УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина VI

Харків – 2021

Методичні вказівки і завдання для самостійної роботи розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики та фізики 17 листопада 2020 р., протокол № 3.

Методичні вказівки і завдання призначено для самостійної роботи студентів освітнього рівня «бакалавр» факультету УПП усіх форм навчання.

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк (ХНУ)

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

Завдання 1.1. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння першого порядку.

Варіант 1 1) $y' \cdot x \cdot \ln x = ctgy$; 2) $x \cdot \sin \frac{y}{x} \cdot y' + x = y \cdot \sin \frac{y}{x}$; 3) $xy' \ln x = 5x - y$	**Варіант 16** 1) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$; 2) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; 3) $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}}$
Варіант 2 1) $y' \cdot \sin^2 x - y \ln y = 0$; 2) $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$; 3) $(x^2+1)y' - xy = x^3 + x$	**Варіант 17** 1) $(x+1)y - \sqrt{x^2+1}(y^3-1)y' = 0$; 2) $y^2 - 2xy + x^2 \cdot y' = 0$; 3) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$
Варіант 3 1) $ye^{2x} - (1+e^{2x})y' = 0$; 2) $2x - 3y + xy' = 0$; 3) $y'(1-x^2) = xy + 1$	**Варіант 18** 1) $\cos y \cdot \cos x - y' \cdot \sin x \cdot \sin y = 0$; 2) $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$; 3) $(x^2+1)y' + 4xy = 1$
Варіант 4 1) $x(y^6+1) + y^2(x^4+1)y' = 0$; 2) $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$; 3) $xy' \cdot \ln x = y + \ln x$	**Варіант 19** 1) $y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0$; 2) $xy' - y = x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$; 3) $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{e^{3x}}{x^2+1}$
Варіант 5 1) $y' \cdot ctgx + y = 2$; 2) $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0$; 3) $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{arctgx}{1+x^2}$	**Варіант 20** 1) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; 2) $y' = 2 + \frac{y}{x}$; 3) $y' - \frac{y}{x} = 3x$

Варіант 6 1) $\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0$; 2) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$; 3) $y'-\frac{y}{x}=3x$	**Варіант 21** 1) $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$; 2) $y'=2+\frac{y}{x}$; 3) $y'\cdot\sin x-y=2\sin^2\frac{x}{2}$
Варіант 7 1) $xy'+y=y^2$; 2) $xy'-\frac{x}{arctg\frac{y}{x}}=y$; 3) $x\cdot\ln x\cdot y'+y=2\ln x$	**Варіант 22** 1) $xy+(x+1)y'=0$; 2) $y-xy'=x+y\cdot y'$; 3) $\left(x^2+1\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$
Варіант 8 1) $(y-1)^2+(1-x)^3\cdot y'=0$; 2) $xy'=y(3+\ln y-\ln x)$; 3) $xy'-2y=2x^4$	**Варіант 23** 1) $\left(xy^2-y^2\right)-\left(x^2y+x^2\right)\cdot y'=0$; 2) $x^3\cdot y'=y\left(y^2+x^2\right)$; 3) $y'-y=e^x$
Варіант 9 1) $\left(\sqrt{xy}-2\sqrt{x}\right)y'-y=0$; 2) $y'=\frac{2\left(y-\sqrt{xy}\right)}{x}$; 3) $x^2y'-2y=2$	**Варіант 24** 1) $2x\left(1+y^2\right)+e^{-x^2}\cdot y'=0$; 2) $x+2y-xy'=0$; 3) $x^2y'+2xy-1=0$
Варіант 10 1) $x\sqrt{9-y^2}-y\left(4+x^2\right)y'=0$; 2) $x^2+xy+y^2-x^2y'=0$; 3) $2x\left(x^2+y\right)=y'$	**Варіант 25** 1) $\left(1+e^{2x}\right)y^2\cdot y'=e^x$; 2) $x-y+(x+y)\cdot y'=0$; 3) $y'\cos^2 x+y=tgx$
Варіант 11 1) $\ln x\cdot\sin^3 y+x\cdot y'\cdot\cos y=0$; 2) $x\cdot ctg\frac{y}{x}-y+xy'=0$; 3) $y'\cdot ctgx+y=2$	**Варіант 26** 1) $y'=\frac{1+y^2}{xy}$; 2) $\left(x^2+y^2\right)\cdot y'=2xy$; 3) $y'+7y=5e^{3x}$

Варіант 12 1) $\sqrt{y^2+1}=xyy'$; 2) $5\sqrt{xy}-y+xy'=0$; 3) $xy'-y=x^2\cdot\cos x$	**Варіант 27** 1) $\frac{1}{\cos^2 x}\cdot tgy+\frac{1}{\cos^2 y}\cdot tgx\cdot y'=0$; 2) $xy'-y=\sqrt{y^2+2x^2}$; 3) $\left(x^2+4\right)y'-xy=\sqrt{x^2+4}$
Варіант 13 1) $y'-2\sqrt{y}\cdot\ln x=0$; 2) $xy'=5y+x$; 3) $y'+4\frac{y}{x}+x=0$	**Варіант 28** 1) $y-\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)y'=0$; 2) $y^2+x^2y'=xyy'$; 3) $y'+3y=x\cdot e^{-3x}$
Варіант 14 1) $1-y'\cdot\left(4+x^2\right)\cdot\ln y=0$; 2) $y'\left(2xy-x^2\right)=x^2-xy+2y^2$; 3) $y'+2xy=x\cdot e^{-x^2}$	**Варіант 29** 1) $2x^2yy'+y^2=2$; 2) $y'=\frac{x+y}{x-y}$; 3) $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$
Варіант 15 1) $xy'=y\ln x$; 2) $\left(x^2-y^2\right)y'=xy$; 3) $xy'+y-3=0$	**Варіант 30** 1) $y'=e^{x+y}$; 2) $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right)$; 3) $y'-7y=8e^{3x}$

Завдання 1.2. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння другого порядку методом пониження порядку.

Варіант	Диференціальне рівняння	Варіант	Диференціальне рівняння
1	$y''=1-y'$	**16**	$y''\cdot y^3+1=0$
2	$xy''=2y'$	**17**	$y''x\ln x=y'(1-\ln x)$
3	$x\cdot y''+y'=\frac{1}{x^2}$	**18**	$x\cdot y''-y'-x\cdot\sin\frac{y'}{x}=0$
4	$2y\cdot y''=(y')^2$	**19**	$xy''+y'=19$
5	$y''=-\frac{1}{2y^3}$	**20**	$x\cdot y''=y'$
6	$x^2\cdot y''+xy'=1$	**21**	$xy''+y'-x^2-1=0$
7	$y''-y'=5$	**22**	$x\cdot y''=y'\left(22x^2+1\right)$

8	$xy'' - y' = x^2 \cdot e^{2x}$	**23**	$y \cdot y'' - y' = (y')^2$
9	$y'' = -\frac{x}{y'}$	**24**	$xy'' + y' = 0$
10	$y \cdot y'' = (y')^2.$	**25**	$y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$
11	$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$	**26**	$y'' = 2y' \cdot tgx$
12	$x \cdot y'' = \left(1 + (y')^2\right) arctg(y')$	**27**	$y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$
13	$y'' \cdot tgx = 2y'$	**28**	$\left(1 + x^2\right) y'' - 2xy' = 0$
14	$x \cdot y'' + y' = \ln x + 1$	**29**	$yy'' - (y')^2 \ln(y') = 0$
15	$x^2 \cdot y'' = (y')^2$	**30**	$y'' tgx = y' + 1$

ЗАВДАННЯ 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Завдання 2.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант	Диференціальне рівняння	**Варіант**	Диференціальне рівняння
1	$y'' + 2y' + y = 0$	**16**	$y'' - 6y' + 9y = 0$
2	$y'' - 2y' + y = 0$	**17**	$y'' - 4y' + 4y = 0$
3	$y'' - 4y' + 3y = 0$	**18**	$y'' + 36y = 0$
4	$y'' - 6y' + 13y = 0$	**19**	$y'' - y' = 0$
5	$y'' + 4y' + 5y = 0$	**20**	$y'' + 4y' = 0$
6	$y'' - 4y' + 5y = 0$	**21**	$y'' - 2y' = 0$
7	$y'' + y = 0$	**22**	$y'' - 2y' + 2y = 0$
8	$y'' + 4y = 0$	**23**	$y'' + 3y' + 2y = 0$
9	$y'' - y = 0$	**24**	$y'' + 2y' + 5y = 0$
10	$y'' + 4y' + 4y = 0$	**25**	$y'' - 2y' - 3y = 0$
11	$y'' - 4y' + 8y = 0$	**26**	$y'' - 5y' + 4y = 0$
12	$y'' - 8y' + 20y = 0$	**27**	$y'' - 5y' = 0$
13	$y'' + 3y = 0$	**28**	$y'' + y' - 2y = 0$
14	$y'' - 6y' + 8y = 0$	**29**	$y'' + 9y' - 10y = 0$
15	$y'' - 8y' + 17y = 0$	**30**	$y'' + y' - 6y = 0$

Завдання 2.2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант	Диференціальне рівняння	Варіант	Диференціальне рівняння
1	$\begin{cases} y''-4y'+3y=0; \\ y(0)=-3; \\ y'(0)=4. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} y''-4y'+5y=0; \\ y(0)=2; \\ y'(0)=-6. \end{cases}$
2	$\begin{cases} y''-2y'=0; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=2. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} y''-4y=0; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} y''-2y'+y=0; \\ y(0)=4; \\ y'(0)=5. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} y''-2y'+10y=0; \\ y(0)=3; \\ y'(0)=-1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} y''-6y'+25y=0; \\ y(0)=3; \\ y'(0)=5. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} y''+4y'=0; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4y''-4y'+y=0; \\ y(0)=5; \\ y'(0)=-1. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} y''+81y=0; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=-1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} y''-7y'+12y=0; \\ y(0)=4; \\ y'(0)=-3. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} y''+9y=0; \\ y(0)=-2; \\ y'(0)=2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} y''+y'=0; \\ y(0)=4; \\ y'(0)=0. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} y''-13y'+12y=0; \\ y(0)=-3; \\ y'(0)=1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} y''+2y'+y=0; \\ y(0)=-2; \\ y'(0)=1. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} y''+9y'-10y=0; \\ y(0)=3; \\ y'(0)=4. \end{cases}$
9	$\begin{cases} y''-4y'+29y=0; \\ y(0)=1; \\ y'(0)=7. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} y''+7y'+12y=0; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=5. \end{cases}$
10	$\begin{cases} y''-6y'+13y=0; \\ y(0)=2; \\ y'(0)=-1. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} y''+4y'+5y=0; \\ y(0)=-2; \\ y'(0)=0. \end{cases}$

11	$\begin{cases} y'' + 4y' - 12 = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = -1. \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0; \\ y(0) = 2; \\ y'(0) = -2. \end{cases}$
12	$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0; \\ y(0) = -2; \\ y'(0) = 5. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$
13	$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0; \\ y(0) = -2; \\ y'(0) = -1. \end{cases}$
14	$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = -3; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} y'' - 4y' = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$
15	$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0; \\ y(0) = -5; \\ y'(0) = -6. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0; \\ y(0) = -4; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Завдання 2.3. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f_i(x)$, $i = \overline{1,4}$. Знайти загальний розв'язок.

Варі-ант	$y''(x) + py'(x) + qy(x) =$ $= f_i(x),\ i = \overline{1,4}$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	$y'' - 2y' + 2y = f_i(x)$	$3e^x$	$2x^3 + 4x - 1$	$2\sin 2x$	$e^{-x} \cdot \cos x$
2	$y'' + 3y' + 2y = f_i(x)$	$4e^{-3x}$	$x^2 + 3x + 2$	$3\cos 2x$	$2x^2 \cdot e^{-x}$
3	$y'' - 4y' + 3y = f_i(x)$	e^{-3x}	$x^2 - 4x + 3$	$-4\sin x$	$4x \cdot e^x$
4	$y'' + y = f_i(x)$	$5e^x$	$x^2 + 1$	$5x \cdot e^{-x}$	$\cos x$
5	$y'' + 4y = f_i(x)$	$2e^{2x}$	$x^2 + 4$	$2\cos x$	$5\sin 2x$
6	$y'' + 2y' + y = f_i(x)$	$5e^{3x}$	$4x - 1$	$3\sin x$	$e^{-x} \cdot (4x - 1)$

7	$y'' + 4y' + 5y = f_i(x)$	$3e^{2x}$	$x^2 + 4x + 5$	$\cos 2x$	$e^{2x} \cdot \cos x$
8	$y'' - 6y' + 13y = f_i(x)$	$6e^{3x}$	$x^2 - 6x + 13$	$4\sin 2x$	$e^{3x} \cdot \cos 2x$
9	$y'' - 4y' + 5y = f_i(x)$	$3e^{2x}$	$x^2 - 4x + 5$	$4\cos x$	$e^{2x} \cdot \sin x$
10	$y'' + 4y' = f_i(x)$	$2e^{4x}$	$x^2 + 4x$	$2\sin 4x$	$x \cdot e^{-4x}$
11	$y'' + y' = f_i(x)$	$3e^{x}$	$x^2 + x - 1$	$2\cos x$	$2x \cdot e^{-x}$
12	$y'' + 2y' + 5y = f_i(x)$	$3e^{-x}$	$x^2 + 2x + 5$	$4\sin 2x$	$2e^{-x} \cdot \cos 2x$
13	$y'' - 2y' + y = f_i(x)$	e^{2x}	$3x + 5$	$2\cos 3x$	$e^{x} \cdot (x+1)$
14	$y'' - 8y' + 20y = f_i(x)$	$5e^{4x}$	$x^2 - 8x + 20$	$3\cos 2x$	$e^{4x} \cdot \sin 2x$
15	$y'' - 6y' + 8y = f_i(x)$	$6e^{8x}$	$x^2 - 6x + 8$	$2\cos 4x$	$e^{-x} \cdot (3x - 4)$
16	$y'' + 6y' = f_i(x)$	$4e^{6x}$	$x^2 + 6x$	$2\cos 6x$	$x \cdot e^{-6x}$
17	$y'' - y = f_i(x)$	$2e^{3x}$	$x^2 - 1$	$2\sin x$	$(2x+1) \cdot e^{-4x}$
18	$y'' - 2y' = f_i(x)$	$3e^{-2x}$	$x^2 - 2x$	$4\sin 2x$	$3x \cdot e^{2x}$
19	$y'' + 4y' + 4y = f_i(x)$	$2e^{4x}$	$x^2 + 4x + 4$	$2\cos 4x$	e^{-2x}
20	$y'' - 4y' + 8y = f_i(x)$	$4e^{8x}$	$x^2 - 4x + 8$	$5\sin 2x$	$4e^{2x} \cdot \cos 2x$
21	$y'' + 4y' = f_i(x)$	$-4e^{5x}$	$x^2 + 4x$	$5\sin 4x$	$(-2x+1) \cdot e^{-4x}$
22	$y'' - 5y' + 4y = f_i(x)$	$3e^{2x}$	$x^2 - 5x + 4$	$5\cos 4x$	$e^{x} \cdot (2 - 3x)$
23	$y'' + 7y' = f_i(x)$	$2e^{7x}$	$x^2 + 7x$	$2\sin 7x$	$x \cdot e^{-7x}$
24	$y'' + 3y' - 10y = f_i(x)$	$5e^{-2x}$	$x^2 + 3x - 10$	$5\cos 2x$	$e^{-5x} \cdot (x+3)$
25	$y'' + 5y' = f_i(x)$	$2e^{5x}$	$x^2 + 5x$	$4\sin 5x$	$(2x+1) \cdot e^{-5x}$

26	$y'' - 3y' + 2y = f_i(x)$	$4e^{3x}$	$x^2 - 3x + 2$	$2\sin x$	$(2-5x)\cdot e^x$
27	$y'' - 4y' + 29y = f_i(x)$	$3e^{-2x}$	$x^2 - 4x + 29$	$2\cos 5x$	$e^{2x}\cdot \sin 5x$
28	$y'' + y' = f_i(x)$	$3e^{x}$	$x^2 + x$	$-\sin x$	$2x\cdot e^{-x}$
29	$y'' + 6y' + 8y = f_i(x)$	$2e^{-8x}$	$x^2 + 6x + 8$	$4\cos 2x$	$(1-2x)\cdot e^{-x}$
30	$y'' + 8y' + 20y = f_i(x)$	$2e^{-4x}$	$x^2 + 8x + 20$	$3\sin 2x$	$e^{-4x}\cdot \cos 2x$

ЗАВДАННЯ 3. Системи диференціальних рівнянь

Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Варіант	Система диференціальних рівнянь	**Варіант**	Система диференціальних рівнянь
1	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 7y. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 3y. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 15y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 7y. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -14x - 5y. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x + 7y. \end{cases}$

5	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -28x - 5y. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 14x - 5y. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 28x - 5y. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x + 14y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 5y. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 14y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 30x + 7y. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 2y. \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -15x + 7y. \end{cases}$
12	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -30x + 7y. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x + 28y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

14	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 2y. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -10x + 7y. \end{cases}$
15	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -12x - 2y. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 2y. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ 4. Числові ряди

Завдання 4.1. Дослідити на збіжність знакододатні ряди.

Варіант	Умова завдання
1	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+n^2}{2+n+3n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\left(\dfrac{3n-1}{5+3n}\right)$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n+3)^2}$
2	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4n+2}{2n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+5}{7n^5+3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{3^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{2+\ln n}}$
3	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+7}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+7}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{3^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(\ln(n+2)+1)}$
4	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(2n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n}{n^2+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2n}2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\sqrt{\ln(n+3)}+1}$

5	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\sqrt{\ln(n+\frac{1}{2})+3}}$
6	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{2\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(5n)}$
7	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4+3n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+7)^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{3+8n}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\,arctgn}$
8	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5n^2+4}{n^2+3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2+3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{n+1}{\sqrt{3}n+1}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\ln n)\sqrt[4]{\ln\ln(n)+5}}$
9	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3+2n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$
10	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+3}{3n^2+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{7+4n}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$

11	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n n}{4^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\sqrt{n}}$
12	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2}{3n^2+2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n^2+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)5^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^n}{10^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$
13	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{9^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(\ln\left(n+\frac{1}{3}\right)+2\right)}$
14	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{4^n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{\ln^n n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,2n}{4n^2+1}$
15	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+11}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{4^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3n}}{3^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln^2(n+2)+1)(n+2)}$
16	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n}+2n^3+7}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)arctg^2 n}$

17	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+1}}$
18	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+5)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\ln\left(n-\frac{1}{2}\right)+5\right)^3}$
19	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+3}}{n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+7}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+\ln n)^2}$
20	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+5n-4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+4)\cdot arctg\left(\frac{n}{2}\right)}$
21	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+(n+1)}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n+3)^2 n}$
22	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n^3+5}{2n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{n}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln^2 n+1)n}$

23	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{2n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n^2}{n^4+9n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{3^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{1+\ln n}}$
24	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{2n+6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{4n^3+9n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+10)^n}{4^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$
25	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n^2+8}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n+2)}$
26	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4n+1)n}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n3^n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{4^n}{\ln^n n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{arctgn}}{n^2+1}$
27	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5+2n}{7n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+5}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+3)!}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{5n+2}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n+1)^2}$
28	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+7)n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(n+1)(n+5)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{7^n\cdot(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2+1)\cdot\sqrt[3]{(arctgn)^2}}$

29	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(n+5)}{(n+3)(2+5n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{3n}2^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n+2}}}{\sqrt{n+2}}$
30	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2^n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1)+4)^2}$

Завдання 4.2. Дослідити на збіжність знакопереміжні ряди.

Варіант	**а)**	**б)**
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+5}}$
2	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}+1}$
3	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3n-2}{(n+1)(n+3)}$
4	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+19}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n^2+\sqrt{n}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3n+2}{6n-1}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$
6	n $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^3+8}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+2}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3n}+1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n+5}$
8	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{2n+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}$
9	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$

10	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+7}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{5n-2}{2n^2+4n+1}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10n+3}{5n^2-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
12	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{7n^2+n}}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{5n^2-3}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3n+1}$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}$
15	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+11}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{3n^2+1}}$
16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}+1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+5)^n}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3n^2+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{10n+1}{n!}$
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{3n^2-n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot\sqrt{2n+1}}$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{3+\sqrt{n^3}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2n}}$
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{4n^2+1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^3}{4^n}$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{2n^3+3}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(n+1)!}$
22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n^3+1}{5n^4+n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}$
23	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{5n\cdot\sqrt{4n+1}}$
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{5n-2}{3n^2-n}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+5}}$

25	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n^2+3}$
26	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+4)}{5^n}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}+1}{3n^2+2\sqrt{n}}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3n}{2n^3+1}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-0{,}5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+3)}{3^n}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)^3}$

ЗАВДАННЯ 5. Степеневі ряди

Задано степеневий ряд. Знайти:
1) інтервал збіжності;
2) область збіжності.

Варіант	**а)**	**б)**	**в)**
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3+4}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^n}{n\sqrt{n}}(x+2)^n$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{3^n}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^n}{n(n+2)}$
3	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+4)^5}{n!}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{5^{n-1}}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{\sqrt[5]{n}}$
4	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3^n\cdot n}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n(n+3)}(x-4)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n+1}{n!}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^{n-1}}$

6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{\sqrt[3]{n}}(x+2)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n!} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!n^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \cdot 2^{n+1} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(x+2)^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+5)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{2^n} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x-5)^n}{2^n}$
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+7}{4^{n-1}} \cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^n}{n+1}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{(n+1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{3^{n-1}}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+4} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+2)^n}{(n+1)^n}$
13	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n(3n+2)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-3}{2^n} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$
14	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n+2)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+1)^n}{n(n+1)}$
15	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln^2 n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n+1} \cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n(n+1)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}(x-5)^n$
17	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(n+2)} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 5^n}(x-3)^n$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\sqrt[3]{n}} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)\cdot\sqrt{n}} \cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}(x+6)^n$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{n^2+2} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}(x+4)^n$
20	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot (1+\sqrt{n})} \cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}(x-3)^n$

21	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(3\sqrt{n}-2)}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n}(x-1)^n$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n(n+5)}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(3n+2)}\cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+1}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+3)}\cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{(n+1)^3}$
24	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{8^{n+1}}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^2+1}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3+1}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n-1}}$
26	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n+5}\cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^4}(x-1)^n$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^3}{n!}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n}}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+5)^n}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n\cdot(n+1)}}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n+\sqrt{n}}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{n+1}\cdot x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{(n+1)}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n(n+6)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n(7n+1)}\cdot x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{n!}(x-2)^n$

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Завдання 1. Диференціальні рівняння першого порядку

Завдання 1.1. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння першого порядку:

1) $y'=\frac{\sin 5x}{y^2}$;

2) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

3) $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$.

Розв’язання. 1) $y' = \frac{\sin 5x}{y^2}$. Якщо позначити через $f_1(x) = \sin 5x$, $f_2(y) = \frac{1}{y^2}$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (додаток А). Замінюємо y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 5x}{y^2}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $y^2 dx$:

$$y^2 dy = \sin 5x dx.$$

Інтегруємо

$$\int y^2 dy = \int \sin 5x dx$$

і отримаємо загальний інтеграл

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{1}{5}\cos 5x + C_1.$$

Звідси загальний розв’язок:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{3}{5}\cos 5x + C},$$

де $C = 3C_1$;

2) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Оскільки це однорідне рівняння ($y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$), то, зробивши заміну (додаток Б), маємо:

$$t = \frac{y}{x},\ y = tx,\ \ y' = t'x + t\,,$$
$$t'x + t = e^{-t} + t\,.$$

Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними (додаток А):

$$t'x = e^{-t};$$
$$\frac{dt}{dx}\cdot x = e^{-t};$$
$$e^{t}dt = \frac{dx}{x};$$
$$\int e^{t}dt = \int\frac{dx}{x};$$
$$e^{t} = \ln|x| + \ln|C|;$$
$$e^{t} = \ln|Cx|.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|Cx|;$$

3) $y' + y\cdot\cos x = \sin x\cdot\cos x$. Розв’язуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку методом Бернуллі (додаток В):

$$y = u(x)\cdot v(x),\ \ y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x);$$
$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot\cos x = \sin x\cdot\cos x\,;$$
$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\left(v'(x) + v(x)\cdot\cos x\right) = \sin x\cdot\cos x\,.$$

Щоб знайти функцію $v(x)$, потрібно розв’язати однорідне диференціальне рівняння

$$\textbf{I)}\ v'(x)+v(x)\cdot\cos x=0.$$

Для відшукання функції $u(x)$ потрібно розв'язати диференціальне рівняння

$$\textbf{II)}\ u'(x)\cdot v(x)=\sin x\cdot\cos x.$$

Знайдемо будь-який частинний розв'язок першого диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v'(x)+v(x)\cdot\cos x=0;$$
$$\frac{dv(x)}{dx}+v(x)\cdot\cos x=0;$$
$$\frac{dv(x)}{dx}=-v(x)\cdot\cos x;$$
$$\frac{dv(x)}{v(x)}=-\cos x dx;$$
$$\int\frac{dv(x)}{v(x)}=-\int\cos x dx;$$
$$\ln|v(x)|=-\sin x;$$
$$v(x)=e^{-\sin x}.$$

Підставляючи знайдений частинний розв'язок $v(x)$ у друге диференціальне рівняння та розв'язавши отримане рівняння, одержимо функцію $u(x)$:

$$u'(x)\cdot e^{-\sin x}=\sin x\cdot\cos x;$$
$$u'(x)=e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x;$$
$$\frac{du(x)}{dx}=e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x;$$
$$du(x)=e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x dx;$$
$$\int du(x)=\int e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x dx.$$

Знайдемо інтеграл, що міститься в правій частині:

$$\int e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\cos x dx=\left|\begin{array}{c}\textit{Заміна}\\ t=\sin x\\ dt=(\sin x)'dx=\cos x dx\end{array}\right|=\int t\cdot e^{t}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}\textit{Метод інтегрування частинами} & \\ u=t & dv=e^{t}dt\\ du=dt & v=\int e^{t}dt=e^{t}\end{array}\right|=t\cdot e^{t}-\int e^{t}dt=t\cdot e^{t}-e^{t}+C.$$

Отже,

$$u(x)=\sin x\cdot e^{\sin x}-e^{\sin x}+C\,.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y=u(x)\cdot v(x)=\left(\sin x\cdot e^{\sin x}-e^{\sin x}+C\right)\cdot e^{-\sin x},$$
$$y=\sin x-1+C\cdot e^{-\sin x}.$$

Відповідь: 1) загальний розв’язок $y=\sqrt[3]{-\frac{3}{5}\cos 5x+C}$;

2) загальний інтеграл $e^{\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$;

3) загальний розв’язок $y=\sin x-1+C\cdot e^{-\sin x}$.

Завдання 1.2. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння другого порядку методом пониження порядку:

1) $xy''=2y'+5$;

2) $(y')^{2}\cdot\ln y'=y\cdot y''$.

Розв’язання. 1) необхідно понизити порядок диференціального рівняння

$$xy'' = 2y' + 5.$$

За допомогою підстановки (додаток Г)

$$y' = z(x), \quad y'' = z'(x)$$

отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x \cdot z' = 2z + 5;$$
$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 2z + 5;$$
$$x \cdot dz = (2z + 5)dx.$$

Поділивши обидві частини на $x \cdot (2z + 5) \neq 0$, отримаємо:

$$\frac{dz}{2z + 5} = \frac{dx}{x};$$
$$\int \frac{dz}{2z + 5} = \int \frac{dx}{x}.$$

Таким чином, після інтегрування отримаємо:

$$\frac{1}{2}\ln|2z + 5| = \ln|x| + \ln|C_1|;$$
$$\frac{1}{2}\ln|2z + 5| = \ln|C_1 x|;$$
$$\ln|2z + 5| = \ln\left(C_2 x^2\right), C_2 = C_1{}^2;$$
$$2z + 5 = C_2 x^2;$$
$$z = -\frac{5}{2} + C_3 x^2, C_3 = \frac{C_2}{2}.$$

Враховуючи заміну ($y' = z(x)$), отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = -\frac{5}{2} + C_3 x^2;$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2} + C_3 x^2;$$

$$dy=\left(-\frac{5}{2}+C_3x^2\right)dx;$$

$$\int dy=\int\left(-\frac{5}{2}+C_3x^2\right)dx.$$

і загальний розв’язок вихідного диференціального рівняння:

$$y=-\frac{5}{2}x+C_4x^3+C_5,\, C_4=\frac{C_3}{3}.$$

Окрім того, потрібно окремо розглянути випадок, коли $x\cdot(2z+5)=0$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $x=0$ не є розв’язком диференціального рівняння $xy''=2y'+5$. Розглянемо інший множник:

$$2z+5=0;$$

$$z=-\frac{5}{2};$$

$$y'=-\frac{5}{2};$$

$$dy=-\frac{5}{2}dx;$$

$$\int dy=-\frac{5}{2}\int dx;$$

$$y=-\frac{5}{2}x+C.$$

Але окремий розв’язок $y=-\frac{5}{2}x+C$ потрапляє у загальний розв’язок диференціального рівняння $y=-\frac{5}{2}x+C_4x^3+C_5$ у випадку, коли $C_4=0$;

2) $(y')^2\cdot\ln y'=y\cdot y''$. Оскільки рівняння не містить аргументу x в явному вигляді, то за додатком Г позначимо

$$y'=p(y),$$

тоді

$$y'' = p'(y) \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Підставивши ці вирази у вихідне диференціальне рівняння, отримаємо:

$$p^2 \cdot \ln p = y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p;$$

$$p^2 \cdot \ln p \cdot dy = y \cdot p \cdot dp.$$

Поділивши обидві частини на $y \cdot p^2 \cdot \ln p \neq 0$, $p > 0$ (оскільки $y' > 0$; $y \neq 0$, оскільки $y' > 0$), одержимо:

$$\frac{dp}{p \cdot \ln p} = \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dp}{p \cdot \ln p} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|\ln p| = \ln|C_1 y|;$$

$$\ln p = C_1 y;$$

$$p = e^{C_1 y}.$$

Повертаючись до вихідних змінних, враховуючи, що $p(y) = y'$:

$$y' = e^{C_1 y};$$

$$dy = e^{C_1 y} dx;$$

$$e^{-C_1 y} dy = dx;$$

$$\int e^{-C_1 y} dy = \int dx;$$

$-\frac{1}{C_1} \cdot e^{-C_1 y} = x + C_2$ (якщо $C_1 = 0$, то $y' = e^0 = 1 \Rightarrow y = x + C$):

$$e^{-C_1 y} = -C_1 x + C_3, \; C_3 = C_2 \cdot C_1;$$

$$-C_1 y = \ln|-C_1 x + C_3|;$$

$$y = -\frac{1}{C_1} \ln|-C_1 x + C_3|.$$

Відповідь: 1) $y=-\frac{5}{2}x+C_4x^3+C_5$;

2) $y=-\frac{1}{C_1}\ln\left|-C_1x+C_3\right|$, $y=x+C$.

Завдання 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Завдання 2.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-6y'+8y=0.$$

Розв'язання. Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$k^2-6k+8=0,$$

розв'язком якого є різні дійсні числа

$$\left[\begin{array}{l} k_1=2, \\ k_2=4. \end{array}\right.$$

За додатком Д запишемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}.$$

Відповідь: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$.

Завдання 2.2. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y''-4y'+29y=0, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=10. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння, яке відповідає заданому однорідному диференціальному рівнянню

$$k^2 - 4k + 29 = 0,$$

розв'язком якого є два комплексно-спряжених корені:

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = 2 + 5i, \\ k_2 = 2 - 5i. \end{array}\right.$$

За додатком Д запишемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right).$$

Розв'яжемо тепер задачу Коші.

Знайдемо y' від загального розв'язку однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + e^{2x}\left(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x\right).$$

Знайдемо $y(0)$ і $y'(0)$:

$$\begin{aligned} &y(0) = e^{2\cdot 0}\left(C_1 \cos(5\cdot 0) + C_2 \sin(5\cdot 0)\right) = C_1, \\ &y'(0) = 2e^{2\cdot 0}\left(C_1 \cos(5\cdot 0) + C_2 \sin(5\cdot 0)\right) + e^{2\cdot 0}\left(-5C_1 \sin(5\cdot 0) + 5C_2 \cos(5\cdot 0)\right) = \\ &\qquad = 2C_1 + 5C_2 \end{aligned}$$

і, використовуючи початкову умову $\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 10 \end{cases}$, складаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ 2C_1 + 5C_2 = 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 в загальний розв'язок та запишемо розв'язок задачі Коші:

$$y = e^{2x}\left(2\cos 5x + \frac{6}{5}\sin 5x\right).$$

Відповідь: $y = e^{2x}\left(2\cos 5x + \dfrac{6}{5}\sin 5x\right)$.

Завдання 2.3. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 3y' - 10y = f_i(x)$, $i = \overline{1,4}$, де

1) $f_1(x) = 3e^{5x}$;
2) $f_2(x) = 2x^3 + x - 1$;
3) $f_3(x) = 5\sin 2x$;
4) $f_4(x) = e^{2x} \cdot (x + 3)$.

Знайти загальний розв'язок.

Розв'язання. Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (додаток Е) має вигляд:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{зн},$$

де $y_{зо}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 + 3k - 10 = 0$$

має корені

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = -5, \\ k_2 = 2. \end{array}\right.$$

Отже, за додатком Д

$$y_{зо} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}.$$

1) частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 3e^{5x}$$

залежить від вигляду правої частини (додаток Ж):

$$f_1(x) = 3e^{5x},$$

де $\alpha = 5,\ k_1 = -5,\ k_2 = 2$.

Тоді за додатком Ж

$$y_{чн} = A \cdot e^{5x}.$$

Для визначення невідомого коефіцієнта A підставимо $y_{чн}$ у початкове рівняння.

Для цього спочатку знайдемо першу і другу похідні від частинного розв'язку:

$$y'_{чн} = 5A \cdot e^{5x};$$
$$y''_{чн} = 25A \cdot e^{5x}.$$

Після підстановки $y_{чн},\ y'_{чн},\ y''_{чн}$ у задане рівняння отримаємо

$$25Ae^{5x} + 15Ae^{5x} - 10Ae^{5x} = 3e^{5x}.$$

Поділимо рівняння на e^{5x}:

$$30A = 3;$$
$$A = 0{,}1.$$

Отже, загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y_{зн} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + 0{,}1e^{5x};$$

2) частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 2x^3 + x - 1$$

залежить від правої частини $f_2(x) = 2x^3 + x - 1$.

У цьому прикладі $\alpha = 0$, $k_1 = -5$, $k_2 = 2$. Тоді за додатком Ж отримаємо

$$y_{чн} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C, D підставимо $y_{чн}$ у початкове рівняння. Знаходимо $y'_{чн}$ і $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$
$$y''_{чн} = 6Ax + 2B.$$

Підставляючи $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у вихідне рівняння, одержимо

$$6Ax + 2B + 3\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) - 10\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = 2x^3 + x - 1.$$

Після спрощення маємо:

$$-10Ax^3 + (9A - 10B)x^2 + (6A + 6B - 10C)x + 2B + 3C - 10D = 2x^3 + x - 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & -10A = 2\ , \\ x^2 & 9A - 10B = 0\ , \\ x & 6A + 6B - 10C = 1\ , \\ x^0 & 2B + 3C - 10D = -1\ . \end{array}$$

Розв’язуємо систему рівнянь відносно невідомих A, B, C, D:

$$\begin{cases} -10A = 2, \\ 9A - 10B = 0, \\ 6A + 6B - 10C = 1, \\ 2B + 3C - 10D = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5}, \\ B = -\dfrac{9}{50}, \\ C = -\dfrac{41}{125}, \\ D = -\dfrac{43}{1250}. \end{cases}$$

Тоді

$$y_{чн} = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{50}x^2 - \frac{41}{125}x - \frac{43}{1250}\ .$$

Запишемо загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді (додаток Е):

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{зн};$$

$$y_{зн} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{50}x^2 - \frac{41}{125}x - \frac{43}{1250};$$

3) частинний розв’язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 5\sin 2x$$

згідно з додатком Ж будемо шукати у вигляді ($\alpha = 0$, $\beta = 2$, $k_1 = -5$, $k_2 = 2$):

$$y_{чн} = A\sin 2x + B\cos 2x;$$

$$y'_{чн} = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x;$$
$$y''_{чн} = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x.$$

Підставимо $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у задане диференціальне рівняння і отримаємо:

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 10(A\sin 2x + B\cos 2x) = 5\sin 2x$$

Порівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в обох частинах останнього рівняння.

$$\begin{array}{l|l} \sin 2x & -4A - 6B - 10A = 5, \\ \cos 2x & -4B + 6A - 10B = 0. \end{array}$$

Складаємо і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -14A - 6B = 5, \\ 6A - 14B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{35}{116}, \\ B = -\dfrac{15}{116}. \end{cases}$$

Отже,

$$y_{чн} = -\frac{35}{116}\sin 2x - \frac{15}{116}\cos 2x,$$

а загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд (додаток Е):

$$y_{зн} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - \frac{35}{116}\sin 2x - \frac{15}{116}\cos 2x;$$

4) частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = e^{2x} \cdot (5x + 3)$$

за додатком Ж знайдемо у вигляді ($\alpha=2$, $k_1=-5$, $k_2=2$, $\alpha=k_2$, $r=1$):

$$y_{чн}=x\cdot e^{2x}\cdot(Ax+B);$$

$$y_{чн}=e^{2x}\cdot\left(Ax^2+Bx\right);$$

$$y'_{чн}=2e^{2x}\cdot\left(Ax^2+Bx\right)+e^{2x}\cdot(2Ax+B)=e^{2x}\cdot\left(2Ax^2+2Bx+2Ax+B\right);$$

$$y''_{чн}=2e^{2x}\cdot\left(2Ax^2+2Bx+2Ax+B\right)+e^{2x}\cdot(4Ax+2B+2A)=$$

$$=e^{2x}\cdot\left(4Ax^2+4Bx+8Ax+4B+2A\right).$$

Після підстановки цих виразів у початкове рівняння отримаємо:

$$e^{2x}\cdot\left(4Ax^2+4Bx+8Ax+4B+2A\right)+3e^{2x}\cdot\left(2Ax^2+2Bx+2Ax+B\right)-$$

$$-10e^{2x}\cdot\left(Ax^2+Bx\right)=e^{2x}\cdot(5x+3).$$

Після арифметичних перетворень:

$$14Ax+7B+2A=5x+3;$$

$$\begin{array}{c|l} x & 14A=5\Rightarrow A=\dfrac{5}{14}, \\ x^0 & 7B+2A=3\Rightarrow B=\dfrac{1}{7}(3-2A),\ B=\dfrac{16}{49}. \end{array}$$

Отже,

$$y_{чн}=e^{2x}\cdot\left(\frac{5}{14}x^2+\frac{16}{49}x\right).$$

Тоді загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння (додаток Е) запишемо у вигляді:

$$y_{зн}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+e^{2x}\cdot\left(\frac{5}{14}x^2+\frac{16}{49}x\right),$$

$$y_{зн}=C_1e^{-5x}+e^{2x}\cdot\left(\frac{5}{14}x^2+\frac{16}{49}x+C_2\right).$$

Відповідь: 1) $y_{зн}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+0{,}1e^{5x}$;

2) $y_{зн}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{5}x^3-\frac{9}{50}x^2-\frac{41}{125}x-\frac{43}{1250}$;

3) $y_{зн}=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}-\frac{35}{116}\sin 2x-\frac{15}{116}\cos 2x$;

4) $y_{зн}=C_1e^{-5x}+e^{2x}\cdot\left(\frac{5}{14}x^2+\frac{16}{49}x+C_2\right)$.

Завдання 3. Системи диференціальних рівнянь

Знайти загальний розв’язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+5y. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x'=5x+4y, \\ y'=4x+5y, \end{cases}$$

За додатком И:

$$y''=4x'+5y',$$
$$y''=4(5x+4y)+5y',$$
$$y''=20x+16y+5y'.$$

З другого рівняння системи виразимо

$$x=\frac{1}{4}(y'-5y)$$

і підставимо в останнє рівняння:

$$y''=20\cdot\frac{1}{4}(y'-5y)+16y+5y',$$
$$y''-10y'+9y=0.$$

Розв’язуючи характеристичне рівняння

$$k^2 - 10k + 9 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = 9, \\ k_2 = 1, \end{array}\right.$$

за додатком Д отримаємо:

$$y(t) = C_1 e^{9t} + C_2 e^t.$$

Відповідно

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(9C_1 e^{9t} + C_2 e^t - 5C_1 e^{9t} - 5C_2 e^t\right),$$

$$x(t) = C_1 e^{9t} - C_2 e^t.$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{9t} - C_2 e^t, \\ y(t) = C_1 e^{9t} + C_2 e^t. \end{cases}$

Завдання 4. Числові ряди

Завдання 4.1. Дослідити на збіжність знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Розв’язання. а) загальний член ряду $a_n = \frac{n}{3n+1}$. За додатком К обчислюємо границю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Необхідна умова не виконується, отже, ряд є розбіжним;

б) загальний член ряду $a_n = \dfrac{n}{5n^2+4}$. Візьмемо для порівняння ряд із загальним членом $b_n = \dfrac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – розбіжний, як ряд Діріхле (додаток М). Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n^2+4}\cdot\frac{n}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5},$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{5n^2+4}$ також розбігається за ознакою порівняння в граничній формі (додаток Л);

в) $a_n = \dfrac{3^n}{(n+2)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+3)!}$. За ознакою Даламбера (додаток Л)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+3)!}\cdot\frac{(n+2)!}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+3} = 0 < 1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+2)!}$ збігається;

г) загальний член ряду $a_n = \left(\dfrac{n+3}{2n-1}\right)^n$. За додатком Л знаходимо:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Оскільки $l < 1$, то за радикальною ознакою Коші ряд збігається;

д) маємо:

$$f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}.$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\dfrac{dx}{x}\\ x_н=2\to t_н=\ln 2\\ x_в=b\to t_в=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln b}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, за додатком Л ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ збігається.

Відповідь: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$ розбігається;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+4}$ розбігається;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$ збігається;

г) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$ збігається;

д) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ збігається.

Завдання 4.2. Дослідити на збіжність знакозмінний числовий ряд:

$$\text{а) }\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n};\ \text{б) }\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Розв’язання. а) розглянемо ряд з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}.$$

Цей ряд є знакододатним. Застосуємо до нього радикальну ознаку Коші (додаток Л):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ є збіжним. А це означає, що досліджуваний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ є абсолютно збіжним.

Зауваження. Застосовувати ознаку Лейбніца немає потреби;

б) розглянемо ряд з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Цей ряд є знакододатним із загальним членом $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Візьмемо для порівняння ряд із загальним членом $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

який є розбіжним (ряд Діріхле, додаток М).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{4n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ є також розбіжним.

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ на умовну збіжність за допомогою ознаки Лейбніца (додаток Н).

Кожний наступний член ряду по модулю менший за попередній

$$\frac{1}{\sqrt{4n+1}} > \frac{1}{\sqrt{4n+5}} > \frac{1}{\sqrt{4n+9}} > \ldots;$$

і границя загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}} = 0.$$

За ознакою Лейбніца ряд збіжний. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ є умовно збіжним.

Відповідь: а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ збігається абсолютно;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ збігається умовно.

Завдання 5. Степеневі ряди

Задано степеневий ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[3]{n}}\cdot x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{n!}(x+5)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n}\right)^n(x+2)^n$.

Знайти :

1) інтервал збіжності;

2) область збіжності.

Розв'язання. а) за додатком П послідовно знаходимо:

1 Радіус збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R = \frac{1}{2}$.

2 В нашому випадку $x_0 = 0$, тому інтервал збіжності $(x_0 - R; x_0 + R) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Для всіх $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ряд збігається абсолютно, для $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ряд розбігається.

3 Для того щоб знайти область збіжності степеневого ряду, досліджуємо поведінку ряду в граничних точках:

$$x_1 = x_0 - R = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},\ x_2 = x_0 + R = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

При $x = -\frac{1}{2}$ степеневий ряд перетворюється у числовий знакопереміжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ збігається умовно за теоремою Лейбніца (додаток Н), оскільки його члени монотонно спадають:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > \ldots$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Тому $x=-\frac{1}{2}$ треба додати до області збіжності.

При $x=\frac{1}{2}$, степеневий ряд у цій точці перетворюється у числовий знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}},$$

який є рядом Діріхле (додаток М) з параметром $\alpha=\frac{1}{3}<1$. Отже, цей числовий ряд розбігається.

Таким чином, точка $x=\frac{1}{2}$ не належить області збіжності. Область збіжності $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

б) знайдемо радіус збіжності $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{n!}(x+5)^n$ (додаток П):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{n!\cdot(n+2)^3}=\infty.$$

Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R=\infty$, тобто даний ряд збігається на всій числовій осі ($x\in(-\infty;+\infty)$);

в) знайдемо радіус збіжності $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n}\right)^n(x+2)^n$ (додаток П):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{3n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}=3.$$

Таким чином, радіус збіжності степеневого ряду $R=3$.

Інтервал збіжності $\left(x_0-R;x_0+R\right)$. У нашому випадку $x_0=-2$.

Тому отримаємо інтервал $\left(-2-3;-2+3\right)=\left(-5;1\right)$.

Для $x\in\left(-5;1\right)$ ряд збігається абсолютно, для $x\in\left(-\infty;-5\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ ряд розбігається.

Досліджуємо поведінку ряду в граничних точках: $x=-5$; $x=1$.

При $x_1=-5$ отримаємо знакопереміжний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n}\right)^n\left(-5+2\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{n+5}{n}\right)^n.$$

При $x_2=1$ отримаємо знакододатний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n}\right)^n\left(1+2\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n.$$

Обидва ряди розбігаються, оскільки не виконано необхідну умову збіжності числового ряду (додаток К):

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=e^5\neq 0.$$

Таким чином, точки $x_1=-5$, і $x_2=1$ не належать області збіжності.

Відповідь: а) 1) $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; 2) $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

б) 1) $x\in(-\infty;+\infty)$; 2) $x\in(-\infty;+\infty)$;

в) 1) $x\in\left(-5;1\right)$; 2) $x\in\left(-5;1\right)$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Яке рівняння називається диференціальним?

2 Як визначається порядок диференціального рівняння?

3 Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння?

4 Що означає розв'язати диференціальне рівняння?

5 Загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння.

6 Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку.

7 Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?

8 Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з відокремлюваними змінними?

9 Яке диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним?

10 Яке диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням у повних диференціалах?

11 Яке диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним?

12 Яке диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним?

13 Які диференціальні рівняння допускають зниження порядку? Наведіть приклади.

14 Яке диференціальне рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

15 Що називають характеристичним рівнянням?

16 Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку:

а) дійсних різних коренів;

б) дійсних кратних коренів;

в) комплексно-спряжених коренів?

17 Який вигляд має спеціальна права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

18 Розв’язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.

19 Визначення системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

20 Які системи називаються лінійними однорідними системами диференціальних рівнянь?

21 Які системи називаються лінійними неоднорідними системами диференціальних рівнянь?

22 Розв’язання системи двох диференціальних рівнянь першого порядку методом виключення змінних.

23 Визначення знакододатного числового ряду.

24 Що називається загальним членом ряду?

25 Що називається частковою сумою ряду?

26 Який ряд називається збіжним?

27 Сформулюйте необхідну умову збіжності знакододатного числового ряду.

28 Сформулюйте ознаки порівняння.

29 Сформулюйте ознаку Даламбера.

30 Сформулюйте радикальну ознаку Коші.

31 Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.

32 Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле).

33 Визначення знакопереміжного ряду.

34 Сформулюйте теорему Лейбніца.

35 Який ряд називається умовно збіжним?

36 Який ряд називається абсолютно збіжним?

37 Визначення функціонального ряду.

38 Визначення степеневого ряду.

39 Сформулюйте теорему Абеля.

40 Що називається радіусом збіжності степеневого ряду?

41 Формули для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.

42 Що називається областю збіжності степеневого ряду?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Розв'язати рівняння $x^2 y' - 2xy = 3y$.

A	B	C	D
$\frac{y}{x^2} = C - \frac{3}{x}$	$y = Cx^2 + e^{-\frac{3}{x}}$	$y = Cx^2 e^{-\frac{3}{x}}$	Інша відповідь

2 Розв'язати рівняння $x^2 y' = y(x+y)$.

A	B	C	D
$y = Cx$	$y + \ln Cx = -x$	$y \ln Cx = -x, y = 0$	Інша відповідь

3 Розв'язати рівняння $xy' + y(x-1) = 3x^2 e^{-x}$.

A	B	C	D
$xy = Ce^{-x}$	$xy = \left(x^3 + C\right)e^{-x}$	$y = \left(x^3 + C\right)e^{-x}$	Інша відповідь

4 Знайти загальний розв'язок рівняння $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

A	B	C	D
$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$	$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x}$	Інша відповідь

5 Знайти загальний вигляд частинного розв'язку диференціального рівняння $y'' + y = 4xe^x$.

A	B	C	D
$y = (Ax+B)e^{x}$	$y = (Ax+B)xe^{-x}$	$y = Axe^{x}$	Інша відповідь

6 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+8}{(2n+1)(3n-7)}$.

A	B	C	D	E
Ряд розбігається за ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою Даламбера	Ряд розбігається, оскільки не виконано необхідну умову збіжності числового ряду	Ряд збігається за ознакою порівняння	Інша відповідь

7 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$.

A	B	C	D	E
Ряд розбігається за радикальною ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою Даламбера	Ряд розбігається, оскільки не виконано необхідну умову збіжності числового ряду	Ряд збігається за ознакою порівняння	Інша відповідь

8 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{\sqrt{3}\cdot n}{n+4}\right)^n$.

A	B	C	D	E
Ряд розбігається за радикальною ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою Даламбера	Ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою порівняння	Інша відповідь

9 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln^2(n+1)}}$.

A	B	C	D	E
Ряд розбігається за радикальною ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою Даламбера	Ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші	Ряд збігається за ознакою порівняння	Інша відповідь

10 Знайти радіус збіжності для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}(x+6)^n$.

A	B	C	D	E
∞	0	3	$\frac{1}{3}$	Інша відповідь

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А. С. К., 2001. 648 с.

2 Вища математика: Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. Київ : А. С. К., 2005. 480 с.

3 Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Онтимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / за заг. ред. П. П. Овчинникова; пер. з рос. Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Кострицi, Л. П. Оніщенко. Вид. 3-тє, випр. Київ : Техніка, 2004. 792 с.

4 Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. Київ : Книги України ЛТД, 2010. 470 с.

5 Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посіб. для ВНЗ. Вид. 2-ге, випр. та доп. Львів : Магнолія 2006, 2015. 342 с.

6 Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. Москва : Астрель; АСТ, 2001. 656 с.

7 Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська; за ред. М І. Шинкарика. Тернопіль : Видавництво Карп’юка, 2003. 480 с.

ДОДАТОК А

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	
Вигляд диференціального рівняння	Спосіб розв’язання
$y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$ (**I**)	1 Записати рівняння у вигляді: $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$. 2 Помножити обидві частини рівняння на dx: $dy = f_1(x)\cdot f_2(y)dx$. 3 Відокремити змінні. Для цього поділити обидві частини рівняння на $f_2(y)\neq 0$: $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. 4 Проінтегрувати обидві частини отриманого рівняння і отримати загальний інтеграл ДР: $\int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$. (1) 5 Якщо $y = y_0$ – розв’язок рівняння $f_2(y) = 0$ і при жодному значенні C не може бути утворений із загального інтеграла (1), але є розв’язком рівняння (**I**), то цей розв’язок буде особливим і його слід записати додатково до загального інтеграла
$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0$ (**II**)	1 Відокремити змінні. Для цього поділити обидві частини рівняння на $\varphi_1(y)f_2(x)\neq 0$: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$. 2 Подальше розв’язання аналогічне до п. 4, п. 5 лише з тією різницею, що серед особливих розв’язків можуть бути розв’язки рівнянь $\varphi_1(y) = 0$, і $f_2(x) = 0$

ДОДАТОК Б

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку	
Вигляд диференціального рівняння	Спосіб розв'язання
$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **(I)**	Заміна $t = \dfrac{y}{x}$, $y = tx$ $\Rightarrow$ $y' = t'x + t$
$f(x,y)dx + \varphi(x,y)dy = 0$, **(II)** де $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ – однорідні функції одного і того самого порядку, тобто $f(kx,ky) = k^n f(x;y)$ і $\varphi(kx,ky) = k^n \varphi(x;y)$	Заміна $t = \dfrac{y}{x}$, $y = tx$ $\Rightarrow$ $dy = xdt + tdx$

ДОДАТОК В

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	
Вигляд рівняння	Спосіб розв'язання (метод Бернуллі)
$y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції	Заміна $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $y' = u'v + uv'$; $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$, **I)** $v' + p(x)v = 0$ та **II)** $u'v = q(x)$

ДОДАТОК Г

Рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку	
Вигляд рівняння	Спосіб розв'язання
$F(x, y', y'') = 0$, рівняння, які не містять невідомої функції $y(x)$	Вводимо змінну $y' = z(x)$, $y'' = (y')' = z'$ і отримаємо ДР першого порядку для функції $z(x)$: $F(x, z, z') = 0$
$F(y, y', y'') = 0$, рівняння, які не містять в явному вигляді незалежної змінної x	Вводимо змінну $y' = p(y(x))$, $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$ і отримаємо ДР першого порядку для функції $p(y)$: $F(y, p, p') = 0$

ДОДАТОК Д

<table>
<tr><td colspan="3">Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами
$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$</td></tr>
<tr><td>Характеристичне рівняння</td><td>Розв’язок характеристичного рівняння</td><td>Вигляд загального розв’язку</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$k^2 + p \cdot k + q = 0$</td><td>Корені k_1 і k_2 – дійсні і різні
$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$,
$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$</td><td>$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td>Корінь дійсний, кратний
$k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$</td><td>$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$</td></tr>
<tr><td>Корені комплексно-спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$,
$\begin{pmatrix} \alpha = -\frac{p}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2} \end{pmatrix}$</td><td>$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$</td></tr>
</table>

ДОДАТОК Е

<table>
<tr><td>Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду
$y'' + py' + qy = f(x)$,
де p, q – дійсні числа</td></tr>
<tr><td>Загальний розв’язок має вигляд
$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x),$$
де $y_{зо}(x)$ – загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння,
$y_{чн}(x)$ – частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння, який залежить від функції $f(x)$ та коренів характеристичного рівняння k_1, k_2</td></tr>
</table>

ДОДАТОК Ж

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду			
Вигляд правої частини $f(x)$	Вигляд $y_{чн}(x)$	r – кратність кореня характеристичного рівняння $k^2+pk+q=0$	
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)$ – поліном степеня n	$y_{чн}=x^r\,Q_n(x)e^{\alpha x}$, $Q_n(x)$ – поліном того самого степеня, що і $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами	$r=0$, якщо $\alpha\neq k_1,\ \alpha\neq k_2$	$y_{чн}=Q_n(x)e^{\alpha x}$
		$r=1$, якщо $\alpha=k_1,\quad \alpha\neq k_2$ або $\alpha\neq k_1,\ \alpha=k_2$	$y_{чн}=x\cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$
		$r=2$, якщо $\alpha=k_1=k_2$	$y_{чн}=x^2\,Q_n(x)e^{\alpha x}$
$f(x)=P_n(x)$, $P_n(x)$ – поліном степеня n	$y_{чн}=x^rQ_n(x)$, $Q_n(x)$ – поліном того самого степеня, що і $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами	$r=0$, $(\alpha=0)$ якщо $0\neq k_1,\ 0\neq k_2$	$y_{чн}=Q_n(x)$
		$r=1$, якщо $0=k_1,\quad \alpha\neq k_2$ або $\alpha\neq k_1,\ 0=k_2$	$y_{чн}=x\cdot Q_n(x)$
		$r=2$, якщо $\alpha=k_1=k_2$	$y_{чн}=x^2\cdot Q_n(x)$

Продовження додатка Ж

Вигляд правої частини $f(x)$	Вигляд $y_{чн}(x)$	r – кратність кореня характеристичного рівняння $k^2+pk+q=0$	
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+$ $+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, $P_n(x)$ – поліном степеня n, $Q_m(x)$ – поліном степеня m	$y_{чн}=x^r e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+N_l(x)\sin\beta x\right)$, $M_l(x)$, $N_l(x)$ – поліноми степеня l, але з невідомими коефіцієнтами, $l=\max\{n,m\}$	$r=0$, якщо $k_1\ne\alpha+i\beta$, $k_2\ne\alpha-i\beta$	$y_{чн}=e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+N_l(x)\sin\beta x\right)$
		$r=1$, якщо $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$	$y_{чн}=xe^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+N_l(x)\sin\beta x\right)$
$f(x)=$ $=e^{\alpha x}\left(A\sin\beta x+B\cos\beta x\right)$, A, B – сталі	$y_{чн}=$ $=x^r e^{\alpha x}\left(C\cos\beta x+D\sin\beta x\right)$, C і D – невідомі сталі	$r=0$, якщо $k_1\ne\alpha+i\beta$, $k_2\ne\alpha-i\beta$	$y_{чн}=e^{\alpha x}\left(C\cos\beta x+D\sin\beta x\right)$
		$r=1$, якщо $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$	$y_{чн}=$ $=xe^{\alpha x}\left(C\cos\beta x+D\sin\beta x\right)$
$f(x)=A\sin\beta x+B\cos\beta x$, A, B – числа	$y_{чн}=x^r\left(C\sin\beta x+D\cos\beta x\right)$, C і D – невідомі сталі	$r=0$, $\alpha=0$, якщо $k_1\ne i\beta$, $k_2\ne -i\beta$	$y_{чн}=\left(C\sin\beta x+D\cos\beta x\right)$
		$r=1$, якщо $k_1=i\beta$, $k_2=-i\beta$	$y_{чн}=x\left(C\sin\beta x+D\cos\beta x\right)$

ДОДАТОК И

Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	
Вигляд	Спосіб розв'язання
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$ де x=$x(t)$ і y=$y(t)$ – функції аргументу t, $a_{i\kappa}$ – сталі коефіцієнти	1 Записати рівняння у вигляді: $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y\ ; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y\ . \end{cases} \qquad (1)$ 2 Продиференціювати обидві частини будь-якого з рівнянь системи (1), наприклад, другого: $y'' = a_{21} \cdot x' + a_{22} \cdot y'$. 3 Підставити в це рівняння вираз для x' з першого рівняння системи (1): $y'' = a_{21} \cdot (a_{11}x + a_{12}y) + a_{22} \cdot y'$ або, розкриваючи дужки, $y'' = a_{21} \cdot a_{11}x + a_{21} \cdot a_{12} \cdot y + a_{22} \cdot y'. \qquad (2)$ 4 З другого рівняння системи (1) виразити x: $x = \dfrac{1}{a_{21}} \cdot (y' - a_{22} \cdot y) \qquad (3)$ 5 Підставити значення x у рівняння (2): $y'' = a_{11}(y' - a_{22} \cdot y) + a_{21} \cdot a_{12} \cdot y + a_{22}y'$, $y'' - (a_{11} + a_{22})y' + (a_{11}a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})y = 0. \qquad (4)$ 6 Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (4) (дивись додаток Д). 7 Загальний розв'язок $y = y(t)$ цього рівняння підставити у формулу (3) і визначити $x = x(t)$

ДОДАТОК К

Необхідна умова збіжності числового ряду з додатними членами
Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
Наслідок (*Достатня ознака розбіжності ряду*) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ або не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ розбігається

ДОДАТОК Л

Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами
Ознака Даламбера Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ існує границя $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, тоді: при $l < 1$ – ряд збігається, при $l > 1$ – ряд розбігається, при $l = 1$ – треба застосувати іншу ознаку
Радикальна ознака Коші Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ існує границя $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, тоді: при $l < 1$ – ряд збігається, при $l > 1$ – ряд розбігається, при $l = 1$ – треба застосувати іншу ознаку
Інтегральна ознака Коші Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно
Ознака порівняння Якщо, починаючи з деякого номера N, виконується $a_n \geq b_n$, $n > N$, то: 1) зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$; 2) із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$
Ознака порівняння в граничній формі Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, (0 < c < +\infty)$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно

ДОДАТОК М

«Еталонні ряди»
Узагальнений гармонічний ряд (*ряд Діріхле*) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} збігається\ при\ p>1, \\ розбігається\ при\ p\le 1 \end{cases}$$

ДОДАТОК Н

Знакопереміжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$, $u_n>0$
Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|(-1)^{n+1}\cdot u_n\right\|$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$ збігається *абсолютно*. У протилежному випадку для знакопереміжних рядів застосовують ознаку Лейбніца
Ознака Лейбніца Якщо члени ряду, взяті за абсолютною величиною, монотонно спадають: $u_1>u_2>u_3>...$ і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$ є збіжним. У випадку виконання умов цієї ознаки маємо *умовну* збіжність, а при їх порушенні – *розбіжність* ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$

ДОДАТОК П

Область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$

Область збіжності степеневого ряду знаходимо за схемою:

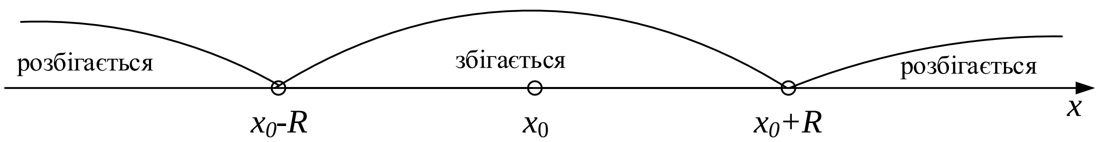
1 Знайти радіус збіжності – число R:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ або } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

2 Записати інтервал збіжності: $\left(x_0 - R;\ x_0 + R\right)$.

3 Дослідити поведінку ряду у граничних точках інтервалу збіжності:

$$x_1 = x_0 - R;\ x_2 = x_0 + R.$$



ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина VI

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Буранова Н. В.

Підписано до друку 02.02.21 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,5. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.