

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Механіка і проектування машин»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділи

«КІНЕМАТИКА» та «ДИНАМІКА»

Харків – 2013

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин”

20 листопада 2011 р., протокол № 6.

Укладачі:

доценти Н.А. Аксьонова,
О.В. Оробінський,
старш. викл. Л.М. Дунай

Рецензент

проф. О.В. Братченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділи «КІНЕМАТИКА» та «ДИНАМІКА»

Відповідальний за випуск Оробінський О.В..

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 14.04.11 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
Розділи «КІНЕМАТИКА» та «ДИНАМІКА»

Харків 2013 р.

Методичну розробку розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 2011 р., протокол № .

Рецензент
проф. Братченко О. В.

ЗМІСТ

	Вступ	4
1	Методичні вказівки	5
2	Розділ «Кінематика»	6
2.1	Завдання К-3	6
2.2	Завдання К-4	15
3	Розділ «Динаміка»	24
3.1	Завдання Д-1	24
3.2	Завдання Д-2	35
3.3	Завдання Д-3	42
3.4	Завдання Д-4	54
	Список літератури	65

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на 1-3 курсах дисципліни «Теоретична механіка». При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка». У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять та виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР).

Вище сказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок з розділів «Кінематика» та «Динаміка», які дають комплексне уявлення про обсяг і структуру курсу, про специфіку виконання й оформлення індивідуальних самостійних завдань з розділів, ознайомлюють з прикладами, наводять належні рекомендації та надають варіанти для виконання РГР, а також пропонують рекомендовану літературу.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного та механічного факультетів денної скороченої форми навчання всіх спеціальностей.

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Програмою дисципліни «Теоретична механіка» передбачено виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) з розділів «Кінематика» та «Динаміка».

Зміст РГР, а саме номер варіанта, уточнюється викладачем під час аудиторних занять.

Кожне завдання супроводжується рисунками й таблицею (номер схеми збігається з номером умови завдання в таблиці).

РГР виконуються на аркушах формату А4. Типові звіти до РГР оформляються у відповідності до встановлених вимог, а саме: на титульному аркуші обов'язково вказуються назви кафедри й дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання завдань повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання завдань повинні бути виконані акуратно, із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго, згідно з вихідними даними свого варіанта завдання, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають усім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»

2.1 Завдання К-3

Плоский рух твердого тіла

Визначення швидкостей та прискорень точок твердого тіла при плоскому русі

Знайти для даного положення механізму швидкості та прискорення точок В та С, а також кутову швидкість та кутове прискорення ланки, якій ці точки належать.

Схеми механізмів надані на рисунку 1, дані для розрахунку - в таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	Розміри, см				$\omega_{OA},$ с ⁻¹	$\omega_B,$ с ⁻¹	$\epsilon_{OA},$ с ⁻²	$v_A,$ см/с	$a_A,$ см/с ²
	OA	r	AB	AC					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-

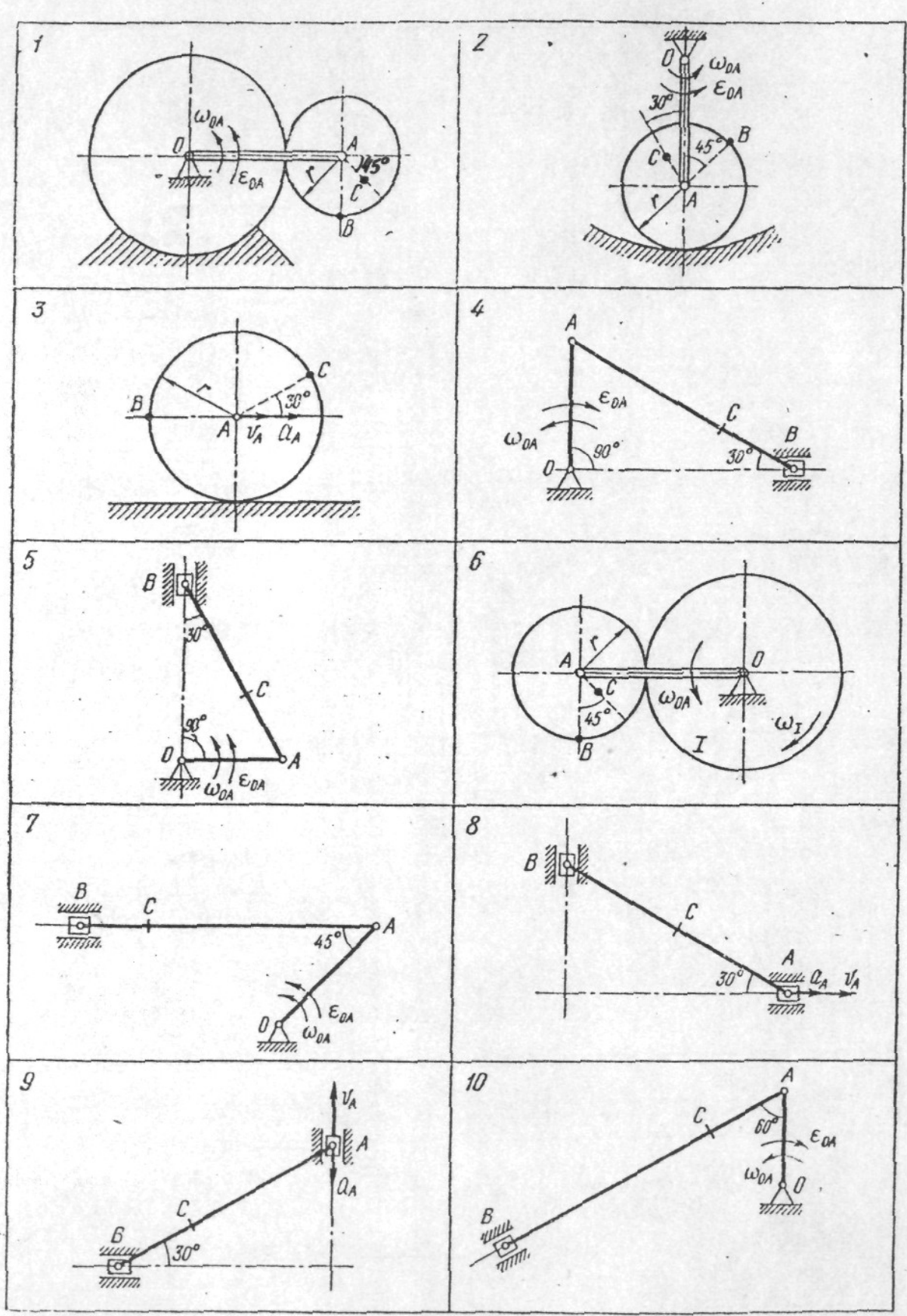


Рисунок 1, аркуш 1

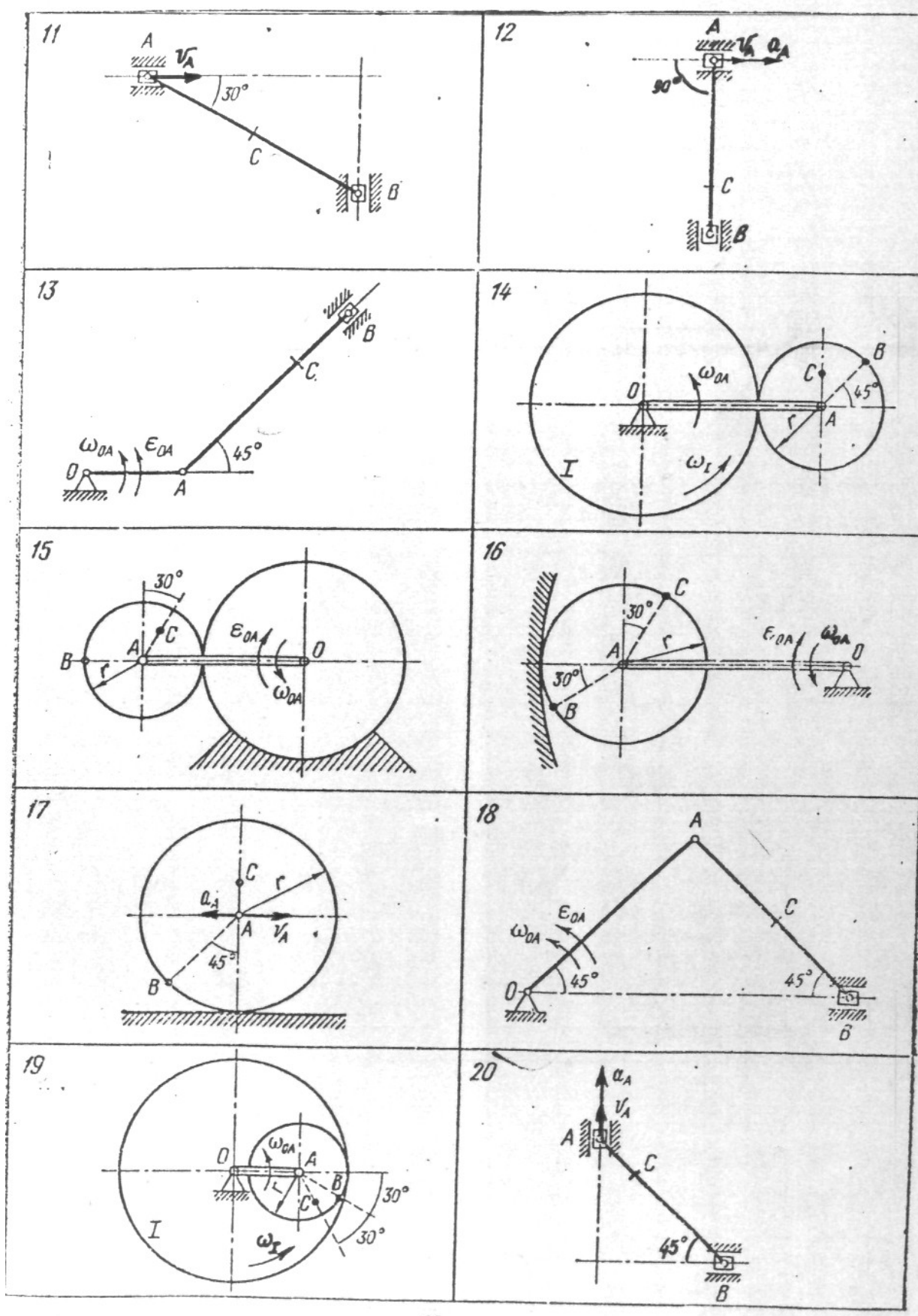


Рисунок 1, аркуш 2

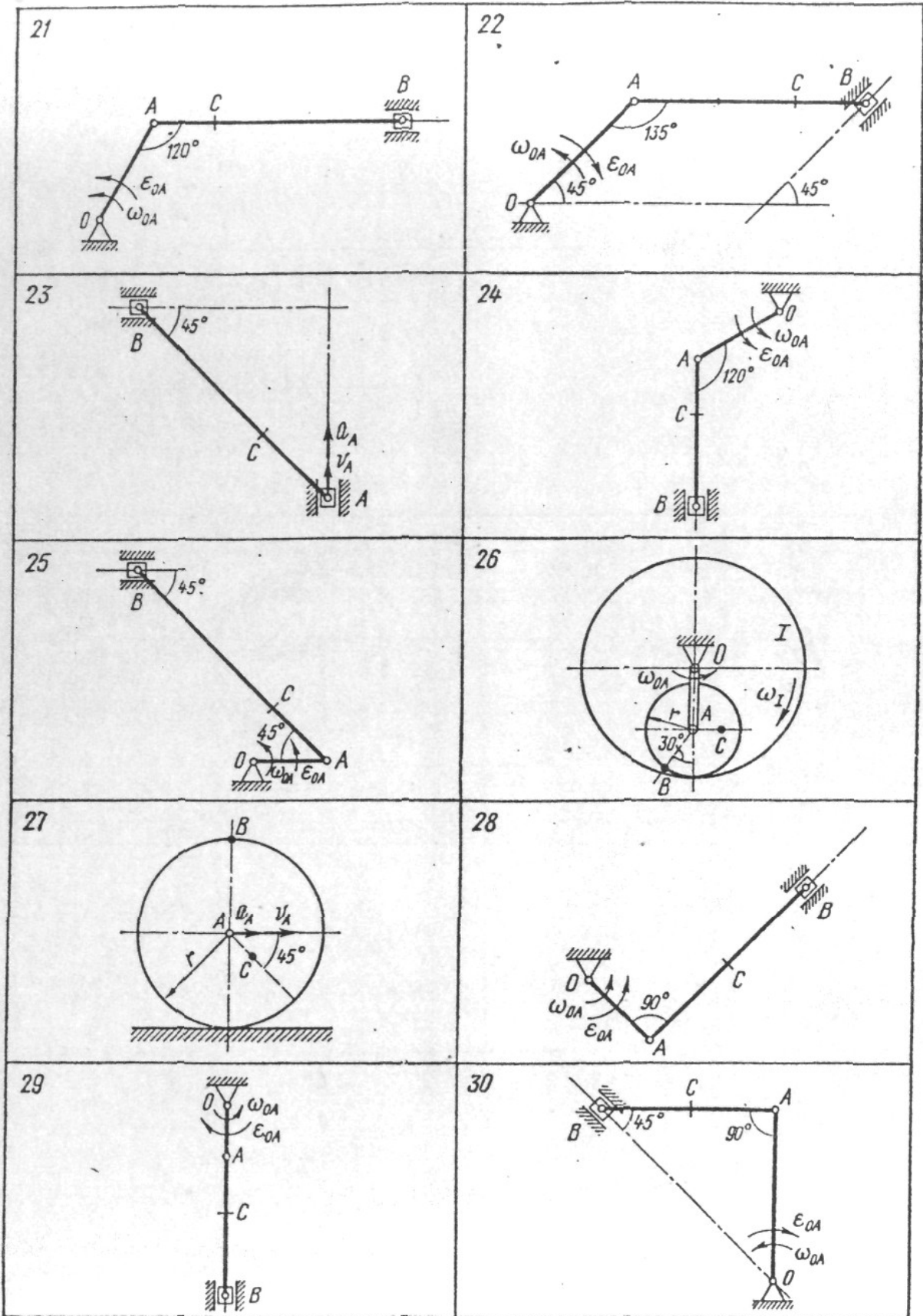


Рисунок 1, аркуш 3

Рекомендації та приклад виконання завдання К-3

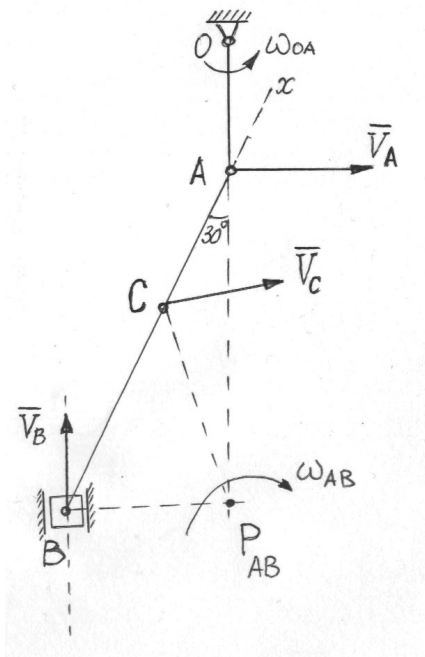


Рисунок 2

Дано:

$OA = 10 \text{ см}$, $AB = 60 \text{ см}$, $AC = 20 \text{ см}$,
 $\omega_{OA} = 1,5 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ с}^{-2}$.

Схема механізму подана на рисунку 2.

Визначити: $\overline{V_B}$, $\overline{V_C}$, $\overline{a_B}$, $\overline{a_C}$,
 ω_{AB} , ε_{AB} .

Розв'язання

1 *Визначення швидкостей точок* (рисунок 2).

Швидкість точки А перпендикулярна кривошипу ОА:

$$\overline{V_A} \perp OA, \quad V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ см/с}.$$

Швидкість повзуна В спрямована вертикально. Миттєвий центр швидкостей P_{AB} шатуна АВ знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок А і В до їх швидкостей.

Кутова швидкість ланки АВ

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{15}{60 \cdot \cos 30^0} = 0,29 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкості точок В і С:

$$\begin{aligned} \overline{V_B} \perp BP_{AB}, & \quad \overline{V_C} \perp CP_{AB}, \\ V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}, & \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}. \end{aligned}$$

$$BP_{AB} = AB \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30 \text{ см},$$

$$CP_{AB} = \sqrt{BC^2 + BP_{AB}^2 - 2BC \cdot BP_{AB} \cdot \cos 60^\circ} = 36,1 \text{ см}.$$

Відповідно

$$V_B = 0,29 \cdot 30 = 8,7 \text{ см/с}, \quad V_C = 0,29 \cdot 36,1 = 10,5 \text{ см/с}.$$

Вектор швидкості \vec{V}_C спрямований у бік обертання ланки АВ.

2 Визначення прискорень точок (рисунок 3).

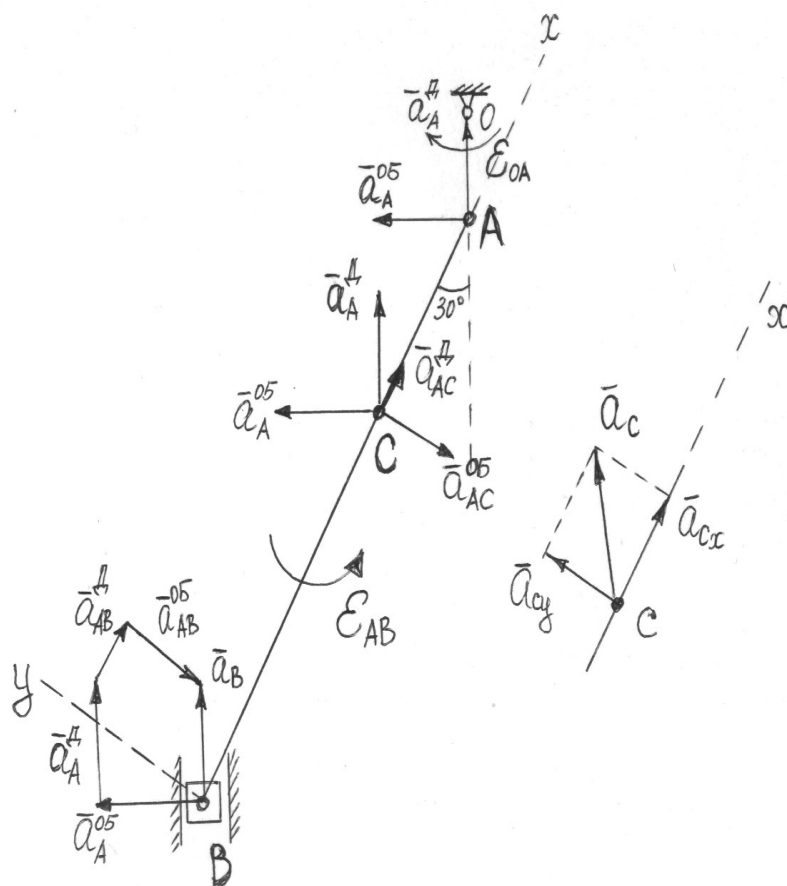


Рисунок 3

Прискорення точки А складається з обертального \vec{a}_A^{OA} та доцентрового \vec{a}_A^{AB} прискорень:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^{OB}} + \overline{a_A^D},$$

$$a_A^{OB} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_A^D = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1,5^2 \cdot 10 = 22,5 \text{ см/с}^{-2}.$$

Вектор $\overline{a_A^D}$ спрямований від А до О, а $\overline{a_A^{OB}} \perp \overline{a_A^D}$ відповідно до напрямку кутового прискорення ε_{OA} .

За теоремою про прискорення точок плоскої фігури

$$\overline{a_B} = \overline{a_A^{OB}} + \overline{a_A^D} + \overline{a_{AB}^{OB}} + \overline{a_{AB}^D}.$$

Доцентрове прискорення точки В в обертальному русі шатуна АВ навколо полюса А: $a_{AB}^D = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5 \text{ см/с}^{-2}$, вектор $\overline{a_{AB}^D}$ спрямований від В до А, а $\overline{a_{AB}^{OB}} \perp \overline{a_{AB}^D}$.

Векторний багатокутник прискорень (рисунок 3) дає можливість скласти рівняння проєкцій векторного рівняння на осі х та у:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = -a_A^{OB} \cdot \cos 60^\circ + a_A^D \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^D,$$

$$a_B \cdot \cos 60^\circ = a_A^{OB} \cdot \cos 30^\circ + a_A^D \cdot \cos 60^\circ - a_{AB}^{OB}.$$

Тоді

$$a_B = \frac{-a_A^{OB} \cdot \cos 60^\circ + a_A^D \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^D}{\cos 30^\circ} = \frac{-20 \cdot 0,5 + 22,5 \cdot 0,866 + 5}{0,866} = 16,7 \text{ см/с}^{-2}.$$

Для визначення прискорення точки С необхідне кутове прискорення шатуна АВ:

$$a_{AB}^{OB} = -a_B \cdot \cos 60^\circ + a_A^{OB} \cdot \cos 30^\circ + a_A^D \cdot \cos 60^\circ = -16,7 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 + 22,5 \cdot 0,5 = 20,2 \text{ см/с}^{-2}.$$

$$a_{AB}^{OB} = \varepsilon_{AB} \cdot AB, \quad \text{звідси} \quad \varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{OB}}{AB} = \frac{20.2}{60} = 0.34 \text{ с}^{-2}.$$

Напрямок $\overline{a_{AB}^{OB}}$ відносно полюса А визначає напрямок кутового прискорення ε_{AB} . УВ даному випадку цей напрямок протилежний ω_{AB} .

Прискорення точки С:
$$\overline{a_C} = \overline{a_A^{OB}} + \overline{a_A^D} + \overline{a_{AC}^{OB}} + \overline{a_{AC}^D}.$$

Обертальне та доцентрове прискорення точки С в обертальному русі шатуна АВ навколо полюса А:

$$a_{AC}^{OB} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0.34 \cdot 20 = 6.8 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_{AC}^D = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \frac{1}{12} \cdot 20 = 1.7 \text{ см/с}^{-2}.$$

Вектор $\overline{a_{AC}^{OB}}$ спрямований відповідно до кутового прискорення ε_{AB} та між собою $\overline{a_{AC}^{OB}} \perp \overline{a_{AC}^D}$.

Прискорення точки С знаходиться методом проєкцій:

$$a_{CX} = a_{AC}^D + a_A^D \cdot \cos 30^\circ - a_A^{OB} \cdot \cos 60^\circ = 1.7 + 22.5 \cdot 0.866 - 20 \cdot 0.5 = 11.2 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_{CY} = a_A^D \cdot \cos 60^\circ + a_A^{OB} \cdot \cos 30^\circ - a_{AC}^{OB} = 22.5 \cdot 0.5 + 20 \cdot 0.866 - 6.8 = 21.8 \text{ см/с}^{-2}.$$

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{11.2^2 + 21.8^2} = 24.5 \text{ см/с}^{-2}.$$

2.2 Завдання К-4

Складний рух

Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки у випадку обертального переносного руху

За заданими рівняннями відносного руху точки М та переносного руху тіла D визначити щодо моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки М.

Схеми механізмів надані на рисунку 4, дані для розрахунку - в таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	Рівняння руху тіла D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = f_2(t)$, см	t_1 , с	R, см	a, см	α , град
1	2	3	4	5	6	7
1	$2t^3 - t^2$	$18 \sin(\pi t/4)$	2/3	-	25	-
2	$0,4t^2 + t$	$20 \sin \pi t$	5/3	20	-	-
3	$2t + 0,5t^2$	$6t^3$	2	-	30	-
4	$0,6t^2$	$10 \sin(\pi t/6)$	1	-	-	60
5	$3t - 0,5t^3$	$40 \pi \cos(\pi t/6)$	2	30	-	-
6	$0,75t + 1,5t^2$	$150 \pi^2$	1/6	25	-	-
7	$0,5t^2$	$20 \cos 2\pi t$	3/8	-	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0,5t^2)$	2	-	-	30
9	$4t + 1,6t^2$	$10 + 10 \sin 2\pi t$	1/8	-	-	-
10	$1,2t - t^2$	$20\pi \cos(\pi t/4)$	4/3	20	20	-

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5	6	7
11	$2t^2 - 0,5t$	$25 \sin(\pi t/3)$	4	-	25	-
12	$5t - 4t^2$	$15 \pi^3/8$	2	30	30	-
13	$8t^2 - 3t$	$120 \pi^2$	1/3	40	-	-
14	$4t - 2t^2$	$3 + 14 \sin \pi t$	2/3	-	-	30
15	$0,2t^3 + t$	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	2	-	60	45

16	$t - 0,5 t^2$	$20 \sin \pi t$	1/3	-	20	-
17	$0,5 t^2$	$8 t^3 + 2t$	1	-	$4\sqrt{5}$	-
18	$8t - t^2$	$10 t + t^3$	2	-	-	60
19	$t + 3 t^2$	$6t + 4 t^3$	2	40	-	-
20	$6 t + t^2$	$30 \pi \cos (\pi t/6)$	3	60	-	-
21	$2 t - 4 t^2$	$25 \pi (t + t^2)$	1/2	25	-	-
22	$4 t - 0,2 t^2$	$10 \pi \sin (\pi t/4)$	2/3	30	-	-
23	$2t - 0,25 t^2$	$3 t^2 + 4t$	2	-	-	30
24	$2 t - 0,3 t^2$	$75 \pi (0,1 t + 0,3 t^3)$	1	30	-	-
25	$10 t - 0,1 t^2$	$15 \sin (\pi t/3)$	5	-	-	-
26	$-2\pi t^2$	$8 \cos (\pi t/2)$	3/2	-	-	45
27	$t - 0,5 t^3$	$10 \sqrt{2} \pi \cos 2\pi t$	1/8	30	-	-
28	$2 t^3 - 5t$	$2,5 \pi t^2$	2	40	-	-
29	$0,6 t^2$	$6 \sqrt{6} \sin (\pi t/16)$	4	36	-	30
30	$2 t^2 - 3 t$	$5\sqrt{3} t^3/3$	2	20	-	30

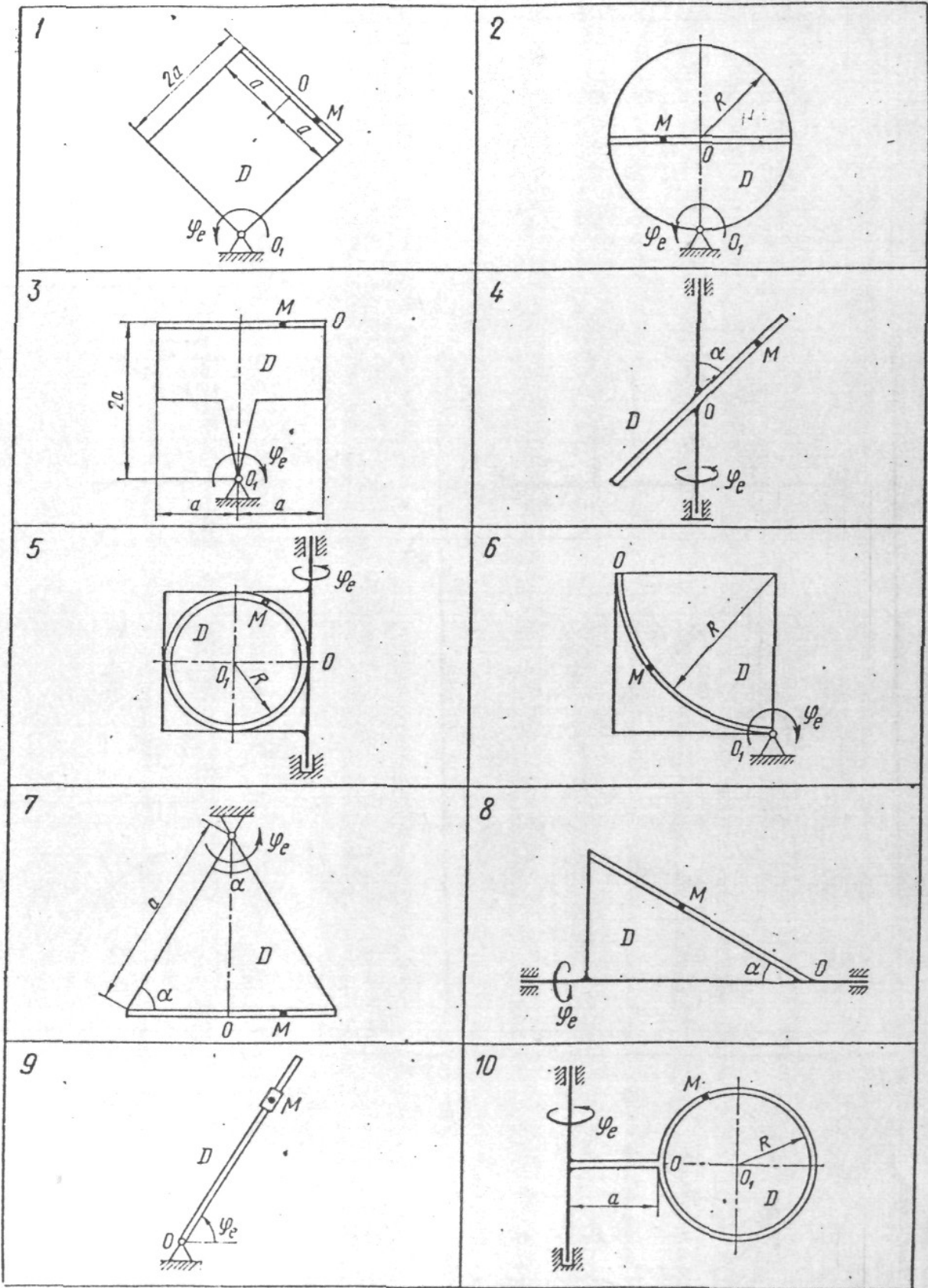


Рисунок 4, аркуш 1

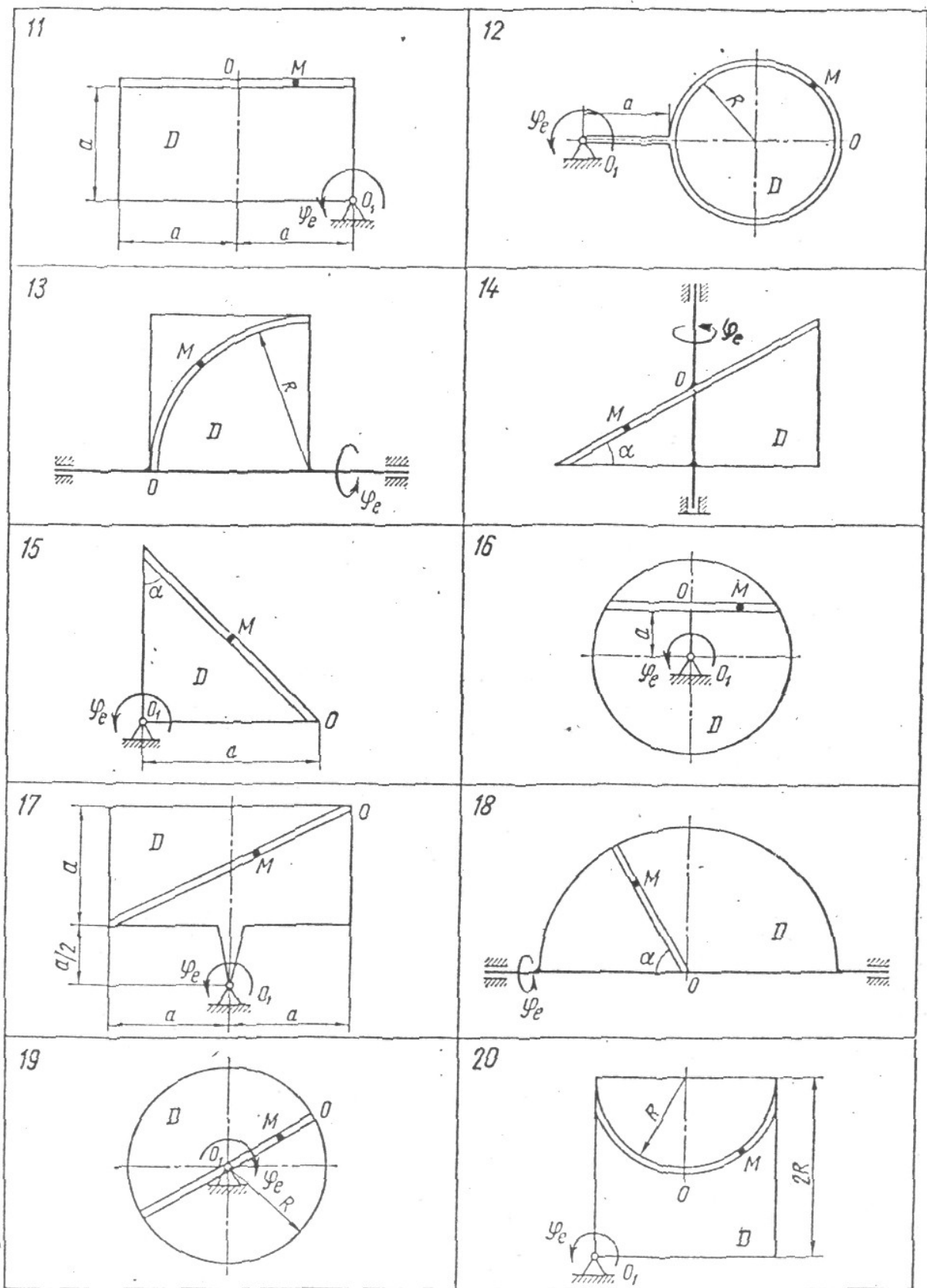


Рисунок 4, аркуш 2

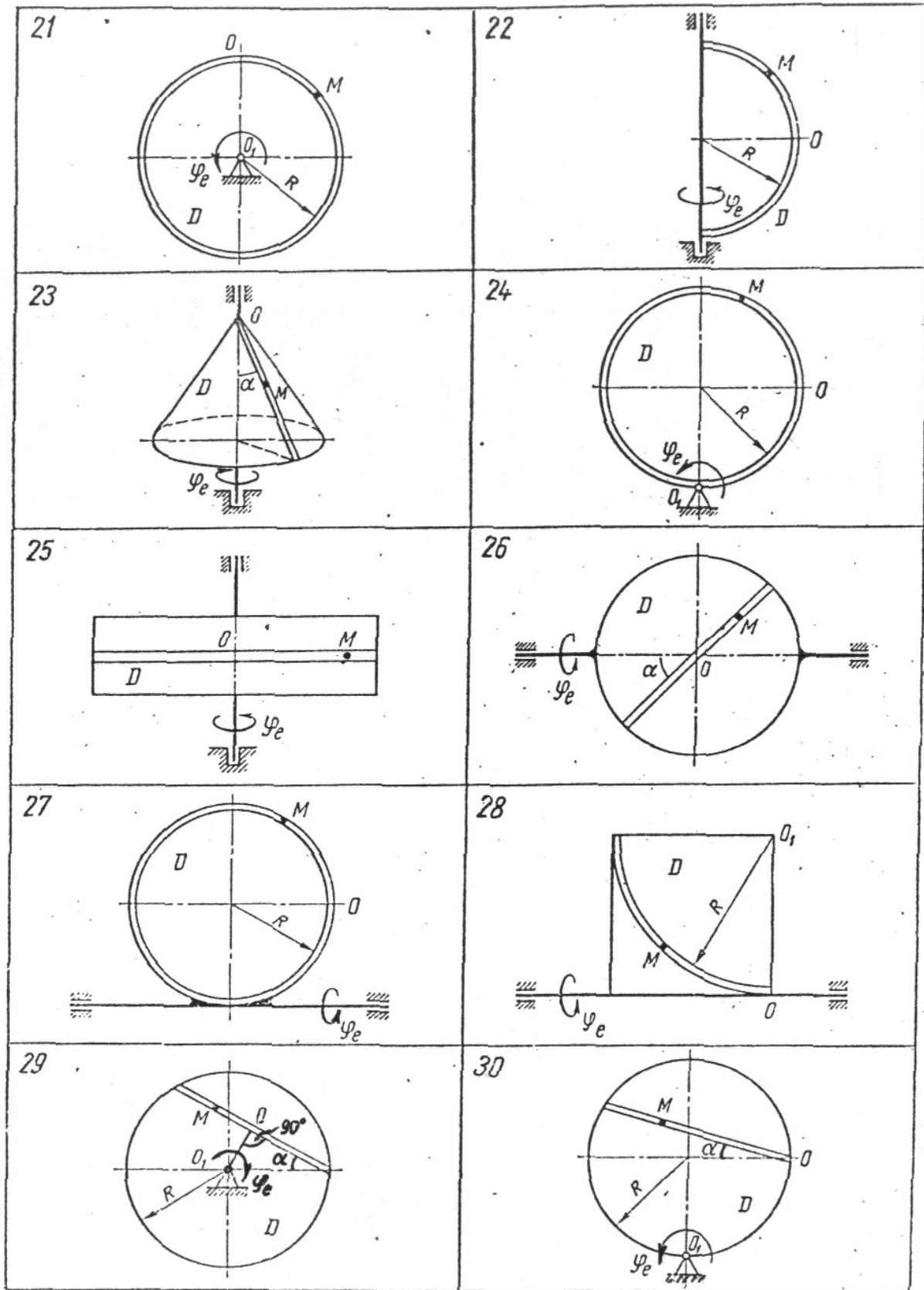


Рисунок 4, аркуш 3

Рекомендації та приклад виконання завдання К-4

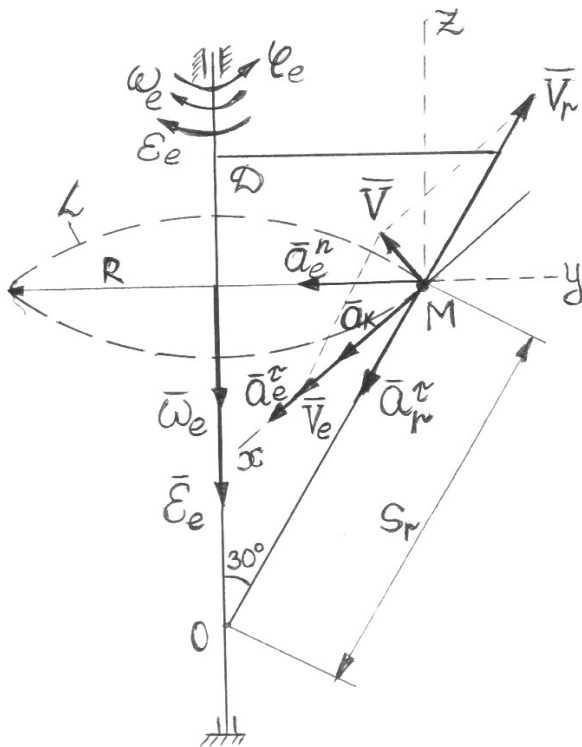


Рисунок 5

Дано:

$$\varphi_e = 0.9t^2 - 9t^3 \text{ рад,}$$

$$S_r = OM = 16 - 8 \cos(3\pi t) \text{ см,}$$

$$t_1 = \frac{2}{9} \text{ с.}$$

Схема механізму подана на рисунку 5.

Визначити: V_a , a_a .

Розв'язання

Вважається, що в момент часу t_1 площина рисунка збігається з площиною трикутника D . Положення точки M на тілі D визначається відстанню $S_r = OM$.

При $t_1 = \frac{2}{9} \text{ с}$

$$S_r = OM = 16 - 8 \cos\left(3\pi \cdot \frac{2}{9}\right) = 16 + 4 = 20 \text{ см.}$$

Абсолютна швидкість точки M визначається геометричною сумою відносної та переносної швидкостей:

$$\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e}.$$

Модуль відносної швидкості при t_1 :

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 24\pi \sin 3\pi t = 24\pi \sqrt{3/2} = 65,2 \text{ см/с.}$$

Доданий знак величини V_r вказує, що вектор $\overline{V_r}$ спрямований в бік зростання S_r .

R - радіус кола L , траєкторії точки тіла, з якою в даний момент часу співпадає точка M : $R = s_r \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ см}$. Модуль кутової швидкості тіла при t_1 :

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1,8t - 27t^2 = 1,8 \cdot 2/9 - 27 \cdot 4/81 = -0,93 \text{ с}^{-1}.$$

Від'ємний знак величини ω_e свідчить, що обертання трикутника відбувається навколо осі OZ в бік, протилежний напрямку кута φ_e . При цьому вектор $\overline{\omega_e}$ спрямований уздовж осі OZ вниз (рисунок 5). Тоді модуль переносної швидкості $V_e = R \cdot \omega_e = 10 \cdot 0,93 = 9,3 \text{ см/с}$. Вектор $\overline{V_e}$ спрямований по дотичній до кола L в бік обертання тіла.

Вектори $\overline{V_r}$ і $\overline{V_e}$ перпендикулярні, тому модуль абсолютної швидкості точки M :

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{65,2^2 + 9,3^2} = 65,9 \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки M дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень:

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_K},$$

тобто

$$\overline{a_a} = \overline{a_r^\tau} + \overline{a_r^n} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_e^n} + \overline{a_K}.$$

Модуль відносного дотичного прискорення при t_1 :

$$a_r^\tau = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi^2 \cos 3\pi t = -36\pi^2 = -355 \text{ см/с}^{-2}.$$

Від'ємний знак a_r^τ свідчить про напрямок вектора $\overline{a_r^\tau}$ в бік від'ємних значень S_r . Відносне нормальне прискорення $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 0$, тому що траєкторія відносного руху - пряма ($\rho = \infty$).

Модуль переносного дотичного прискорення a_e^τ залежить від модуля кутового прискорення тіла, яке при t_1 визначається

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1,8 - 54t = 1,8 - 54 \cdot 2/9 = -10,2 \text{ с}^{-2},$$

а однакові знаки ε_e та ω_e вказують, що обертання трикутника прискорене і напрямки векторів $\overline{\varepsilon_e}$ та $\overline{\omega_e}$ збігаються. Тоді

$$a_e^\tau = R \cdot \varepsilon_e = 10 \cdot 10,2 = 102 \text{ см/с}^{-2}.$$

Вектор $\overline{a_e^\tau}$ спрямований уздовж $\overline{V_e}$.

Модуль переносного нормального прискорення

$$a_e^n = R \cdot \omega_e^2 = 10 \cdot 0,93^2 = 8,7 \approx 9 \text{ см/с}^{-2}.$$

Вектор $\overline{a_e^n}$ спрямований до центра кола L .

Коріолісове прискорення $\overline{a_K} = 2\overline{\omega_e} \times \overline{V_r}$. Модуль $a_K = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\overline{\omega_e}, \overline{V_r})$. Вважаючи, що $\sin(\overline{\omega_e}, \overline{V_r}) = \sin 150^\circ = 0,5$, $a_K = 2 \cdot 0,93 \cdot 65,2 \cdot 0,5 = 61 \text{ см/с}^{-2}$.

В відповідності до правил векторного добутку вектор $\overline{a_K}$ спрямовується перпендикулярно площині трикутника в той же бік, що і вектори $\overline{V_e}$ і $\overline{a_e^\tau}$ (рисунок 5).

Модуль абсолютного прискорення точки М визначається способом проєкцій:

$$a_{aX} = a_e^\tau + a_K = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_{aY} = -a_e^n - a_r^\tau \cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0,5 = -186 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_{az} = -a_r^z \cos 30^\circ = -355 \cdot \sqrt{3}/2 = -308 \text{ см/с}^{-2},$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 395 \text{ см/с}^{-2}.$$

3 РОЗДІЛ «ДИНАМІКА»

3.1 Завдання Д-1

Динаміка матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією постійних сил

Варіант 1-5 (рисунок 6).

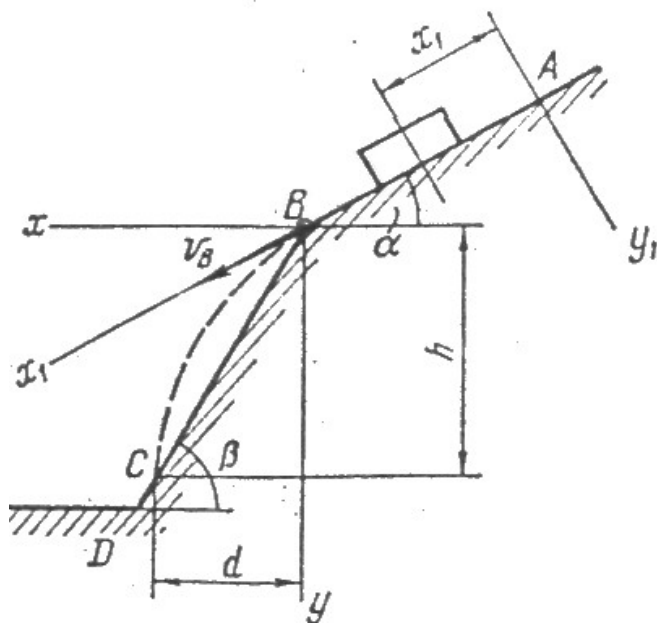


Рисунок 6

Тіло рухається із точки А по ділянці АВ (довжиною l) похилої площини, яка складає кут α з горизонтом, протягом часу τ , с. Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f .

У точці В тіло залишає площину зі швидкістю v_B та влучає зі швидкістю v_C у точку С площини ВD, похилої під кутом β до горизонту. Тіло знаходилося в повітрі T , с.

При розв'язанні завдання тіло прийняти за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 0$, $f = 0.2$, $l = 10$ м, $\beta = 60^\circ$.

Визначити τ і h

Варіант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $v_A = 2$ м/с, $f = 0.2$, $h = 4$ м, $\beta = 45^\circ$.

Визначити l та рівняння траєкторії точки на відріжку ВС.

Варіант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 2,5$ м/с, $f \neq 0$, $l = 8$ м, $d = 10$ м, $\beta = 60^\circ$.

Визначити τ і v_B .

Варіант 4. Дано: $v_A = 0$, $f = 0$, $\tau = 2$ с, $l = 9,8$ м, $\beta = 60^\circ$.

Визначити α і T .

Варіант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 0$, $l = 9,8$ м, $\tau = 3$ с, $\beta = 45^\circ$.

Визначити f і v_C .

Варіант 6 - 10 (рисунок 7).

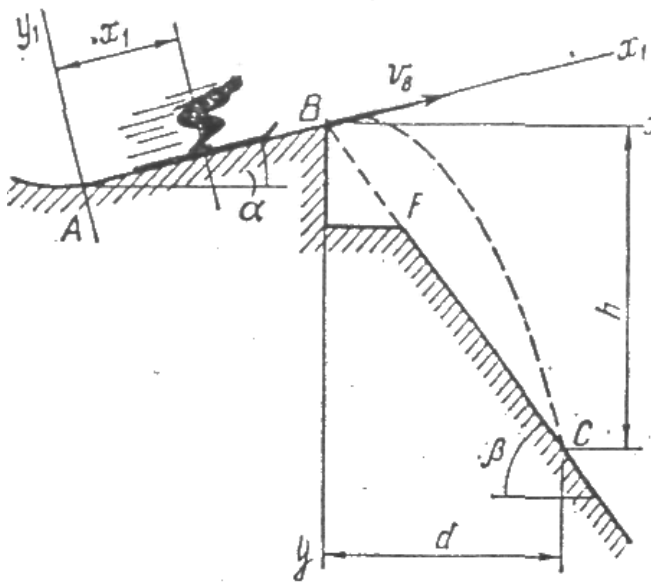


Рисунок 7

Лижник наближається до точки А ділянки трампліна АВ, похилого до горизонту під кутом α , зі швидкістю v_A . Довжина трампліна АВ дорівнює l . Коефіцієнт тертя ковзання лиж на відрізку АВ дорівнює f . Лижник від А до В рухається τ , с; у точці В зі швидкістю v_B він залишає трамплін. Через Т, с, лижник приземляється зі швидкістю v_C в точці С гори, яка складає кут β з горизонтом.

При розв'язанні завдання прийняти лижника за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$, $f = 0,1$, $\tau = 0,2$ с, $\beta = 30^\circ$. $h = 40$ м.

Визначити l і v_C .

Варіант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $f = 0,1$, $l = 5$ м, $v_A = 16$ м/с, $\beta = 45^\circ$.

Визначити T і v_B .

Варіант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с, $f = 0$, $\tau = 0,3$ с, $v_B = 20$ м/с, $\beta = 60^\circ$.

Визначити α і d .

Варіант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 0,3$ с, $f = 0,1$, $h = 30\sqrt{2}$ м, $\beta = 45^\circ$.

Визначити v_A і v_B .

Варіант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $f = 0$, $v_A = 12$ м/с, $d = 50$ м, $\beta = 60^\circ$.

Визначити τ та рівняння траєкторії точки на відрізку ВС.

Варіант 11 – 15 (рисунок 8).

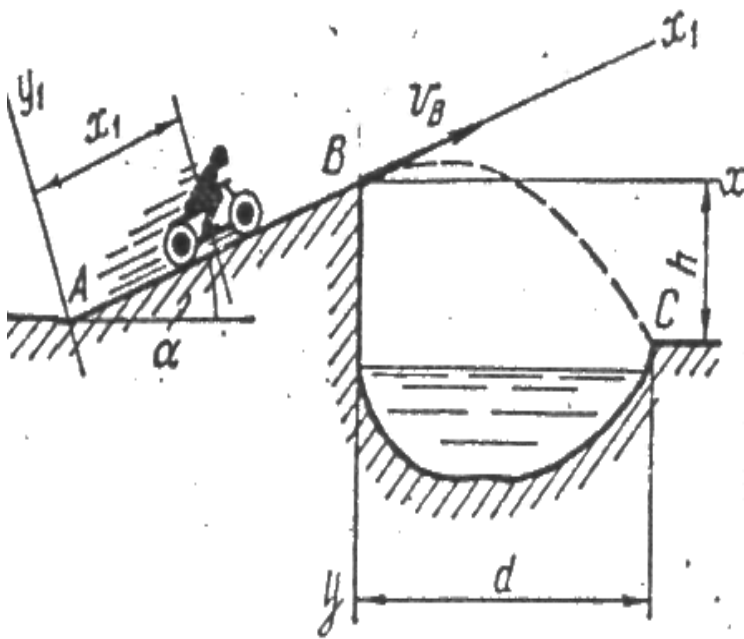


Рисунок 8

Маючи в точці А швидкість v_A , мотоцикл піднімається τ с за відрізком АВ довжиною l , який складає з горизонтом кут α . При постійній на всьому відрізку АВ рушійній силі P мотоцикл в точці В отримує швидкість v_B та перелітає через рів шириною d , знаходячись у повітрі T , с, і приземляючись в точці С зі швидкістю

Маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює m .

При розв'язанні завдання вважати мотоцикл з мотоциклістом за матеріальну точку і не враховувати сили опору руху.

Варіант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $P \neq 0$, $l = 40$ м, $v_A = 0$, $v_B = 4,5$ м/с,
 $d = 3$ м.

Визначити τ і h .

Варіант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $P = 0$, $l = 40$ м, $v_B = 4,5$ м/с,
 $h = 1,5$ м.

Визначити v_A і d .

Варіант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $m = 400$ кг, $v_A = 0$, $\tau = 20$ с, $d = 3$ м,
 $h = 1,5$ м.

Визначити l і P .

Варіант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $m = 400$ кг, $P = 2,2$ кН, $l = 40$ м,
 $v_A = 0$, $d = 5$ м.

Визначити v_B і v_C .

Варіант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $P = 2$ кН, $l = 50$ м, $v_A = 0$, $d = 4$ м,
 $h = 2$ м.

Визначити T і m .

Варіант 16 – 20 (рисунок 9).

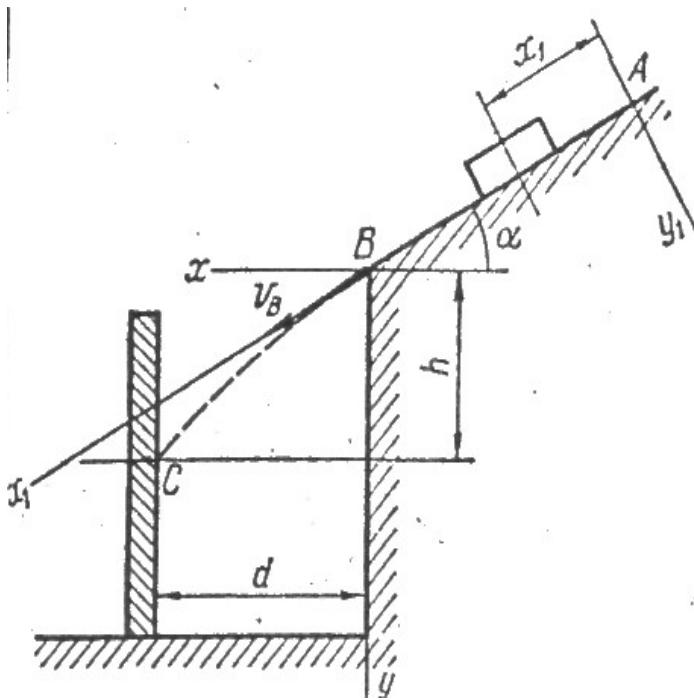


Рисунок 9

Камінь скочає за період часу τ , с, по відрітку АВ похилої площини, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l . Його початкова швидкість v_A .

Коефіцієнт тертя ковзання каменя вздовж скосу позначається f .

У точці В камінь мав швидкість v_B . Через T , с, він ударяється в точці С об вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні завдання вважати камінь за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 1$ м/с, $l = 3$ м, $f = 0,2$, $d = 2,5$ м.
Визначити T і h .

Варіант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$, $l = 6$ м, $v_B = 2v_A$, $\tau = 1$ с, $h = 6$ м.
Визначити f і d .

Варіант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $l = 2$ м, $v_A = 0$, $f = 0,1$, $d = 3$ м.
Визначити τ і h .

Варіант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $l = 3$ м, $v_B = 3$ м/с, $f \neq 0$, $d = 2$ м,
 $\tau = 1,5$ с.

Визначити v_A і h .

Варіант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$, $v_A = 0$, $f = 0,3$, $d = 2$ м, $h = 4$ м.

Визначити τ і l .

Варіант 21 – 25 (рисунок 10).

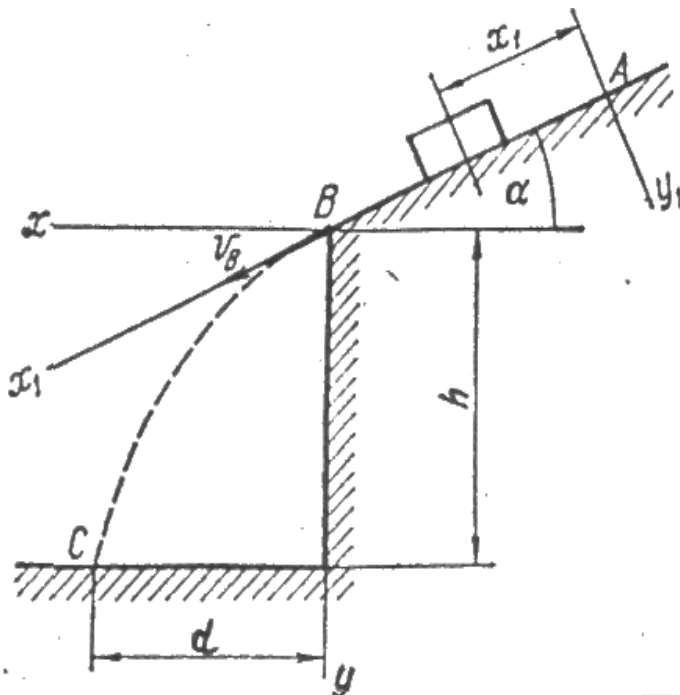


Рисунок 10

Тіло рухається із точки А по відрітку АВ (довжиною l) похилої площини, яка складає кут α з горизонтом. Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Через τ , с, тіло в точці В зі швидкістю v_B залишає нахилу площину та падає на горизонтальну площину в точку С зі швидкістю v_C ; при цьому воно знаходиться у повітрі T , с.

При розв'язанні завдання вважати тіло матеріальною точкою; опір повітря не враховувати.

Варіант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$, $v_A = 1$ м/с, $\tau = 1,5$ с,
 $h = 10$ м.

Визначити d і v_B .

Варіант 22. Дано: $\alpha = 45^\circ$, $v_A = 0$, $l = 10$ м, $\tau = 2$ с.

Визначити f і рівняння траєкторії на ділянці ВС.

Варіант 23. Дано: $f=0$, $v_A=0$, $l=9,81$ м, $\tau=2$ с, $h=20$ м.
Визначити α і T .

Варіант 24. Дано: $\alpha=30^\circ$, $v_A=0$, $f=0,2$, $d=12$ м, $l=10$ м.
Визначити τ і h .

Варіант 25. Дано: $\alpha=30^\circ$, $v_A=0$, $f=0,2$, $l=6$ м, $h=4,5$ м.
Визначити τ і v_C .

Варіант 26 – 30 (рисунок 11).

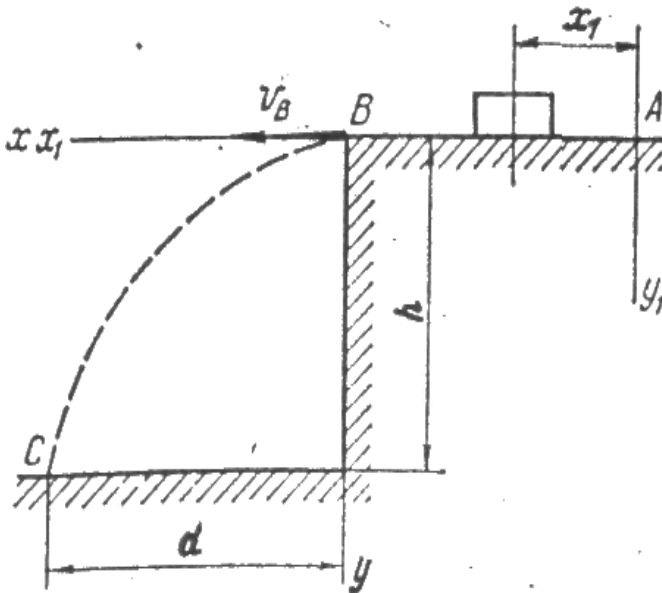


Рисунок 11

Маючи в точці А швидкість v_A , тіло рухається по горизонтальному відрізку АВ довжиною l протягом часу τ , с.

Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f . Зі швидкістю v_B тіло в точці В залишає площину і потрапляє в точку С зі швидкістю v_C , знаходячись у повітрі T , с.

При розв'язанні задачі вважати опором повітря знехтувати

Варіант 26. Дано: $v_A=7$ м/с, $f=0,2$, $l=8$ м, $h=20$ м.
Визначити d і v_C .

Варіант 27. Дано: $v_A=4$ м/с, $f=0,1$, $\tau=2$ с, $d=2$ м.
Визначити v_B і h .

Варіант 28. Дано: $v_B=3$ м/с, $f=0,3$, $l=3$ м, $h=5$ м.

Визначити v_A і T .

Варіант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с, $v_B = 1$ м/с, $l = 2,5$ м, $h = 20$ м.
Визначити f і d .

Варіант 30. Дано: $f = 0,25$, $l = 4$ м, $d = 3$ м, $h = 5$ м.
Визначити v_A і τ .

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-1

У залізничних скальних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них з укосів кам'яних осипів споруджується «полиця» ДС. Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки А укусу та вважаючи при цьому його початкову швидкість V_0 рівною нулю, визначити мінімальну ширину «полиці» b та швидкість V_C , з якою камінь падає на неї. Уздовж ділянки АВ укусу, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l , камінь рухається τ , с.

При розв'язанні завдання вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя уздовж АВ постійним, а опором повітря знехтувати.

Дано:

$$V_A = 0, \alpha = 60^\circ, l = 4 \text{ м}, \tau = 1 \text{ с}, f \neq 0, h = 5 \text{ м}, \beta = 75^\circ.$$

Визначити:

$$b \text{ та } V_C.$$

Розв'язання

Розглянемо рух каменя на ділянці АВ. Вважаючи, що камінь рухається прямолінійно вздовж поверхні АВ, оберемо систему відліку (x_1, y_1) з початком у точці А в напрямку руху каменя. Приймаючи камінь за матеріальну точку, відобразимо (рисунок 12) сили, що діють на нього: вага \vec{G} , нормальна реакція \vec{N} та сила тертя ковзання \vec{F} .

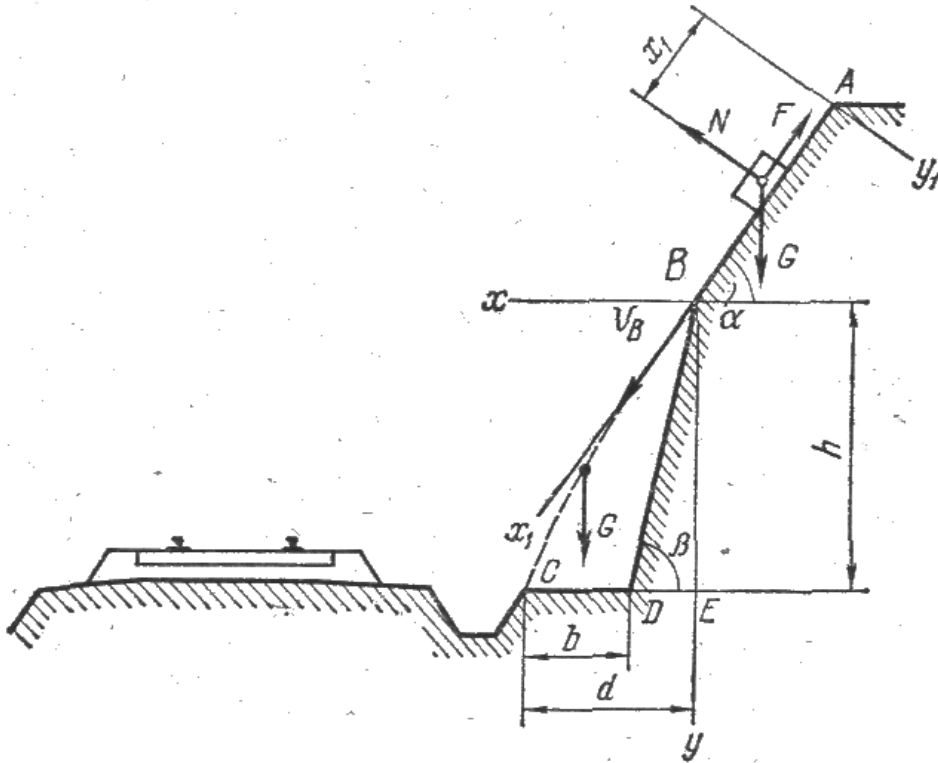


Рисунок 12

Складемо диференційне рівняння руху каменя вздовж АВ:

$$mx_1'' = \sum X_{n1}, \quad mx_1'' = G \sin \alpha - F.$$

Сила тертя $F = fN$, де $N = G \cos \alpha$.

Таким чином,

$$mx_1'' = G \sin \alpha - fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad x_1'' = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Інтегруючи диференційне рівняння двічі, отримаємо:

$$x_1' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2 + C_1t + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємось початковими умовами завдання: при $t=0$ початкове положення $x_{10} = 0$ та початкова швидкість $x_{10}' = 0$. Склавши рівняння, отримані при інтегруванні, для $t=0$ $x_{10} = C_2$ та $x_{10}' = C_1$, знайдемо постійні:

$C_1 = 0, C_2 = 0$. Тоді

$$x'_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2.$$

Для моменту τ , коли камінь залишає ділянку АВ $x'_1 = V_B$, а $x_1 = l$ (швидкість $x'_1 = V_B$ та координата $x_1 = l$ каменя в точці В), тобто

$$V_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)\tau^2,$$

звідки $V_B = 2l/\tau$, тобто $V_B = (2 \cdot 4)/1 = 8 \text{ м/с}$.

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С.

Систему відліку (xy) обираємо в напрямку падіння каменя з початком у точці В. Показавши силу тяжіння \vec{G} , що діє на камінь, складемо диференційні рівняння його руху:

$$mx'' = 0, \quad my'' = G.$$

Інтегруємо перше рівняння:

$$x' = C_3, \quad x = C_3t + C_4.$$

Постійні інтегрування C_3 та C_4 визначимо з використанням початкових умов: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $x'_0 = V_B \cos \alpha$.

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні та складених для $t = 0$: $x'_0 = C_3$, $x_0 = C_4$, знайдемо, що

$$C_3 = V_B \cos \alpha \quad \text{та} \quad C_4 = 0.$$

Тоді

$$x' = V_B \cos \alpha, \quad x = V_B \cos \alpha \cdot t.$$

Інтегруємо друге рівняння $my'' = G$:

$$y' = gt + C_5, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5t + C_6.$$

Початкові умови: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $y'_0 = V_B \sin \alpha$. Із рівнянь, отриманих інтегруванням та складених для $t = 0$, $y'_0 = C_5$, $y_0 = C_6$, знайдемо, що

$$C_5 = V_B \sin \alpha \quad \text{та} \quad C_6 = 0.$$

Остаточно

$$y' = gt + V_B \sin \alpha, \quad y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, виключивши параметр t з рівнянь руху. Визначивши t з першого рівняння та підставивши його в друге, отримаємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

У момент падіння $y = h = 5 \text{ м}$, а $x = d$, тобто

$$y = \frac{9,81 \cdot d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d \cdot \sqrt{3},$$

звідки

$$d_{1,2} = -2,82 \pm 4,93,$$

тобто

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d_1 = 2,11 \text{ м}$.

Мінімальна ширина «полиці»

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\operatorname{tg}45^\circ} = 2,11 - \frac{5}{3,73} = 0,77 \text{ м.}$$

Скориставшись рівнянням руху каменя $x = V_B \cos \alpha \cdot t$, знайдемо час T руху каменя від точки В до точки С: $2,11 = 8 \cdot 0,5 \cdot T$, звідки

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$x' = V_B \cos \alpha, \quad y' = gt + V_B \sin \alpha$$

за формулою

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

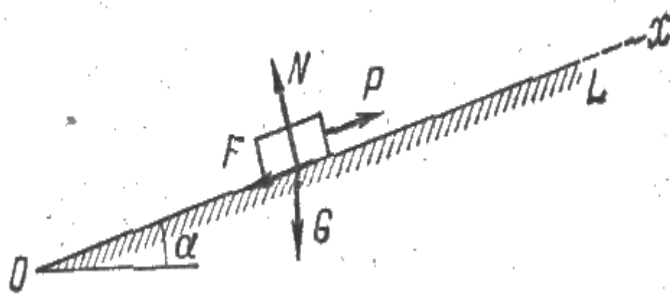
Для моменту падіння ($t = T = 0,53 \text{ с}$)

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8 \text{ м/с.}$$

3.2 Завдання Д-2

Основні теореми динаміки матеріальної точки

Використання теореми про зміну кількості руху до визначення швидкості матеріальної точки



Тілу маси m надана початкова швидкість V_0 , спрямована вгору по похилій площині, яка складає з горизонтом кут α .

Рисунок 13

На тіло діє сила \vec{P} , спрямована в тому ж напрямку

(рисунок 13).

Знаючи закон зміни сили $P = P(t)$ та коефіцієнт тертя ковзання f , визначити швидкість тіла в моменти часу t_1, t_2, t_3 та перевірити отриманий результат для моменту часу t_1 за допомогою диференційного рівняння руху.

Необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 3.

При побудові графіка зміни сили P за заданими її значеннями P_0, P_1, P_2, P_3 для моментів часу t_0, t_1, t_2, t_3 вважати залежність $P = P(t)$ між указаними моментами часу лінійною. Значення сили P надане в таблиці 3 у вигляді дроби, вказує на те, що модуль сили в заданий момент часу має «скачок»: у чисельнику вказаний модуль сили в кінці проміжку часу, а в знаменнику - на початку наступного проміжку часу.

Таблиця 3

Варіант	m , кг	v_0 , м/с	T	t_2	t_3	P_0	P_1	P_2	P_3	α , град	f
			t_1								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	35	5,4	4	10	18	100	200	150	250	25	0,10
2	20	0	6	10	15	200	160	160	180	37	0,25
3	25	0	4	10	16	200	200/120	120	0	21	0,10
4	10	4,5	5	10	16	0	180	40	100	32	0,12
5	16	9,0	4	8	16	120	120/0	0	160	24	0,08
6	40	4,0	4	8	12	400	300	300	0	40	0,06
7	20	8,0	5	8	11	0	300	0	0	25	0,20
8	16	7,6	6	11	13	75	200	0	0	23	0,12
9	12	0	6	10	14	100	140	0	0	20	0,20

10	50	12,0	2	6	12	0	300	200	200	27	0,08
11	10	5,0	6	10	16	50	100	100	200	35	0,24
12	12	3,0	3	8	14	60	180	120	120	42	0,15
13	10	8,0	4	12	16	0	150	150	100	30	0,18
14	20	8,5	5	8	15	40	100	150	0	23	0,07
15	14	9,0	7	12	18	0	140	0	100	18	0,15
16	20	3,0	5	9	17	300	150	100	100	39	0,12
17	24	10,0	6	10	15	0	180	60	140	15	0,20
18	15	13,0	8	16	20	110	150	0	90	26	0,22
19	15	7,2	3	10	16	150	110	90	120	30	0,30

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	22	8,2	2	9	11	70	110	110	50	15	0,15
21	13	10,0	8	12	16	0	200/0	0/200	100	28	0,14
22	11	6,0	7	9	14	160	0	0/100	120	31	0,11
23	12	4,5	5	10	16	50	120	40	80	21	0,22
24	10	7,0	4	14	29	100	50	50	0	18	0,09
25	18	0	8	10	16	180	160/0	0/140	180	33	0,17
26	8	9,0	4	8	12	0	150	0	120	45	0,10
27	17	5,0	7	10	18	190	170/0	100	280	38	0,21
28	9	7,5	4	12	17	0	140/70	100/70	70	26	0,20
29	20	9,5	5	6	11	0	400	400/100	200	15	0,25

30	10	10,2	6	7	10	120	70	0	120	33	0,15

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-2

Дано:

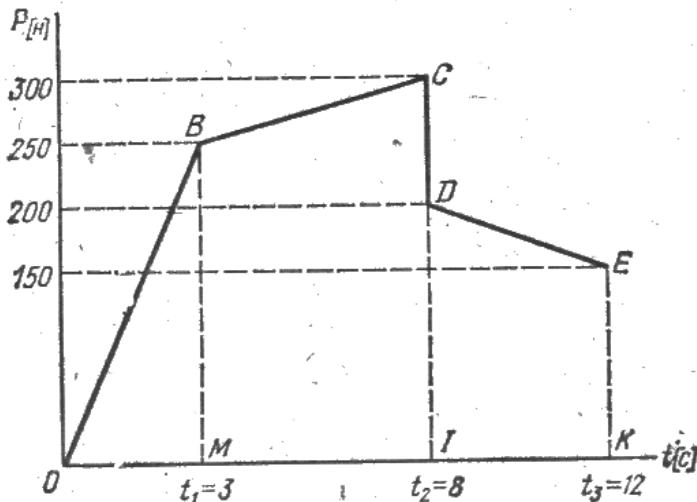
$m=40$ кг, $V_0=10$ м/с, $t_1=3$ с, $t_2=8$ с, $t_3=12$ с, $P_0=0$,
 $P_1=250$ Н, $P_2=300/200$ Н, $P_3=150$ Н, $\alpha=30^\circ$, $f=0,1$.

Визначити:

V_1 , V_2 та V_3 для t_1 , t_2 , t_3 .

Розв'язання

Вкажемо сили, які діють на тіло (рисунок 13): вага \bar{G} , сила \bar{P} та силу тертя ковзання \bar{F} , спрямувавши її протилежно початковій швидкості, тобто вниз удовж похилої площини.



Побудуємо графік $P = P(t)$ за заданим значеннями P_0 , P_1 , P_2 , P_3 (рисунок 14).

Рисунок 14

1 Для тіла, прийнятого за матеріальну точку, що рухається прямолінійно вздовж осі X , складемо рівняння, яке виражає теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь X для проміжку часу від 0 до t_1 :

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{nx}, \quad (1)$$

де

$$\sum S_{nx} = -Gt_1 \sin \alpha - Ft_1 + S_{Px}.$$

Проекція імпульсу змінної сили P за t_1 с,

$$S_{Px} = \int_0^{t_1} P dt.$$

Такий інтеграл визначається площею трикутника ОВМ на графіку $P = P(t)$ (рисунок 14):

$$S_{Px} = \frac{3 \cdot 250}{2} = 375 \text{ H} \cdot \text{с}.$$

Ураховуючи, що сила тертя ковзання $F = fN = fG \cos \alpha$, отримаємо рівняння (1) у вигляді:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = -mgt_1 \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot t_1 + 375,$$

звідки

$$V_{1x} = V_{0x} - gt_1 \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot t_1 + \frac{375}{m},$$

тобто

$$V_{1x} = 10 - 9,81 \cdot 3 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 3 + \frac{375}{40} = 2,10 \text{ м/с}.$$

Таким чином,

$$V_1 = V_{1x} = 2,10 \text{ м/с}.$$

2 Для визначення швидкості тіла в момент часу t_2 складемо рівняння, яке виражає теорему про зміну кількості руху, для проміжку часу $t_1 - t_2$:

$$mV_{2x} - mV_{1x} = \sum S_{nx}, \quad (2)$$

де

$$\sum S_{nx} = -G(t_2 - t_1) \sin \alpha - F(t_2 - t_1) + S_{Px}.$$

Проекція імпульсу змінної сили P за $(t_2 - t_1)$, с, визначається площею трапеції МВСІ на графіку $P = P(t)$ (рисунок 14):

$$S_{Px} = \frac{5(250 + 300)}{2} = 1375 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Тоді рівняння (2) має вигляд:

$$mV_{2x} - mV_{1x} = -mg(t_2 - t_1) \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + 1375,$$

звідки

$$\begin{aligned} V_{2x} &= V_{1x} - g(t_2 - t_1) \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1375}{m} = \\ &= 2,10 - 9,81 \cdot 5 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 5 + \frac{1375}{40} = 7,68 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$V_2 = V_{2x} = 7,68 \text{ м/с}.$$

З Рівняння, що виражає теорему про зміну кількості руху складене для проміжку часу $(t_3 - t_2)$, дає можливість визначити швидкість V_3 тіла в момент часу t_3 :

$$mV_{3x} - mV_{2x} = \sum S_{nx}, \quad (3)$$

де

$$\sum S_{nx} = -G(t_3 - t_2) \sin \alpha - fG \cos \alpha (t_3 - t_2) + S_{Px}.$$

Проекція змінної сили P за $(t_3 - t_2)$, с, дорівнює площі трапеції ІДЕК на графіку $P = P(t)$ (рисунок 14):

$$S_{Px} = \frac{4(200 + 150)}{2} = 700 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Тоді

$$V_{3x} = V_{2x} - g(t_3 - t_2) \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot (t_3 - t_2) + \frac{700}{40} =$$

$$= 7,68 - 9,81 \cdot 4 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 4 + 17,5 = 2,15 \text{ м/с.}$$

Таким чином,

$$V_3 = V_{3x} = 2,15 \text{ м/с.}$$

4 Перевіримо отримане для моменту t_1 значення швидкості V_1 за допомогою диференційного рівняння

$$mx'' = \sum X_n, \quad mx'' = -G \sin \alpha - F + P$$

або

$$mx'' = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha + P$$

тобто

$$x'' = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + \frac{P}{m},$$

де $P = P_0 + \left(\frac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0}\right)t = \frac{250}{3}t$ - рівняння прямої ОВ (рисунок 14),

а тоді

$$x'' = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + \frac{25}{12}t.$$

Інтегруючи отримане диференційне рівняння, маємо

$$x' = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + \frac{25}{24}t^2 + C.$$

Для визначення постійної інтегрування C використаємо початкові умови завдання: при $t = 0$ $V_{0x} = x'_0 = 10 \text{ м/с}$.

Складемо рівняння, отримане інтегруванням, для $t = 0$, знайдемо що $C = 10 \text{ м/с}$. Таким чином, рівняння, яке визначає зміну швидкості за проміжок часу від 0 до t_1 , має вигляд

$$x' = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + \frac{25}{24}t^2 + 10.$$

При $t = 3c$

$$V_1 = x'_1 = -9,81 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87) \cdot 3 + \frac{25}{24} \cdot 9 + 10 = 2,10 \text{ м/с.}$$

3.3 Завдання Д-3

Динаміка механічної системи

Основні теореми динаміки механічної системи

Використання теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою. Ураховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29) (рисунок 15), нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях стане рівним s .

У завданні прийнято наступні визначення:

m_1, m_2, m_3, m_4 - маси тіл 1, 2, 3, 4;

R_2, r_2, R_3, r_3 - радіуси великих та малих кіл (коліс);

$i_{2x}, i_{3\xi}$ - радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри ваги;

α, β - кути нахилу площин до горизонту;

f - коефіцієнт тертя ковзання;

δ - коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 4.

Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не

вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі частки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

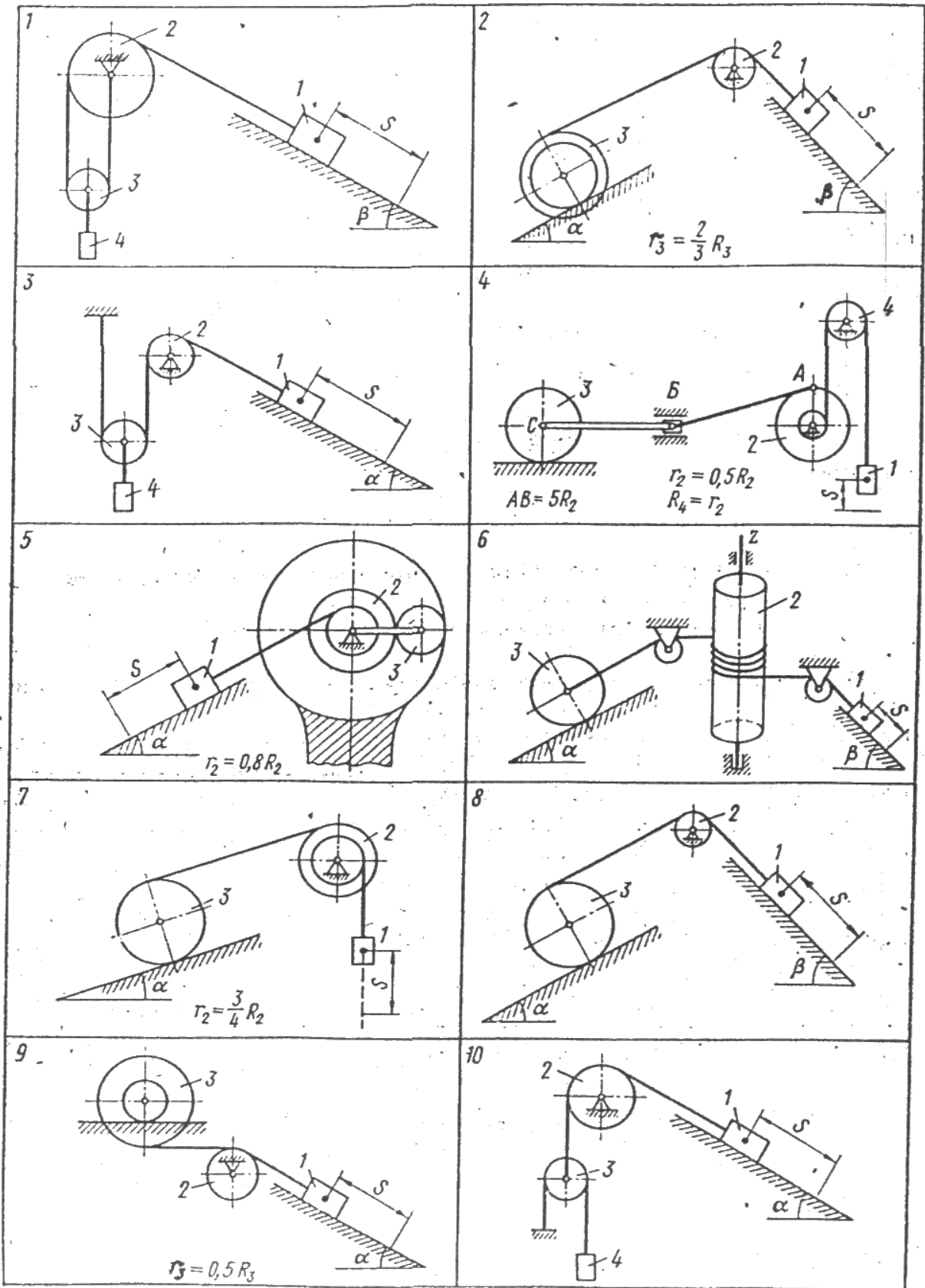


Рисунок 15, аркуш 1

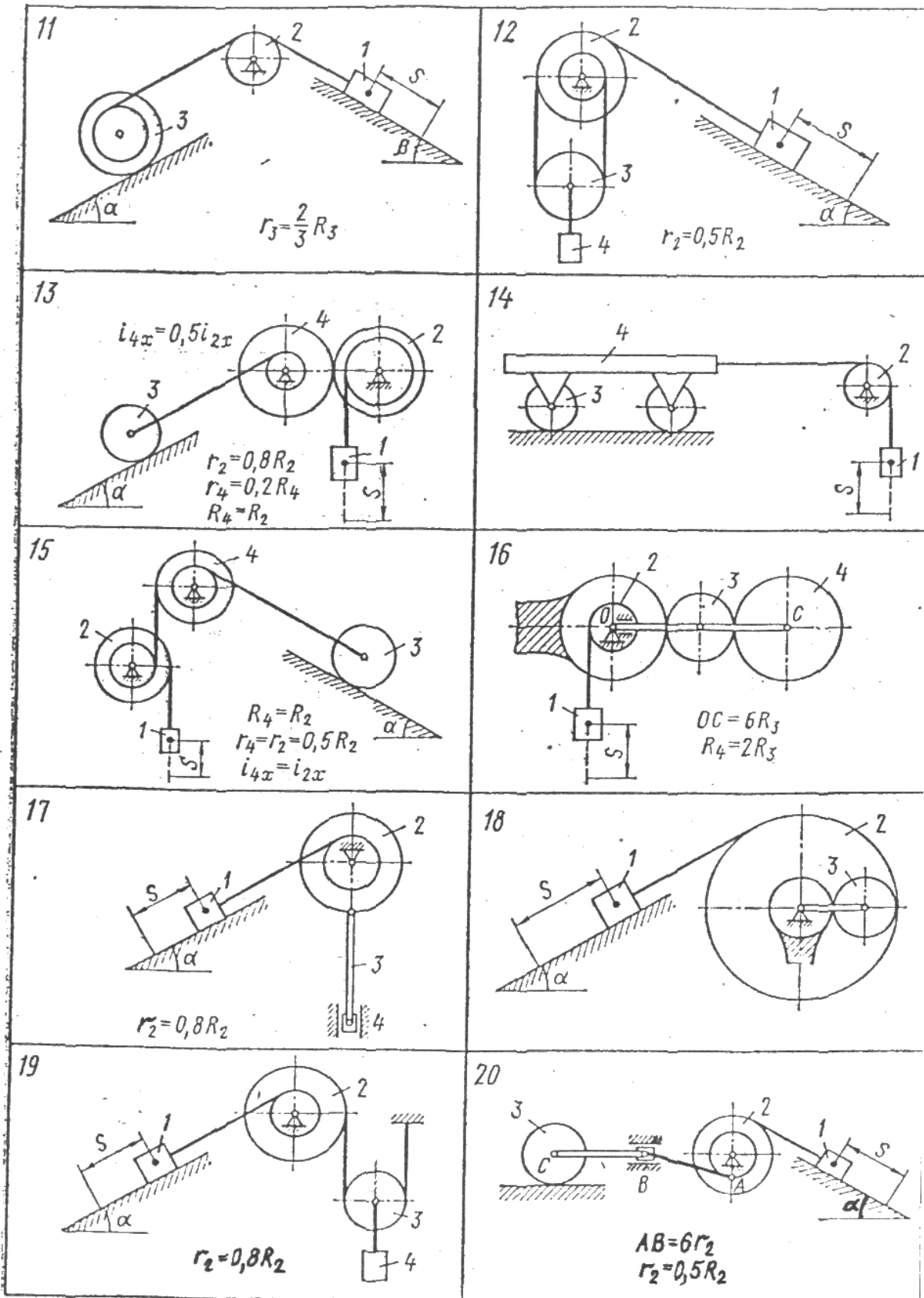


Рисунок 15, аркуш 1

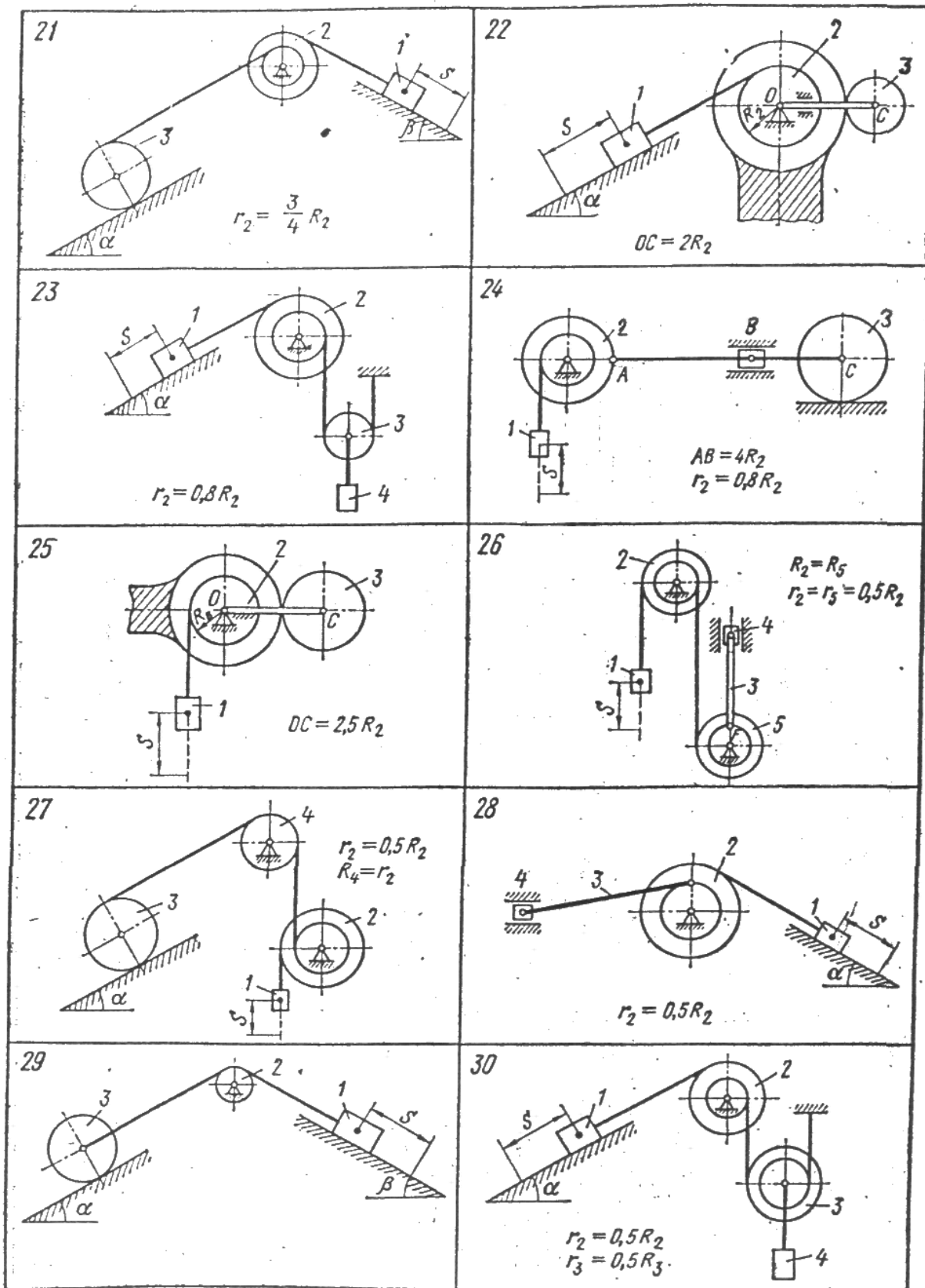


Рисунок 15, аркуш 1

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-3

Дано:

$$m_1 = 3 m_2 = \frac{1}{2} m_3, R_3 = 30 \text{ см}, R_2 = 20 \text{ см}, r_2 = 15 \text{ см}, \\ i_{2x} = 17 \text{ см}; \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, f = 0,2, \delta = 0,25, s = 6 \text{ м.}$$

Визначити:

V_1 (рисунок 16).

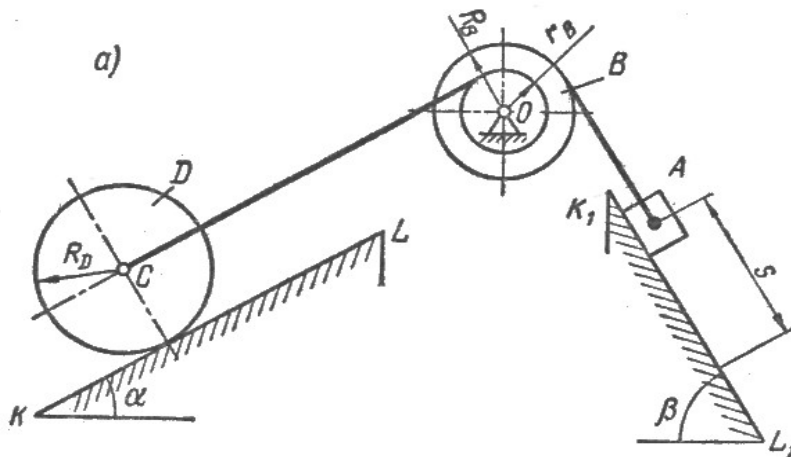


Рисунок 16

Розв'язання

Скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_2 - T_1 = \sum A_n,$$

де T_1 та T_2 - кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum A_n$ - сума робіт всіх сил, прикладених до системи.

Ураховуючи, що спочатку система знаходилася в стані спокою, $T_1 = 0$, і рівняння теореми приймає вигляд:

$$T_2 = \sum A_n.$$

Знайдемо кінетичну енергію системи T_2 в кінцевому її

положенні.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3:

$$T_2 = T_1 + T_2 + T_3 .$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально, дорівнює

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} .$$

Кінетична енергія блока 2, який рухається обертально навколо нерухомої осі, визначається так:

$$T_2 = \frac{J_{2x} \omega_2^2}{2} ,$$

де J_{2x} - момент інерції блока відносно осі обертання Ox :

$$J_{2x} = m_2 \cdot i_{2x}^2 ,$$

де ω_2 - кутова швидкість блока,
 i_{2x} - радіус інерції блока.

Кінетична енергія котка 3, який здійснює плоский рух,

$$T_3 = \frac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \frac{J_{3\xi} \omega_3^2}{2} ,$$

де V_{C3} - швидкість центра мас (центра ваги) C котка;
 $J_{3\xi}$ - момент інерції котка (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної поздовжньої осі $C\xi$.

$$J_{3\xi} = \frac{m_3 R_3^2}{2} ;$$

де ω_3 - кутова швидкість котка.

Підставляючи задані значення мас та значення моментів інерції у формулу запису теореми для кінетичної енергії системи, отримаємо:

$$T_2 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + m_1 \cdot V_{C3}^2 + \frac{m_1 \cdot R_3^2 \cdot \omega_3^2}{2} =$$

$$= m_1 \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + V_{C3}^2 + \frac{R_3^2 \cdot \omega_3^2}{2} \right).$$

Виразимо швидкість V_{C3} та кутові швидкості ω_2 та ω_3 через швидкість V_1 .

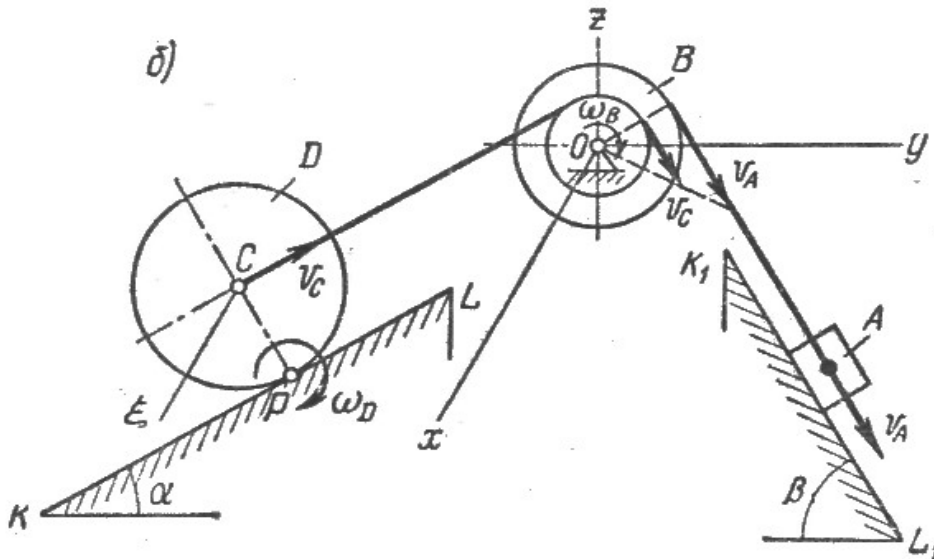


Рисунок 17

Обертальна швидкість точок обода кожного з барабанів блока дорівнює швидкості руху нитки, яка сходить з блока (рисунок 17).

Тобто $\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$ та $\frac{V_{C3}}{V_1} = \frac{r_2}{R_2}$, звідки $V_{C3} = \frac{r_2}{R_2} \cdot V_1$.

Тому що коток котиться без ковзання, миттєвий центр швидкостей котка знаходиться в точці Р. Тому

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{CP} = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot V_1.$$

Після підстановки до останнього виразу теореми знайдених величин V_{C3} , ω_2 та ω_3 отримуємо таке значення кінетичної енергії системи:

$$T_2 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{i_{2x}^2}{R_2^2} + 3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \quad \text{або} \quad T_2 = 2,93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}.$$

Знайдемо суму робіт усіх сил, прикладених до системи, на заданому переміщенні.

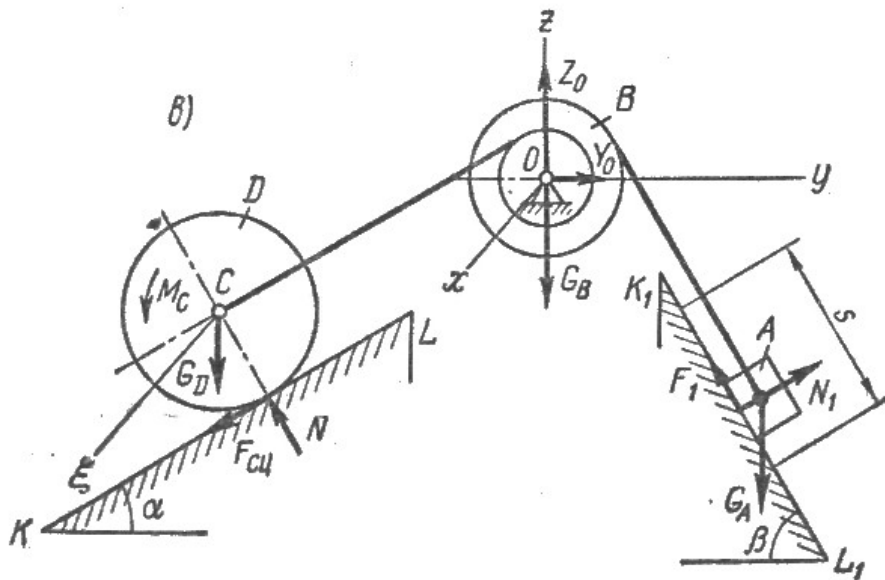


Рисунок 18

На вантаж 1 (рисунок 18) діють сили:

вага \bar{G}_1 , нормальна реакція \bar{N}_1 площі K_1L_1 , сила тертя \bar{F}_1 , спрямована протилежно швидкості вантажу 1, реакція нитки.

Силами, що діють на барабани 2, є їх вага \bar{G}_2 , складові реакцій підшипників \bar{Y}_0 та \bar{Z}_0 , а також реакції ниток.

До котка 3 прикладені сили: вага \bar{G}_3 , сила зчеплення $\bar{F}_{3ч}$ (сила тертя спокою), яка протистоїть ковзанню котка, нормальна реакція \bar{N} площі KL , пара сил опору коченню з моментом M_C , а також реакція нитки.

Реакції ниток, прикладені до вантажу 1, барабанів 2 та котка 3, є внутрішніми силами розглянутої системи, робота яких при нерозтяжних нитках дорівнює нулю, тому реакції ниток на рисунку 18 не вказані.

Робота сили \overline{G}_1 визначається рівнянням $A_{G1} = G_1 \cdot h$, де $h = s \cdot \sin \beta$ - відповідне вертикальне переміщення вантажу 1, тоді

$$A_{G1} = G_1 \cdot h = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta .$$

Робота нормальних реакцій \overline{N}_1 та \overline{N} дорівнює нулю тому, що кут між переміщенням s та цими силами дорівнює 90° .

Робота сили тертя ковзання \overline{F}_1

$$A_F = -F_1 \cdot s .$$

Тому що $F_1 = fN_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos \beta$,

$$A_F = -f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s .$$

Сили \overline{G}_2 , \overline{Y}_o та \overline{Z}_o не створюють роботи тому, що вони прикладені до нерухомої точки.

Робота \overline{G}_3

$$A_{G3} = -G_3 \cdot h_c = -G_3 \cdot s_c \cdot \sin \alpha ,$$

де s_c - переміщення центра мас котка.

Робота сили $\overline{F}_{3ч}$ дорівнює нулю тому, що вона прикладена в миттєвому центрі швидкостей.

Робота пари сил опору коченню

$$A_{M_c} = -M_c \cdot \varphi_3 ,$$

де $M_c = \delta \cdot N = \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha$ - момент пари сил опору коченню,
 φ_3 - кутове переміщення котка 3 (кут обертання).

Таким чином,

$$A_{M_c} = -\delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \varphi_3.$$

Сума робіт усіх сил, прикладених до системи, яка розглядається,

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta - f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s - G_3 \cdot s_c \cdot \sin \alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \varphi_3.$$

Переміщення центра мас котка s_c та кут обертання φ_3 виразимо через переміщення вантажу S .

Тому що лінійні (або кутові) переміщення знаходяться в такій же самій залежності, як відповідні лінійні (або кутові) швидкості, то

$$s_c = \frac{r_2}{R_2} \cdot s \quad \text{та} \quad \varphi_3 = \frac{s_c}{R_3} = \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s.$$

Підставимо ці значення в рівняння робіт

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta - f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s - G_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot s \cdot \sin \alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s$$

або

$$\begin{aligned} \sum A_n &= m_1 \cdot g \cdot s \left(\sin \beta - f \cdot \cos \beta - 2 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha - 2\delta \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \right) = \\ &= 0,004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s \end{aligned}$$

Прирівнюючи визначені значення T_2 та $\sum A_n$, отримаємо

$$2,93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} = 0,004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s,$$

звідки

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,004}{2,93} g s} = \sqrt{\frac{0,008}{2,93} \cdot 9,81 \cdot 6} = 0,40 \text{ м/с.}$$

3.4 Завдання Д-4

Аналітична механіка Загальне рівняння динаміки

Використання загального рівняння динаміки до дослідження механічної системи з одним ступенем вільності

Для заданої механічної системи (рисунок 19) визначити прискорення вантажів та натягання в гілках ниток, до яких причеплені вантажі. Маса ниток знехтувати. Тертя кочення та сили опору в підшипниках не враховувати.

Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці 5 не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Таблиця 5

Вариант	Вага				R/r	Радіуси інерції		P	Коефіцієнт тертя, f	Додаткові дані
	G_1	G_2	G_3	G_4		i_{2x}	i_{3x}			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	G	G	$3G$	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
2	G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
3	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
4	G	G	$2G$	-	-	-	-	-	,2	$r_2=r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	-	-	-	
6	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	

9	2G	G	2G	-	3	2r	-	0,2G	0,2	
10	2G	2G	G	-	4	-	2r	G/3	0,4	
11	2G	G	2G	0,2 G	3	2r	-	-	0,2	
12	2G	G	2G	0,2 G	3	2r	-	-	0,2	
13	4G	2G	G	4G	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3$ $R_2=R_3$
14	-	2G	G	4G	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	8G	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$
15	4G	G	2G	4G	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$
16	-	G	2G	4G	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	4G	-	$r_2=2r_3$ $R_3=1,5R_2$
17	2G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	

Продовження таблиці 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18	3G	0,2 G	0,1 G	0,5 G	2	-	-	-	0,4	
19	4G	0,3 G	0,2 G	3G	3	2r	1.2r	-	0,1	$r_3=1,2r$ $R_3=1,2r_3$
20	4G	0,2 G	0,1 G	3G	2	1.6r	$r\sqrt{2}$	-	0,2	$r_2=1,5r$ $R_2=1,2r_2$
21	5G	0,1 G	0,2 G	-	3	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
22	G	0,2 G	0,3 G	-	2	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
23	G	0,2 G	0,1 G	-	1,5	1.2r	-	2G	-	$R_3=1,2r$
24	2G	G	G	8G	-	-	-	-	-	Маси чотирьох коліс однакові
25	6G	2G	2G	G	-	-	-	-	-	$r_3=r_4$
26	6G	G	2G	-	-	-	-	-	-	$r_3=r_2$
27	G	G	G	4G	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	-	-	

28	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	-	$r\sqrt{2}$	-	-	$i_{4x}=i_{3x}$
30	$8G$	G	G	$2G$	-	-	-	-	0,1	

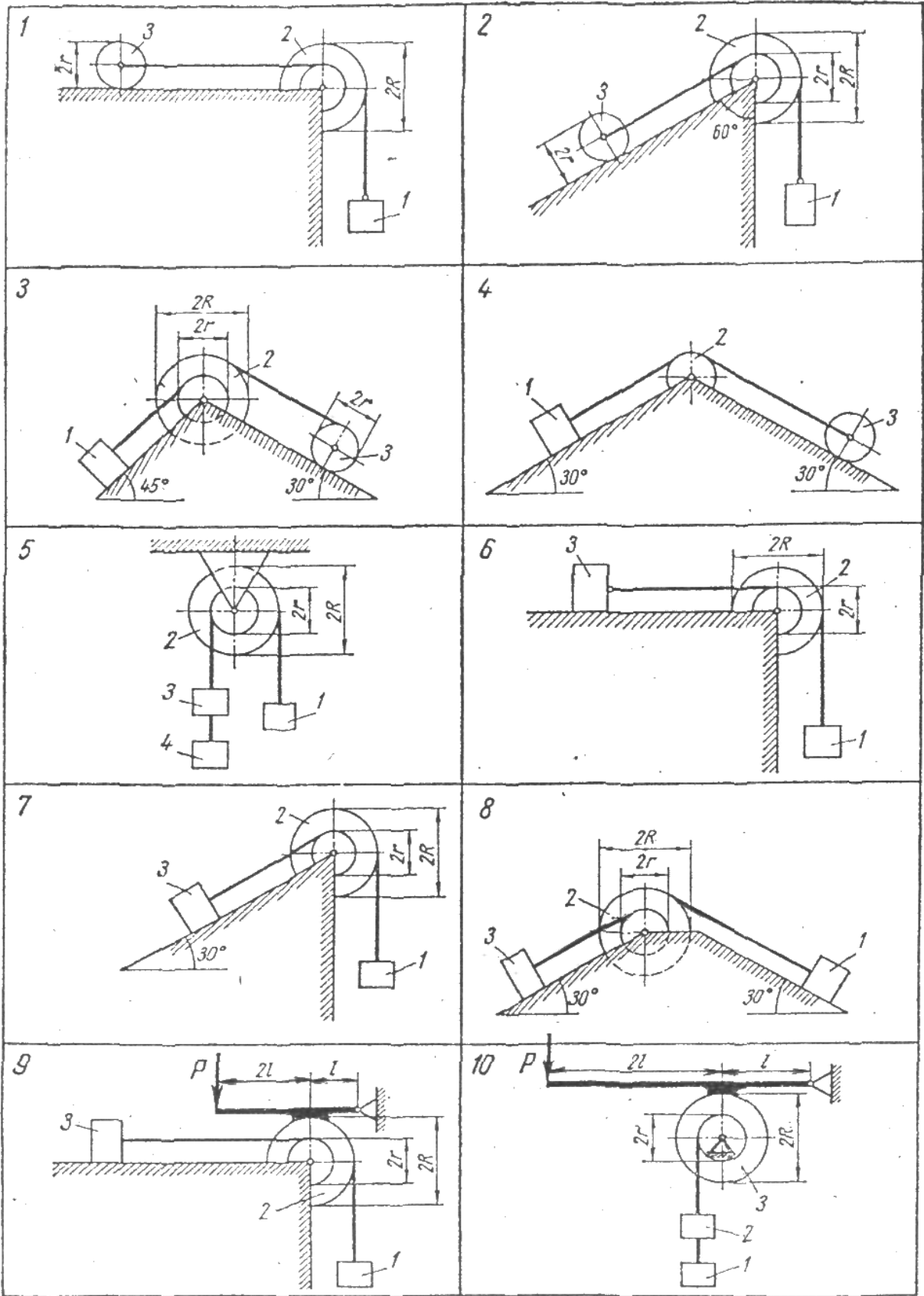


Рисунок 19, аркуш 1

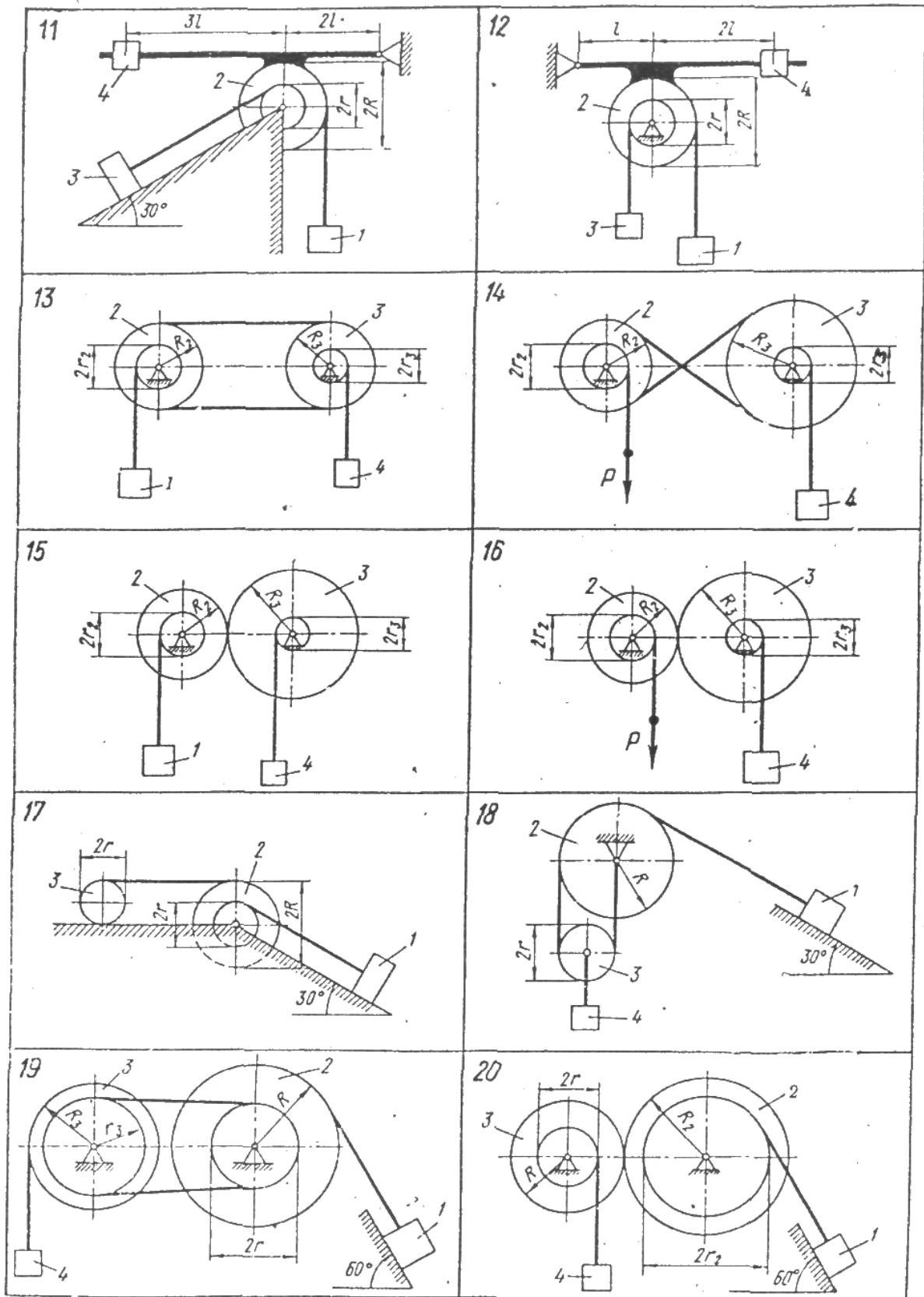


Рисунок 19, аркуш 2

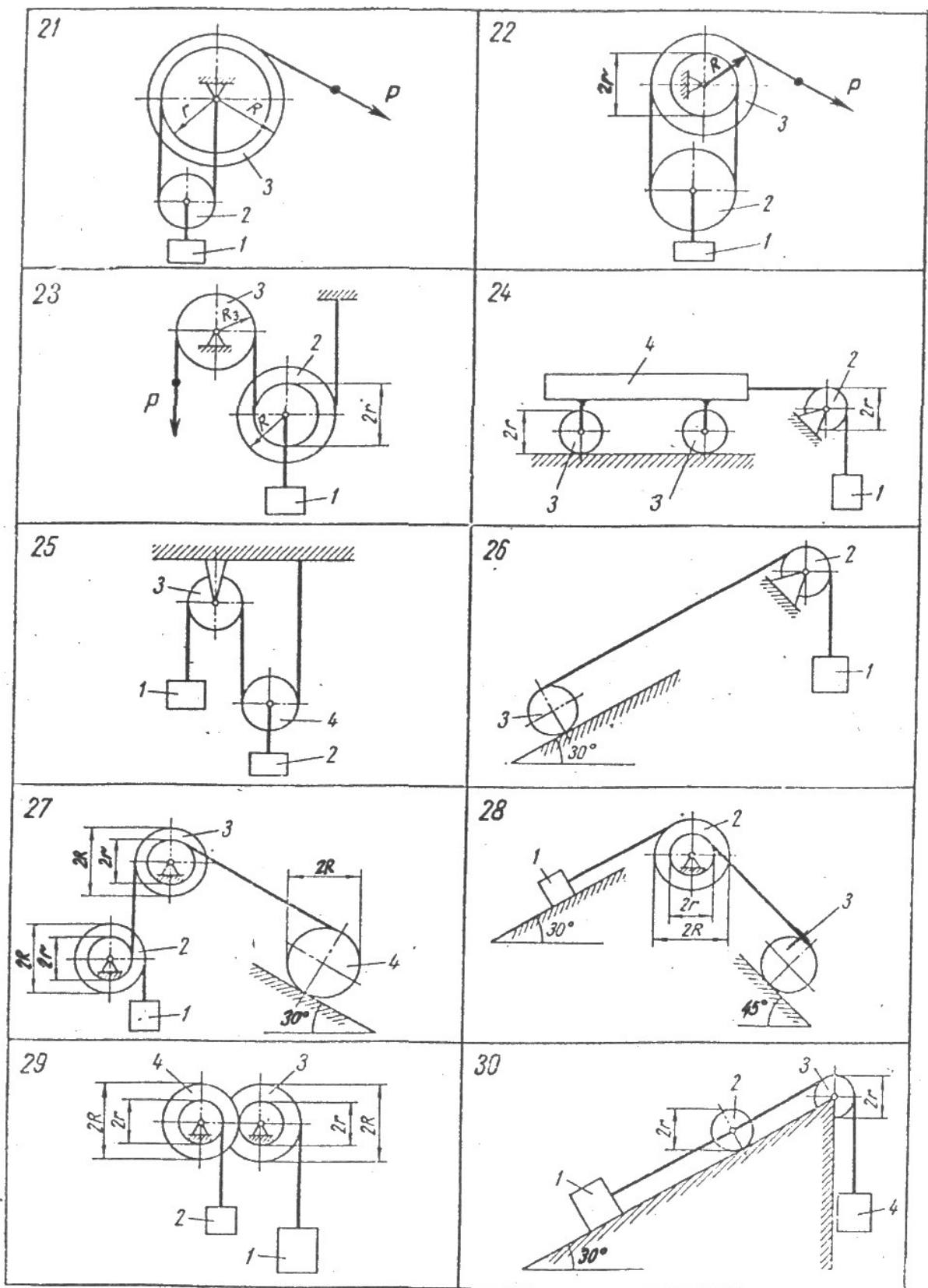


Рисунок 19, аркуш 3

Рекомендації та приклад виконання завдання Д-4

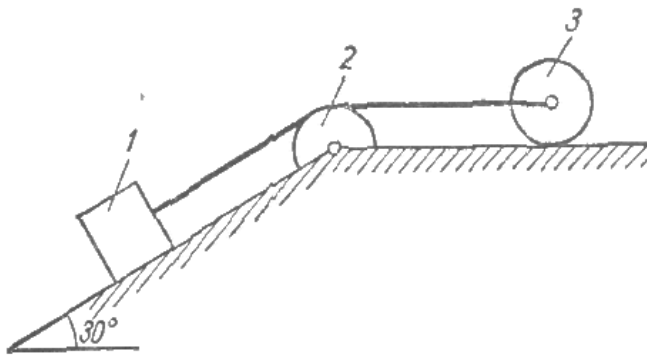


Рисунок 20

Дано:

$$G_1 = G_2 = G_3 = G,$$

$$r_2 = r_3 = r, \quad f = 0,2.$$

Блок 2 та коток 3 - суцільні однорідні циліндри (рисунок 20).

Визначити:

прискорення a вантажу 1 та натягання T_{1-2} і T_{2-3} гілок 1-2 та 2-3 ниток.

Розв'язання

Використаємо для розв'язання завдання загальне рівняння динаміки.

Вкажемо задані сили (рисунок 21):

- сили ваги $\overline{G_1}$ - вантажу 1, $\overline{G_2}$ - блока 2, $\overline{G_3}$ - котка 3;
- сила тертя ковзання \overline{F} вантажу по похилій площині.

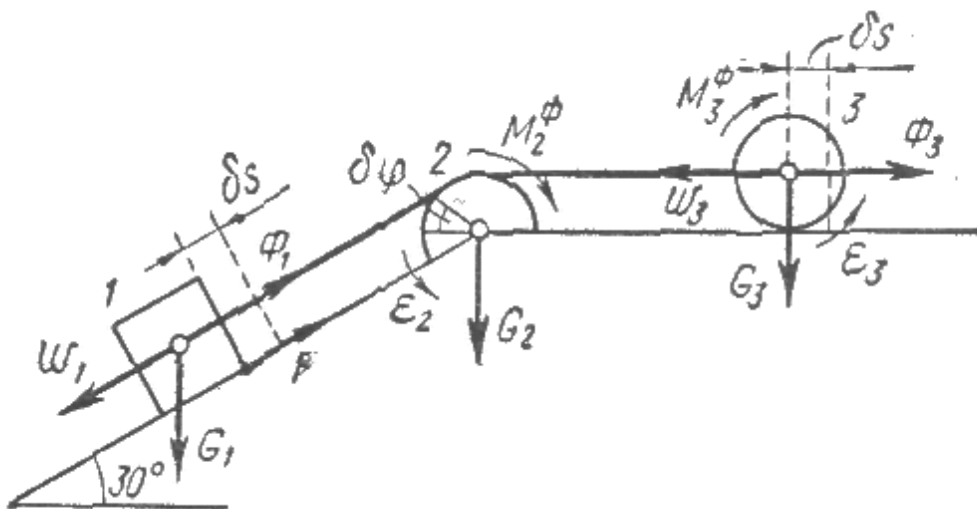


Рисунок 21

Прикладемо відповідні сили інерції.

Сила інерції вантажу 1, який рухається поступально з прискоренням $\overline{a_1}$, виражається вектором

$$\overline{\Phi_1} = -m_1 \cdot \overline{a_1}.$$

Сила інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням ε_2 , приводиться до пари з моментом

$$M_2^\Phi = -J_{2X} \cdot \varepsilon_2.$$

Сили інерції котка 3, який здійснює плоский рух, приводяться до вектора

$$\overline{\Phi_3} = -m_3 \cdot \overline{a_{C3}},$$

де $\overline{a_{C3}}$ - прискорення центра мас котка, та пари сил, момент якої

$$M_3^\Phi = -J_{C3} \cdot \varepsilon_3,$$

де ε_3 - кутове прискорення котка;

J_{C3} - момент інерції котка відносно центра його інерції С.

Надамо системі можливе переміщення (рисунок 21) і складемо загальне рівняння динаміки:

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \delta s + \Phi_1 \cdot \delta s + M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 + \Phi_3 \delta s + M_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0,$$

де $\delta \varphi_2$ та $\delta \varphi_3$ - кути обертання блока 2 та катка 3.

Ураховуючи, що в даному завданні $G_1 = G_2 = G_3 = G = mg$ нитка нерозтяжна, і тоді, $a_3 = a_1 = a$, отримаємо рівняння:

$$\Phi_1 = ma,$$

$$M_2^\Phi = J_{2X} \cdot \varepsilon_2 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2},$$

$$\Phi_3 = ma,$$

$$M_3^\phi = J_{C3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2}.$$

Сила тертя

$$F = fG_1 \cdot \cos 30^\circ = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ.$$

Рівняння (1) набуває вигляду

$$-mg \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + fmg \cos 30^\circ \cdot \delta s + ma \cdot \delta s + \frac{mra}{2} \cdot \delta \varphi_2 + ma \delta s + \frac{mra}{2} \delta \varphi_3 = 0.$$

Установимо залежність між можливими переміщеннями, які входять до загального рівняння

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \frac{\delta s}{r},$$

та підставимо ці формули для кутів обертання в рівняння.

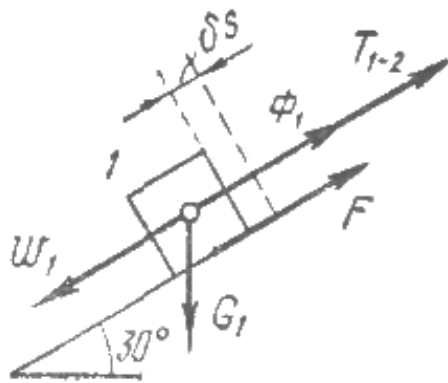
Розділимо всі члени рівняння на m і δs та отримаємо

$$-g \cdot \sin 30^\circ + fg \cos 30^\circ + a + \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 0,$$

Звідки

$$a = \frac{g}{3} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = \frac{9,81}{3} (0,5 - 0,2 \cdot 0,87) = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення натягу в гілках 1-2 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на вантаж 1 реакцією $\overline{T_{1-2}}$ (рисунок 22).



Показавши силу інерції $\overline{\Phi_1}$ вантажу та надавши вантажу 1 можливе переміщення, складемо загальне рівняння динаміки:

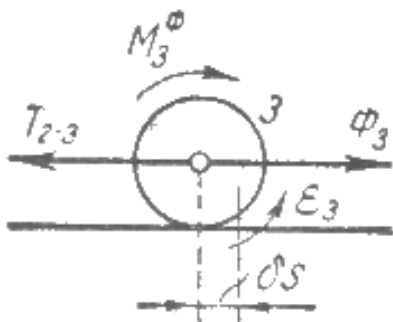
Рисунок 22

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + \Phi_1 \cdot \delta s + F \delta s + T_{1-2} \delta s = 0,$$

звідки потрібне зусилля

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \cdot \sin 30^\circ - \Phi_1 - F = \\ &= mg \sin 30^\circ - ma - fmg \cos 30^\circ = \\ &= mg(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ - \frac{1}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)) = \\ &= G \frac{2}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,22G. \end{aligned}$$

Для визначення натягу в гілках 2-3 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінімо її дію на коток 3 реакцією $\overline{T_{2-3}}$ (рисунок 23).



Показавши $\overline{\Phi_3}$ та M_3^ϕ і надавши котку 3 можливе переміщення, отримаємо:

$$\Phi_3 \cdot \delta s + M_3^\phi \delta \varphi - T_{2-3} \delta s = 0,$$

де $\Phi_3 = ma$,

$$M_3^\phi = \frac{mra}{2}, \quad \delta \varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

Рисунок 23

Таким чином,

$$m \cdot a + \frac{m \cdot a}{2} - T_{2-3} = 0,$$

тобто

$$T_{2-3} = \frac{3}{2} m \cdot a = \frac{3}{2} \frac{m \cdot g}{3} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,17 \cdot G \cdot$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1986.
- 2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - М., 1984. - Ч. 1, 2.
- 3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /под ред. А.А. Яблонского. - М., 1985.
- 4 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни

"Теоретична механіка". - Харків: УкрДАЗТ, 2005.

Таблиця 4

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3z}	α	β	f	δ , см	S , м	Примітки
	кг				см		см		град					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	m	4m	1/5m	4/3m	-	-	-	-	60	-	0,10	-	2	
2	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2	
3	m	m	1/10m	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2	
4	m	2m	40m	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	0,1π	Масами ланок АВ, ВС і повзуна В знехтувати
5	m	2m	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	0,28π	Масою водила знехтувати
6	m	3m	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5	
7	m	2m	2m	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2	
8	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	2m	9m	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	
10	m	1/4m	1/4m	1/5m	-	-	-	-	60	-	0,10	-	3	
11	m	1/2m	1/4m	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	1/2m	1/5m	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5	
13	m	2m	5m	2m	30	20	26	-	30	-	-	0,24	2	
14	m	1/2m	5m	4m	-	25	-	-	-	-	-	0,20	2	Маси кожного з чотирьох коліс однакові
15	m	1/2m	4m	1/2m	20	15	18	-	60	-	-	0,25	1,5	
16	m	1/10m	1/20m	1/10m	10	12	-	-	-	-	-	-	0,05π	Масою водила знехтувати
17	m	1/4m	1/5m	1/10m	20	-	15	-	60	-	0,10	-	0,16π	Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	m	3m	m	-	35	15	32	-	60	-	0,15	-	0,2π	Масою водила знехтувати
19	m	1/3m	1/10m	m	24	-	20	-	60	-	0,15	-	1,5	
20	m	2m	20m	-	20	15	16	-	30	-	0,10	0,20	0,2π	Масами ланок АВ, ВС та повзуна В знехтувати
21	m	m	2m	-	20	20	16	-	30	45	0,20	0,32	1,2	
22	m	1/2m	1/4m	-	20	10	-	-	60	-	0,17	-	0,1π	Масою водила знехтувати
23	m	m	1/10m	4/5m	20	-	18	-	30	-	0,10	-	1	
24	m	3m	20m	-	20	30	18	-	-	-	-	0,60	0,08π	Масами ланок АВ, ВС та повзуна В знехтувати
25	m	1/3m	1/4m	-	16	20	-	-	-	-	-	-	0,04π	Масою водила знехтувати
26	m	1/2m	m	1/3m	30	-	20	-	-	-	-	-	0,6π	Маси та моменти інерції блоків 2 та 3 однакові. Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
27	m	m	6m	1/2m	20	20	16	-	30	-	-	0,20	2	
28	m	2m	3m	-	20	-	14	-	60	-	0,10	-	0,1π	Шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень
29	m	1/4m	1/8m	-	-	35	-	-	15	30	0,20	0,20	2,4	
30	m	1/2m	3/10m	3/2m	26	20	20	18	30	-	0,12	-	2	

