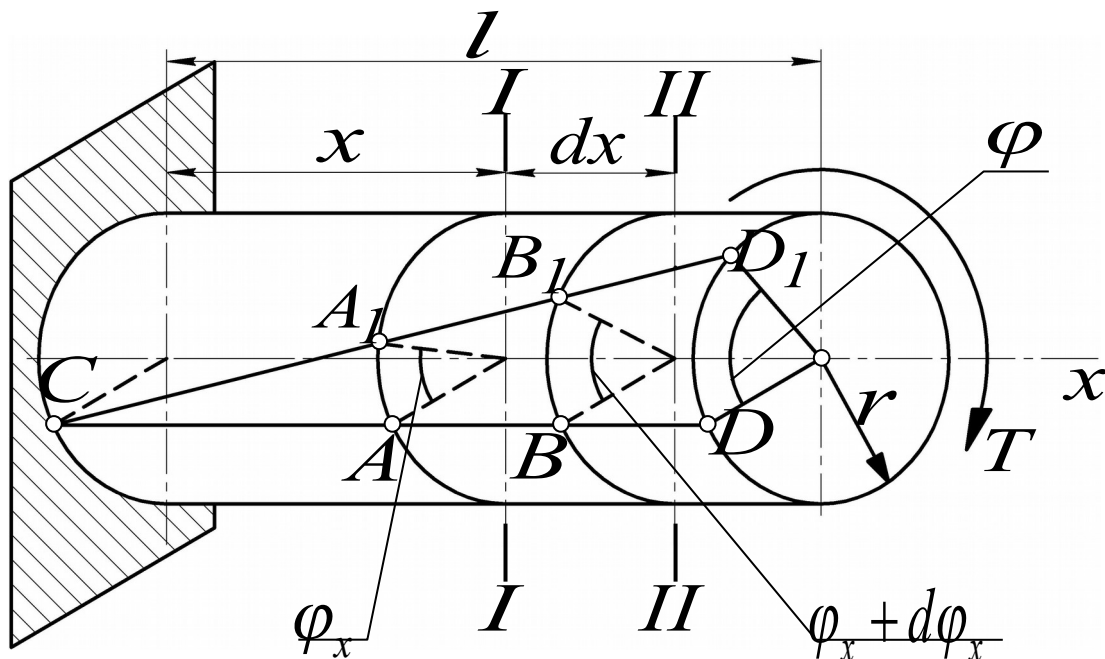


Рисунок 5.1 – Модель кручення круглого вала

Приймається, що при деформації кручення:

- вісь вала залишається прямолінійною;
- поперечні перерізи вала залишаються плоскими і повертаються навколо його осі один відносно одного на деякий кут, який називається **кутом закручування** (φ);
- відстані між поперечними перерізами вала не змінюються;
- прямолінійні твірні перетворюються у гвинтові лінії (наприклад твірна CD у гвинтову лінію CD_1);
- радіуси перерізів залишаються прямолінійними.

З урахуванням наведеного вище кручення циліндричного стержня можна представити як результат зсувів які викликані взаємним поворотом поперечних перерізів.

5.1 Напруження і деформації при крученні

Як було сказано вище, при крученні має місце деформація

зсуву. Тому в поперечних перерізах вала виникають тільки дотичні напруження, а нормальні напруження дорівнюють нулю.

Відносний кут закручування (див. рисунки 5.1, 5.2)

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{d\varphi_x}{dx} = \text{const}, \quad (5.1)$$

де l – довжина вала;

$d\varphi_x$ – кут закручування на ділянці вала довжиною dx .

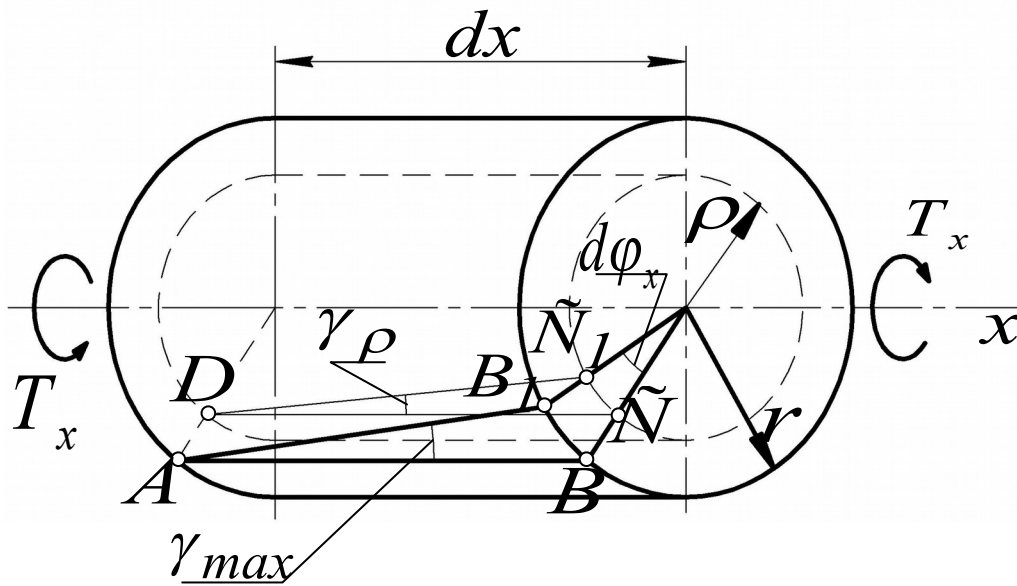


Рисунок 5.2

Кут відносного зсуву (див. рисунок 5.2)

$$\gamma_{\max} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi_x}{dx} = r \cdot \theta. \quad (5.2)$$

Аналогічно можна знайти кут відносного зсуву для волокна, що знаходиться на відстані ρ від осі вала:

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho \cdot d\varphi_x}{dx} = \rho \cdot \theta. \quad (5.3)$$

На підставі закону Гука при зсуві (формула (3.4)) дотичні напруження в перерізі вала (див. рисунок 5.3) розраховуються за формулами

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma_{max} = G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot r, \quad (5.4)$$

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot \rho. \quad (5.5)$$

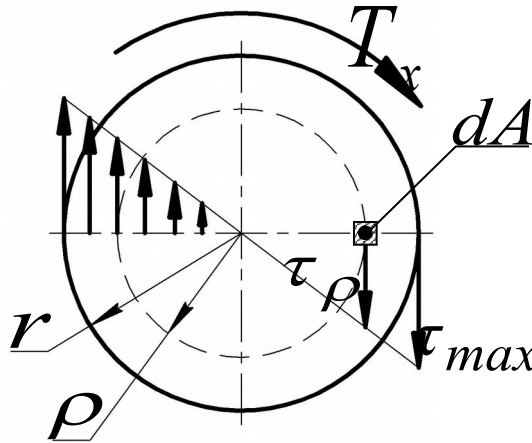


Рисунок 5.3 – Розподіл дотичних напружень в перерізі вала

Згідно з епюрою τ , наведеною на рисунку 5.3, дотичні напруження зростають за лінійним законом пропорційно відстані точки перерізу від осі вала. У точках, однаково віддалених від осі, напруження τ рівні за величиною і спрямовані перпендикулярно до радіус-вектора даної точки. При цьому на поверхні вала вони набувають максимальних значень.

Повний момент внутрішніх сил (крутний момент) визначається за формулою

$$T_x = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA. \quad (5.6)$$

Підставивши у формулу (5.6) замість τ_ρ вираз (5.5), отримаємо

$$T_x = \int_A G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot \rho \cdot \rho \cdot dA. \quad (5.7)$$

З урахуванням виразу (5.1) формула (5.7) набуває такого вигляду:

$$T_x = \int_A G \cdot \theta \cdot \rho^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot I_\rho, \quad (5.8)$$

де I_ρ – полярний момент інерції поперечного перерізу стержня (для круглого суцільного стержня: $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$).

Відносний кут закручування з формули (5.8)

$$\theta = \frac{T_x}{G \cdot I_\rho}, \quad (5.9)$$

де $G \cdot I_\rho$ – жорсткість поперечного перерізу при крученні.

Повний кут закручування (вимірюється в радіанах)

$$\varphi = \int_0^l \frac{T_x}{G \cdot I_\rho} dx. \quad (5.10)$$

Якщо крутний момент та момент інерції перерізу постійні по довжині стержня, то повний кут закручування подається законом Гука при крученні:

$$\varphi = \frac{T_x \cdot l}{G \cdot I_\rho}. \quad (5.11)$$

Якщо вал має декілька ділянок, що відрізняються розмірами перерізів і значенням крутного моменту, то повний кут закручення дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручення окремих ділянок.

Дотичні напруження у довільній точці перерізу вала визначаються за формулою, отриманою з використанням формул (5.3), (5.5) та (5.9):

$$\tau = \frac{T_x \cdot \rho}{I_\rho}. \quad (5.12)$$

Максимальні дотичні напруження мають місце на поверхні вала при $\rho = r$:

$$\tau_{\max} = \frac{T_x \cdot r}{I_\rho} = \frac{T_x}{W_\rho}, \quad (5.13)$$

де $W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$ – полярний момент опору при крученні, м^3 .

Для суцільного круглого перерізу: $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$.

Умова міцності при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{x\max}}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (5.14)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні.

Умова жорсткості при крученні:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{x\max}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta], \quad (5.15)$$

де $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

У цих формулах внутрішній крутний момент T_x у довільному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, розташованих з одного боку від перерізу.

5.2 Розрахунок гвинтових циліндричних пружин

Широкого розповсюдження у техніці (ресорах вагонів, у клапанах, інших механізмах сучасних транспортних засобів) набули циліндричні гвинтові пружини.

Розглянемо пружину (рисунок 5.4, а), виготовлену зі сталюго круглого прутка, де $f = h_0 - h_1$ – осідання пружини під дією сили F . До основних параметрів вказаної пружини належать: d – діаметр прутка; D – середній діаметр витків; n – кількість витків пружини.

Згідно з методом перерізів, розглядаючи рівновагу верхньої частини пружини (рисунок 5.4, б), визначаємо внутрішні силові фактори: поперечну силу $Q = F$ та крутний момент $T = F \cdot \frac{D}{2}$. Звідки випливає, що у поперечному перерізі витка діють тільки *дотичні* напруження зсуву $\tau_{зс}$ та кручення $\tau_{кр}$.

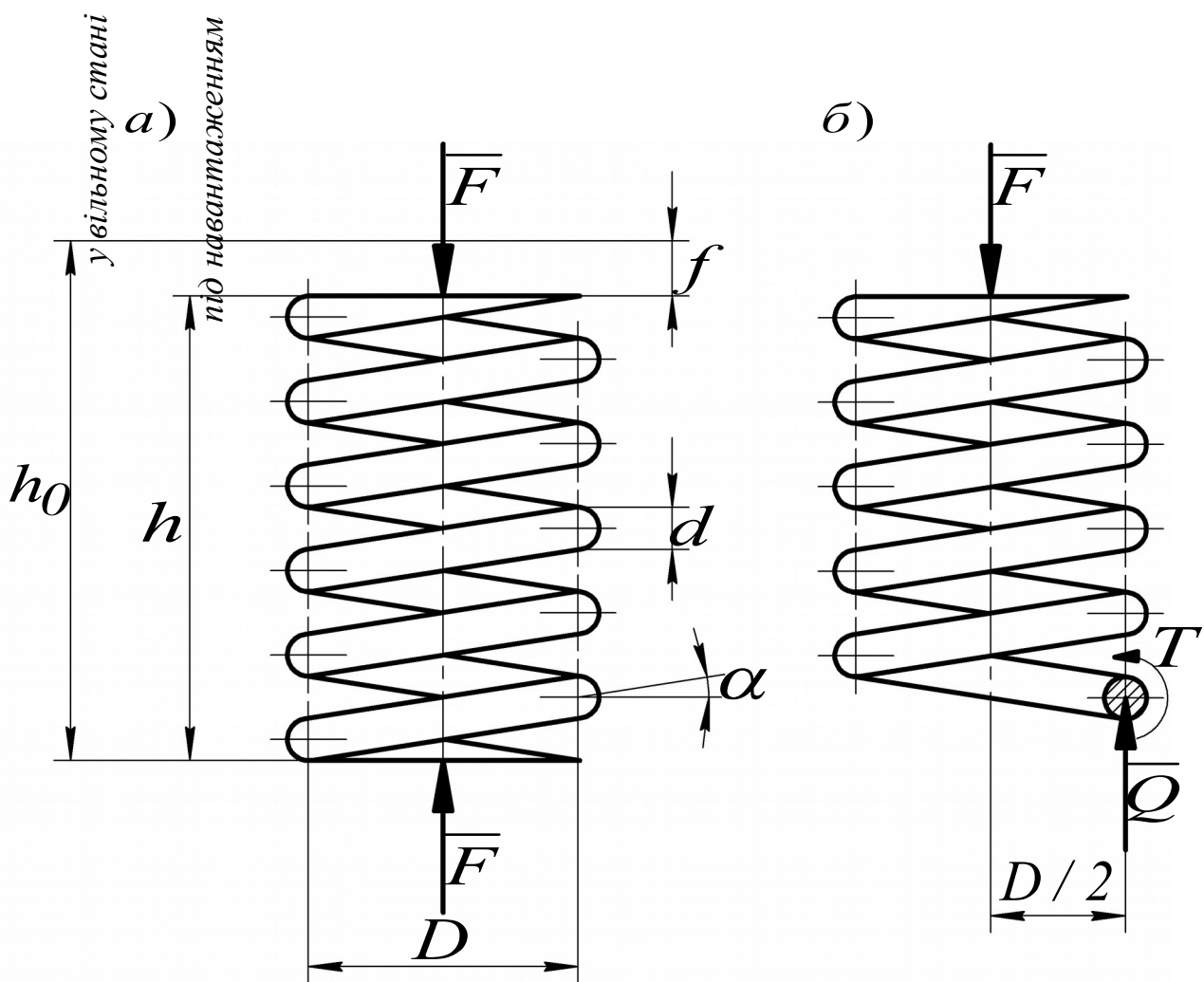


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема циліндричної гвинтової пружини

У крайній точці перерізу витка на внутрішньому радіусі пружини діють максимальні сумарні напруження:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \tau_{zc} + \tau_{кр} = \frac{F}{A} + \frac{T}{W_{\rho}} = \\ &= \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{F \cdot D/2}{\pi d^3/16} = \frac{4F}{\pi d^2}(1 + 2c),\end{aligned}\quad (5.16)$$

де A – площа поперечного перерізу прутка пружини;

W_{ρ} – полярний момент опору поперечного перерізу прутка пружини;

c – індекс пружини ($c = D/d$).

З урахуванням того, що $\tau_{zc} = (0,05 \div 0,1)\tau_{кр}$, величина дотичного напруження τ_{zc} у формулі (5.16) не враховується.

Для отримання більш точного результату з визначення величини τ_{\max} слід враховувати кривизну витків за допомогою спеціального поправкового коефіцієнта $k = (4c + 2)/(4c - 3)$. З урахуванням цього формула для розрахунку пружини на міцність буде мати такий вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot c \cdot k}{\pi \cdot d^2} \leq [\tau], \quad (5.17)$$

звідки діаметр прутка

$$d = \sqrt{\frac{8 \cdot F \cdot c \cdot k}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (5.18)$$

У наближених розрахунках деформація пружини враховує тільки дію кручення витків, використовуючи при цьому теорію кручення прямого вала. Помилка при такому розрахунку буде тим більша, чим більше кут підйому витка α . При визначенні осідання пружини f скористаємося умовою рівності елементарних робіт від дії зовнішньої сили F та внутрішнього крутного моменту T :

$$F \cdot df = T \cdot d\varphi, \quad (5.19)$$

де df – елементарне переміщення вздовж осі пружини;
 $d\varphi$ – елементарний кут деформації при крученні,

$$d\varphi = \frac{T \cdot dl}{G \cdot I_\rho}, \quad (5.20)$$

де dl – елементарний відрізок витка пружини.

Таким чином,

$$F \cdot df = \frac{T^2 \cdot dl}{G \cdot I_\rho}. \quad (5.21)$$

Інтегруючи вираз (5.21), отримаємо

$$f = \frac{T^2 \cdot l}{F \cdot G \cdot I_\rho}, \quad (5.22)$$

де l – довжина випрямленої пружини,

$$l = \pi \cdot D \cdot n. \quad (5.23)$$

Підставивши вираз (5.23), а також вирази для T та I_ρ у формулу (5.22), отримаємо

$$f = \frac{32 \cdot F^2 \cdot D^2 \cdot \pi \cdot D \cdot n}{4 \cdot F \cdot G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{8 \cdot F \cdot c^3 \cdot n}{G \cdot d}. \quad (5.24)$$

Робоча кількість витків пружини при заданій деформації

$$n = \frac{G \cdot d \cdot f}{8 \cdot F \cdot c^3}. \quad (5.25)$$

6 ЗГИНАННЯ

Згинання – вид деформації, при якому у поперечних перерізах бруса виникають згинальні моменти M_z (внаслідок чого вісь бруса викривляється).

Чисте згинання – вид деформації, при якому в перерізі виникає тільки згинальний момент.

Поперечне згинання – вид деформації, при якому в перерізі разом із згинальними моментами діють і поперечні сили (Q_y).

Балка – прямолінійний стержень, який працює на згинання (див. рисунок 6.1). Відстань між опорами називають *прогоном*.

Плоске згинання – згинання, при якому вісь балки після деформації залишається плоскою лінією. **Пряме згинання** – згин, при якому силова площина співпадає з однією з головних площин інерції поперечного перерізу (в іншому випадку має місце *косе згинання*). **Складне просторове згинання** – згинання, при якому викривлена вісь бруса є просторовою кривою, а навантаження не знаходяться в одній силовій площині (*площині дії навантажувальних сил*).

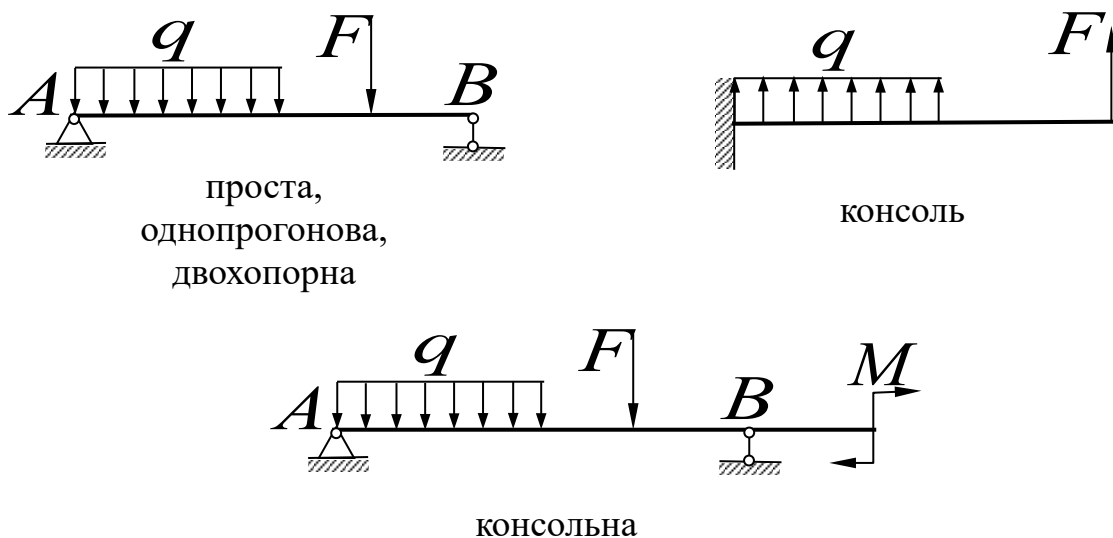


Рисунок 6.1 – Види балок

6.1 Опори та опорні реакції балок

Балки, показані на рисунку 6.1, мають опори, при цьому розрізняють три типи опор:

- **шарнірно-рухома** (рисунок 6.2, а) накладає заборону тільки на переміщення вдовж зв'язку (або перпендикулярно до опорної поверхні); єдина опорна реакція діє у цьому самому напрямку; опора допускає переміщення вдовж опорної поверхні та поворот балки відносно закріпленої точки (шарніра);
- **шарнірно-нерухома** (рисунок 6.2, б) допускає тільки поворот балки; реакція цієї опори має дві складові R_y та R_x ;
- **жорстке затиснення** (рисунок 6.2, в) виключає можливість переміщень та повороту балки. Реакції затиснення – R_y , R_x та реактивний момент M_R .

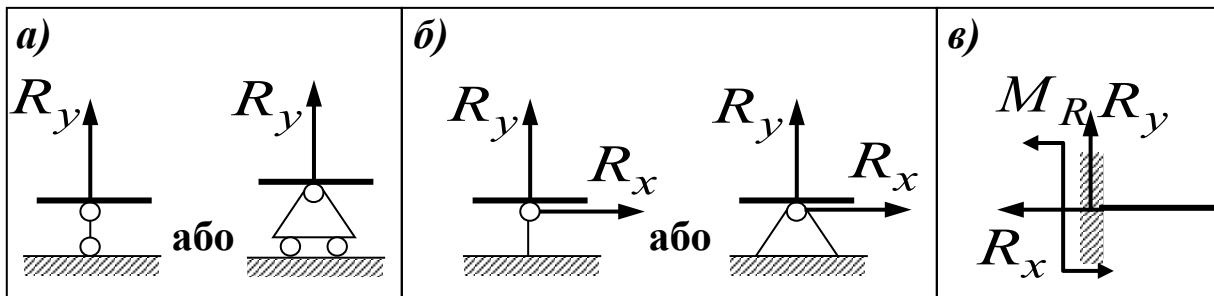


Рисунок 6.2 – Типи опор балок

Статично-визначені балки мають число невідомих реакцій, яке дорівнює числу рівнянь рівноваги. Цій умові відповідають балки, показані на рисунку 6.1.

6.2 Поперечна сила та згинальний момент

Для заданої розрахункової схеми розрахунки на міцність та жорсткість при згинанні починають з визначення опорних реакцій, а потім з використанням методу перерізів аналізують закономірності, за якими змінюються внутрішні силові фактори (*поперечна сила Q_y і згинальний момент M_z*), та будують їх епюри (*графіки*).

З рівнянь рівноваги будь-якої частини балки, відокремленої уявним перерізом, випливають такі практичні правила підрахунку Q_y та M_z (рисунок 6.3):

- *поперечна сила Q_y* чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відокремлену частину балки;
- *згинальний момент M_z* чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів від навантажень, прикладених до відокремленої частини балки, відносно головної центральної осі перерізу.

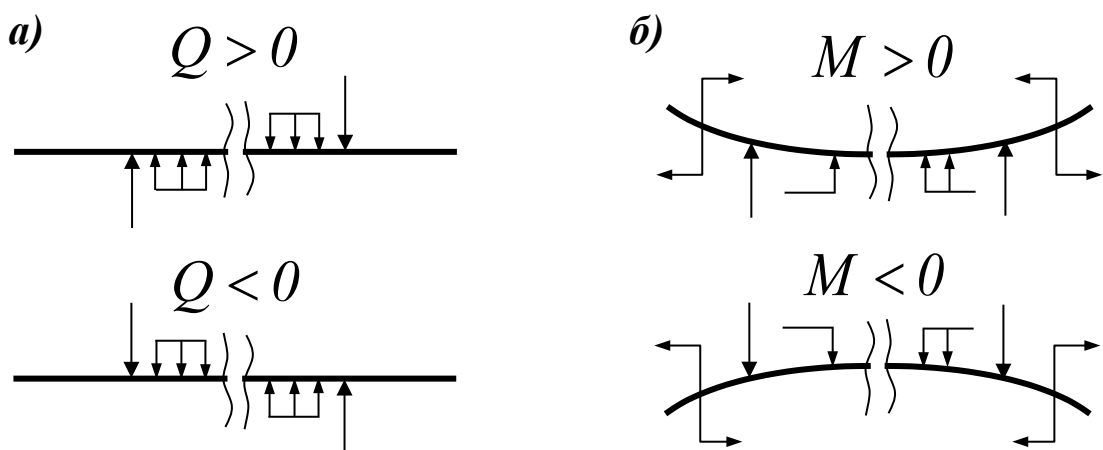


Рисунок 6.3 – Правило знаків для i

Поперечна сила є додатною, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою, від'ємною – якщо навпаки.

Згинальний момент є додатним, якщо він викликає стиснення у верхніх волокнах балки, від'ємним – якщо навпаки.

При побудованні еюр поперечних сил та згинальних моментів дотримуються таких правил:

- додатні значення Q_y відкладають від базисної горизонтальної лінії угору, а від'ємні – донизу;
- еюру M_z будують з боку розтягнутих волокон, тобто додатні значення згинальних моментів відкладати донизу, оскільки ці моменти згідно з правилом знаків викликають розтягнення нижніх волокон, а від'ємні значення – угору.

Розглянемо побудовання еюр на прикладі шарнірно-опертої балки, яка навантажена зосередженою силою F (рисунок 6.4).

Визначимо опорні реакції R_A та R_B , склавши рівняння моментів відносно опор A та B ,

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot a + R_B \cdot (a+b) = 0,$$

звідки

$$R_B = F \cdot \frac{a}{a+b}. \quad (6.1)$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot b - R_A \cdot (a+b) = 0,$$

звідки

$$R_A = F \cdot \frac{b}{a+b}. \quad (6.2)$$

Для перевірки правильності визначення реакцій виконаємо

перевірку з застосуванням рівняння проєкцій $\sum y = 0$, згідно з яким

$$R_A + R_B - F = 0. \quad (6.3)$$

Підставляючи у рівняння (6.3) вирази (6.1) та (6.2), отримаємо

$$F \cdot \frac{b}{a+b} + F \cdot \frac{a}{a+b} - F = 0. \quad (6.4)$$

Наведена залежність (6.4) підтверджує правильність визначення опорних реакцій.

Балка, наведена на рисунку 6.4 має дві ділянки AC та CB . Для визначення внутрішніх силових факторів у перерізах балки використаємо метод перерізів.

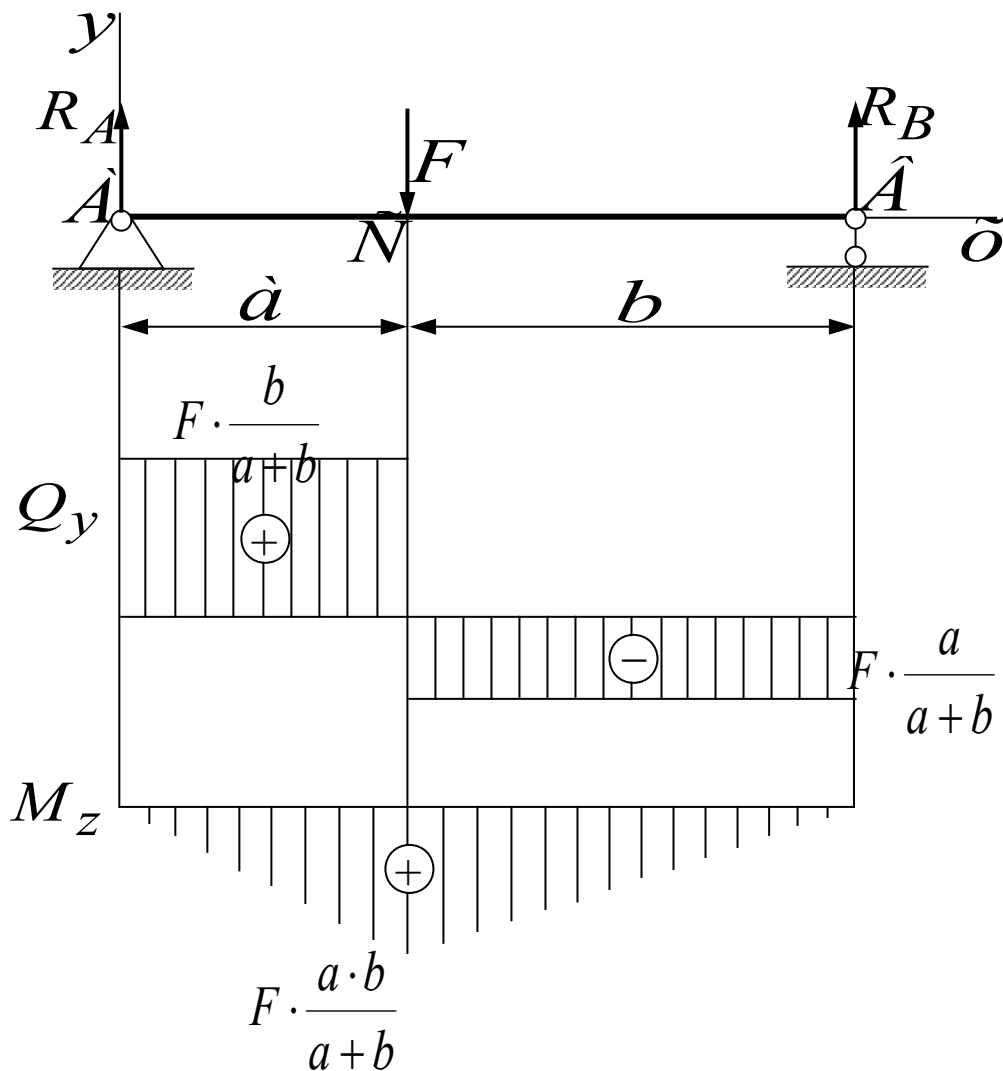


Рисунок 6.4

Для складання рівнянь з визначення поперечної сили в перерізах та згинального моменту на першій ділянці розглянемо рівновагу лівої частини балки:

$$a \geq x_1 \geq 0,$$

$$Q_{y1} = R_A = F \cdot \frac{b}{a+b} = \text{const}, \quad (6.5)$$

$$M_{z1} = R_A \cdot x_1 = F \cdot \frac{b}{a+b} \cdot x_1 - \text{лінійна залежність}. \quad (6.6)$$

Для складання рівнянь з визначення поперечної сили в перерізах та згинального моменту на другій ділянці розглянемо рівновагу правої частини балки:

$$b \geq x_2 \geq 0,$$

$$Q_{y2} = -R_B = -F \cdot \frac{a}{a+b} = \text{const}, \quad (6.7)$$

$$M_{z2} = R_B \cdot x_2 = F \cdot \frac{a}{a+b} \cdot x_2 - \text{лінійна залежність}. \quad (6.8)$$

Результати розрахунків, проведених за формулами (6.5) – (6.8) дозволили отримати значення внутрішніх силових факторів на межах ділянок і виконати побудовання в обраному масштабі епюр поперечних сил та згинальних моментів (див. рисунок 6.4).

6.3 Диференціальні залежності

Важливу роль у теорії згинання мають диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою і розподіленим навантаженням.

Отримання цих залежностей розглянемо на прикладі шарнірно-опертої балки, яка навантажена зовнішніми силами F_1, F_2, F_3, F_4 (рисунок 6.5). Під дією цих сил в її опорах будуть діяти реакції R_A та R_B .

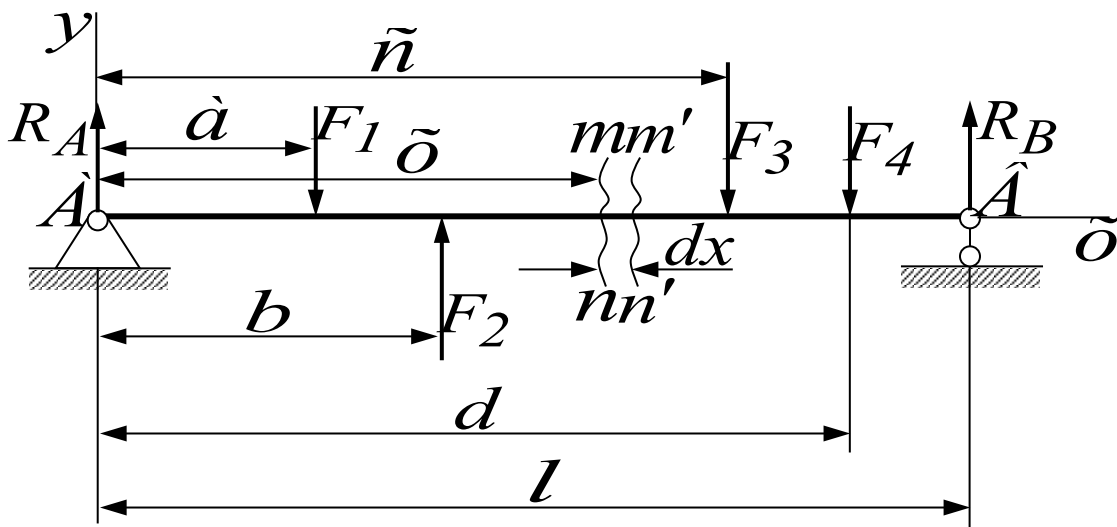


Рисунок 6.5

Запишемо рівняння для визначення поперечної сили у перерізі балки mn , яка буде дорівнювати алгебраїчній сумі усіх сил, що знаходяться по лівий бік від перерізів:

$$Q_y^{(mn)} = R_A - F_1 + F_2. \quad (6.9)$$

При цьому поперечна сила у перерізі $m'n'$ буде дорівнювати поперечній силі у перерізі балки mn , а саме $Q_y^{(m'n')} = Q_y^{(mn)}$.

Складемо рівняння для визначення моментів у перерізах балки mn та $m'n'$, які будуть дорівнювати алгебраїчній сумі усіх моментів сил, що знаходяться по лівий бік від перерізів:

$$M_z^{(mn)} = R_A \cdot x - F_1 \cdot (x - a) + F_2 \cdot (x - b), \quad (6.10)$$

$$M_z^{(m'n')} = R_A \cdot (x + dx) - F_1 \cdot (x + dx - a) + F_2 \cdot (x + dx - b). \quad (6.11)$$

Приріст моменту

$$dM_z = M_z^{(m'n')} - M_z^{(mn)}. \quad (6.12)$$

Підставляючи рівняння (6.10) та (6.11) у формулу (6.12), після відповідних перетворень отримаємо

$$dM_z = R_A \cdot dx - F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dx = (R_A - F_1 + F_2) \cdot dx. \quad (6.13)$$

Величина у формулі (6.13), що знаходиться в дужках, представляє собою поперечну силу в перерізах mn та $m'n'$, з урахуванням цього вищенаведена формула буде мати наступний вигляд:

$$dM_z = Q_y \cdot dx, \quad (6.14)$$

або

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}. \quad (6.15)$$

Згідно з рівнянням (6.15) поперечна сила дорівнює першій похідній від моменту за величиною x . Цей висновок справедливий також за наявності розподіленого навантаження.

Для виведення другої важливої залежності розглянемо рівновагу елемента балки, який виділений перерізами mn та $m'n'$ (рисунок 6.6), на який діє погонне рівномірно розподілене навантаження, інтенсивність якого у зв'язку з малістю dx можна враховувати постійною. По довжині елемента та такого, що дорівнює q . Тоді рівнодіюча навантаження дорівнює $q \cdot dx$. З боку лівої віділеної частини балки на елемент dx діє поперечна сила Q_y^{mn} , а з боку правої частини діє поперечна сила $Q_y^{m'n'} \approx Q_y^{mn} + dQ_y$.

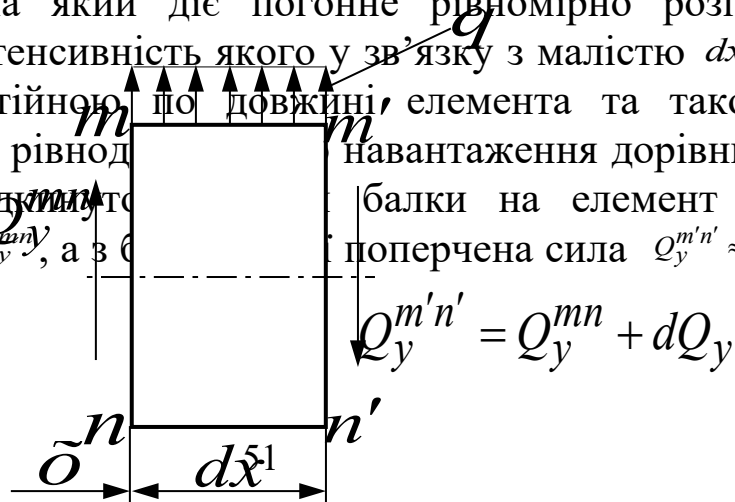


Рисунок 6.6

Запишемо умови рівноваги елемента. У зв'язку з тим, що на балку не діють навантаження, скеровані вздовж осі x , то умова $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ виконується. Умова $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ буде мати такий вигляд:

$$Q_y^{mn} + q \cdot dx - (Q_y^{mn} + dQ_y) = 0. \quad (6.16)$$

Звідки отримаємо:

$$q = \frac{dQ_y}{dx}. \quad (6.17)$$

Візьмемо похідну від обох частин рівняння (6.15):

$$\frac{dQ_y}{dx} = \frac{d^2 M_z}{dx^2}. \quad (6.18)$$

З урахуванням формули (6.17) отримаємо

$$q = \frac{d^2 M_z}{dx^2}. \quad (6.19)$$

Тобто друга похідна від згинального моменту за абсцисою дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Залежності (6.15), (6.17) та (6.19) (встановлені Д.І. Журавським)

можуть використовуватися для контролю правильності побудовання епюр поперечних сил та згинальних моментів:

➤ якщо в перерізі, що розглядається, прикладена зосереджена сила F , перпендикулярна до осі балки, то значення поперечної сили Q_y в цьому перерізі змінюється стрибкоподібно на величину прикладеної сили F ;

➤ якщо в перерізі, що розглядається, прикладений зовнішній момент пари сил M , то значення згинального моменту M_z в цьому перерізі змінюється стрибкоподібно на величину прикладеного моменту M ;

➤ тангенс кута між дотичною до лінії, що обмежує епюру згинального моменту M_z , та віссю епюри дорівнює поперечній силі Q_y ;

➤ чим більше за абсолютною величиною значення поперечної сили Q_y , тим крутіше лінія, що обмежує епюру M_z ;

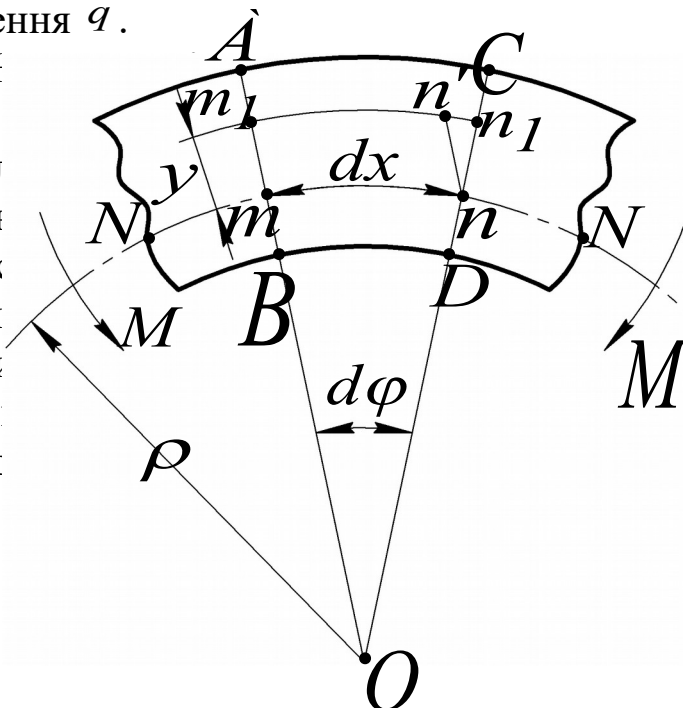
➤ на ділянці балки, на якій поперечна сила має постійне значення, епюра згинальних моментів M_z буде обмежена прямою похилою лінією;

➤ якщо на ділянці балки поперечна сила Q_y є додатною, то на цій ділянці згинальний момент зростає M_z , а якщо Q_y є від'ємною, то M_z – зменшується;

➤ на ділянках балки, де діє рівномірно розподілене навантаження q поперечна сила Q_y змінюється за лінійною залежністю, а згинальний момент M_z – за квадратичною залежністю, у якій опуклість обернена в бік дії розподіленого навантаження q .

6.4 І

Розг
протилежн
площині
нейтральн
бруса, а н
кривизни
позначимс



ма рівними та
у поздовжній
являє собою
гнені волокна
гальний центр
ального шару

Рисунок 6.7

Виділимо з частини бруса, що розглядається, елемент $ABDC$ за допомогою двох дуже близьких перерізів, які проходять через центр кривизни бруса та нахилені один відносно одного на нескінченно малий кут $d\varphi$. Нескінченно мала довжина dx волокна mn нейтрального шару після згинання, викривившись, залишається тієї самої довжини, а волокна m_1n_1 , які знаходяться на відстані y від нейтрального шару, отримують деяке подовження. Для знаходження цього подовження проведемо з точки n лінію, паралельну AB , до перетину з m_1n_1 . Отримана таким чином дуга $n'n_1$ і дає нам це подовження. З подібності трикутників Onn та $nn'n_1$ маємо

$$\frac{n'n_1}{dx} = \frac{y}{\rho}, \quad (6.20)$$

або

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}, \quad (6.21)$$

де ε_x – відносне подовження волокна m_1n_1 .

Підставивши в закон Гука (формула (2.5)) при деформації центральне розтягання та стискання рівняння (6.21), отримаємо

закон розподілу пружних сил по поперечному перерізу бруса:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (6.22)$$

З цієї формули випливає, що *напруження в поперечному перерізі зігнутої балки змінюються пропорційно відстані від нейтрального шару.*

Для визначення радіуса кривизни ρ з площини поперечного перерізу виділимо елементарну площадку dA , яка знаходиться на відстані y від нейтральної лінії (рисунок 6.8). З урахуванням формули (6.22) елементарна нормальна сила, що діє на площадці, буде дорівнювати

$$dN = \sigma \cdot dA = E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA. \quad (6.23)$$

З урахуванням рівняння (6.22) елементарний момент внутрішньої сили, яка діє на площадці, відносно нейтральної осі Z буде дорівнювати

$$dM_z = dN \cdot y = E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot dA. \quad (6.24)$$

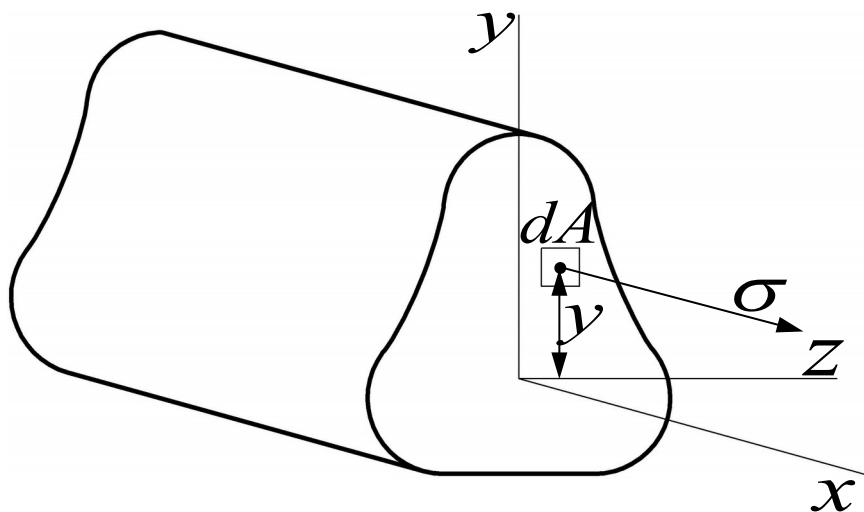


Рисунок 6.8

За умовами рівноваги, сума усіх елементарних моментів

внутрішніх сил пружності повинна дорівнювати зовнішньому моменту, тобто

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M. \quad (6.25)$$

У формулі (6.25) інтеграл $\int_A y^2 \cdot dA$ являє собою момент інерції I_z відносно нейтральної осі. З урахуванням цього формула (6.25) буде мати такий вигляд:

$$\frac{E}{\rho} \cdot I_z = M_z, \quad (6.26)$$

або

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (6.27)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна зігнутої осі балки (характеризує величину деформації при згинанні);

$E \cdot I_z$ – жорсткість балки при згинанні.

Визначивши з формули (6.27) величину ρ та підставивши її у рівняння (6.22), отримаємо формулу для визначення нормальних напружень при згинанні:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \quad (6.28)$$

Максимальні нормальні напруження мають місце в точках найбільш віддалених від нейтральної лінії:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (6.28,a)$$

де W_z – осьовий момент опору перерізу балки,

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}. \quad (6.29)$$

Наприклад, для круглого перерізу при $y_{\max} = d/2$ осьовий момент опору перерізу балки $w_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$.

6.5 Дотичні напруження

У поперечних перерізах балки при поперечному згинанні, крім нормальних напружень, виникають дотичні напруження. У відповідності з законом парності такі самі напруження виникають і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару.

Розглянемо балку прямокутного перерізу зі сторонами $h \times b$ (рисунок 6.9).

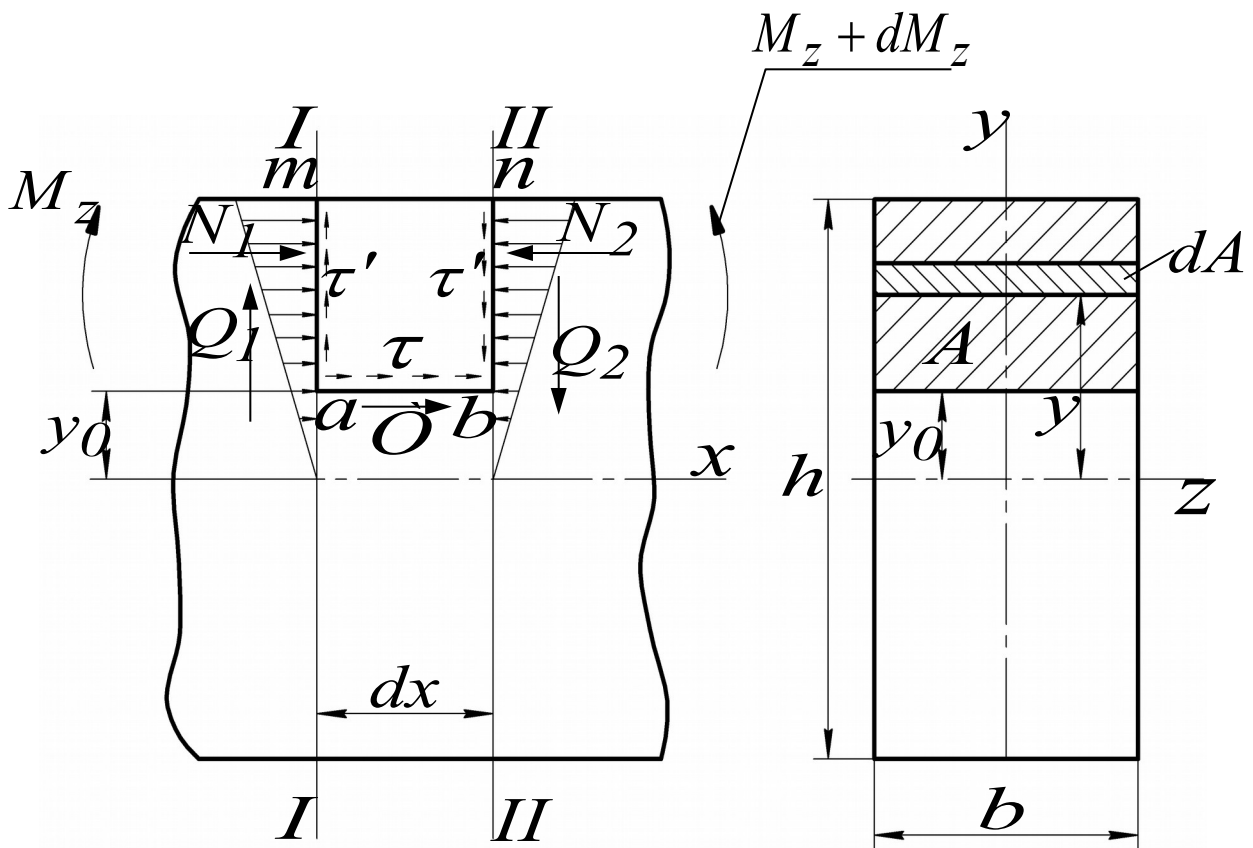


Рисунок 6.9

На балці виділимо два поперечних перерізи $I-I$ та $II-II$, які знаходяться один відносно одного на відстані dx , та поздовжній переріз ab , що знаходиться на відстані y_0 від нейтрального шару і є паралельним йому. У поперечному перерізі $I-I$ буде діяти поперечна сила Q_y та згинальний момент M_z , у свою чергу в поперечному перерізі $II-II$ – також поперечна сила Q_y та згинальний момент $M_z + dM_z$. Цими трьома перерізами на балці виріжеться нескінченно вузький паралелепіпед $mabn$ з розмірами dx , $\frac{h}{2} - y_0$ та b .

Розглянемо рівновагу паралелепіпеда $mabn$. По його бокових гранях, які утворені площинами перерізів, будуть діяти стискальні нормальні зусилля: по грані am – N_1 , а по грані bn – N_2 .

Елементарне нормальне зусилля dN_1 , що діє на нескінченно малу площадку dA лівої грані паралелепіпеда, яка знаходиться на відстані y від нейтральної осі, дорівнює

$$dN_1 = \sigma \cdot dA = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \cdot dA, \quad (6.30)$$

де I_z – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Нормальне зусилля, що діє на усю ліву грань паралелепіпеда,

$$N_1 = \int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{M_z \cdot y}{I_z} \cdot dA = \frac{M_z}{I_z} \int_A y \cdot dA, \quad (6.31)$$

де A – площа частини перерізу від y_0 до $\frac{h}{2}$.

Аналогічно знаходимо величину сили N_2 , що діє на усю праву бокову грань паралелепіпеда,

$$N_2 = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \int_A y \cdot dA. \quad (6.32)$$

Величина результуючої T дотичних зусиль, що діє на нижній грані ab паралелепіпеда, якщо вважати зусилля розподіленими рівномірно на нескінченно малій довжині dx грані, дорівнює

$$T = \tau \cdot b \cdot dx, \quad (6.33)$$

де τ – дотичні напруження, що діють по грані ab .

Складемо рівняння рівноваги паралелепіпеда:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0: \quad N_2 - N_1 = T. \quad (6.34)$$

Підставивши вирази (6.31) – (6.33) у рівняння (6.34) та виконавши відповідні перетворення, отримаємо формулу для визначення дотичних напружень у поздовжньому перерізі балки:

$$\tau = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{1}{b \cdot I_z} \int_A y \cdot dA. \quad (6.35)$$

З урахуванням формули (6.15) та приймаючи, що $\int_A y \cdot dA = S_z$, де S_z – статичний момент заштрихованої площі перерізу A відносно нейтральної осі, формула (6.35) набуває такого вигляду:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z}{b \cdot I_z}. \quad (6.36)$$

Формула (6.36) була отримана Д.І. Журавським.

У відповідності з цією формулою дотичні напруження у верхньому та нижньому шарах дорівнюють 0, а у волокнах нейтрального шару досягають максимального значення.

Враховуючи цю обставину, а також те, що дотичні напруження незначні порівняно з нормальними, при розрахунках на міцність їх можна не враховувати. У зв'язку з цим формула міцності при деформації згинання має такий вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (6.37)$$

6.6 Деформації при згинанні. Пружна лінія балки

Деформована під дією навантажень ось балки являє собою плавну криву, яка називається **пружною лінією**.

При виведенні рівняння напруження при згинанні була отримана формула, яка виражає важливе співвідношення теорії згинання:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (6.38)$$

або

$$\rho = \frac{E \cdot I_z}{M_z}. \quad (6.39)$$

Словами формула (6.38) може бути виражена так: у будь-якій точці пружної лінії балки радіус кривизни ρ прямо пропорційний жорсткості $E \cdot I_z$ та зворотно пропорційний згинальному моменту. Якщо балка згинається парою сил, то згинальний момент буде постійний по всій довжині балки і радіус кривизни в цьому випадку також буде постійною величиною, тобто пружна лінія балки буде дугою кола. У всіх інших випадках пружна лінія може мати будь-який вигляд.

З математики відомо, що радіус кривизни кривої в точці A (рисунок 6.10) з координатами x, y визначається за формулою

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}, \quad (6.40)$$

де $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$. У де φ – кут, утворений дотичною до пружної лінії балки з додатним напрямком осі x ;

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

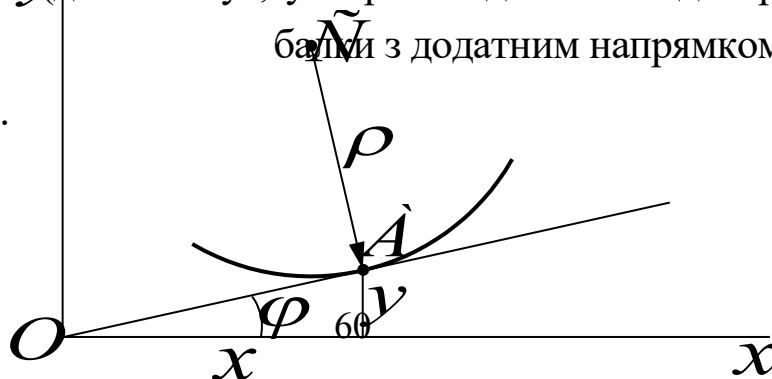


Рисунок 6.10

Внаслідок малості величини $\frac{dy}{dx}$ у рівнянні (6.40) виразом $(y')^2$ можна знехтувати. У такому випадку радіус кривизни пружної лінії балки подається в більш простому вигляді:

$$\rho = \frac{1}{y''}. \quad (6.41)$$

Підставивши в рівняння (6.39) замість ρ вираз (6.41) після відповідних перетворень отримаємо

$$y'' \cdot E \cdot I_z = M_z. \quad (6.42)$$

Рівняння (6.42) являє собою диференціальне рівняння пружної лінії балки в загальному вигляді. Для отримання рівняння кутів повороту перерізу необхідно це рівняння проінтегрувати один раз, а прогнів – двічі.

Слід зазначити, що якщо згинальний момент є додатним, $M_z > 0$, при обраному напрямку координатних осей кривизна вважається додатною (рисунок 6.11, а). При від'ємному згинальному моменті кривизна теж від'ємна (рисунок 6.11, б). Якщо вісь y спрямована донизу, то при додатному згинальному моменті кривизна буде від'ємною (рисунок 6.11, в) а при від'ємному моменті – додатною (рисунок 6.11, г).

Рисунок 6.11

В якості прикладу розглянемо балку-консоль, навантажену на вільному кінці силою F (рисунок 6.12). Запишемо рівняння для визначення згинального моменту в перерізі, який знаходиться від защемлення балки на відстані x

$$M_z = -F \cdot (l - x). \quad (6.43)$$

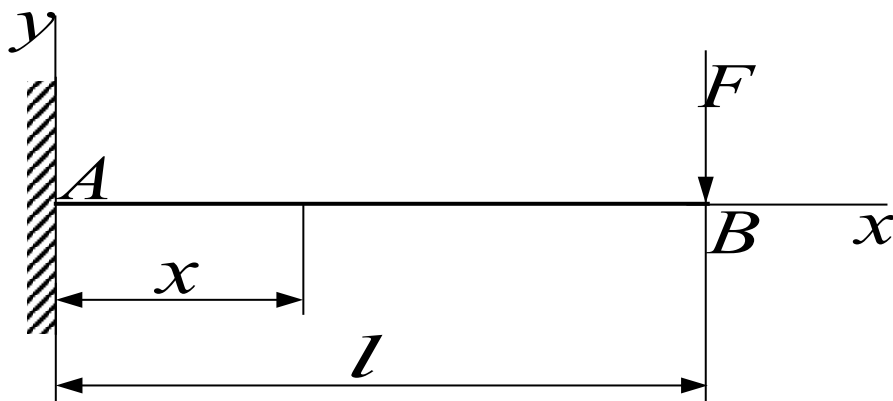


Рисунок 6.12

Підставивши у формулу (6.42) рівняння (6.43), отримаємо

$$y'' \cdot E \cdot I_z = -F \cdot (l - x). \quad (6.44)$$

Проінтегрувавши двічі вираз (6.44), отримаємо такі рівняння:

$$y' \cdot E \cdot I_z = -F \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C, \quad (6.45)$$

$$y \cdot E \cdot I_z = -F \cdot \left(\frac{l \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C \cdot x + D. \quad (6.46)$$

Постійні інтегрування C та D визначаються з граничних умов: $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$. Підставивши ці умови у рівняння (6.45) та (6.46), отримаємо $C = 0$, $D = 0$.

З урахуванням цього рівняння кутів y' та прогинів y будуть мати такий вигляд:

$$y' = -\frac{F \cdot x}{A \cdot I_z} \cdot \left(l - \frac{x}{2} \right), \quad (6.47)$$

$$y = -\frac{F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left(l - \frac{x}{3} \right). \quad (6.48)$$

Максимальний прогин має місце при $x = l$:

$$y_{max} = -\frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left(l - \frac{l}{3} \right) = -\frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z}. \quad (6.49)$$

З рівнянь (6.45) та (6.46) видно, що постійні інтегрування, поділені на $E \cdot I_z$, являють собою кут повороту та прогин балки на початку координат.

6.7 Універсальне рівняння пружної лінії балки

Визначення переміщень у балках методом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння пружної лінії у випадку балок з великою кількістю ділянок пов'язано зі значними труднощами. Ці труднощі полягають у техніці визначення довільних сталих інтегрування – складанні та розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Так, якщо балка за умовами навантажування розбивається на n ділянок, то інтегрування

диференціальних рівнянь для всіх ділянок балки дає $2n$ довільних сталих, які визначаються із умов рівності прогинів та кутів повороту на границях сусідніх ділянок. Окрім того, для визначення сталих інтегрування складається система рівнянь, кількість яких дорівнює $2n$.

Для зменшення великої обчислювальної роботи, пов'язаної з визначенням сталих інтегрування, використовують **універсальне рівняння пружної лінії балки**, одержання якого базується на відповідних правилах, що зводять кількість сталих інтегрування до 2-х незалежно від кількості ділянок балки:

1) початок координат необхідно обирати загальним для всіх ділянок у крайній лівій (або правій) точці балки і при складанні виразів згинальних моментів розглядати ту частину балки, де знаходиться початок координат;

2) рівняння на всіх ділянках слід інтегрувати не розкриваючи дужок;

3) вирази, що входять до рівняння згинальних моментів попередніх ділянок повинні входити до рівняння наступних ділянок;

4) у випадку обривання розподіленого навантаження його продовжують до кінця перерізу, що розглядається, а для відновлення дійсних вантажних умов вводять «компенсоване» навантаження зворотного напрямку;

5) якщо в рівняння згинального моменту входить зосереджений згинальний момент, розташований на відстані a від початку координат, то його слід помножити на плече $(x - a)^0$, що не змінює ні розмірності, ні умов рівноваги.

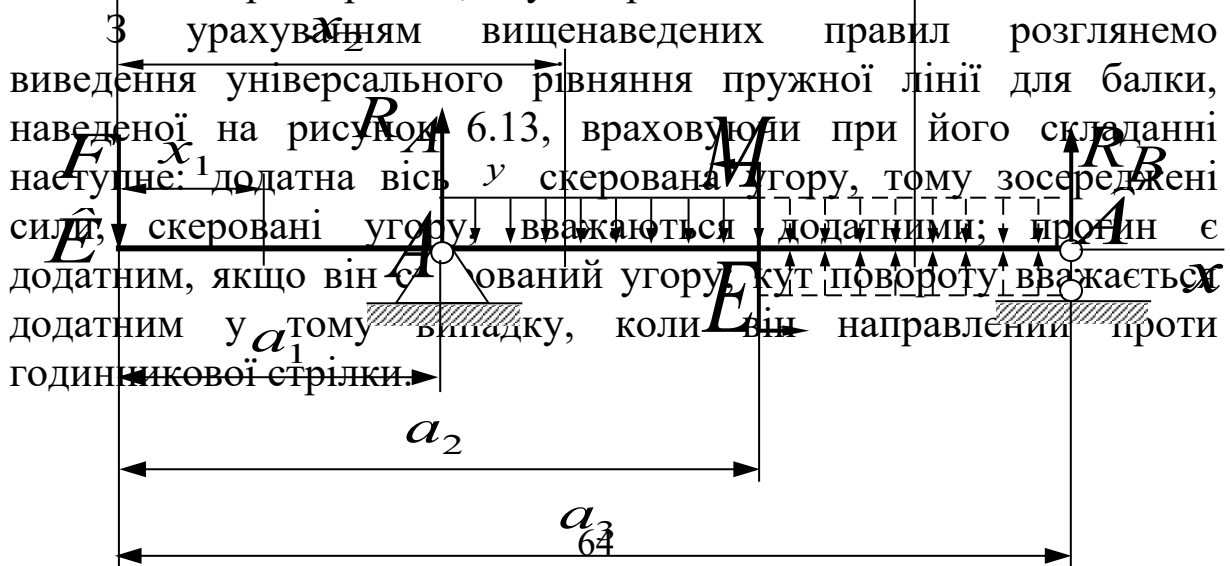


Рисунок 6.13

Балка (рисунок 6.13) має 3 ділянки. За початок координат приймаємо точку K . Запишемо диференціальні рівняння пружної лінії для кожної ділянки і двічі їх проінтегруємо, дотримуючись вищезгаданих правил:

1 ділянка

$$\begin{aligned}E \cdot I_z \cdot y_1'' &= -F \cdot x_1; \\E \cdot I_z \cdot y_1' &= -\frac{F \cdot x_1^2}{2} + C_1; \\E \cdot I_z \cdot y_1 &= -\frac{F \cdot x_1^3}{6} + C_1 \cdot x_1 + D_1.\end{aligned}$$

2 ділянка

$$\begin{aligned}
E \cdot I_z \cdot y_2'' &= -F \cdot x_2 + R_a \cdot (x_2 - a_1) - q \cdot \frac{(x_2 - a_1)^2}{2}; \\
E \cdot I_z \cdot y_2' &= -\frac{F \cdot x_2^2}{2} + R_a \cdot \frac{(x_2 - a_1)^2}{2} - q \cdot \frac{(x_2 - a_1)^3}{6} + C_2; \\
E \cdot I_z \cdot y_2 &= -\frac{F \cdot x_2^3}{6} + R_a \cdot \frac{(x_2 - a_1)^3}{6} - q \cdot \frac{(x_2 - a_1)^4}{24} + C_2 \cdot \delta_2 + D.
\end{aligned}$$

3 ділянка

$$\begin{aligned}
E \cdot I_z \cdot y_3'' &= -F \cdot x_3 + R_a \cdot (x_3 - a_1) - q \cdot \frac{(x_3 - a_1)^2}{2} - \\
&\quad - M \cdot (x_3 - a_2)^0 + q \cdot \frac{(x_3 - a_2)^2}{2}; \\
E \cdot I_z \cdot y_3' &= -\frac{F \cdot x_3^2}{2} + R_a \cdot \frac{(x_3 - a_1)^2}{2} - q \cdot \frac{(x_3 - a_1)^3}{6} - \\
&\quad - M \cdot (x_3 - a_2) + q \cdot \frac{(x_3 - a_2)^3}{6} + C_3; \\
E \cdot I_z \cdot y_3 &= -\frac{F \cdot x_3^3}{6} + R_a \cdot \frac{(x_3 - a_1)^3}{6} - q \cdot \frac{(x_3 - a_1)^4}{24} - \\
&\quad - M \cdot \frac{(x_3 - a_2)^2}{2} + q \cdot \frac{(x_3 - a_2)^4}{24} + C_3 \cdot x_3 + D_3.
\end{aligned}$$

З умови сумісності деформацій в точках A і E :

$$\text{при } x_1 = x_2 = a_1 \quad y_1 = y_2, \quad y_1' = y_2';$$

$$\text{при } x_2 = x_3 = a_2 \quad y_2 = y_3, \quad y_2' = y_3';$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C, \quad D_1 = D_2 = D_3 = D.$$

Як видно з наведеного вище, постійні інтегрування в отриманих рівняннях зведені до 2-х. Для їх визначення використовують умови рівності O прогинів на опорах A і B . При розв'язанні задачі нема потреби записувати рівняння для усіх 3-х ділянок, а можливо обмежитися найбільш віддаленою третьою ділянкою, у зв'язку з тим, що в рівняння на цій ділянці входять всі складові попередніх ділянок. Слід зазначити, що, як правило, постійні інтегрування, поділені на жорсткість, пишуть на початку рівнянь. З урахуванням цих обставин універсальне рівняння для поданої на рисунку 6.13 навантаженої шарнірно-опертої балки буде мати такий вигляд:

$$y = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[-\frac{F \cdot x^3}{6} + \frac{R_a \cdot (x - a_1)^3}{6} - \frac{q \cdot (x - a_1)^4}{24} \right] + \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[-\frac{M \cdot (x - a_2)^2}{2} + \frac{q \cdot (x - a_2)^4}{24} \right].$$

7 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

7.1 Напруження в точці. Головні площадки та головні напруження

Напруження є результатом взаємодії часток тіла при його навантаженні. Дії зовнішніх сил, які намагаються змінити положення часток тіла та викликати їх зміщення, перешкоджають напруження, які виникають при цьому. У відповідності з гіпотезою про суцільність матеріалу слід враховувати, що кожна частка в будь-якій малій області має нескінченну множину інших часток, які оточують її за всіма напрямками. Розташована в даній точці частка по-різному взаємодіє з кожною з цих сусідніх часток. Тому в одній і тій самій точці за різними напрямками напруження будуть різними і тільки в дуже рідких випадках вони однакові за всіма напрямками.

Досліджуючи напружений стан тіла у точці (наприклад точці A), навколо неї виділяють елемент у вигляді безкінечно малого паралелепіпеда (рисунок 7.1, a). При цьому ураховують, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно.

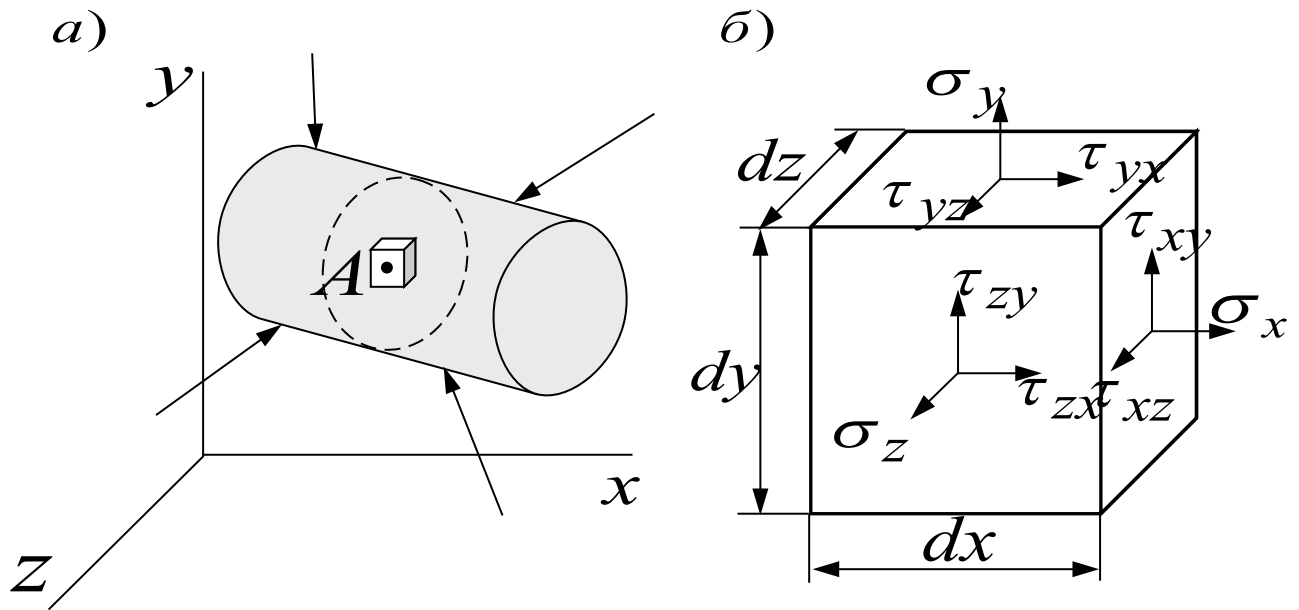


Рисунок 7.1

Повні напруження на гранях є нормальними σ і дотичними τ складовими – **проекціями повних напружень на координатні осі** (рисунок 7.1, б).

Індекс при σ відповідає напрямку нормалі до площадки. Перший індекс при τ відповідає напрямку нормалі до площадки, а другий – напрямку самого напруження.

Сукупність напружень, що діють по різних площадках, проведених через точку, характеризує **напружений стан у точці**. Ця сукупність напружень має назву **тензора напружень**.

*Площини, на яких дотичні напруження відсутні, називають **головними площадками**, а нормальні напруження на цих площадках – **головними напруженнями**.*

Головні напруження позначають σ_1 , σ_2 і σ_3 , при цьому повинна виконуватися нерівність $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

У точках навантаженого тіла можна виділити елементарні паралелепіпеди, на гранях яких діють тільки нормальні – **головні напруження**. При цьому розрізняють **лінійний, плоский та об’ємний** напружені стани (рисунок 7.2).

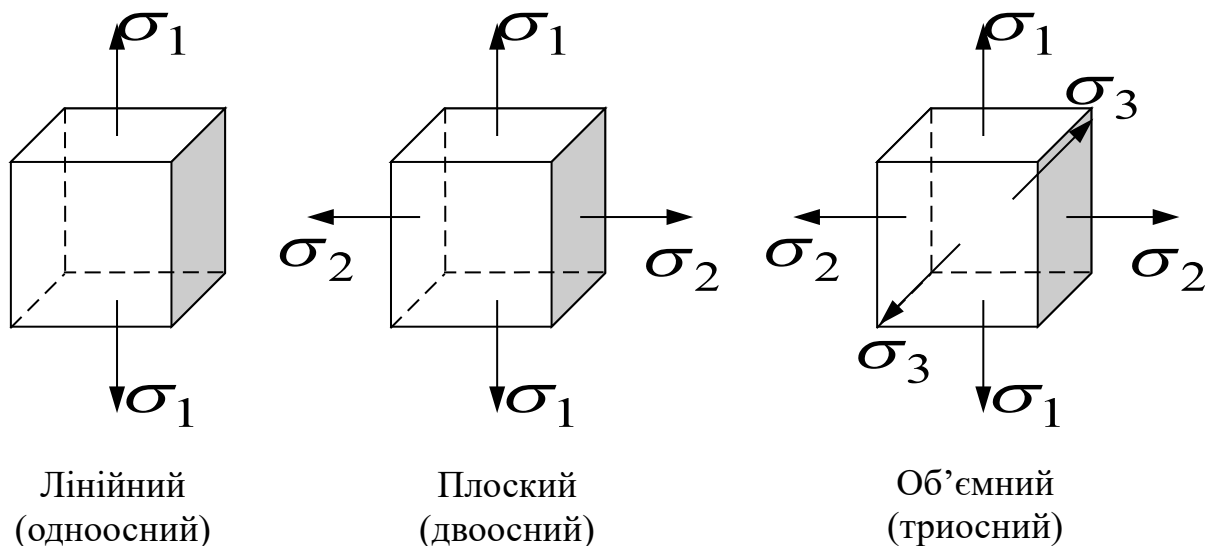


Рисунок 7.2 – Види напруженого стану

7.2 Лінійний напружений стан

Елементи, що знаходяться в лінійному напруженому стані, головним чином зустрічаються в стержнях, які зазнають деформації розтягання або стискання. Розглянемо стержень, що зазнає деформації розтягання під дією сили F (рисунок 7.3, а). У поперечних перерізах стержня діють нормальні напруження σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}, \quad (7.1)$$

де N – поздовжня сила;

A – площа поперечного перерізу. б)

При цьому напруження в цих перерізах дорівнюють нулю, а перерізи з найбільшими площадками. Для зауважити, що нормальні напруження на головних площадках приймають екстремальні значення.



Проведемо до виділеного перерізу $m-n$ під кутом α переріз $m-n$, площину якого позначимо A_I . Повне напруження на цьому перерізі

$$p_\alpha = \frac{F}{A_I} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha. \quad (7.2)$$

У свою чергу повне напруження p_α складається з двох складових, а саме нормальної σ_α та дотичної τ_α (рисунок 7.3, б):

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (7.3)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha. \quad (7.4)$$

З наведених вище формул (7.3) та (7.4) випливає, що:

- при $\alpha = 0$: $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha \max} = \sigma$; $\tau_\alpha = 0$;
- при $\alpha = 45^\circ$: $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2}$; $\tau_\alpha = \tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma}{2}$;
- при $\alpha = 90^\circ$: $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$.

Розглянемо площину, яка знаходиться відносно поперечного перерізу $m-m$ під кутом $\alpha + 90^\circ$. При цьому дотичні напруження з урахуванням виразу (7.4) в цій площині можна визначити за формулою

$$\tau'_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2 \cdot (\alpha + 90^\circ) = -\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha. \quad (7.5)$$

Порівнюючи дотичні напруження, розраховані за формулами (7.4) та (7.5) можна зробити висновок, що дотичні напруження на двох будь-яких взаємно перпендикулярних площадках є однаковими за модулем та протилежними за напрямком. Цей висновок має назву **закону парності дотичних напружень**.

Стосовно наведеного вище рисунка (формула (7.1)) закон парності дотичних напружень буде мати вигляд

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (7.6)$$

7.3 ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Плоский напружений стан найчастіше зустрічається при крученні, згинанні та складному опорі. Як було показано на рисунку 7.2, при цьому напруженому стані нормальні напруження діють по 2-х головним площинах.

Проаналізуємо напружений стан з використанням простого графічного побудування. Для цього введемо в розгляд геометричну площину та віднесемо її до прямокутних координатних осей σ та τ , тобто за віссю абсцис будемо відкладати значення σ_α та σ_β , а за віссю ординат значення τ_α та τ_β . Визначення цих перерізів зображено на рисунку 7.4.

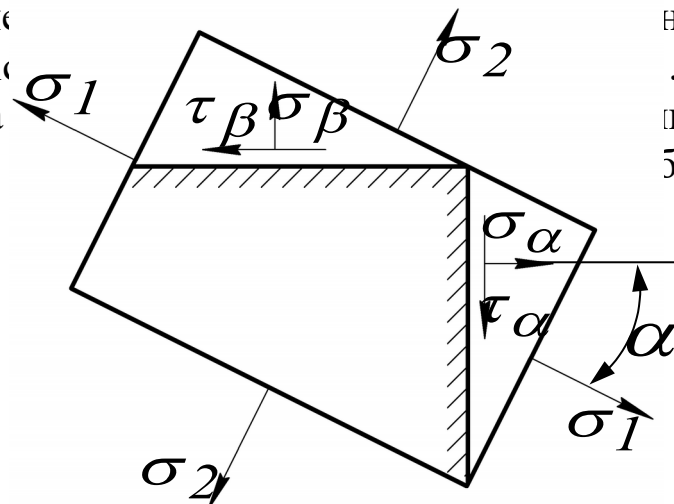


Рисунок 7.4

Обравши для напружень деякий масштаб, відкладаємо на осі абсцис (рисунок 7.5) відрізки $\overline{OA} = \sigma_1$ та $\overline{OB} = \sigma_2$. На AB , як на діаметрі, будуємо коло з центром в точці C , яке має назву **коло напружень** або **коло Мора**.

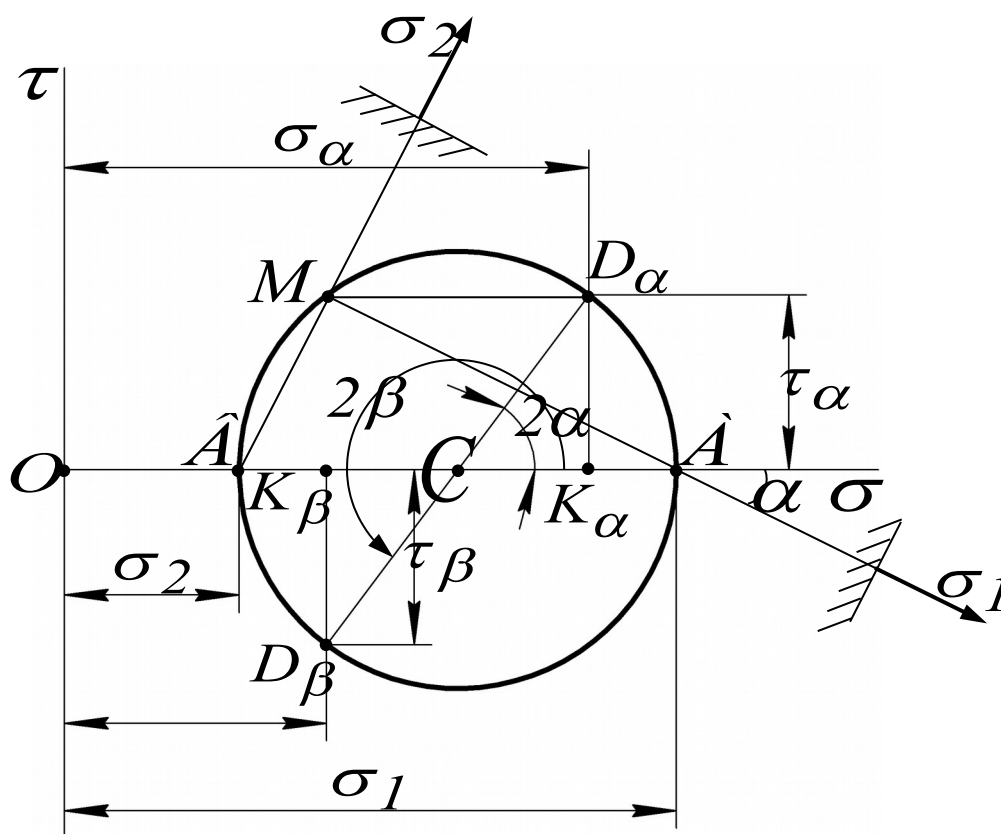


Рисунок 7.5

Радіус отриманого кола Мора

$$R = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.7)$$

Оскільки центр кола C знаходиться посередині між точками A і B , то

$$\overline{OC} = \overline{OB} + R = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.8)$$

При цьому з урахуванням формули (7.7)

$$\overline{CK_\alpha} = R \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha. \quad (7.9)$$

Тоді абсциса точки D_α

$$\overline{OK_\alpha} = \overline{OC} + \overline{CK_\alpha} = \sigma_\alpha, \quad (7.10)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (7.11)$$

З трикутника $CD_\alpha K_\alpha$ ордината точки D_α

$$\overline{K_\alpha D_\alpha} = R \cdot \sin 2\alpha = \tau_\alpha, \quad (7.12)$$

або

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (7.13)$$

Напруження в перерізі, перпендикулярному до розглянутого, знайдемо, провівши промінь під кутом $2\beta = 2\alpha + 180^\circ$ і отримавши в перетині з колом точку D_β . Ордината цієї точки

$$\overline{K_\beta D_\beta} = -\overline{K_\alpha D_\alpha} = \tau_\beta, \quad (7.14)$$

або

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (7.15)$$

Абсциса точки D_{β}

$$\overline{OK}_{\beta} = \overline{OC} - \overline{CK}_{\beta} = \sigma_{\beta}, \quad (7.16)$$

або

$$\sigma_{\beta} = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (7.17)$$

Слід зазначити, що побудоване коло Мора повністю описує напружений стан елемента, зображеного на рисунку 7.4.

Для визначення положень головних площадок знайдемо полюс та скористуємося його властивостями. З цією метою (рисунок 7.5) з точки D_{α} проведемо лінію, паралельну лінії дії напруження σ_{α} , тобто горизонталь. Точка M перетину цієї лінії з колом і буде полюсом. З'єднавши полюс M з точками A і B , отримаємо напрямки головних напружень σ_1 та σ_2 відповідно. При цьому головні площадки будуть перпендикулярними до знайдених напрямків головних напружень.

Для отримання аналітичних виразів головних напружень σ_1 та σ_2 використаємо показане на рисунку 7.5 коло напружень:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}, \quad (7.18)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB}. \quad (7.19)$$

Очевидно, що

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2}, \quad (7.20)$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} = CD_{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2}. \quad (7.21)$$

Підставивши вирази (7.20) і (7.21) у вирази (7.18) і (7.19) та виконавши математичні перетворення, отримаємо

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4 \cdot \tau_\alpha^2} \right], \quad (7.22)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4 \cdot \tau_\alpha^2} \right]. \quad (7.23)$$

Положення головних площин визначається з формули

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\overline{D_\alpha K}_\alpha}{\overline{CK}_\alpha} = \frac{2 \cdot \tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (7.24)$$

7.4 Об'ємний напружений стан

Як показано на рисунку 7.2 при об'ємному напруженому стані нормальні напруження діють по 3-м головних площинах. Для визначення відносного подовження у напрямках головних напружень застосуємо принцип суперпозиції. Отже, для визначення головного подовження ε_1 формула буде мати такий вигляд:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''', \quad (7.25)$$

де ε' – відносне подовження в напрямку σ_1 , викликане дією напруження σ_1 ;

ε'' – відносне подовження в напрямку σ_2 , викликане дією напруження σ_2 ;

ε''' – відносне подовження в напрямку σ_3 , викликане дією напруження σ_3 .

Оскільки напрямок σ_1 для самого напруження σ_1 є поздовжнім, а для напружень σ_2 та σ_3 – поперечним, то вирази для визначення складових рівняння (7.25) будуть мати такий вигляд: $\varepsilon' = \frac{\sigma_1}{A}$, $\varepsilon'' = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{A}$, $\varepsilon''' = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{A}$. Підставивши ці величини у

формулу (7.25) та виконавши необхідні перетворення, отримаємо таке співвідношення:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно отримаємо вирази і для двох інших головних подовжень:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] = \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)] = \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] = \end{cases} \quad (7.26)$$

Формули (7.26) виражають *узагальнений закон Гука*, тобто залежність між лінійними деформаціями та головними напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

Якщо головні деформації ε_1 , ε_2 та ε_3 є відомими, то головні напруження можна визначити, використовуючи такі рівняння:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot [\varepsilon_1 + \mu \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)], \quad (7.27)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot [\varepsilon_2 + \mu \cdot (\varepsilon_3 + \varepsilon_1)], \quad (7.28)$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot [\varepsilon_3 + \mu \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]. \quad (7.29)$$

7.5 Теорії міцності

При розрахунках на міцність напружений стан у небезпечній точці елемента конструкції співставляється з граничним станом, який визначається границею текучості, границею міцності і т. п. для матеріалу цього елемента. Така оцінка виявляється досить точною в тому випадку, коли матеріал елемента конструкції знаходиться в лінійному (*одноосному*) напруженому стані (див. рисунок 7.2). При складному (*плоскому або об'ємному*) напруженому стані виникає питання про те, як сукупність напружень в точці елемента співставити з механічними характеристиками його матеріалу, тобто необхідно встановити деяке *еквівалентне напруження* $\sigma_{\text{екв}}$, яке необхідно

створити в розтягнутому зразку, щоб його напружений стан був рівнонебезпечним із заданим.

Поставлене завдання вирішується за допомогою різних теорій (*критеріїв*) міцності:

1 Теорія найбільших нормальних напружень (I теорія міцності) – небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли будь-яке з головних напружень досягає небезпечного значення.

Згідно з цією теорією складний напружений стан рівнонебезпечним з простим розтяганням, якщо максимальне нормальне напруження σ_{max} дорівнює нормальному напруженню при розтяганні.

Умова міцності за цією теорією має вигляд

$$\sigma_{екв} = \sigma_{max} = \sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (7.30)$$

Недоліком першої теорії міцності є те, що вона враховує вплив на міцність тільки одного з трьох головних напружень. Дослідна перевірка, показала, що ця теорія міцності не відображає умов переходу матеріалу до пластичного стану і дає при деяких напружених станах задовільні результати лише для дуже крихких матеріалів (*камінь, цегла, кераміка, інструментальна сталь і т. п.*).

2 Теорія найбільших лінійних деформацій (II теорія міцності) – порушення міцності в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільше лінійне відносне подовження досягає свого небезпечного значення (*при розтяганні або стисканні*).

Умова міцності за цією теорією така:

$$|\varepsilon_{max}| \leq [\varepsilon], \quad (7.31)$$

з використанням узагальненого закону Гука (формула (7.26)):

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (7.32)$$

На відміну від першої теорії міцності, у другій враховується вплив на міцність усіх головних напружень. Ця теорія міцності підтверджується експериментально при об'ємному (*триосному*) напруженому стані тільки для крихких матеріалів (*легований чавун, високоміцна сталь після низького відпускання і т. п.*), коли всі три головні напруження є стискальними.

3 Теорія найбільших дотичних напружень (III теорія міцності) – граничний стан у загальному випадку настає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає небезпечного значення (*теорія Треска-Сен-Венана*).

Умова міцності така:

$$\tau_{max} \leq [\tau], \quad (7.33)$$

або через головні напруження

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (7.34)$$

при цьому для *кручення зі згинанням*

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (7.35)$$

III теорія міцності добре підтверджується в дослідах з пластичними матеріалами, які однаково опираються розтягання та стискання, особливо при плоскому (*двоосному*) напруженому стані для випадків, коли $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ та $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$. Недоліками цієї теорії є те, що вона не враховує вплив на міцність головного напруження σ_2 . Ця теорія підтверджується, зокрема, при об'ємному (*триосному*) напруженому стані, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, оскільки в цьому випадку дотичні напруження дорівнюють нулю.

4 Теорія найбільшої потенційної енергії формозміни (IV теорія міцності) – небезпечний стан (*текучість*) у загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли питома потенційна енергія формозміни досягає свого граничного значення (визначається при простому розтяганні в момент текучості) (*енергетична теорія Губера-Мізеса*).

Умова міцності:

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}], \quad (7.36)$$

або через головні напруження

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma], \quad (7.37)$$

при цьому для *кручення зі згинанням*

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (7.38)$$

Ця теорія враховує вплив на міцність усіх трьох головних напружень і добре підтверджується експериментально для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтяганню та стисканню. *При цьому поява в матеріалі пластичних деформацій четвертою теорією визначається більш точно, ніж третьою.*

5 Теорія міцності Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знака найбільшого σ_1 та найменшого σ_3 головних напружень.

Згідно з цією теорією *умова міцності* має вигляд:

$$\sigma_{екв}^{Мор} = \sigma_1 - \frac{\sigma^+}{\sigma^-} \sigma_3 \leq [\sigma^+], \quad (7.39)$$

де σ^+ і $[\sigma^+]$ – відповідно граничне і допустиме напруження на

розтягання;
 σ^- – граничне напруження на стискання.

Теорія міцності Мора добре підтверджується експериментально як для пластичних так і крихких матеріалів, якщо $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$.

8 РОЗРАХУНКИ НА СТІЙКІСТЬ

8.1 Стійка та нестійка пружна рівновага

При розрахунках на міцність та жорсткість при різних деформаціях вважалося, що під час деформації будь-якої системи має місце лише одна, наперед відома, форма рівноваги. Насправді у деформованому стані рівновага між зовнішніми та спричиненими ними внутрішніми силами пружності може бути не тільки стійкою, а й нестійкою.

Пружна рівновага є *стійкою*, якщо при малому відхиленні від стану рівноваги система після припинення дії сил, які викликали це відхилення, повертається до початкового положення.

Пружна рівновага є *нестійкою*, якщо система після припинення дії сил, які викликали її відхилення, не повертається до початкового положення, а відхиляється від нього ще більше.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, який називається *критичним*, при якому деформоване тіло

перебуває у байдужій рівновазі: воно може зберегти вихідну форму, але може й втратити її внаслідок навіть дуже незначного впливу.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від прикладених до нього навантажень. Наприклад, якщо сили, що стискають стержень, невеликі, то вихідна форма рівноваги залишається стійкою (рисунок 8.1, *а*). При зростанні прикладених сил досягається стан байдужої рівноваги, при якому поряд з прямолінійною формою стержня можливі суміжні з нею злегка викривлені форми рівноваги (штриховані лінії на рисунку 8.1, *б*). При подальшому найнезначнішому збільшенні навантаження характер деформації стержня різко змінюється – стержень випинається (рисунок 8.1, *в*), прямолінійна форма рівноваги перестає бути стійкою. Це означає, що навантаження перевищило критичне значення. Отже, навантаження, перевищення якого спричиняє втрату стійкості вихідної форми тіла, називають критичним і позначають $F_{кр}$.

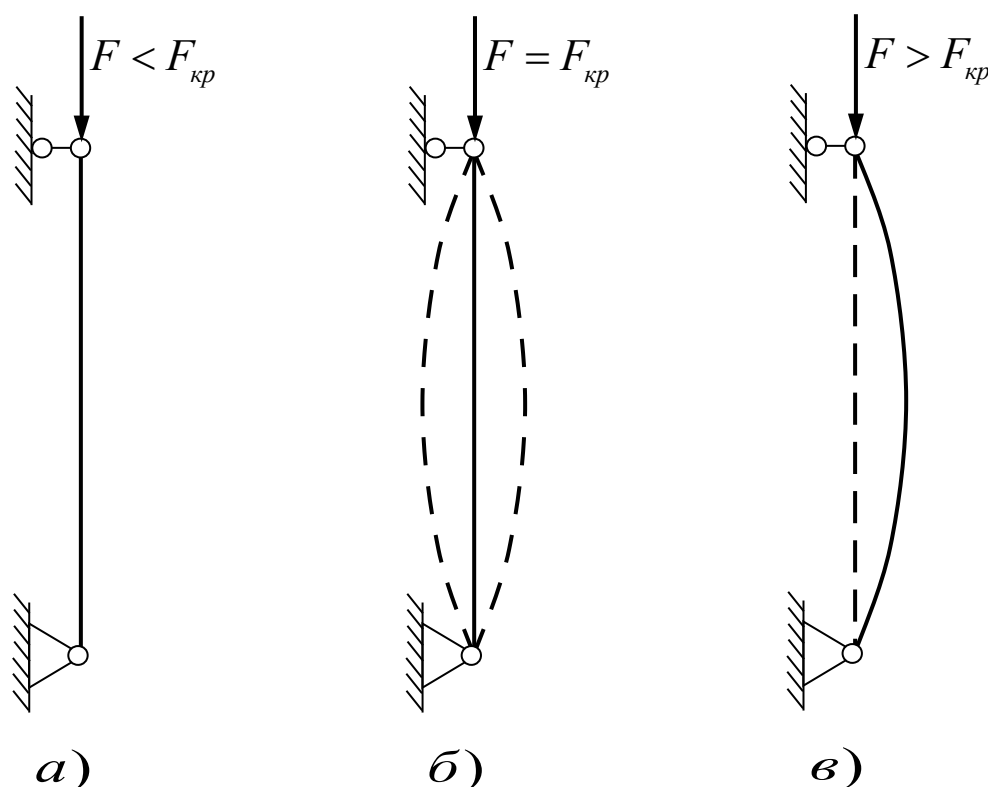


Рисунок 8.1

З урахуванням вищевказаного можна зазначити, що основною задачею розрахунків на стійкість є визначення критичного значення зовнішніх сил, при якому можлива втрата стійкості пружної системи в експлуатації.

Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова

$$F \leq [F], \quad (8.1)$$

де F – діюче навантаження;

$[F]$ – допустима сила, при якій забезпечується міцність і довговічність,

$$[F] = \frac{F_{кр}}{k}, \quad (8.2)$$

де $F_{кр}$ – критична сила;

k – коефіцієнт запасу стійкості.

8.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стержня

Критична сила визначається за формулою Ейлера і залежить а) способу закріплення стержнів (рисунок 8.2).

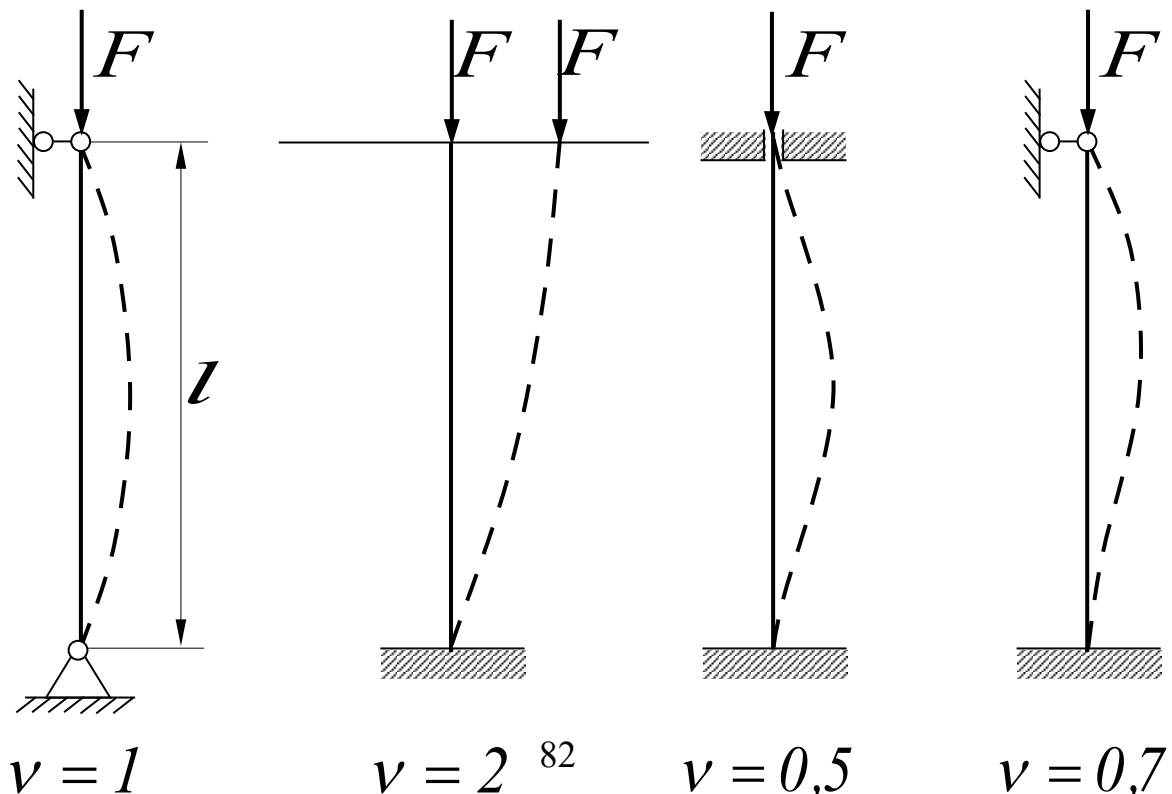


Рисунок 8.2 – Способи закріплення стержня

Формула Ейлера в загальному вигляді:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{зв}^2}, \quad (8.3)$$

- де E – модуль пружності матеріалу стержня (*модуль Юнга*);
 I_{\min} – найменший з осьових моментів інерції перерізу;
 l – довжина стержня;
 ν – коефіцієнт зведення довжини (*залежить від способу закріплення стержня*) (див. рисунок 8.2);
 $l_{зв}$ – зведена довжина стержня,

$$l_{зв} = \nu \cdot l. \quad (8.4)$$

Нижче наведені розрахункові формули з визначення критичної сили залежно від способів закріплення стержнів:

- обидва кінця стержня закріплено шарнірно (рисунок 8.2, *а*):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}; \quad (8.5)$$

- нижній кінець жорстко закріплений, а верхній вільний (рисунок 8.2, *б*):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2 \cdot l)^2}. \quad (8.6)$$

- обидва кінці жорстко закріплені (рис. 8.2, в):

$$F_{кр} = \frac{4 \cdot \pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (8.7)$$

- нижній кінець закріплений жорстко, а верхній шарнірно (рисунок 8.2, з):

$$F_{кр} = \frac{2 \cdot \pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (8.8)$$

8.3 Границі застосування формули Ейлера

У зв'язку з тим, що виведення формули Ейлера ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння пружної лінії, скористатися нею можна лише тоді, коли справедливий закон Гука, тобто доки **критичне напруження** (напруження стискання, що відповідає критичній силі) не перевищує границі пропорційності:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \sigma_{pr}. \quad (8.9)$$

Відповідно до виразів (8.9) та (8.3) формула для визначення критичного напруження буде мати такий вигляд:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\nu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (8.10)$$

де $\lambda = \frac{\nu \cdot l}{i_{\min}}$ – гнучкість стержня (*безрозмірна величина, яка характеризує розміри і способи закріплення стержня*);

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції площі перерізу стержня.

Аналіз формули (8.10) показує, що критичне напруження залежить тільки від пружних властивостей матеріалу (модуля

пружності A) та гнучкості стержня λ .

З умови (8.9) застосовності формули Ейлера відповідно до формули (8.10) маємо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пр}, \quad (8.11)$$

і, отже, граничне значення гнучкості

$$\lambda_{кр} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр}}}. \quad (8.12)$$

Це означає, що формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стержня, меншій за граничне значення $\lambda_{кр}$, яке залежить тільки від властивостей матеріалу.

Дослідами встановлено, що дійсні критичні напруження для стержнів середньої та малої гнучкості ($\lambda < \lambda_{кр}$) менші, ніж визначені за формулою Ейлера. Отже, у цьому разі формула Ейлера дає завищені значення критичної сили, тобто завжди переоцінює дійсну стійкість стержня. Тому використання цієї формули для стержнів, що втрачають стійкість за границею пружності, не тільки принципово неправильне, а й дуже небезпечне за своїми наслідками.

Теоретичне розв'язання задачі про стійкість за границею пропорційності складне, тому зазвичай для **визначення критичного напруження** користуються **емпіричною формулою Ф.С. Ясинського**:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (8.13)$$

де a і b – коефіцієнти, які визначаються експериментально і залежать від властивостей матеріалу.

Формулу Ф.С. Ясинського (8.13) застосовують для стержнів з маловуглецевої сталі при гнучкості $\lambda = 40 \dots 100$. При гнучкості $\lambda = 0 \dots 40$ напруження $\sigma_{кр}$ вважаються приблизно постійними і такими, що дорівнюють границі текучості.

8.4 Практичні методи розрахунку на стійкість

Для стиснутих стержнів *умову стійкості* можна виразити нерівністю

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{cm}], \quad (8.14)$$

де $[\sigma_{cm}]$ – допустиме напруження при розрахунку на стійкість,

$$[\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_{кр}}{n_{cm}}, \quad (8.15)$$

де n_{cm} – необхідний коефіцієнт запасу стійкості, значення якого приймаються різними для різноманітних матеріалів і залежать від гнучкості стержня (наприклад, для сталі $n_{cm} = 1,8 \dots 3,0$; для чавуна $n_{cm} = 5,0 \dots 5,5$).

Виразимо допустиме напруження $[\sigma_{cm}]$ через допустиме напруження на стискання $[\sigma]$, яке приймається при розрахунках на міцність:

$$[\sigma_{cm}] = \varphi \cdot [\sigma], \quad (8.16)$$

де φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження на стискання (залежить від матеріалу та гнучкості стержня).

Умова стійкості (8.14) після заміни $[\sigma_{cm}]$ на $[\sigma]$ за допомогою формули (8.16) набуває остаточного вигляду:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (8.17)$$

Для підбору площі поперечного перерізу A з формули

(8.17) необхідно знати величину коефіцієнта φ залежно від гнучкості стержня λ . Але для визначення гнучкості необхідно знати розміри перерізу. В зв'язку з цим задачу розв'язують методом послідовних наближень.

Спочатку при наближеному значенні коефіцієнта поздовжнього згину φ_1 (частіше за все $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$) визначають площу перерізу, потім, задавшись формою перерізу, отримаємо величину i_{min} . За знайденими значенням i_{min} та λ визначають φ'_1 . Якщо φ'_1 буде близьким до значення φ_1 , то розрахунок на цьому закінчується.

В іншому випадку розрахунок повторюють, поки початкове та отримане значення коефіцієнта φ не будуть достатньо близькими, а саме поки різниця між ними не буде перевищувати 4.....6%.

9 МІЦНІСТЬ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ЦИКЛІЧНО-ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

9.1 Поняття про втомлене руйнування матеріалу

Багато деталей машин та елементів споруд у процесі експлуатації піддаються дії циклічних навантажень, які викликають появу в їх поперечних перерізах періодично змінних напружень.

При змінних напруженнях у матеріалі деталі виникають мікротріщини, котрі поступово проникають всередину деталі і значно послаблюють її переріз, що призводить до руйнування. При цьому на поверхні полумки деталі спостерігаються дві явно виражені зони: *гладка* – результат розвитку тріщини; *грубозерниста* – слід миттєвого руйнування.

Процес поступового накопичення пошкоджень у матеріалі під дією змінних напружень, які призводять до утворення тріщин та руйнування, має назву **втомленості** матеріалу. При цьому властивість матеріалу протистояти втомленості має назву **витривалості**.

Вивчення питань втомленості має дуже велике значення. Такі важливі деталі, як осі залізничних вагонів, колінчаті вали, пружини клапанів, поршневі пальці й багато інших деталей, виходять з ладу здебільшого внаслідок руйнувань втомленого характеру. Для руйнування від втомленості недостатньо змінних напружень. Потрібно також, щоб напруження мали певні значення. Отже, максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір не руйнуючись при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається **границею витривалості** (*границею втомленості*).

Границю витривалості визначають експериментально. Вона залежить від цілої низки факторів, зокрема від форми та розмірів деталі, способу її обробки, стану поверхні деталі, виду напруженого стану (*розтягання-стискання, кручення, згинання тощо*), а також закону зміни навантаження в часі при випробуваннях.

9.2 Цикли напружень та їх характеристики

Циклом напружень називають сукупність усіх послідовних значень змінних напружень протягом одного періоду. Під **періодом** (T) розуміють час однократної зміни напружень.

Цикл змінних напружень (рисунок 9.1) характеризується такими параметрами:

- **максимальне напруження** (σ_{max} або τ_{max});
- **мінімальне напруження** (σ_{min} або τ_{min});
- **середнє напруження** (σ_m або τ_m) – може бути як додатне, так і від'ємне

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad \left(\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} \right); \quad (9.1)$$

- **амплітуда циклу** (σ_a або τ_a) – завжди додатна:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \quad \left(\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} \right); \quad (9.2)$$

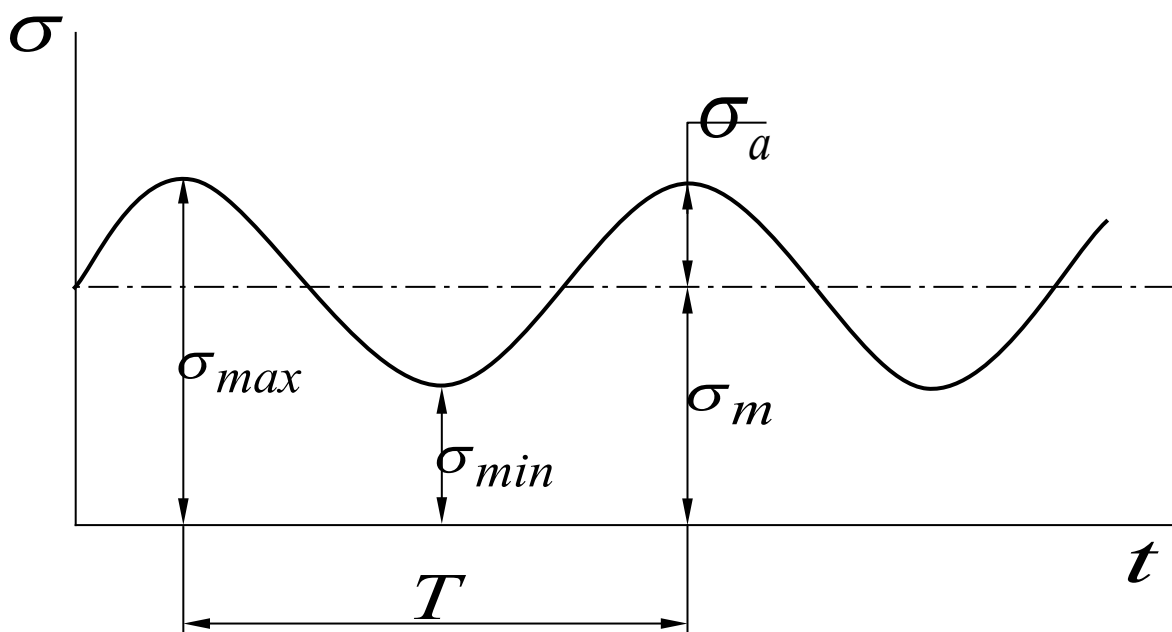


Рисунок 9.1 – Цикл змінних напружень
У відповідності з формулами (9.1) та (9.2) очевидно, що

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Важливою характеристикою циклу змінних напружень є *коефіцієнт асиметрії циклу*:

$$R_{\sigma} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad \left(R_{\tau} = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} \right). \quad (9.3)$$

Найбільш небезпечним циклом, з точки зору міцності, є *симетричний* цикл (рисунки 9.2), тому що для нього границя витривалості має мінімальне значення, тобто $\sigma_{max} = -\sigma_{min} > 0$ (при $\sigma_{min} < 0$), а також $\sigma_a = \sigma_{max}$, $\sigma_m = 0$, $R_{\sigma} = -1$. Він є характерним для вала, що обертається і який навантажений нерухомою силою.

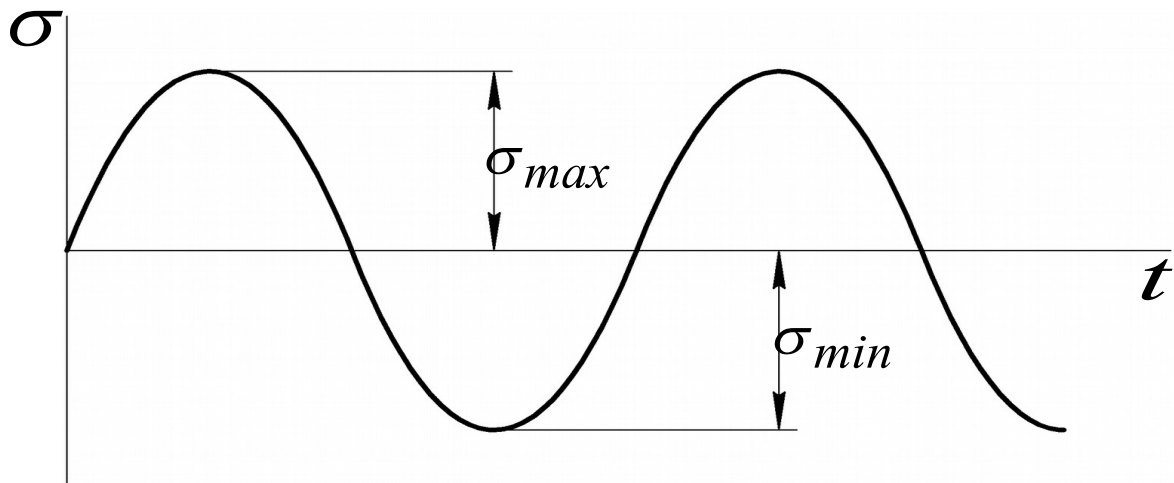


Рисунок 9.2 – Симетричний цикл змінних напружень

При *пульсуючому* (віднульовому) циклі (рисунки 9.3): $\sigma_{min} = 0$, $\sigma_{max} > 0$, $\sigma_a = \sigma_m = \frac{1}{2}\sigma_{max}$, $R_{\sigma} = 0$.

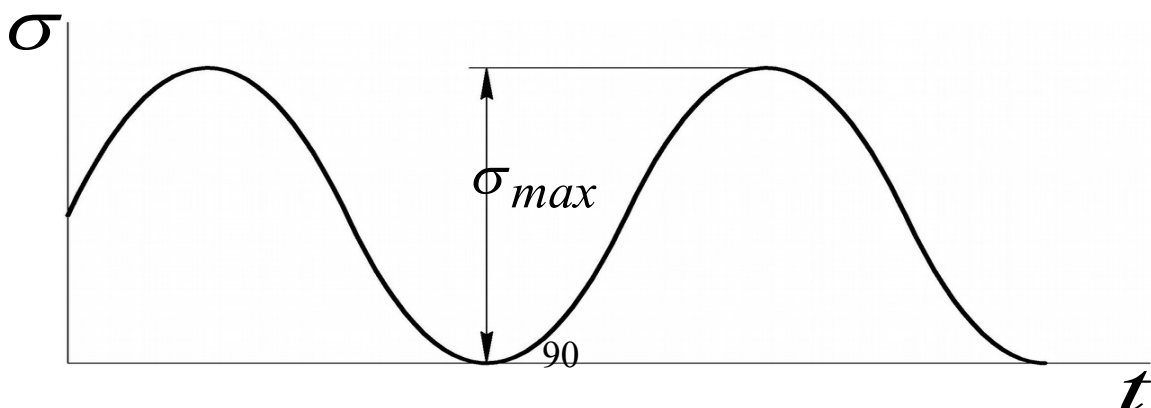


Рисунок 9.3 – Пульсуючий цикл змінних напружень

При постійному навантаженні, коли $\sigma_{max} = \sigma_{min} > 0$, $\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min} > 0$, $R_\sigma = +1$. Такий цикл отримав назву **циклу постійного статичного навантаження** (рисунок 9.4).

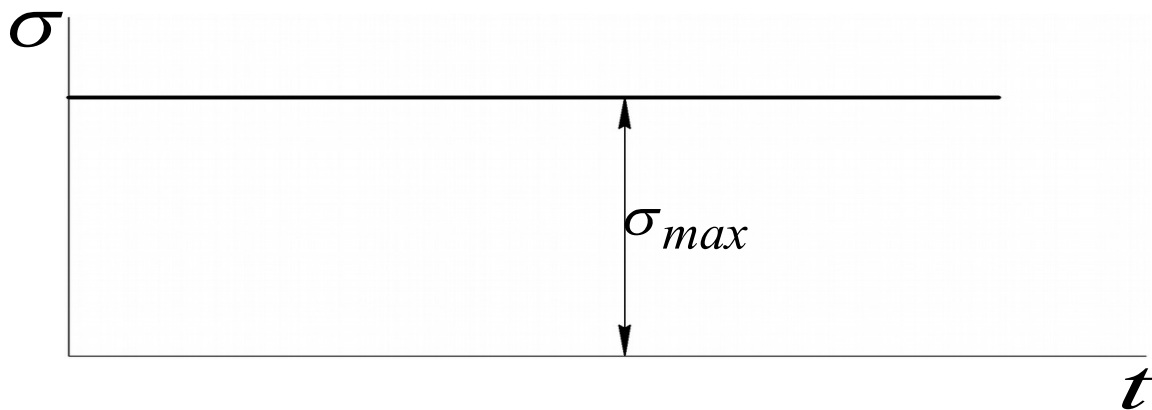


Рисунок 9.4 – Цикл постійного статичного навантаження

Слід зауважити, що у випадку змінних дотичних напружень характерні напруження циклу відповідно позначатимуться τ_{max} , τ_{min} , τ_m та τ_a . Цикли, що мають однакові характеристики R , називають подібними.

У загальному випадку в розрахунках на витривалість *границю витривалості* позначають σ_R (τ_R). При цьому для симетричного циклу – σ_{-1} (τ_{-1}), для пульсуючого – σ_0 (τ_0), для циклу постійного статичного навантаження – σ_{+1} (τ_{+1}).

9.3 Крива втомленості

З метою визначення границі витривалості виконують випробування зразків на втомленість з використанням спеціальних машин. Найбільш розповсюдженими є випробування на чистий згин при симетричному циклі, для якого границя витривалості σ_{-1} має найменше значення.

Для визначення границі витривалості σ_{-1} з обраного

матеріалу виготовляються не менше десяти ретельно оброблених цілком однакових зразків. Потім, задаючись різними значеннями напруження σ_{max} , визначають число циклів N , необхідних для доведення кожного зразка до руйнування. Випробування закінчується, коли в результаті поступового зниження амплітуди напружень та підвищення числа циклів знайдеться така амплітуда напружень, при якій черговий зразок не зруйнується при великому числі циклів, порядку 10^7 .

За результатами випробувань будують **криву втомленості** (*криву витривалості, криву Веллера*), яка є залежністю максимального напруження σ_{max} від числа циклів N (рисунок 9.5).

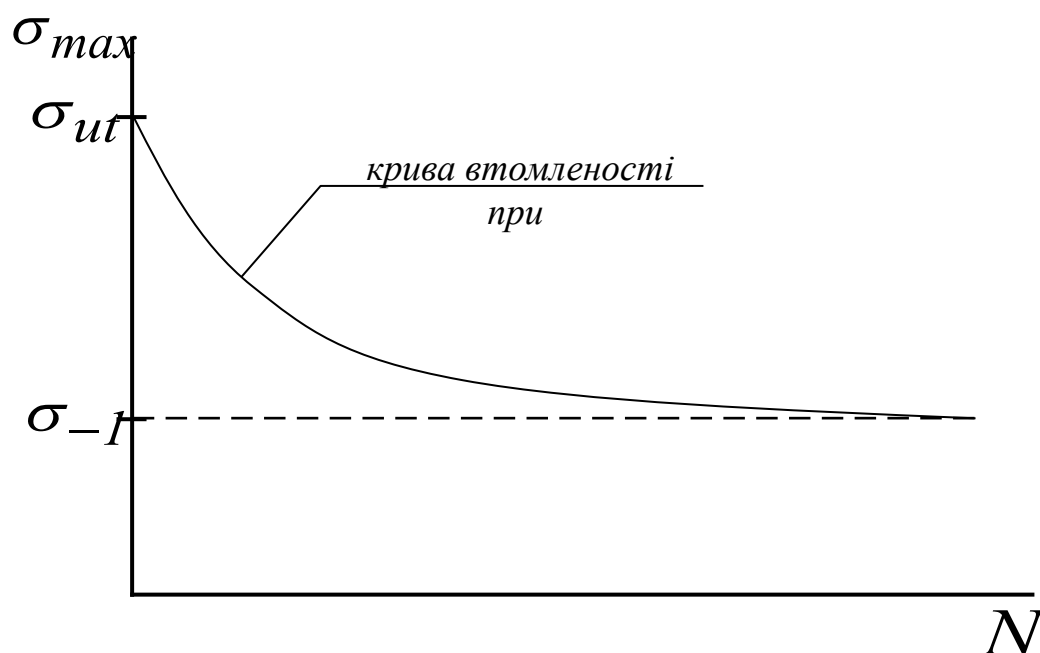


Рисунок 9.5 – Крива втомленості

Найбільше число циклів, при яких проводиться випробування, називають **базовим числом циклів** (для сталі та чавуну базове число приймають 10^7).

Якщо зразок витримує базове число циклів, то вважається, що напруження в ньому не перевищує границі витривалості і він може перенести будь-яке велике число циклів без руйнування.

Згідно з чисельними експериментальними даними для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між границями витривалості при різних видах деформацій й, зокрема,

між границями витривалості при згинанні σ_{-1} , крученні τ_{-1} та розтяганні-стисканні σ_{-1p} при симетричних циклах. Для гладких зразків ці співвідношення приблизно такі: для сталі $\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1}$; для чавуну $\sigma_{-1p} = 0,65\sigma_{-1}$; для сталей та легких сплавів $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}$; для чавуну $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}$.

У зв'язку з тим, що випробування на втомленість при розтяганні та крученні проводять значно рідше, тому що вони потребують більш складного обладнання порівняно з випадком згинання, границі витривалості при розтяганні σ_{-1p} і крученні τ_{-1} при симетричному циклі навантажень визначають з емпіричних залежностей за відомою границею витривалості σ_{-1} при симетричному циклі згинання:

$$\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1}, \quad \tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}. \quad (9.4)$$

У випадку відсутності випробувальних даних границя витривалості для симетричного циклу згинання може бути обчислена за емпіричними співвідношеннями залежно від тимчасового опору σ_{ut} :

- для чорних металів: $\sigma_{-1} = (0,4 \div 0,5)\sigma_{ut}$;
- для кольорових металів: $\sigma_{-1} = (0,25 \div 0,5)\sigma_{ut}$.

Слід зазначити, що для кольорових металів використовується поняття «умовна границя витривалості», яка визначається при числі циклів навантаження $N = 10^8$, тому що при визначеному числі циклів (досить значному) границя витривалості зразка дорівнює 0.

9.4 Діаграма граничних напружень

Границю витривалості при будь-якому коефіцієнті асиметрії можливо отримати за допомогою *діаграми граничних*

напружень, побудованої в системі координат $\sigma_a = f(\sigma_m)$ (рисунок 9.6), для отримання якої проводять випробування на втомленість при різних значеннях R .

Точка A цієї діаграми відповідає границі витривалості при симетричному циклі, для якого $\sigma_a = \sigma_{-1}$, $\sigma_m = 0$. Точка B відповідає границі витривалості циклу постійного статичного навантаження, для якого $\sigma_a = 0$, $\sigma_m = \sigma_{ut}$. Точка C відповідає границі витривалості при пульсуючому циклі $\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_0}{2}$.

Площа діаграми, обмежена кривою ACB та осями координат, визначає область безпечних (щодо втомлених руйнувань) циклів напружень.

Експериментально встановлено, що постійні розтягувальні напруження зменшують опір втомленості, а стискальні постійні напруження затримують зародження та розвиток тріщини

втомленості і підвищують границю витривалості.

Промінь OC на діаграмі характеризує пульсуючий цикл і є границею областей знакозмінних та знакопостійних циклів. Так, для знакозмінних циклів $\sigma_a > \sigma_m$ (область цих циклів розташована вище променя OC). Для знакопостійних циклів $\sigma_a < \sigma_m$ (область цих циклів розташована нижче променя OC).

Довільний промінь OD є геометричним місцем точок, які характеризують цикли з однаковими коефіцієнтами асиметрії. Такі цикли називають **подібними**. Для подібних циклів

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R} = \operatorname{const}. \quad (9.5)$$

При цьому цикл, зображений точкою D , є для заданого коефіцієнта R **граничним**. Його максимальне напруження дорівнює границі витривалості та визначається за формулою

$$\sigma'_{max} = \sigma_R = \sigma'_m + \sigma'_a. \quad (9.6)$$

Точка K променя OD відповідає **робочому** циклу напружень, для якого максимальне напруження становить

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a. \quad (9.7)$$

Вважаючи, що робочий і граничний цикли напружень подібні, коефіцієнт запасу міцності можна визначити за формулою

$$n = \frac{\sigma'_{max}}{\sigma_{max}}. \quad (9.8)$$

Якщо на горизонтальній осі діаграми узяти точку N , абсциса якої дорівнює границі текучості σ_y , і провести під кутом 45° пряму NE , то ця пряма розділить поле діаграми на дві області: 1) область $AMNO$ небезпечних циклів, при яких немає як втомленого руйнування, так і неприпустимих пластичних деформацій; 2) область BMN циклів, безпечних щодо втомленого руйнування, але небезпечних щодо появи пластичних деформацій.

Отже, для пластичних матеріалів діаграма граничних напружень повинна обмежуватися областю $AMNO$.

У зв'язку з тим, що побудування діаграми пов'язано з проведенням великої кількості експериментів, на практиці часто користуються спрощеною діаграмою, при побудуванні якої для даного матеріалу достатньо знати значення границі витривалості при симетричному циклі σ_{-1} і границі міцності при статичному навантаженні σ_{ut} . При цьому замість експериментальної кривої ACB будують пряму AB (позначена пунктиром) і визначають наближені значення границь витривалості при різних характеристиках циклів.

9.5 Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості

У результаті багаторазових спостережень було встановлено, що на величину границі витривалості значно впливають *концентрація напружень, розміри деталі, стан її поверхні, а також температура.*

Вплив концентрації напружень. Під концентрацією напружень розуміють явище різкого підвищення напружень у районі різкої зміни форми або площі поперечного перерізу деталі (*отвір, виточки, галтелі, шпонкові канавки, надрізи і т. п.*).

Концентрація напружень оцінюється теоретичним коефіцієнтом концентрації, а також характеризується ефективним коефіцієнтом концентрації.

Теоретичний коефіцієнт концентрації напружень:

$$\alpha_{k\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \quad \left(\alpha_{k\tau} = \frac{\tau_{max}}{\tau_n} \right), \quad (9.9)$$

де σ_{max}, τ_{max} – максимальні місцеві напруження поблизу концентратора;

σ_n, τ_n – номінальні напруження.

Концентрація напружень по-різному впливає на міцність пластичних та крихких матеріалів. Пластичність матеріалу

сприяє зрівнянню напружень. Тому у цьому випадку вплив концентрації оцінюється за допомогою **ефективного коефіцієнта концентрації напружень**:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-l}}{\sigma_{-lk}}, \quad \left(K_{\tau} = \frac{\tau_{-l}}{\tau_{-lk}} \right), \quad (9.10)$$

де σ_{-l} , τ_{-l} – границі витривалості для симетричного циклу гладкого зразка;

σ_{-lk} , τ_{-lk} – границі витривалості для симетричного циклу зразка з відповідним концентратором.

Вплив розмірів (масштабний фактор). Експериментальні дослідження показали, що зі збільшенням розмірів зразка границя витривалості зменшується. Це пояснюється тим, що зі збільшенням об'єму матеріалу зростає вірогідність наявності неоднорідності будови (*шлакові та газові включення та ін.*), що призводить до появи місць концентрації напружень.

Вплив абсолютних розмірів деталі враховується **масштабним фактором**:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-ld}}{\sigma_{-ld_0}}, \quad \left(\beta_{\tau} = \frac{\tau_{-ld}}{\tau_{-ld_0}} \right), \quad (9.11)$$

де σ_{-ld} , τ_{-ld} – границі витривалості зразка заданого розміру;

σ_{-ld_0} , τ_{-ld_0} – границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації ($d_0 = 7 \dots 10$ мм).

Вплив стану поверхні. Дефекти поверхневих шарів деталей, які зазнають найчастіше найбільших напружень, є джерелами концентрації напружень. При цьому границя витривалості може бути збільшена в декілька разів за рахунок зменшення шорсткості поверхні деталі.

Вплив стану поверхні оцінюється **коефіцієнтом якості поверхні**:

$$\beta_{i\sigma} = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}, \quad \left(\beta_{i\tau} = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_{-1}} \right), \quad (9.12)$$

де σ'_{-1} , τ'_{-1} – границі витривалості для серії зразків, які мають дану обробку поверхні;
 σ_{-1} , τ_{-1} – границі витривалості полірованого зразка.

Вплив температури. При підвищенні температури границя витривалості, як правило знижується, а при зниженні – підвищується. Наприклад, для сталі при температурі вище 300°C границя витривалості знижується на $15 \div 20\%$ на кожні 100°C підвищення температури. При зниженні температури з 20°C до -190°C границя витривалості для деяких сталей підвищується більш ніж вдвічі, хоча їх ударна в'язкість при цьому знижується.

9.6 Розрахунок на міцність при змінних напруженнях

Розрахунок елементів конструкцій, які знаходяться під дією змінних навантажень, звичайно починають зі статичного розрахунку, метою якого є попереднє визначення розмірів. Тільки після цього проводять перевірочний розрахунок на витривалість, у результаті якого визначають фактичний *коефіцієнт запасу міцності*.

Коефіцієнт запасу міцності при симетричному циклі характеризується відношенням дійсної границі витривалості деталі до максимального напруження циклу $\sigma_{max} = \sigma_a$, тобто

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a}, \quad (9.13)$$

де $(\sigma_{-1k})_d$ – дійсна границя витривалості деталі, що розраховується за формулою:

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{\sigma_{-1}}{K_{-1}}, \quad (9.14)$$

де K_{-1} – загальний коефіцієнт зміни границі витривалості при симетричному циклі,

$$K_{-1} = \frac{K_{\sigma}}{\beta_{i\sigma} \cdot \beta_{n\sigma}}. \quad (9.15)$$

Аналогічно визначають коефіцієнт запасу міцності при крученні:

$$n_{\tau} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a}. \quad (9.16)$$

Для визначення запасів міцності при несиметричних циклах у випадку будь-якого виду навантаження (згинання, розтягання-стискування, кручення) можна використовувати такі залежності:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_{\sigma}}{\beta_{n\sigma} \beta_{m\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad \left(n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{K_{\tau}}{\beta_{n\tau} \beta_{m\tau}} + \psi_{\tau} \tau_m} \right), \quad (9.17)$$

де ψ_{σ} та ψ_{τ} – коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу до асиметрії циклу відповідно при розтяганні-стискуванні та згинанні, а також при крученні. Значення цих коефіцієнтів наводяться у довідниках залежно від границі міцності матеріалу.

При сумісній дії нормальних та дотичних напружень для визначення коефіцієнта запасу використовують емпіричну залежність

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}, \quad (9.18)$$

звідки

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (9.19)$$

Після визначення коефіцієнта запасу міцності за опором витривалості необхідно виконати його порівняння з коефіцієнтом запасу за опором пластичним деформаціям. Останні визначаються за наведеними нижче формулами:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_a + \sigma_m}, \quad (9.20)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_y}{\tau_{max}} = \frac{\tau_y}{\tau_a + \tau_m}. \quad (9.21)$$

Міцність деталі, що розраховується, оцінюють за найменшим з запасів, отриманих за відповідними формулами у тому та іншому випадках.

Наявність концентрації напружень значно зменшує границю витривалості деталі. Тому при проектуванні машин необхідно прагнути, щоб вплив місцевих напружень був мінімальним. Досягається це конструктивними та технологічними заходами.

Для відповідальних деталей, що знаходяться під дією циклічних навантажень, зовнішні обводи прагнуть зробити плавними, радіуси закруглень у внутрішніх кутах збільшують, отвори роблять у зонах зменшених напружень.

Для підвищення границі витривалості необхідно добиватися високої чистоти поверхні, особливо у зоні концентрації. Відповідальні деталі шліфуються і навіть поліруються.

Великі можливості для підвищення границі витривалості відкривають спеціальні способи обробки поверхні, а саме поверхнева обробка струмами високої частоти, термохімічна обробка поверхні шляхом азотування або цементації.

Границя витривалості може бути підвищена при обкатуванні поверхні роликком або шляхом обдуву з використанням сталюого або чавунного дробу. У результаті такої обробки на поверхні деталі утворюється шар із залишковим напруженням стискання, що запобігає виникненню тріщин.

10 РОЗРАХУНКИ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

10.1 Явище удару. Коефіцієнт динамічності

Явище удару має місце тоді, коли швидкість елемента конструкції, що розглядається, або стичних з ним частин протягом дуже малого проміжку часу змінюється на скінчену величину. Одержані при цьому великі прискорення призводять до виникнення значних інерційних сил, які діють у напрямку, протилежному напрямку прискорень, тобто в напрямку руху тіла.

Для визначення напружень і деформацій (*динамічні напруження і деформації*) в елементах пружних систем, викликаних дією ударних навантажень, в інженерній практиці користуються так званим енергетичним методом, який базується на законі збереження енергії. Згідно з цим методом припускають, що при співударянні рухомих тіл зменшення запасу їх кінетичної енергії дорівнює збільшенню потенційної енергії деформації пружних тіл, що співударяються.

Припускають, що вантаж прикладається до стержня статично в тому випадку, коли навантаження повільно зростає від нуля до максимального значення і стискає стержень на величину $\delta_{ст}$ (рисунок 10.1, а). При падінні вантажу з висоти h , внаслідок удару, на стержень буде діяти динамічна сила (*більша, ніж вага вантажу G*) і при цьому укорочення стержня δ_0 (рисунок 10.1, б) буде більшим, ніж $\delta_{ст}$.

Вплив ударної дії навантаження на величину деформації або напруження оцінюють *коефіцієнтом динамічності*:

$$k_{\delta} = \frac{\delta_{\delta}}{\delta_{cm}}, \quad (10.1)$$

де δ_{δ} – динамічна деформація;
 δ_{cm} – статична деформація,

звідки динамічну деформацію через статичну можна виразити формулою:

$$\delta_{\delta} = k_{\delta} \cdot \delta_{cm}. \quad (10.2)$$

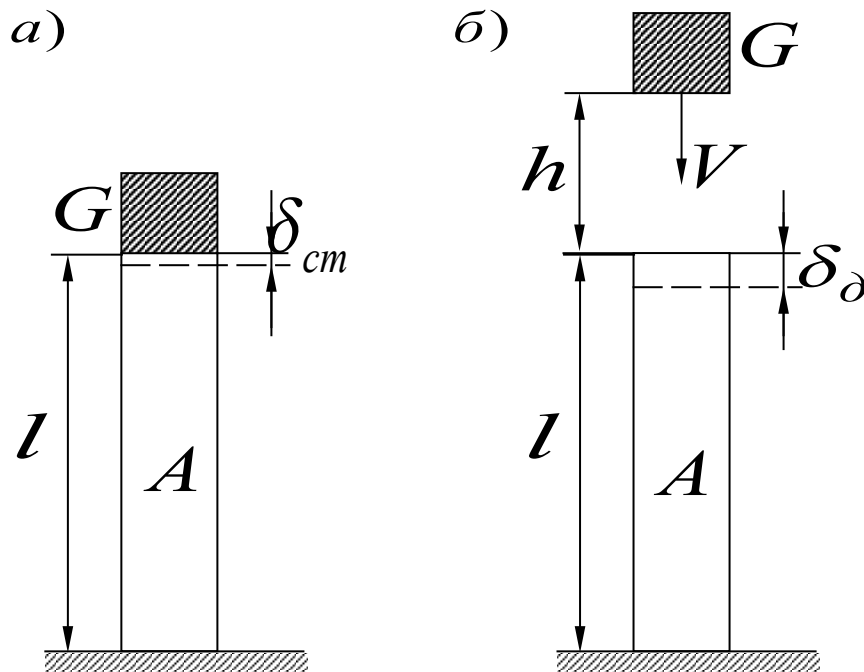


Рисунок 10.1

Враховуючи лінійний зв'язок між напруженням і деформацією, а також приймаючи однаковими модулі пружності при статичній та ударній дії навантаження, що з достатнім ступенем точності підтверджується експериментом, за аналогією з формулою (10.2) можна встановити зв'язок між статичними та динамічними напруженнями:

$$\sigma_o = k_o \cdot \sigma_{cm}, \quad (10.3)$$

де σ_{cm} – напруження, що виникає в стержні при стисканні силою, яка дорівнює вазі падаючого вантажу G ,

$$\sigma_{cm} = \frac{G}{A}, \quad (10.4)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

При визначенні коефіцієнта динамічності виходять з припущення, що зв'язок між зусиллями і деформаціями зберігається однаковим як при статичному, так і динамічному навантаженнях, тобто

$$\delta_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}, \quad \delta_o = \frac{F_o}{c}, \quad (10.5)$$

де F_{cm} – статичне навантаження, що дорівнює вазі падаючого вантажу;

F_o – динамічне навантаження;

c – жорсткість стержня,

$$c = \frac{E \cdot A}{l}. \quad (10.6)$$

l – довжина стержня.

10.2 Поздовжній удар

Розглянемо випадок удару вантажу вагою G , який падає з висоти h , на нерухомий стержень (рисунок 10.1, *a*). При цьому нехтуємо масою стержня, а удар вважаємо абсолютно непружним.

Зміна кінетичної енергії вантажу чисельно дорівнює роботі, виконаній ним при падінні та деформуванні стержня:

$$T = G \cdot (h + \delta_o) . \quad (10.7)$$

Потенційна енергія деформації стержня, яка накопичена при ударі, може бути виражена такою формулою:

$$U_o = \frac{1}{2} \cdot F_o \cdot \delta_o = \frac{c \cdot \delta_o^2}{2} . \quad (10.8)$$

На підставі закону збереження енергії

$$T = U_o \quad \text{або} \quad \frac{c \cdot \delta_o^2}{2} = G \cdot (h + \delta_o) . \quad (10.9)$$

Ураховуючи, що $G = \delta_{cm} \cdot c$, рівняння (10.9) можна подати в такому вигляді:

$$\delta_o^2 - 2 \cdot \delta_{cm} \cdot \delta_o - 2 \cdot \delta_{cm} \cdot h = 0 . \quad (10.10)$$

Звідки динамічна деформація

$$\delta_o = \delta_{cm} \pm \sqrt{\delta_{cm}^2 + 2 \cdot \delta_{cm} \cdot h} . \quad (10.11)$$

Утримуючи у відповідності з фізичними розумінням задачі знак плюс, формулу (10.11) можна подати як:

$$\delta_o = \delta_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}} \right) . \quad (10.12)$$

Таким чином, у відповідності з формулою (10.2) знаходимо вираз для визначення коефіцієнта динамічності:

$$k_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}} , \quad (10.13)$$

підставивши в отримане рівняння замість h нижче наведений вираз

$$h = \frac{V^2}{2 \cdot g}, \quad (10.14)$$

де V – швидкість вантажу на початку удару,

одержимо

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \delta_{cm}}}. \quad (10.15)$$

Оскільки $\frac{2h}{\delta_{cm}} = \frac{T_0}{U_{cm}}$, де $T_0 = \frac{G \cdot V^2}{2 \cdot g}$ – кінетична енергія падаючого вантажу до моменту співудару; $U_{cm} = \frac{G \cdot \delta_{cm}}{2}$ – потенційна енергія деформації стержня при статичному прикладенні навантаження G , коефіцієнт динамічності можна також виразити формулою

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{cm}}}. \quad (10.16)$$

Якщо $h = 0$, тобто коли вантаж не падає на стержень, а прикладається раптово, то згідно з формулою (10.13) коефіцієнт динамічності $k_{\ddot{a}} = 2$. Оскільки висота падіння h завжди більша за δ_{cm} , то при визначенні коефіцієнта динамічності у виразах (10.13) та (10.16) одиницею, яка розташована під коренем, нехтують, тоді

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}}, \quad (10.17)$$

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{cm}}}. \quad (10.18)$$

Динамічне напруження при ударі згідно з формулою (10.3):

$$\sigma_{\delta} = \sigma_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}} \right). \quad (10.19)$$

Аналогічно визначаємо зусилля при ударі:

$$F_{\delta} = F_{cm} \cdot k_{\delta} = F_{cm} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}} \right). \quad (10.20)$$

Іноді маса стержня істотно впливає на динамічні напруження в стержні, що зазнає удару. Це пов'язане з тим, що кінетична енергія вантажу частково витрачається на надання певної швидкості масі стержня.

Для наближеного врахування впливу інерції маси стержня, що зазнає удару, у процесі удару розрізняють два етапи (рисунок 10.2). Перший починається з моменту зіткнення падаючого вантажу, який має найбільшу швидкість V , з верхнім кінцем нерухомого стержня і закінчується, коли внаслідок зминання матеріалу в місці зіткнення швидкість вантажу знизиться до V_1 , а верхній кінець стержня набере за цей час такої самої швидкості V_1 . Другий етап починається з моменту спільного руху вантажу і кінця стержня, що зазнає удару. Деформація стискання поширюється по всій довжині стержня з певною швидкістю від найбільшої V_1 на верхньому кінці до нуля в нижньому перерізі, тобто в місці закріплення.

Припустимо, що швидкість руху довільного перерізу стержня змінюється по його довжині l за лінійним законом (рисунок 10.2). Отже, швидкість перерізу на відстані x від нижнього закріпленого кінця:

$$V(x) = V_1 \cdot \frac{x}{l}. \quad (10.21)$$

Відповідно кінетична енергія елементарної ділянки стержня

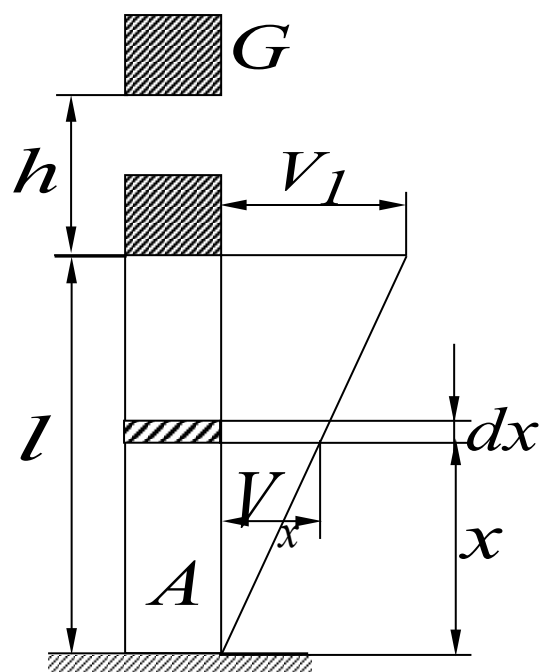


Рисунок 10.2

довжиною dx в розглянутому перерізі буде

$$dT_c = \frac{\gamma \cdot A \cdot dx}{2 \cdot g} \cdot \left(V_1 \cdot \frac{x}{l} \right)^2. \quad (10.22)$$

Повна кінетична енергія стержня, який зазнає удару, може бути виражена формулою

$$T_c = \frac{\gamma \cdot A}{2g} \cdot \frac{V_1^2}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma \cdot A \cdot l}{3} \cdot \frac{V_1^2}{2g} = \frac{G_c}{3} \cdot \frac{V_1^2}{2g}, \quad (10.23)$$

де G – власна вага стержня, що зазнає удару;
 γ – питома вага матеріалу стержня.

Виразивши відповідним чином швидкість V_I через швидкість V і визначивши кінетичну енергію, яка при ударі переходить в енергію деформації стержня, остаточно отримуємо вираз для коефіцієнта динамічності:

$$k_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{G \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{G_{cm}}{G}\right) \cdot U_{cm}}}. \quad (10.24)$$

10.3 Поперечний удар

При поперечному ударі (рисунок 10.3) також можна користуватися формулою (10.13), в якій величина δ_{cm} замінюється величиною статичного прогину в точці падіння вантажу f_{cm} , отже, коефіцієнт динамічності

$$k_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{f_{cm}}}. \quad (10.25)$$

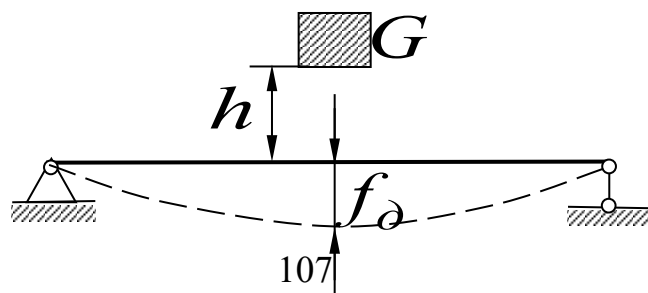


Рисунок 10.3

Коли висота падіння дорівнює нулю, динамічний коефіцієнт дорівнює двом. Якщо висота падіння h значно перевищує статичний прогин f_{cm} , то одиницею по відношенню до другого члена, який стоїть під коренем, можна знехтувати. Тоді, підставивши у формулу (10.25) вираз (10.14), після відповідних перетворень отримаємо

$$k_d = 1 + \frac{V}{\sqrt{g \cdot f_{cm}}} \quad (10.26)$$

Якщо вантаж падає на балку, яка має значну масу, якою неможливо знехтувати, то розподілена по довжині балки маса замінюється приведеною масою, зосередженою в місці удару. При цьому коефіцієнт динамічності визначається за формулою

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{f_{cm}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n \cdot G_0}{G}}} \quad (10.27)$$

де G_0 – вага балки;

n – коефіцієнт приведення, який залежить від виду закріплення балки ($n < 1$).

10.3 Крутний удар

У машинобудуванні крутний удар найчастіше спричинюється не падінням тих чи інших вантажів, а силами інерції мас, що обертаються з великими прискореннями. Це має місце в основному при гальмуванні швидкообертючих валів, що несуть маховики.

Для виведення розрахункових формул розглянемо вал із

закріпленим маховиком (рисунок 10.4), що обертається зі сталою швидкістю ω . Якщо раптово загальмувати вал на відстані l від маховика, приклавши момент M_0 , який треба визначити, то маховик, завдяки запасу кінетичної енергії буде продовжувати рух, скручуючи вал. Отже, ділянка вала довжиною l буде скручуватися моментом M_0 (момент гальмування і момент сил інерції маховика).

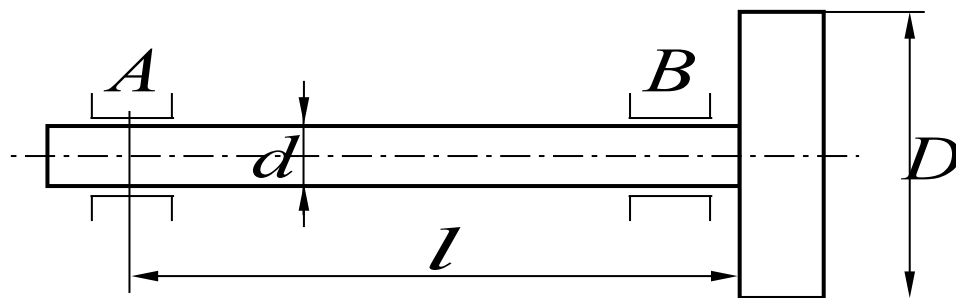


Рисунок 10.4

Динамічні скручувальні моменти, напруження τ_0 і кути закручування φ_0 визначимо, виходячи із закону збереження енергії $T_0 = U_0$.

Кінетична енергія маховика при обертальному русі

$$T_0 = \frac{I_{\rho m}}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{I_{\rho m}}{2} \cdot \omega^2, \quad (10.28)$$

де $I_{\rho m}$ – полярний момент інерції маховика,

$$I_{\rho m} = \frac{Q \cdot D^2}{8g}, \quad (10.29)$$

де Q – вага маховика;

D – діаметр маховика.

Потенційна енергія деформації кручення

$$U_{\partial} = \frac{1}{2} \cdot M_{\partial} \cdot \varphi_{\partial} = \frac{M_{\partial}^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_{\rho}}, \quad (10.30)$$

де $I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ – полярний момент інерції круглого перерізу вала діаметром d .

Підставляючи вирази (10.28) та (10.30) в наведений вище закон збереження енергії, після відповідних перетворень отримаємо формулу для визначення динамічного моменту:

$$M_{\partial} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot I_{\rho} \cdot T_0}{l}} = \omega \sqrt{\frac{I_{\rho M} \cdot G \cdot I_{\rho}}{l}}. \quad (10.31)$$

Максимальне дотичне напруження та динамічний кут закручування знаходяться за формулами (10.32) та (10.33):

$$\tau_{\partial \max} = \frac{M_{\partial}}{W_{\rho}}, \quad (10.32)$$

де $W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ – полярний момент опору круглого перерізу;

$$\varphi_{\partial} = \frac{M_{\partial} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (10.33)$$

З урахуванням виразу (10.31) формула (10.32) може бути подана в такому вигляді:

$$\tau_{\partial \max} = 2 \cdot \sqrt{\frac{T_0 \cdot G}{l \cdot F}}, \quad (10.34)$$

де F – площа поперечного перерізу вала.

11 КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ. РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ РЕЗЕРВУАРІВ

11.1 Основні поняття

*Деформації і напруження, що виникають при взаємному натисканні двох статичних тіл, обмежених криволінійними поверхнями, називають **контактними**.*

Внаслідок деформацій у місцях зіткнення елементів конструкцій передача тиску відбувається по дуже малих площадках. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи змоги вільно деформуватися, зазнає об'ємного напруженого стану. Як показують розрахунки, контактні напруження мають явно місцевий характер і дуже швидко зменшуються з віддаленням від місця контакту. Незважаючи на це, досліджувати контактні напруження і деформації потрібно для вирішення питань міцності багатьох важливих деталей (шарикові й роликові підшипники, зубчасті колеса, елементи кулачкових механізмів, колеса рухомого складу, рейки, кульові й циліндричні котки тощо).

Уперше правильний розв'язок основних випадків стискання пружних тіл дано методами теорії пружності в працях німецького фізика Г.Р. Герца у 1881-1882 рр.

Нижче наведено деякі результати, здобуті методами теорії пружності при таких припущеннях:

- навантаження спричиняють у зоні контакту тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;

- площадки контакту малі порівняно з поверхнями тіл, що стикаються;
- сили тиску, розподілені по поверхнях контакту, нормальні до цих поверхонь.

11.2 Формули для визначення контактних напружень

Стискання куль. При взаємному стисканні силами F двох куль, радіуси яких R_1 та R_2 (рисунок 11.1), утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначається за формулою

$$a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{F \cdot \left[\frac{E_1 + E_2}{E_1 \cdot E_2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right]}, \quad (11.1)$$

де E_1 та E_2 – модулі пружності матеріалів куль.

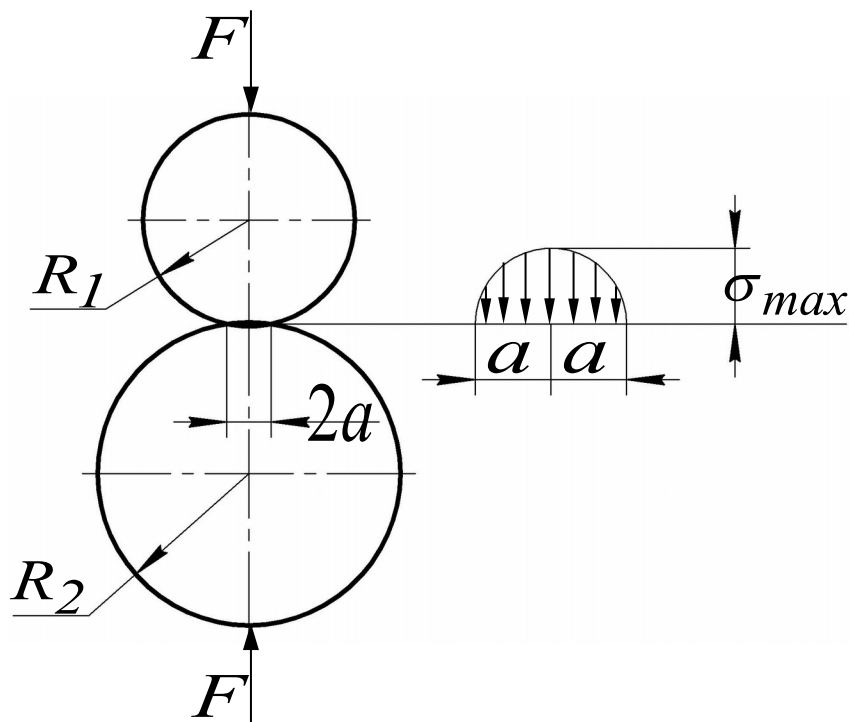


Рисунок 11.1

Максимальне нормальне напруження в центрі площадки контакту

$$\sigma_{max} = 0,388 \cdot \sqrt[3]{4F \cdot \frac{E_1^2 \cdot E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 \cdot R_2^2}}. \quad (11.2)$$

Найбільш напружена точка знаходиться в центрі площадки контакту, де матеріал зазнає напруженого стану, близького до рівномірного стискання (головні напруження $\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8\sigma_{max}$ та $\sigma_3 = \sigma_{max}$). При цьому небезпечна точка розташована на лінії дії сил F на глибині, що приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{max}; \\ \sigma_3 = -0,8\sigma_{max}. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

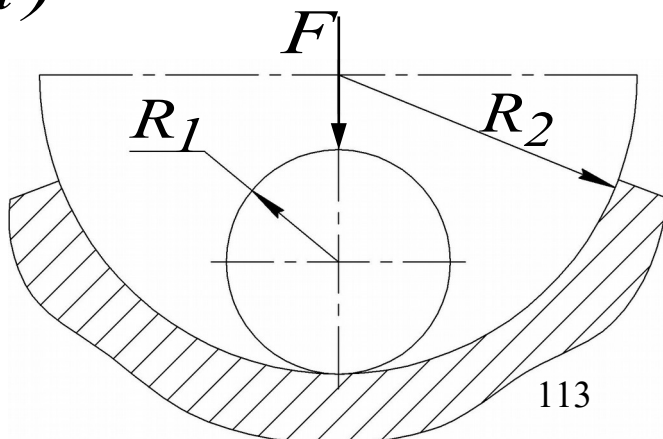
Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{max}. \quad (11.4)$$

Формула (11.2) також справедлива і у випадку тиску кулі на увігнуту сферичну поверхню радіуса R_2 (рисунок 11.2, а). Змінивши в указаній формулі знак при R_2 на зворотний, маємо

$$\sigma_{max} = 0,388 \cdot \sqrt[3]{4F \cdot \frac{E_1^2 \cdot E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 \cdot R_2^2}}. \quad (11.5)$$

а)



б)

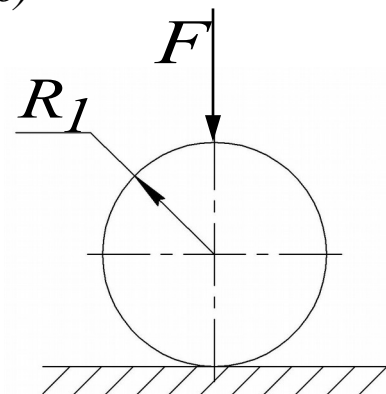


Рисунок 11.2

При взаємному тиску кулі та площини (рисунок 11.2, б), враховуючи, що $R_2 = \infty$, отримаємо

$$\sigma_{max} = 0,388 \cdot \sqrt[3]{4F \cdot \frac{E_1^2 \cdot E_2^2}{R_1^2 \cdot (E_1 + E_2)^2}}. \quad (11.6)$$

Стискання циліндрів. Два циліндри, які стикаються по твірній (рисунок 11.3), витримують взаємний тиск по всій лінії контакту. При рівномірно розподіленому навантаженні q площадка дотику має вигляд вузького прямокутника, ширина якого

$$b = 2,15 \cdot \sqrt{q \cdot \left[\frac{E_1 + E_2}{E_1 \cdot E_2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right]}, \quad (11.7)$$

де E_1, E_2 – модулі поздовжньої пружності циліндрів;
 R_1, R_2 – радіуси кривизни циліндрів.

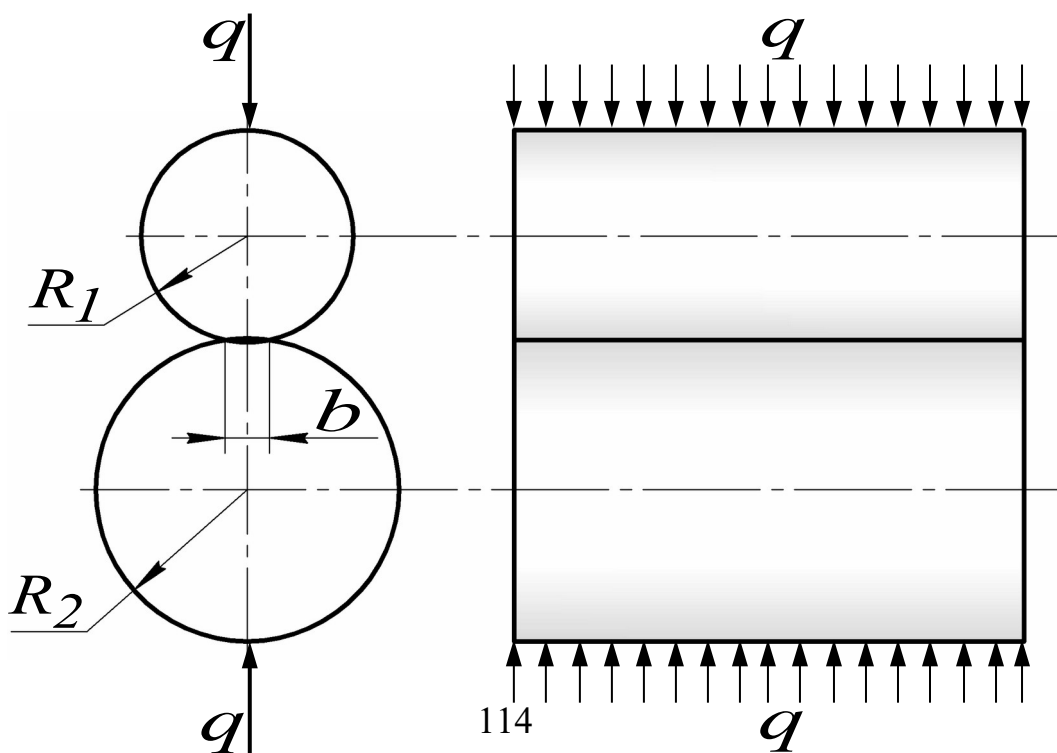


Рисунок 11.3

Максимальне напруження стискання, що діє в точках осі площадки контакту визначається за **формулою Герца**:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \cdot \sqrt{2q \cdot \left[\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right]}. \quad (11.8)$$

В небезпечній точці, що розташована на глибині $0,4b$, головні напруження мають значення:

$$\sigma_1 = -0,180\sigma_{\max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,780\sigma_{\max}. \quad (11.9)$$

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,3\sigma_{\max}. \quad (11.10)$$

У випадку тиску циліндра на деталь з увігнутою циліндричною поверхнею значення σ_{\max} визначається за формулою (11.8), попередньо змінивши в ній знак при R_2 з додатного на від'ємний. Підставивши у формулу (11.8) величину $R_2 = \infty$, отримаємо вираз для σ_{\max} у випадку взаємного тиску циліндра та деталі з плоскою поверхнею.

11.3 Розрахунок тонкостінних резервуарів

У різних галузях техніки широко застосовують такі конструктивні елементи, які з точки зору розрахунку їх на міцність і жорсткість можуть бути віднесені до тонкостінних оболонок. Це цистерни, водонапірні резервуари, повітряні і газові балони, куполи будинків, герметичні перегородки в літаках і підводних човнах, апарати хімічного машинобудування, частини корпусів турбін і реактивних двигунів та ін. Однією з особливостей такого роду конструкцій є мала товщина стінки

порівняно із загальними габаритами споруди, що дозволяє об'єднати їх терміном «тонкостінні резервуари».

У стінках тонкостінних резервуарів, які зазнають рівномірного внутрішнього або зовнішнього тиску (рисунок 11.4), виникають **меридіальне** напруження σ_m (скероване паралельно меридіану) та **колове** напруження σ_t (скероване вздовж паралелі), які рівномірно розподілені по товщині стінки.

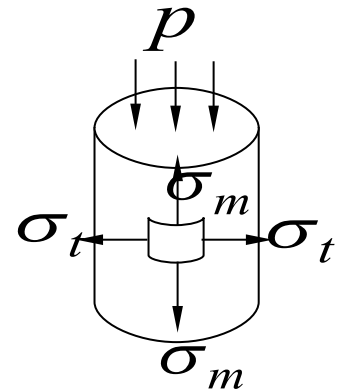


Рисунок 11.4

Для довільної точки серединної поверхні тонкостінного резервуара, який знаходиться під дією рівномірного тиску, можна записати рівняння рівноваги (**рівняння Лапласа**):

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (11.7)$$

де ρ_t, ρ_m – головні радіуси кривизни серединної поверхні у коловому та меридіальному напрямку;

δ – товщина стінки;

P – інтенсивність внутрішнього тиску.

Формула (11.7) дає задовільні результати, якщо радіуси кривизни R є постійними.

Розглянемо типові приклади (рисунок 11.5). **Для циліндричного резервуара** (рисунок 11.5, а)

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta}, \quad \sigma_t = \frac{qR}{\delta}. \quad (11.8)$$

З наведених вище залежностей видно, що в циліндричному резервуарі напруження в поздовжньому перерізі у 2 рази більше, ніж у поперечному. Цю обставину враховують на практиці при виготовленні складених резервуарів: поздовжні зварні шви виконують більш міцними, ніж поперечні шви.

У випадку відкритого циліндричного резервуара (*труби*) $\sigma_m = 0$.

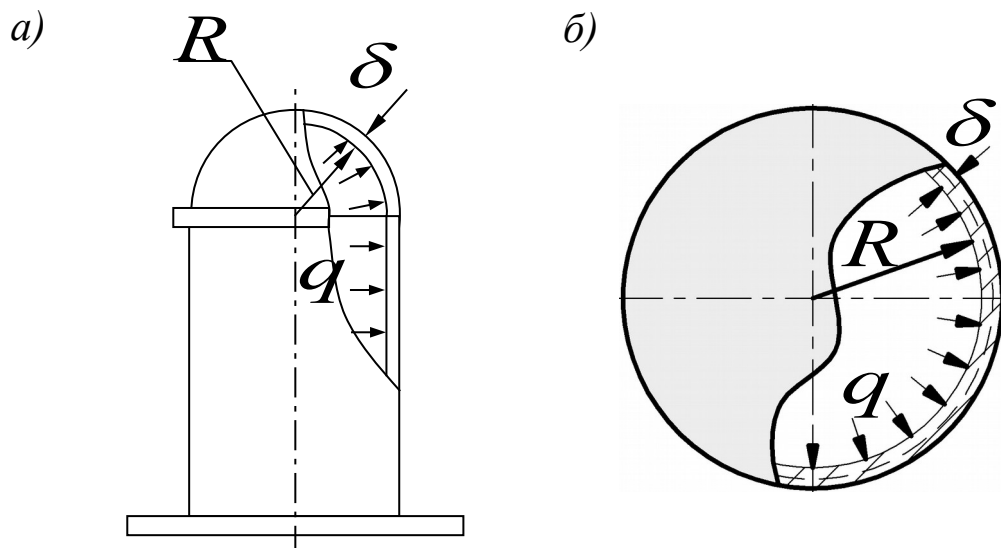


Рисунок 11.5

Для сферического резервуара (рисунок 11.5, б)

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{qR}{2\delta}. \quad (11.9)$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Писаренко, Г.С. Опір матеріалів [Текст]: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
- 2 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов. [Текст] / В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
- 3 Прочность, устойчивость, колебания: справочник. В 3 т. [Текст] / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1986. – Т.1. – 831 с.
- 4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст]. Учебник / под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.
- 5 Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов [Текст] / С.П. Тимошенко – М.: Наука, 1965. - Т.1, 2.
- 6 Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; отв. ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
- 7 Кинасошвили, Р.С. Сопротивление материалов [Текст] / Р.С. Кинасошвили Краткий учебник. 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 388 с.

