

**БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

*Конспект лекцій*

**Харків - 2014**

Веревічева М.А. Опір матеріалів: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 222 с.

Конспект лекцій включає такі теми: прості деформації (розтягання-стиск, плоский згин, зсув і кручення стержня круглого поперечного перерізу); геометричні характеристики плоских перерізів; аналіз складного напруженого стану; теорії міцності; стійкість стиснутих стержнів; динамічна дія навантаження. Теоретичний матеріал ілюструються розв'язанням прикладних задач.

У додатках містяться відомості про механічні властивості матеріалів та інші довідкові дані, необхідні для розрахунків.

Конспект лекцій призначений для самостійної роботи студентів напряму 6.070105 «Рухомий склад залізниць» денної та заочної форм навчання.

Іл. 157, табл. 2, бібліогр.: 13 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 11 березня 2014 р., протокол № 5.

Рецензент

доц. Г.Л. Ватуля

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

*Конспект лекцій*

Відповідальний за випуск Веревічева М.А.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 15.04.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 10,0. Тираж 60. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

# ЗМІСТ

## **1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ..... 8**

1.1 Гіпотези опору матеріалів.....	9
1.2 Розрахункова схема .....	12
1.3 Види елементів.....	12
1.4 Види опор .....	13
1.5 Класифікація навантажень.....	15
1.6 Внутрішні зусилля. Метод перерізів .....	17
1.7 Напруження .....	20
1.7.1 Складові напружень. Тензор напружень .....	20
1.7.2 Закон парності для дотичних напружень.....	23
1.7.3 Вираження внутрішніх зусиль через напруження .....	23
1.8 Деформації.....	24
1.8.1 Лінійні деформації .....	24
1.8.2 Кутові деформації.....	25
1.8.3 Тензор деформацій .....	27

## **2 ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ПРИ РІЗНИХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦІЙ ..... 27**

2.1 Епюри внутрішніх зусиль .....	27
2.2 Внутрішні зусилля при розтяганні та стиску.....	27
2.3 Внутрішні зусилля при крученні.....	29
2.4 Внутрішні зусилля при згині стержнів з прямою віссю .....	32
2.5 Внутрішні зусилля в рамах .....	41
2.6 Внутрішні сили в криволінійних стержнях.....	44

## **3 РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСК ..... 51**

3.1 Напруження в перерізах, перпендикулярних до осі бруса .....	51
3.2 Напруження в перерізах, похилих до осі бруса.....	52
3.3 Деформації при розтяганні та стиску .....	54
3.3.1 Поздовжня та поперечна деформації .....	54
3.3.2 Коефіцієнт Пуассона.....	55
3.3.3 Закон Гука при розтяганні-стиску (зв'язок між деформацією та напруженням).....	56
3.3.4 Розтягання бруса зосередженою силою.....	56
3.3.5 Розтягання східчастого бруса.....	57
3.3.6 Розтягання бруса під дією власної ваги .....	58
3.3.7 Брус рівного опору .....	59

3.4	Випробування матеріалів на розтягання та стиск. Механічні характеристики матеріалів .....	57
3.4.1	Діаграми розтягання пластичних і крихких матеріалів .....	57
3.4.2	Діаграми стиску різних матеріалів .....	63
3.5	Розрахунки на міцність .....	66
3.5.1	Метод допустимих напружень.....	66
3.5.2	Умова міцності при розтяганні-стиску. Три основні задачі .....	68
3.6	Потенційна енергія деформації і робота, затрачувана на розтягання стержня .....	68
3.7	Статично невизначувані системи, які працюють на розтягання-стиск .....	71
3.7.1	Розрахунок на силові впливи .....	71
3.7.2	Розрахунок на температурні впливи .....	72
3.7.3	Розрахунок на неточність виготовлення.....	73
3.8	План вирішення завдань опору матеріалів .....	78
3.9	Приклад розв'язання задачі .....	79

#### **4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ .... 81**

4.1	Площа поперечного перерізу .....	81
4.2	Статичний момент площі .....	83
4.3	Положення центра ваги перерізу .....	84
4.4	Моменти інерції перерізу .....	86
4.4.1	Залежність між моментами інерції при паралельному перенесенні центральних осей.....	87
4.4.2	Зміна осьових і відцентрового моментів інерції при повороті координатних осей .....	89
4.4.3	Властивості осьових моментів .....	90
4.5	Головні осі і головні моменти інерції.....	91
4.6	Радіуси інерції перерізу.....	90
4.7	Моменти інерції найпростіших фігур.....	90
4.7.1	Момент інерції прямокутника.....	90
4.7.2	Моменти інерції трикутника .....	96
4.7.3	Моменти інерції круга .....	97
4.8	Моменти інерції складних фігур .....	98
4.9	Моменти опору перерізу .....	104

#### **5 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ..... 107**

5.1	Види напруженого стану.....	107
5.2	Лінійний напружений стан .....	108
5.2.1	Положення головних площинок .....	108

5.2.2	Значення головних напружень.....	108
5.2.3	Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження .....	108
5.2.4	Максимальні дотичні напруження .....	108
5.3	Плоский напружений стан .....	109
5.3.1	Положення головних площинок .....	110
5.3.2	Значення головних напружень.....	111
5.2.3	Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження .....	111
5.2.4	Максимальні дотичні напруження .....	111
5.4	Об'ємний напружений стан.....	113
5.4.1	Положення головних площинок .....	115
5.4.2	Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження .....	115
5.4.3	Максимальні дотичні напруження .....	115
5.4.4	Узагальнений закон Гука.....	116
5.4.5	Об'ємна деформація .....	117
5.4.6	Потенційна енергія деформації при об'ємному напруженому стані .....	118
<b>6</b>	<b>ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ .....</b>	<b>120</b>
6.1	Теорія найбільших нормальних напружень.....	120
6.2	Теорія найбільших відносних подовжень .....	121
6.3	Теорія максимальних дотичних напружень.....	123
6.4	Енергетична теорія міцності.....	123
<b>7</b>	<b>ПЛОСКИЙ ЗГИН ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ .....</b>	<b>126</b>
7.1	Чистий згин .....	126
7.1.1	Деформації при чистому згині .....	127
7.1.2	Напруження при чистому згині .....	128
7.1.3	Умова міцності .....	130
7.1.4	Раціональна форма перерізів.....	130
7.2	Поперечний згин .....	131
7.2.1	Дотичні напруження при поперечному згині (формула Журавського) .....	132
7.2.2	Дотичні напруження в прямокутному перерізі .....	133
7.2.3	Дотичні напруження для двотаврового перерізу .....	134
7.3	Вид напруженого стану і теорії міцності .....	135
7.4	Порядок добору перерізу та перевірки міцності при згині.....	136
7.5	Вигнута вісь балки .....	139

7.5.1 Диференціальне рівняння вигнутої осі .....	140
7.5.2 Метод безпосереднього інтегрування .....	141
7.5.3 Метод початкових параметрів .....	143
<b>8 ЗСУВ .....</b>	<b>150</b>
8.1 Дотичні напруження при зсуві .....	150
8.2 Чистий зсув.....	151
8.2.1 Деформації при чистому зсуві .....	151
8.2.2 Закон Гука при чистому зсуві. Зв'язок між $G$ і $E$ .....	152
8.2.3 Перевірка міцності при зсуві.....	153
8.2.4 Розрахунки з'єднань, що працюють на зсув .....	153
<b>9 КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ З КРУГЛИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ.....</b>	<b>160</b>
9.1 Обчислення моментів, переданих на вал .....	161
9.2 Напруження та деформації в поперечному перерізі .....	162
9.2.1 Деформації .....	162
9.2.2 Напруження.....	164
9.3 Умова міцності .....	165
9.4 Аналіз напруженого стану та руйнування при крученні .....	166
9.5 Визначення кутів закручування .....	167
9.6 Умова жорсткості.....	167
9.7 Розв'язання задач на розрахунок вала.....	168
9.8 Напруження та деформації у гвинтових циліндричних пружинах .....	171
9.8.1 Напруження.....	172
9.8.2 Деформації .....	173
9.8.3 Потенційна енергія пружини .....	174
9.8.4 Практичні висновки .....	175
9.8.5 Задачі на розрахунок циліндричної пружини .....	175
<b>10 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ.....</b>	<b>178</b>
10.1 Поняття про стійкість .....	178
10.2 Форми рівноваги .....	178
10.3 Поздовжній згин. Критична сила .....	179
10.4 Формула Ейлера визначення критичної сили для шарнірно закріпленого стержня .....	179
10.5 Формула Ейлера при різних умовах закріплення кінців стержня.....	181

10.6	Границі застосовності формули Ейлера.	
	Формула Ясинського .....	182
10.7	Класифікація стержнів .....	184
10.8	Умова стійкості .....	185
10.9	Розв'язання задач на стійкість.....	186
<b>11</b>	<b>ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕННЯ .....</b>	<b>190</b>
11.1	Пружні коливання.....	190
11.1.1	Вільні та вимушені коливання .....	190
11.1.2	Ступінь свободи динамічної системи .....	191
11.1.3	Вільні коливання системи	
	з одним ступенем свободи.....	191
11.1.4	Вимушені періодичні коливання системи	
	з одним ступенем свободи.....	197
11.2	Поняття про критичну частоту обертання.....	200
11.3	Розрахунок кільця,	
	яке рівномірно обертається (маховика).....	201
11.4	Рівноприскорений рух (піднімання вантажу).....	203
11.5	Ударна дія навантаження.....	205
11.6	Міцність матеріалів при повторно-змінних напруженнях.....	206
11.6.1	Поняття про утому матеріалів.....	206
11.6.2	Характеристики циклів напружень .....	207
11.6.3	Дослідне визначення границі витривалості.....	209
11.6.4	Розрахунок на витривалість .....	210
	<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>198</b>
	ДОДАТОК А. Механічні характеристики матеріалів .....	199
	ДОДАТОК Б. Основні формули для розрахунку простих деформацій ...	203
	ДОДАТОК В. Сортамент прокатної сталі .....	205
	ДОДАТОК Г. Геометричні характеристики деяких перерізів .....	218
	ДОДАТОК Д. Характеристики матеріалів для розрахунків на стійкість.	220
	ДОДАТОК Е. Довідкові дані .....	222

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Створюючи різні машини та споруди, конструктор зацікавлений, насамперед, у їхній безвідмовній роботі. Причинами відмов можуть бути руйнування конструкцій чи їх елементів або їх неприпустима деформація. Проблемами розрахунку конструкцій машин і споруд займається будівельна механіка. При цьому використовуються основні поняття та принципи розрахунків, які уводяться у курсі опору матеріалів на прикладах розрахунку окремих елементів і найпростіших систем.

Таким чином, *опір матеріалів* – це наука, що вивчає методи розрахунку елементів на міцність, жорсткість і стійкість.

*Міцність* – це здатність елемента або конструкції опиратися зовнішнім впливам, не руйнуючись. Наприклад, в опорній колоні під дією надмірного навантаження можуть виникнути тріщини й наступне обвалення.

*Жорсткість* – це здатність елемента або конструкції опиратися зовнішнім впливам без значної зміни розмірів. Зміни розмірів (деформації) обмежуються технічними вимогами до елемента або конструкції. Наприклад, прогин станини токарського верстата в одну десяту міліметра під дією сили, що діє на різець, призводить до неточної обробки деталі.

*Стійкість* – це здатність конструкції та її елементів зберігати задану форму рівноваги. Так, прямолінійний елемент ферми моста або поршень насоса можуть під дією надмірної стискаючої сили прийняти вигнуту форму, що виключить можливість виконання їх функцій.

Опір матеріалів є як теоретичною, так і значною мірою експериментальною наукою. Експериментально визначаються механічні властивості матеріалів. На підставі дослідів формулюються деякі закони, що описують співвідношення між механічними величинами (навантаженнями, переміщеннями і т. д.). Ці закони можуть бути чисто емпіричними, а можуть випливати з фізичних міркувань. Тому опір матеріалів тісно пов'язаний з фізикою жорсткого тіла, теоретичною механікою (у яких тіло вважається недеформованим) і з теорією пружності (у



якій розглядаються доволіно великі деформації та одержуються більш загальні результати).

Питання застосування результатів тієї або іншої науки – це питання тих обмежень реальної дійсності, які дослідник може дозволити. Тому, перш ніж приступати до вивчення науки, потрібно сформулювати ці обмеження (гіпотези).

### 1.1 Гіпотези опору матеріалів

- 1 Матеріал, з якого виготовлений елемент, є суцільним (тобто заповнює форму елемента без порожнеч). При цьому не враховується конкретна структура матеріалу (зерниста, кристалічна і т. д.). Це допущення дозволяє використовувати математичний апарат нескінченно малих (диференціювання, інтегрування).
- 2 Матеріал вважається однорідним (тобто його механічні властивості однакові в усіх точках).
- 3 Матеріал вважається ізотропним (тобто його механічні властивості однакові в будь-якому напрямку). Із цього правила є виключення, наприклад деревина, властивості якої є різними уздовж і поперек волокон, або армовані матеріали.
- 4 Матеріал є ідеально пружним, тобто розміри і форма елемента повністю відновлюються після того, як усунуті зовнішні впливи.
- 5 Деформації є малими порівняно з розмірами елемента. Це дає можливість нехтувати змінами в розміщенні сил щодо елемента при деформації та складати рівняння рівноваги, як і для недеформованого елемента.

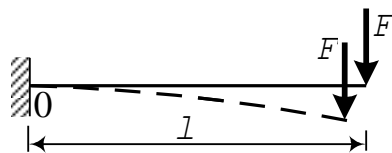


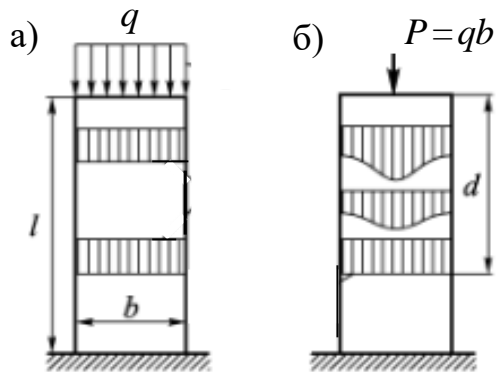
Рисунок 1.1

Так, якщо деформація показаної на рисунку 1.1 балки мала, то при записі рівняння рівноваги можна знехтувати зміною плеча сили  $F$  відносно точки  $0$  та вважати його рівним  $l$ .

- 6 Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Плоскі перерізи при деформації елемента залишаються плоскими.

Випадки, коли ця гіпотеза не виконується, обговорюються окремо.

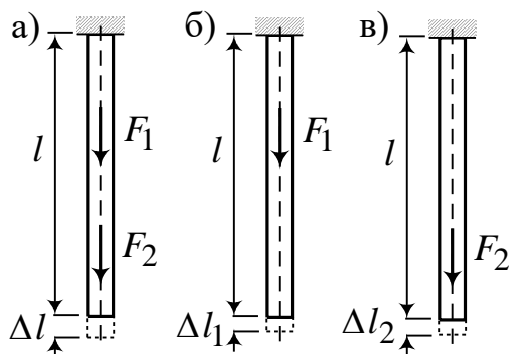
7 Принцип Сен-Венана. Спосіб прикладення навантаження не впливає на характер розподілу деформацій і напружень на деякій відстані від навантаженого перерізу (ця відстань приблизно дорівнює характерному розміру перерізу).



Наприклад, на рисунку 1.2 показаний стержень, завантажений розподіленим навантаженням  $q$  (рисунок 1.2, а) і його рівнодіючою, прикладеною в точці (рисунок 1.2, б). Розподіл деформацій у міру віддалення від навантаженого перерізу стає зрим.

Рисунок 1.2 – До принципу Сен-Венана

Якщо виконуються гіпотези 1 – 4 щодо властивостей матеріалу елемента і деформації є малими (гіпотеза 5), то має місце лінійна залежність між деформацією елемента і прикладеним навантаженням, тобто виконується закон Гука (елемент є *лінійно пружним*). Для таких елементів має місце *принцип незалежності дії сил*: результат дії групи сил дорівнює сумі (алгебраїчній або геометричній) результатів, отриманих від дії кожної сили окремо.



Наприклад, подовження стержня на рисунку 1.3, а від одночасної дії сил  $F_1$  і  $F_2$  дорівнює сумі його подовжень від роздільної дії цих сил (рисунок 1.3, б, в):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Рисунок 1.3 – До принципу незалежності

Крім того, подовження  $\Delta l_k$  від сили  $kF$  дорівнює добутку числа  $k$  на подовження  $\Delta l$  від сили  $F$ :  $\Delta l_k = k\Delta l$ .

Лінійна пружність усіх елементів конструкції та малість деформацій достатні для того, щоб принцип незалежності дії сил виконувався для всієї конструкції в цілому.

## 1.2 Розрахункова схема

Розрахунок будь-якої конструкції починається з побудови її розрахункової схеми. При цьому вводяться різні схематизації й спрощення навантажень, умов обпирання, конструктивних елементів. Ці спрощення повинні бути такими, щоб схема відображала все істотне для роботи елемента або конструкції й не містила другорядних факторів. Таким чином, розрахункову схему можна визначити так.

**Розрахунковою схемою** називається умовне ідеалізоване зображення елемента або конструкції, що відображає їхні основні властивості й використовується при розрахунках.

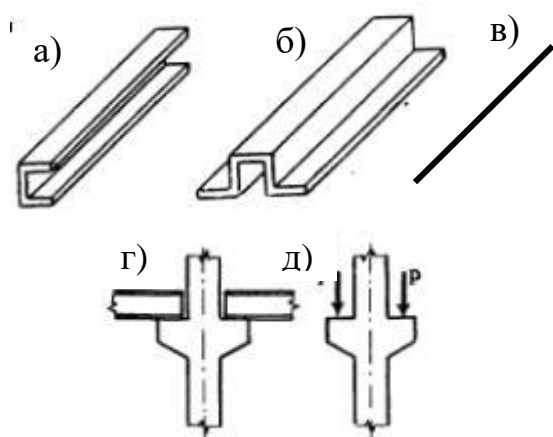


Рисунок 1.4

Для того щоб скласти розрахункову схему конструкції, потрібно знати, які для цього можна використовувати конструктивні елементи і види навантажень.

## 1.3 Види елементів

1 **Стержень** – це елемент, довжина якого набагато більша від розмірів поперечного перерізу (рисунок 1.5). Вісь стержня – це лінія, що проходить через центри ваги поперечних перерізів.

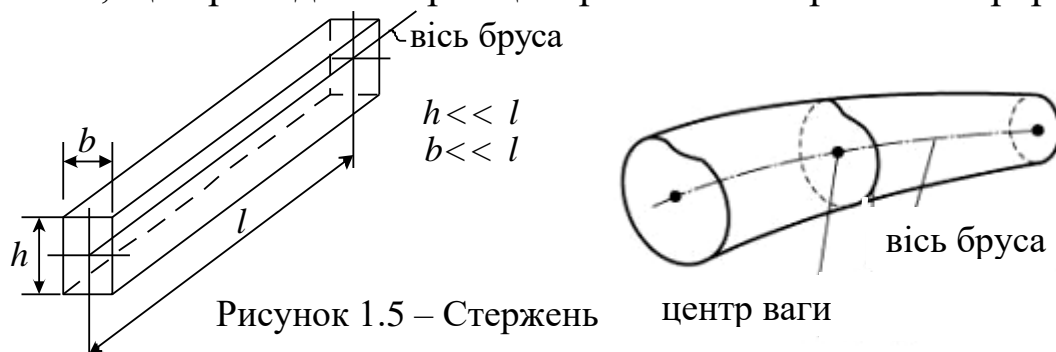


Рисунок 1.5 – Стержень

2 **Пластина (оболонка)** – це елемент, товщина якого  $h$  набагато менше від його розмірів у плані (рисунок 1.6, а, б).

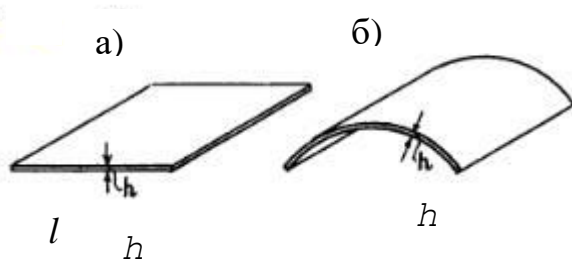


Рисунок 1.6 – Пластина (а) та оболонка (б)

У будівельних конструкціях пластини зустрічаються у вигляді плит перекриттів і фундаментів; оболонки – у вигляді обшивок кораблів і вагонів, стінок резервуарів і т. д.

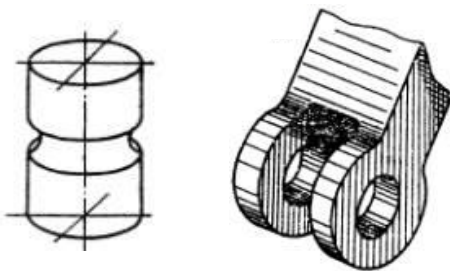


Рисунок 1.7 – Тіло

3 **Тіло** – це елемент, розміри якого порівнянні між собою. До таких елементів можна віднести блоки фундаментів, станини машин, головки болтів і т. п. (рисунок 1.7).

## 1.4 Види опор

Найчастіше на практиці застосовують такі типи опор.

**Шарнірно-рухома опора** не допускає переміщення за напрямком опорного зв'язку. На рисунку 1.8, а, б показано схему та загальний вигляд шарнірно-рухомої опори. Наведена опора допускає переміщення опорного перерізу по горизонталі і поворот його у вертикальній площині відносно осі циліндричного шарніра А, однак не дає можливості переміщення по вертикалі. На такій опорі виникає одна реакція, спрямована уздовж опорного зв'язку (рисунок 1.8, а). У загальному випадку напрямок опорного зв'язку може бути довільним (рисунок 1.8, в).

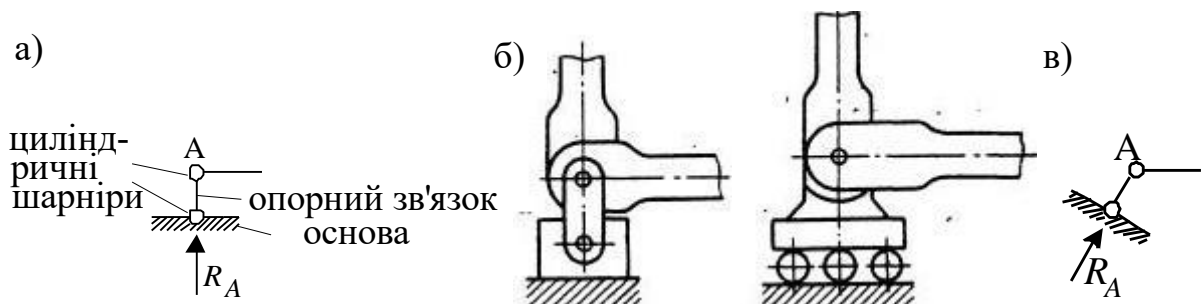


Рисунок 1.8 – Шарнірно-нерухома опора

**Шарнірно-нерухома опора** не допускає зміщень опорного перерізу ні в поздовжньому, ні в поперечному напрямках, але допускає поворот цього перерізу відносно шарніра. Отже, шарнірно-нерухома опора – опора із двома зв'язками. На такій опорі виникають дві опорні реакції за напрямками опорних зв'язків (рисунок 1.9, а). Їх зручно розкласти на вертикальну і горизонтальну складові  $R$  та  $H$  (рисунок 1.9, б). На рисунку 1.9, в наведено загальний вигляд такої опори та шарнірно-нерухома опора металевої колони.

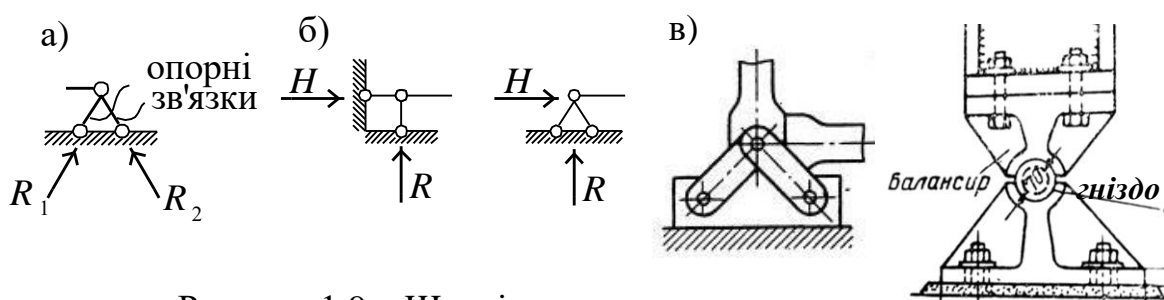
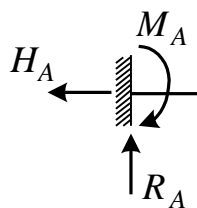
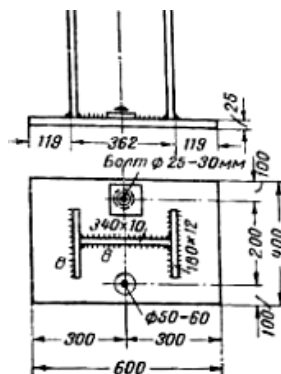


Рисунок 1.9 – Шарнірно-рухома опора

**Жорстке закріплення (защемлення, закладення)** не допускає повороту опорного перерізу і переміщення його ні в якому напрямку, тобто на цей переріз накладено три зв'язки. У такій опорі виникає вертикальна й горизонтальна складові опорної реакції ( $R_A$  і  $H_A$ ) і згинальний момент  $M_A$ . На рисунку 1.10 наведені схема опори й приклад жорсткого закріплення



КОЛОНИ.



Якщо на елемент або систему діє навантаження, розташоване в одній площині, то для нерухомого з'єднання з основою елемент або система повинні мати не менше трьох зв'язків, причому зв'язки повинні бути правильно розташовані: 1) не повинно бути трьох паралельних зв'язків; 2) не повинно бути трьох зв'язків, які перетинаються в одній точці.

Рисунок 1.10 – Защемлення

## 1.5 Класифікація навантажень

При роботі споруд або машин їх частини сприймають зовнішні навантаження. Класифікацію зовнішніх навантажень можна провести за декількома ознаками: спосіб прикладання, час дії, характер дії. Розглянемо ці класифікації докладно.

### Класифікація за способом прикладання

1 *Об'ємне навантаження* – навантаження, яке розподіляється по всьому об'єму елемента (прикладена до кожної частинки матеріалу). Наприклад, вага або сила інерції.

2 *Поверхневе навантаження* – навантаження, прикладене на поверхні елемента. Наприклад, тиск рідини на стінки резервуара, тиск снігу на покриття будинку і т. д. Виділяють такі види поверхневого навантаження.

*Зосереджена сила* – це сила, які передається тілу по поверхні, досить малій порівняно з його розмірами. Умовно цю силу вважають прикладеною в точці.

Зображується на схемі стрілочкою і позначається найчастіше буквою  $F$  (або  $\downarrow F$ ).

Одиниці виміру – ньютон (Н),  $1\text{кН}=10^3\text{Н}$ ,  $1\text{кН}=10^6\text{Н}$ , кілограм сили (кгс або кг);  $1\text{кг}=9,8\text{Н}\approx 10\text{Н}$ ; інші похідні від цих одиниць.

*Зосереджений момент* (пара сил) – це момент, який умовно вважають прикладеним у точці. Зображення моменту на схемі показане на рисунку:



Одиниця виміру – ньютон·метр (Нм) і похідні від цієї одиниці.

*Розподілене навантаження* – навантаження, прикладене по деякій площі або лінії на поверхні тіла. Наприклад, тиск снігу на дах будинку. Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю, тобто величиною навантаження, що припадає на одиницю довжини, площі або об'єму ( $\text{Н/м}$ ,  $\text{Н/м}^2$ ,  $\text{Н/м}^3$ ). Якщо навантаження має однакову інтенсивність по всій площі або довжині, то його називають рівномірно розподіленим, а якщо ні, то – нерівномірно розподіленим. На схемі розподілене навантаження позі



У дійсності через точку, тобто об'єкт, що не має розмірів, неможливо передати впливу ненульового значення. Тому зосереджена сила або момент – це типова схематизація реальності, що дозволяє побудувати фізико-математичну розрахункову модель. При розрахунку конструкції в цілому така схематизація допускається принципом Сен-Венана. Але вона неприпустима, якщо вивчається зона контакту елементів. У цьому випадку навантаження розглядається як розподілене.

Наприклад, для розрахунку вала шестірні (рисунок 1.11, а) реакція на опорі ( $R_1, R_2$ ) може розглядатися як зосереджене навантаження; для розрахунку довговічності шарніру опори те саме зусилля взаємодії розглядається як розподілений контактний тиск (рисунок 1.11, б).

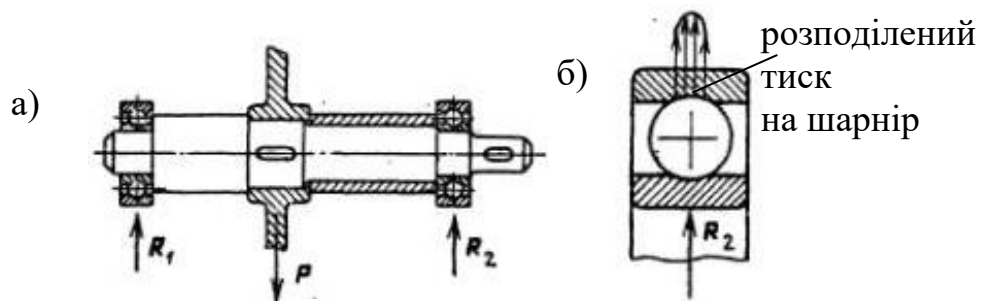


Рисунок 1.11 – Схеми для розрахунку вала (а) та шарніру (б)

### *Класифікація за часом дії*



За тривалістю дії навантаження поділяють на *постійні*, що діють протягом усього періоду експлуатації конструкції (вага, сила інерції), і *тимчасові*, що діють лише в деякі проміжки часу (тиск людей на перекриття будинку, напір вітру на вежу, снігове навантаження та ін.).

### ***Класифікація за характером дії***

За характером дії навантаження поділяють на статичні і динамічні.

Навантаження, яке є постійним або дуже повільно змінюється у часі, коли швидкостями й прискореннями виникаючого руху можна нехтувати, називається *статичним*.

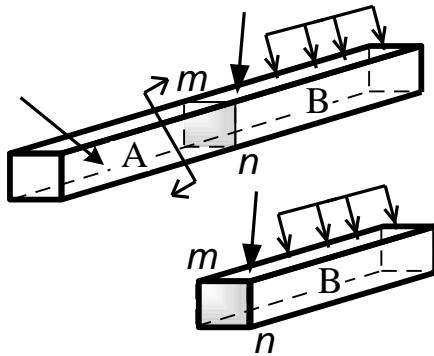
Навантаження, що передає масам системи прискорення, які необхідно враховувати при розрахунках, називають *динамічним*. Це, наприклад, удар (характеризується різкою зміною швидкості тіла, яке зазнає удару), короткочасне навантаження або імпульс (вибух), періодичне навантаження (наприклад, вібраційне), рухоме навантаження (навантаження, що змінює своє положення, наприклад, рухомий склад).

### **1.6 Внутрішні зусилля. Метод перерізів**

Між сусідніми частинками тіла (кристалами, атомами) завжди є певні сили взаємодії. Під дією зовнішніх сил в елементі виникають додаткові сили взаємодії – *внутрішні сили*, що супроводжують деформацію матеріалу. Ці сили у всіх випадках прагнуть зберегти його як єдине ціле, протидіють будь-якій спробі змінити взаємне розташування частинок, тобто деформувати тіло.

Зі збільшенням зовнішнього навантаження зростають і внутрішні сили. Якщо зовнішні сили перевищують сили внутрішньої взаємодії, то відбувається руйнування. Тому знання внутрішніх сил необхідно для оцінки міцності елемента. Для їхнього обчислення застосовують *метод перерізів*, що полягає в наступному.

Розглянемо довільне тіло, навантажене самоурівноваженою системою сил (рисунок 1.12).



1 У перерізі, що цікавить нас, подумки розсічемо тіло площиною  $m-n$  на дві частини А і В.

2 Подумки відкинемо частину елемента по один бік від перерізу, наприклад, частину А. У кожній точці обох частин перерізу діють сили взаємодії.

Виходячи з гіпотези про суцільність матеріалу слід уважати, що внутрішні сили діють у всіх точках проведеного перерізу і, отже, являють собою розподілене навантаження. Як будь-яку систему сил, їх можна привести до однієї точки (звичайно до центра ваги перерізу). Таким чином, одержимо головний вектор і головний момент внутрішніх сил.

3 Визначаємо значення головного вектора і головного моменту внутрішніх сил, записуючи рівняння рівноваги в перерізі: головний вектор сил у перерізі А, відповідно до третього закону Ньютона, дорівнює за величиною і протилежний за напрямком рівнодіючій зовнішніх сил у частині В; головний момент внутрішніх сил у перерізі А дорівнює за величиною й протилежний за напрямком рівнодіючій зовнішніх моментів у частині В.

Якщо головний вектор і головний момент внутрішніх сил

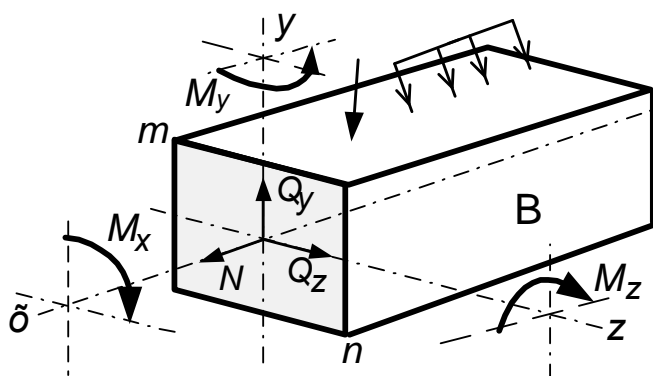


Рисунок 1.13 – Внутрішні зусилля

спроєктувати на вісь стержня  $x$  і головні центральні осі перерізу  $z$  і  $y$  (див. тему 2), то на кожній стороні перерізу одержимо шість внутрішніх силових факторів (рисунок 1.13): три сили  $Q_x = N, Q_y, Q_z$  і три моменти  $M_x = M_K, M_y,$

$$M_z.$$

Для внутрішніх силових факторів прийняті такі назви:

$N = Q_x$  – *поздовжня або осьова сила* (спрямована вздовж осі стержня);

$Q_y, Q_z$  – *поперечні сили* (рідше – *перерізуючі*);

$M_y, M_z$  – *згинальні моменти*;

$M_K = M_x$  – *крутний момент*.

При кожному конкретному навантаженні деякі зусилля можуть дорівнювати нулю.

Залежно від того, які із цих зусиль відмінні від нуля, виділяють 4 види простих деформацій. Інші деформації представляються у вигляді комбінації цих чотирьох видів і називаються складними.

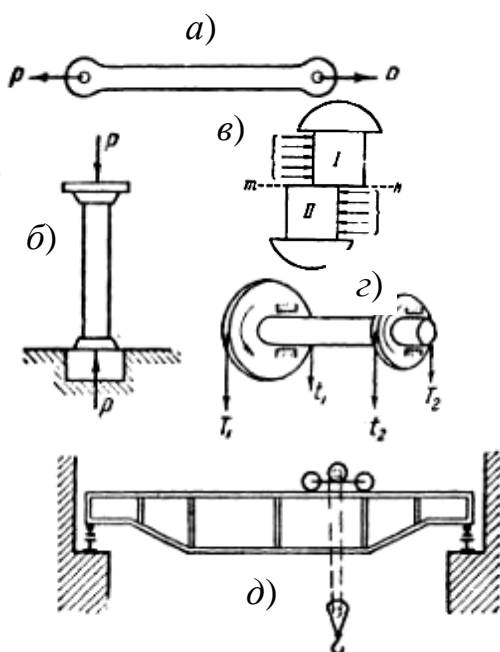
### **Прості деформації**

1 Деформація, при якій тільки  $N \neq 0$ , називається «розтягання – стиск».

2 Деформація, при якій  $Q_z \neq 0$  ( $Q_y \neq 0$ ), називається «зсув» або «зріз».

3 Деформація, при якій  $M_K \neq 0$ , називається «кручення».

4 Деформація, при якій  $Q_z \neq 0$  і  $M_y \neq 0$  або  $Q_y \neq 0$  і  $M_z \neq 0$ , називається «плоский згин».



Приклади таких деформацій наведені на рисунку 1.14:

а, б) розтягання вагонної стязки та стиск колони;

в) зсув (перерізування) болта;

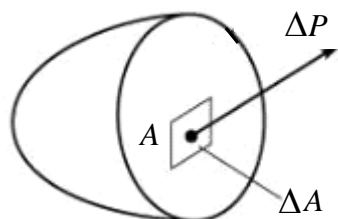
г) кручення вала;

д) згин підкранової балки під вагою крана.

Рисунок 1.14 – Приклади простих деформацій

## 1.7 Напруження

Внутрішні зусилля, які ми задаємо одним значенням для всього перерізу, насправді розподілені («розмазані») по всьому перерізу і можуть бути сильнішими або слабкішими в різних точках. Тому необхідно ввести характеристику розподілу (інтенсивності) сил взаємодії, а саме – *напруження*.



Розглянемо малий елемент площі перерізу  $\Delta A$  навколо точки  $A$  і припустимо, що на нього діє сила  $\Delta P$  (рисунок 1.15).

Рисунок 1.15

**Напруженням** (повним напруженням) у точці  $A$  називається величина

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}.$$

Таким чином, *напруженням у точці називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці розглянутого перерізу. Інакше кажучи, це інтенсивність розподілу внутрішніх сил.*

Одиниця виміру напруження в системі СИ – це  $\text{Н}/\text{м}^2$ , у техніці напруження звичайно виражають у  $\text{кг}/\text{см}^2$ . Для одиниці  $\text{Н}/\text{м}^2$  вводиться спеціальне позначення Па (паскаль):  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ ,  $1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$ ,  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ .

Вектор напруження  $p$  прийнято розкласти на складові по нормалі  $\mathbf{n}$  до перерізу та у площині перерізу, як це показано на рисунку 1.16.

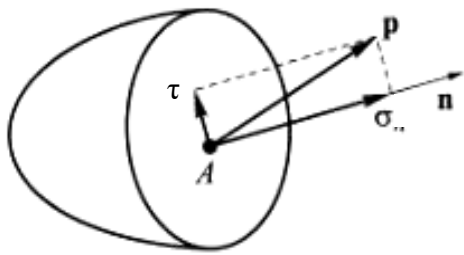


Рисунок 1.16 – Складові вектора напружень

Складова напруження  $p$  по нормалі позначається буквою  $\sigma$  і називається **нормальним напруженням**.

Складова напруження  $p$  в площині перерізу позначається буквою  $\tau$  і називається **дотичним напруженням**.

Експериментально встановлено, що нормальні і дотичні напруження впливають на міцність матеріалу по-різному, тому складові вектора напружень звичайно розглядаються окремо.

На рисунку 1.17 наведені приклади напружень у перерізі болта: а) нормальне напруження, що виникає при розтяганні, б) дотичне напруження, що виникає при зрізі.

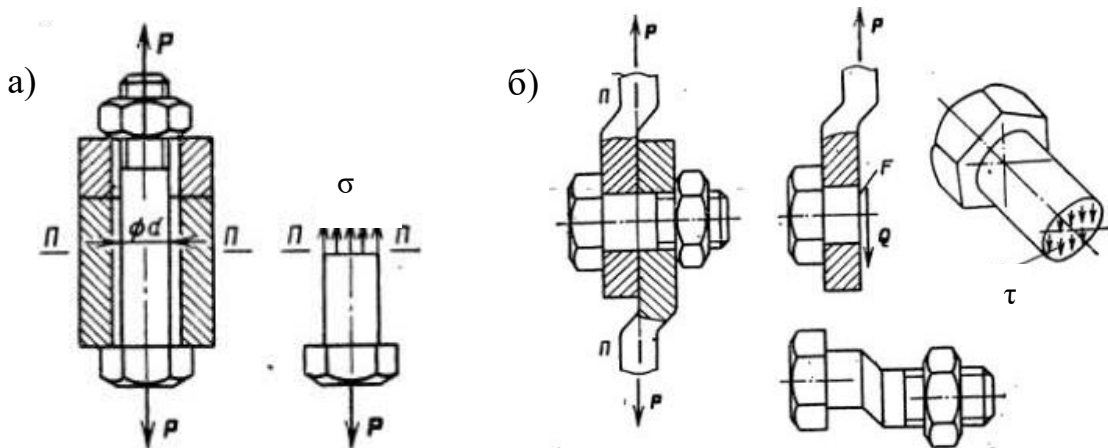


Рисунок 1.17– Напруження у перерізі болта

За величинами напружень судять про міцність елементів конструкцій і машин. Оскільки напруження повністю визначає сили взаємодії частин елемента як у цілому, так і в кожній точці перерізу, то можна сказати, що **напруження є критерієм міцності**.

### 1.7.1 Складові напружень. Тензор напружень

Дотичне напруження (рисунок 1.16), у свою чергу, розкладається по осях у площині перерізу і позначається двома

індексами. Перший індекс позначає напрямок нормалі до розглянутої площинки, другий індекс – напрямок складової напруження.

Таким чином, у кожній точці отримуємо набір напружень, показаний на рисунку 1.18. Сукупність напружень у всіх перерізах, що проходять через дану точку, називається *напруженим станом* у точці. Докладно напружений стан буде вивчений у темі. 5.

### Правила знаків

*Нормальне напруження* додатне, якщо воно є розтягувальним.

*Дотичне напруження* додатне, якщо воно надає момент за годинниковою стрілкою відносно центра ваги елемента.

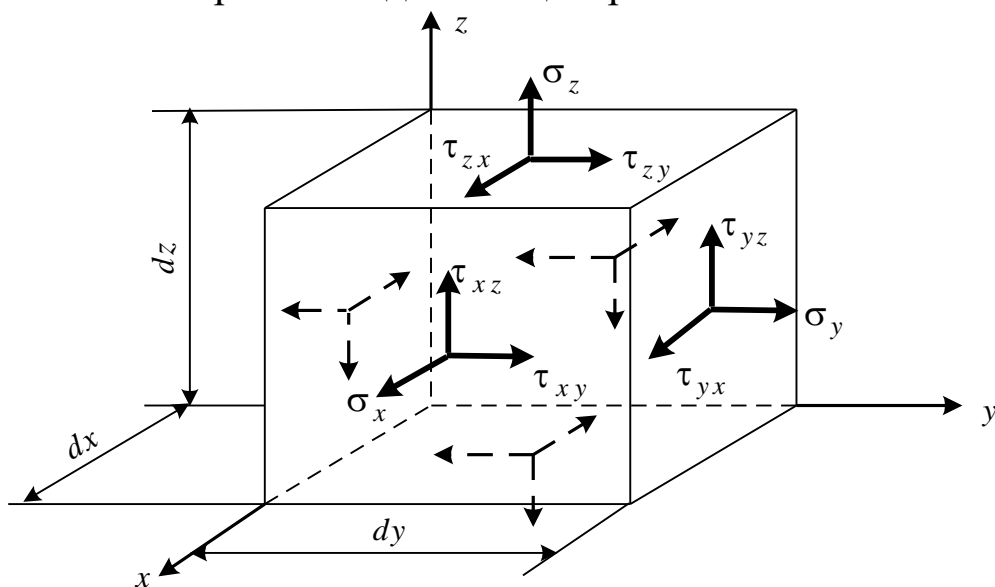


Рисунок 1.18 – Напруження на гранях елемента

Напруження, що діють на елемент об'єму (рисунок 1.18), утворюють так званий *тензор напружень*

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Тут перший стовпець складається з компонентів напруження, що діють на площинках, нормальних до осі  $x$ , другий – до осі  $y$ , третій – до осі  $z$ . Якщо заданий тензор напружень, то напружений стан у точці цілком визначений.

### 1.7.2 Закон парності для дотичних напружень

Візьмемо момент сил, що діють на елемент, відносно осі  $x$  (рисунок 1.18). У результаті одержимо

$$(\tau_{zy} dx dy) dz = (\tau_{yz} dx dz) dy ,$$

звідки

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} .$$

Аналогічно, якщо взяти момент сил відносно осей  $z$  і  $y$ , знайдемо

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \tau_{xz} = \tau_{zx} .$$

Рівності

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} , \tau_{xy} = \tau_{yx} , \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

називаються законом парності (взаємності) дотичних напружень і формулюються так: по двох взаємно перпендикулярних площинках складові дотичного напруження, перпендикулярні до лінії перетинання цих площинок, рівні між собою і протилежні за напрямком.

### 1.7.3 Вираження внутрішніх зусиль через напруження

Виділимо елемент площі навколо деякої точки та покажемо напруження, що діють у цій точці (рисунок 1.19).

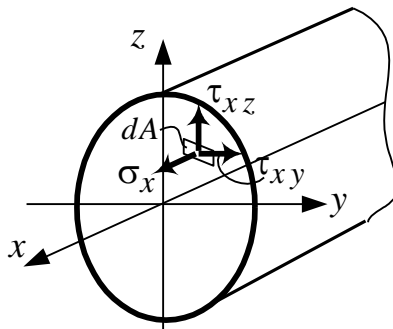


Рисунок 1.19 – Напруження у точці

Виходячи із цього представлення, а також з визначення внутрішніх зусиль (рисунок 1.1), установимо загальні залежності між внутрішніми зусиллями та напруженнями:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A dN = \int_A \sigma_x dA ; \\
 Q_y &= \int_A dQ_y = \int_A \tau_{xy} dA ; \quad Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_{xz} dA ; \\
 M_y &= \int_A z dN = \int_A \sigma_x z dA ; \quad M_z = \int_A y dN = \int_A \sigma_x y dA ; \\
 M_x &= \int_A (y dQ_z - z dQ_y) = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA . \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Формули (1.2) математично виражають той факт, що величина напруження є заходом внутрішніх сил, які виникають у матеріалі під дією зовнішніх сил.

## 1.8 Деформації

*Деформацією* називається зміна розмірів і форми елемента при зовнішніх впливах. З визначення випливає, що *деформація є критерієм жорсткості*.

Згідно з гіпотезами п. 1.1, будемо розглядати тільки малі деформації, які зустрічаються в інженерних спорудах.

### 1.8.1 Лінійні деформації

Малі переміщення частинок деформованого тіла звичайно розкладаються на складові  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , паралельні осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рисунок 1.20). Припускаємо, що ці складові змінюються безперервно в об'ємі тіла.



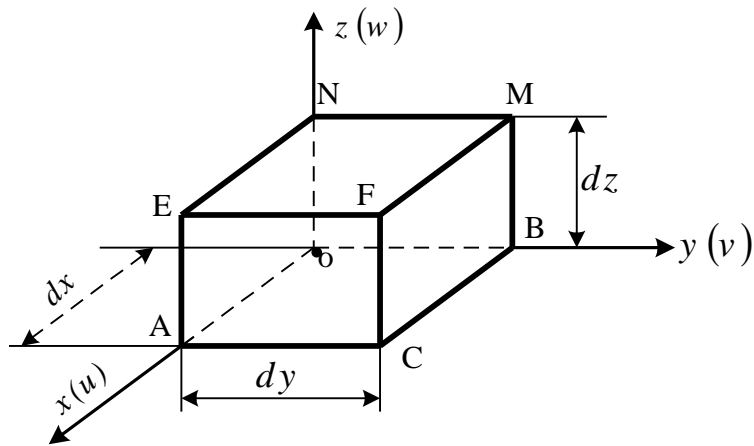


Рисунок 1.20 – До виведення залежностей між лінійними деформаціями і переміщеннями

Розглянемо нескінченно малий елемент  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  пружного тіла (рисунок 1.20). Якщо переміщення точки  $O$  уздовж осі  $x$  дорівнює  $u$ , то переміщення нескінченно близької до неї точки  $A$  дорівнює  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , оскільки зі збільшенням координати

$x$  на  $dx$  функція  $u$  отримує збільшення  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

Отже, відносне подовження (відношення зміни довжини до початкової довжини) у напрямку осі  $x$  дорівнює

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Аналогічно, лінійні деформації в напрямках  $y$ ,  $z$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.4)$$

### 1.8.2 Кутові деформації

Крім лінійних деформацій  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , тіло зазнає і кутових деформацій. Розглянемо викривлення кута між елементарними відрізками  $OA$  та  $OB$  (рисунок 1.21). Якщо  $u$  і  $v$  є переміщеннями точки  $O$  в напрямку осей  $x$  і  $y$ , то переміщення

точки А в напрямку осі  $y$  і точки В у напрямку осі  $x$  будуть відповідно  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  і  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ .

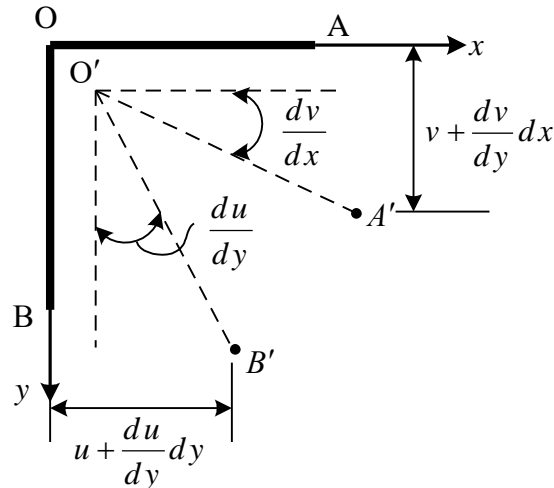


Рисунок 1.21 – До виведення залежностей між кутовими деформаціями і переміщеннями

Внаслідок цих переміщень новий напрямок  $O'A'$  буде складати зі своїм початковим напрямком зазначений на рисунку 1.21 кут  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Так само напрямок  $O'B'$  буде складати з напрямком  $OB$  малий кут  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Звідси випливає, що спочатку прямий кут  $AOB$  між елементами  $OA$  і  $OB$  стане менше на величину

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Це і є деформацією зсуву між площинами  $xz$  і  $yz$ .

Таким чином, деформації зсуву між площинами  $xz$  і  $yz$  (які вже отримані) і між площинами  $xy$  і  $xz$ ,  $yx$  і  $yz$  (які отримуються аналогічно) дорівнюють відповідно:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Як і лінійні деформації (1.3), (1.4), кути зсуву є досить малими і мають порядок  $\gamma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$ .

### 1.8.3 Тензор деформацій

Отримані відносні деформації в точці зведемо в таблицю

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5\gamma_{xy} & 0,5\gamma_{xz} \\ 0,5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0,5\gamma_{yz} \\ 0,5\gamma_{zx} & 0,5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

у якій кути зсуву з метою аналогії з тензором напружень (1.1) поділені навпіл. Величини (1.8) кількісно визначають деформації матеріалу у околу точки і становлять тензор деформацій.

## 2 ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ПРИ РІЗНИХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦІЙ

### 2.1 Епюри внутрішніх зусиль

Для наочного представлення внутрішніх зусиль будують їх епюри. *Епюрою* називається графік залежності внутрішнього силового фактора (зусилля, напруження) від координати на осі елемента. Основна мета побудови епюри – визначити положення небезпечного перерізу або перерізів та зусиль у цих перерізах.

*Небезпечний* переріз – це переріз, у якому є небезпека руйнування, а саме – переріз з максимальними або порівняно великими зусиллями. По цих перерізах виконується перевірка міцності або визначення розмірів площі перерізу елемента.

### 2.2 Внутрішні зусилля при розтяганні та стиску

При дії на стержень зовнішніх навантажень, спрямованих уздовж поздовжньої осі, у поперечних перерізах виникає тільки

один силовий фактор – поздовжня сила. Такі навантаження викликають розтягання та стиск стержня.

Згідно з методом перерізів, поздовжня сила в поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій зовнішніх сил на вісь стержня, прикладених по один бік від перерізу.

Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання (спрямована від перерізу), і від’ємною, якщо вона викликає стиск (спрямована до перерізу).

Побудуємо епюру поздовжніх сил для східчастого стержня (рисунок 2.1) з урахуванням його власної ваги. Площа перерізу верхньої частини дорівнює  $A_1$ , нижньої –  $A_2$ , об’ємна вага матеріалу стержня –  $\gamma$ .

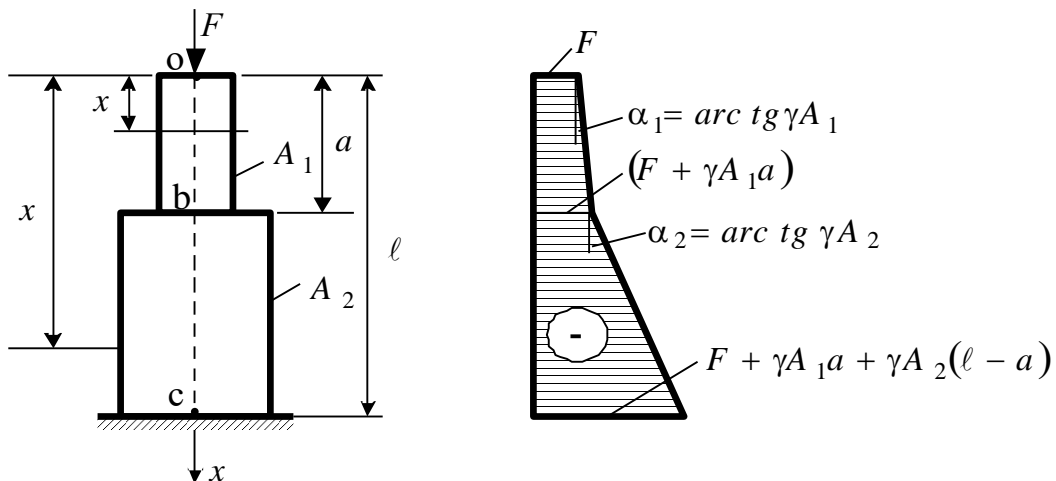


Рисунок 2.1 – До побудови епюри поздовжніх сил у стержні

Початок координат вибираємо в точці О.

Ділянка об:  $0 \leq x \leq a$

$$N_x = -F - \gamma A_1 x .$$

Ділянка вс:  $0 \leq x \leq l$

$$N_x = -F - \gamma A_1 a - \gamma A_2 (x - a) = -F - \gamma A_1 a + \gamma A_2 a - \gamma A_2 x .$$

Отримані рівняння є рівняннями похилих прямих, отже епюра  $N$  трапецієподібною. Тангенс кута нахилу прямої дорівнює коефіцієнту при  $x$ , отже кут зростає зі збільшенням площі перерізу.

## *Диференціальні залежності при розтяганні-стиску*

Розглянемо стержень, навантажений поздовжнім розподіленим навантаженням  $t_x$  (рисунок 2.2). Виділимо зі стержня елемент довжиною  $dx$ .

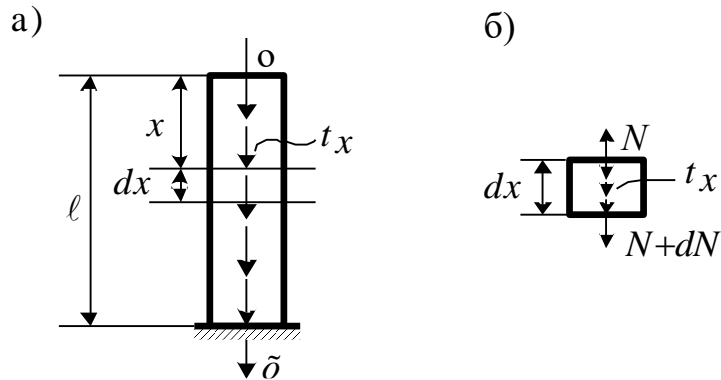


Рисунок 2.2 – До виведення диференціальної залежності між  $t_x$  і  $N$

На нього діє навантаження  $t_x$ , яке можна вважати рівномірно розподіленим через малість  $dx$ , і врівноважуючі поздовжні сили: у верхньому перерізі  $N$ , у нижньому  $N + dN$ , де  $dN$  – збільшення поздовжньої сили на ділянці довжиною  $dx$ .

Складемо рівняння рівноваги – сума проєкцій усіх сил, прикладених до елемента, на вісь стержня дорівнює нулю:

$$-N + t_x dx + (N + dN) = 0.$$

Звідси

$$\frac{dN}{dx} = -t_x.$$

Ця залежність використовується, зокрема, при перевірці правильності побудови епюри  $N$ . Якщо визначити похідні у вираженнях  $N_x$  на ділянках об і вс, то побачимо, що на ділянці об (рисунок 2.1) повинно діяти рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\gamma A_1$ , а на ділянці вс  $-\gamma A_2$ , що відповідає умові завдання.

### **2.3 Внутрішні зусилля при крученні**

Стержень, який навантажений моментами, що діють у площинах, перпендикулярних до його поздовжньої осі, зазнає кручення. Такі стержні називають валами. При цьому в

поперечних перерізах вала виникає тільки одне внутрішнє зусилля – крутний момент  $M_x$  (або  $M_K$ ).

Крутний момент у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, розташованих по один бік від перерізу.

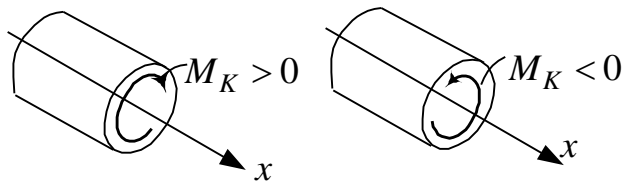


Рисунок 2.3 – Залишена частина елемента

Крутний момент вважається додатним, якщо при погляді на переріз уздовж осі з боку відкинutoї частини елемента видно, що він повертає залишену частину за годинниковою стрілкою, як показано на рисунку 2.3.

Побудуємо епюру  $M_K$  для вала, який показаний на рисунку 2.4.

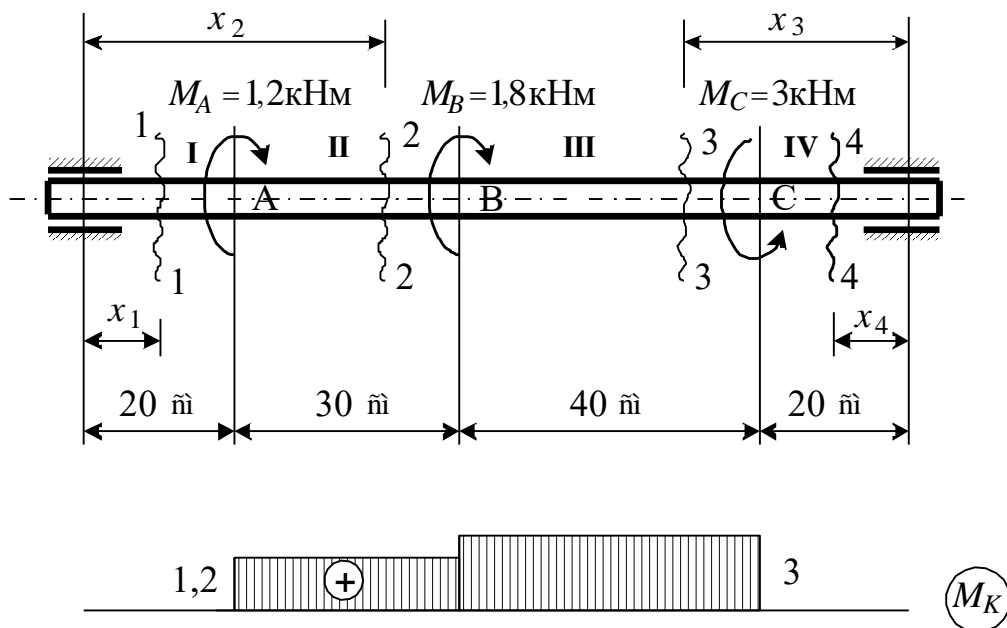


Рисунок 2.4 – До побудови епюри  $M_K$  для вала

Розбиваємо стержень на чотири ділянки. Використовуючи метод перерізів, на ділянці I подумки проводимо в довільному місці переріз 1-1 (початок координат приймаємо в крайньому

лівому перерізі), відкидаємо праву частину стержня і розглядаємо рівновагу лівої частини:

$$\text{при } 0 \leq x_1 \leq 20 \text{ см} \quad M_1 = 0.$$

Крутний момент у довільному перерізі 2-2 ділянки II відповідно до наведеного правила знаків дорівнює

$$\text{при } 20 \text{ см} \leq x_2 \leq 50 \text{ см} \quad M_2 = M_A = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутний момент на ділянці III (залишеною частиною є права, початок координат – у крайньому правому перерізі)

$$\text{при } 20 \text{ см} \leq x_3 \leq 60 \text{ см} \quad M_3 = M_c = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутний момент на ділянці IV дорівнює нулю, тобто

$$\text{при } 0 \leq x_4 \leq 20 \text{ см} \quad M_4 = 0.$$

При побудові епюри крутних моментів додатні значення крутних моментів будемо відкладати угору від базисної лінії, а від’ємні значення – униз (рисунок 2.4).

### *Диференціальні залежності при крученні*

Крім зовнішніх зосереджених крутних моментів, на стержень (вал) може діяти і розподілене за деяким законом моментне навантаження інтенсивністю  $m_x$ . Між цим зовнішнім моментним навантаженням  $m_x$  і крутним моментом  $M_x$  ( $M_K$ ) існує диференціальна залежність. Для її одержання розглянемо стержень із моментним навантаженням  $m_x$  (рисунок 2.5), з якого виріжемо елемент довжиною  $dx$ .

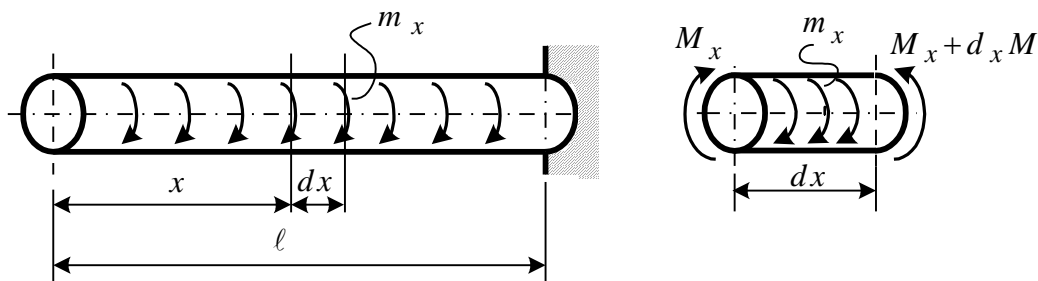


Рисунок 2.5 – До виведення диференціальної залежності між  $m_x$  і  $M_x$

Цей елемент навантажений додатними крутними моментами  $M_x$  та  $(M_x + dM_x)$ , де  $dM_x$  – збільшення крутного моменту, і зовнішнім розподіленим моментним навантаженням  $m_x$ , яке можна вважати рівномірно розподіленим через малість  $dx$ .

Складемо рівняння рівноваги для елемента:

$$\sum M_x = 0: M_x + m_x dx - (M_x + dM_x) = 0.$$

Звідси

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x.$$

Використовуємо цю залежність для перевірки правильності побудови епюри  $M_K$  (рисунок 2.4). Обчислимо перші похідні на ділянках I, II, III, IV. Вони дорівнюють нулю. Звідси випливає, що рівномірно розподілене навантаження відсутнє, що відповідає умові завдання.

## 2.4 Внутрішні зусилля при згині стержнів з прямою віссю

Стержень, що зазнає згину, називають балкою. В інженерній практиці часто використовуються балки з поперечним перерізом, що має вертикальну вісь симетрії. Якщо зовнішнє навантаження та реактивні зусилля лежать в одній площині, яка збігається з віссю симетрії перерізу, то балка буде згинатися в тій самій площині (вісь стержня, що згинається, не виходить із цієї площини). Такий згин називають плоским. Далі будуть розглядатися випадки, коли при плоскому згині зовнішнє навантаження перпендикулярне до поздовжньої осі балки і діє в площині симетрії. Тому в поперечних перерізах балки виникають тільки поперечна сила та згинальний момент.

*Поперечна сила в будь-якому перерізі балки дорівнює сумі проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль до осі балки.*

*Поперечна сила вважається додатною, якщо вона спрямована так, що прагне повернути елемент балки по ходу годинникової стрілки (рисунок 2.6, а).*



*Згинальний момент у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі всіх згинальних моментів, розташованих по один бік перерізу.*

*Згинальний момент вважається додатним, якщо він згинає елемент балки опуклістю вниз, викликаючи розтягання нижніх волокон (волоконном називають лінію, паралельну до осі елемента) (рисунок 2.6, б).*

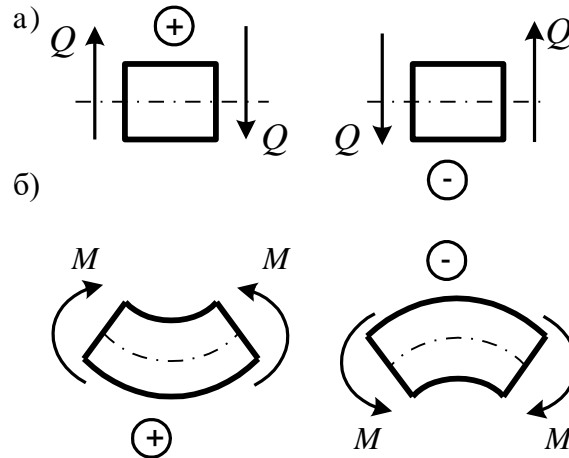


Рисунок 2.6 – Правило знаків для поперечної сили (а) і згинального моменту (б)

При побудові епюр поперечних сил і згинальних моментів додатні значення  $Q$  відкладаємо нагору, а  $M$  – униз від осі (тобто з боку розтягнутих волокон).

### *Диференціальні залежності при згині*

На ділянці балки, навантаженій розподіленим навантаженням, проведемо два перерізи на відстанях  $x$  і  $x + dx$  від лівої опори (рисунок 2.7). Оскільки довжина ділянки  $dx$  мала, навантаження можна вважати рівномірним з інтенсивністю  $q$ . Дію лівої відкинутої частини балки на елемент  $dx$  замінимо поперечною силою  $Q$  і згинальним моментом  $M$ , а дію правої відкинутої частини – силою  $Q + dQ$  і моментом  $M + dM$ . Тут  $dQ$  і  $dM$  – збільшення поперечної сили і згинального моменту на елементі  $dx$ .

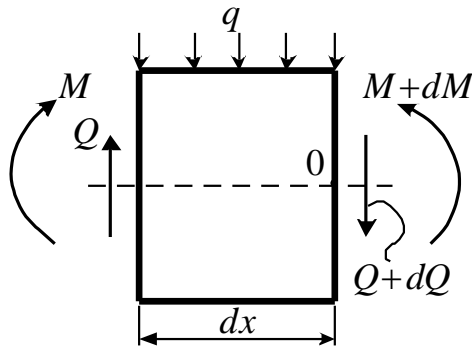


Рисунок 2.7 – До виведення диференціальних залежностей при згині

Складемо для елемента два рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0: \quad -Q + q dx + (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0: \quad M + Q dx - q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

З першого рівняння після перетворень одержимо

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (2.1)$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо  $Q = -qx + C$ , де  $C$  – константа інтегрування. Графік цієї функції, тобто епюра  $Q$ , є прямою з тангенсом кута нахилу  $q$  (якщо  $q=0$ , то це пряма, паралельна осі).

Із другого рівняння рівноваги, нехтуючи членом  $q \frac{dx^2}{2}$  як величиною другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.2)$$

Інтегруючи це рівняння при сталій силі  $Q$  (тобто  $q=0$ ), одержуємо  $M = Qx + C$ , де  $C$  – константа інтегрування. Отже, епюра  $M$  є прямою з тангенсом кута нахилу  $Q$ .

Залежність (2.1) з урахуванням (2.2) може бути записана у вигляді

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (1.3)$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо  $M = -q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ , де  $C_1, C_2$  – константи інтегрування. Отже, у випадку  $q \neq 0$  епюра  $M$  є параболою, зверненою опуклістю у бік дії  $q$ .

Крім того, якщо похідна в точці дорівнює нулю, то функція в цій точці має екстремум. З (2.2) випливає: якщо поперечна сила в точці дорівнює нулю, то на параболі  $M$  в цій точці є екстремум.

На підставі отриманих висновків і правил обчислення зусиль сформулюємо основні правила, що надають допомогу при побудові епюр  $M$  і  $Q$ .

### **Основні правила побудови і перевірки епюр**

1 На ділянці, де немає розподіленого навантаження, поперечна сила є сталою (епюра  $Q$  – пряма, паралельна осі), згинальний момент змінюється за лінійною залежністю (епюра  $M$  – похила пряма), причому тангенс кута нахилу епюри  $M$  дорівнює силі  $Q$ . В окремому випадку можуть бути відсутні і зосереджені сили, тоді  $Q = 0$ ,  $M = \text{const}$ .

2 На ділянці, де є рівномірно розподілене навантаження, поперечна сила змінюється за лінійною залежністю (епюра  $Q$  – похила пряма), причому тангенс кута нахилу епюри  $Q$  дорівнює  $q$ ; згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю і епюра  $M$  – параболла, у якої опуклість звернена у бік дії розподіленого навантаження  $q$ .

Якщо на цій ділянці  $Q$  в одному з перерізів дорівнює нулю, то  $M$  у цьому перерізі приймає екстремальне значення – максимум або мінімум.

3 У перерізі, де прикладена зосереджена сила, на епюрі  $Q$  є стрибок, що дорівнює значенню цієї сили і спрямований у бік дії сили (при побудові епюри зліва направо). Епюра  $M$  в цьому перерізі має перелом, спрямований у бік дії сили  $F$ .

4 У перерізі, де прикладений зосереджений момент, на епюрі  $M$  є стрибок, що дорівнює значенню моменту  $M$ . При цьому напрямок стрибка буде вниз (при побудові епюри зліва направо), якщо зосереджений момент спрямований за годинниковою стрілкою, і нагору, якщо момент спрямований

проти годинникової стрілки. На епюрі  $Q$  наявність зосередженого моменту не відображається.

### ***Приклад побудови епюр внутрішніх зусиль у балці***

Побудувати епюри  $M$  і  $Q$  для балки, рисунок 2.8, а.

1 Визначення опорних реакцій.

Припустимо, що вертикальні опорні реакції  $R_A$  та  $R_B$  спрямовані нагору. Горизонтальна реакція в шарнірно-нерухомій опорі А дорівнює нулю, оскільки зовнішнє горизонтальне навантаження відсутнє. Тому на рисунку 2.8, а горизонтальна реакція не показана.

Для визначення реакцій використаємо два рівняння рівноваги: сума моментів відносно опорних точок А і В дорівнює нулю:

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 6 - 100 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 1,5 + 35 = 0; R_A = 150 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 6 - 35 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 + 100 \cdot 2 = 0; R_B = 40 \text{ кН}.$$

Додатні знаки реакцій, отримані з розв'язання цих рівнянь, указують на те, що їх дійсний напрямок збігся з передбачуваним.

Далі слід обов'язково перевірити правильність визначення опорних реакцій, перевіривши виконання третього рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 150 + 40 - 100 - 10 \cdot 9 = 0.$$

Отже, реакції знайдені правильно.

2 Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, опорні точки, точки прикладання зосереджених сил і моментів, точки початку і кінця ділянок з розподіленим навантаженням. На рисунку 2.8, а це точки А, В, С, D.

3 На кожній ділянці складаємо вирази для внутрішніх зусиль згідно з *методом перерізів*.

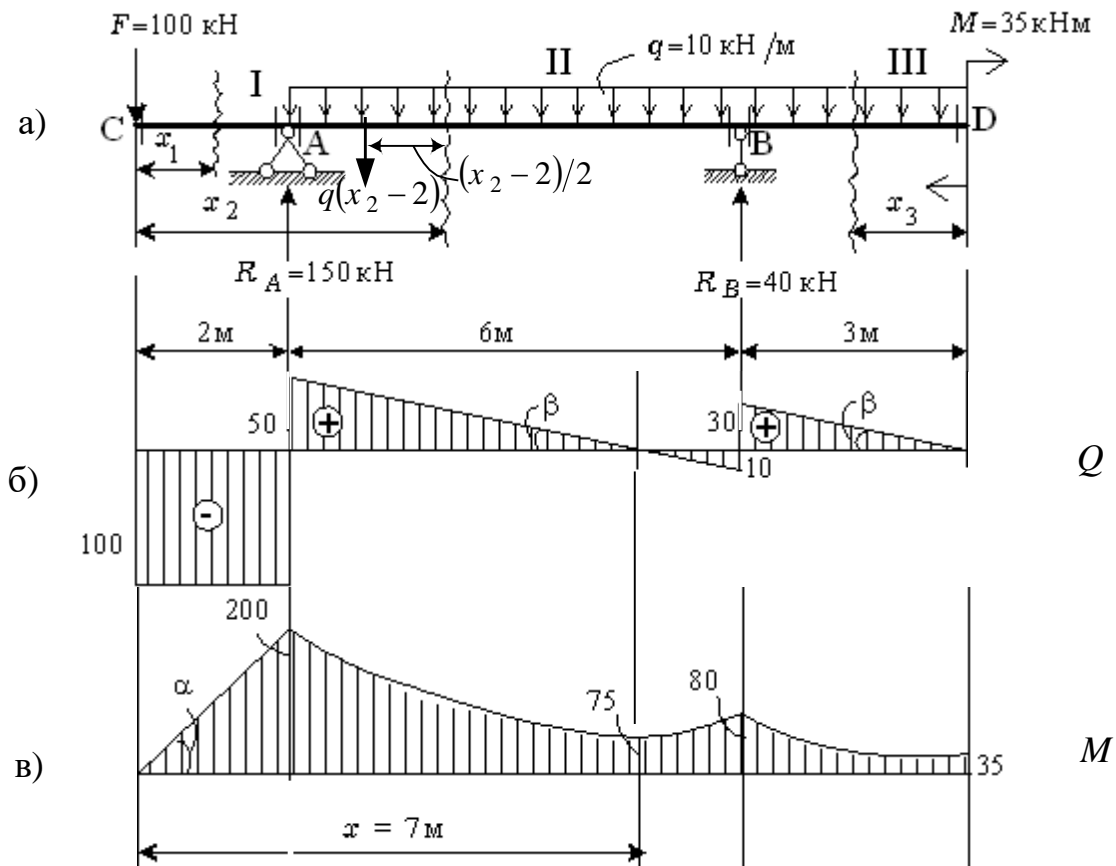


Рисунок 2.8 – Побудова епюр  $M$  і  $Q$  в однопрогоновій балці :  
розрахункова схема балки (а); епюра  $Q$  (б); епюра  $M$  (в)

Ділянка I. Розсічемо балку в довільному перерізі  $x_1$ ,  $0 \leq x_1 \leq 2$  м. Відкинемо праву частину балки. Згідно з правилами (стор. 31), в цьому перерізі поперечна сила та згинальний момент дорівнюють

$$Q = -100; \quad M = -F \cdot x_1.$$

Поперечна сила є сталою, тому епюра  $Q$  – пряма лінія, проведена паралельно до осі донизу від неї на відстані 100 (рисунок 2.8, б).

Згинальний момент змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри  $M$  на цій ділянці достатньо обчислити значення  $M$  на початку і кінці ділянки: при  $x_1 = 0$   $M_C = 0$ ; при  $x_1 = 2$  м  $M_A = -200$  кНм. Відкладаємо від’ємні ординати вгору від осі (правило на стор. 32) та з’єднуємо їх прямою лінією (рисунок 2.8, в).

Ділянка II. Розсічемо балку в довільному перерізі  $x_2$ ,  $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 8 \text{ м}$ . Відкинемо праву частину балки. Одержуємо

$$Q = -F + R_A - q(x_2 - 2);$$

$$M = -F x_2 + R_A (x_2 - 2) - q(x_2 - 2) \frac{(x_2 - 2)}{2} =$$

$$= -F x_2 + R_A (x_2 - 2) - q \frac{(x_2 - 2)^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри  $Q$  на цій ділянці достатньо обчислити значення  $Q$  на початку та кінці ділянки: при  $x_2 = 2 \text{ м}$   $Q_A = 50 \text{ кН}$ ; при  $x_2 = 8 \text{ м}$   $Q_B = -10 \text{ кН}$ . Отримані значення відкладаємо від осі і з'єднуємо прямою лінією.

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю. Для побудови епюри  $M$  слід визначити значення згинального моменту у трьох перерізах: на початку та на кінці ділянки, а також у перерізі, де  $Q = 0$ , оскільки там момент досягає екстремального значення.

Обчислимо значення  $M$  на початку і в кінці ділянки: при  $x_2 = 2 \text{ м}$   $M_A = 50 \text{ кНм}$ ; при  $x_2 = 8 \text{ м}$   $M_B = -80 \text{ кНм}$ .

Визначимо переріз, у якому  $Q = 0$ . Для цього вираз поперечної сили  $Q$  дорівнюємо нулю:

$$Q = -F + R_A - q(x_2 - 2) = -100 + 150 - 10(x_2 - 2) = 0, \text{ звідки } x_2 = 7 \text{ м}.$$

Підставимо це значення в вираз для  $M$  і визначимо екстремальне значення згинального моменту:

$$\text{при } x_2 = 7 \text{ м } M = -F \cdot 7 + R_A (7 - 2) - q \frac{(7 - 2)^2}{2} = -75 \text{ кНм}.$$

Відклавши одержані значення згинальних моментів, проведемо через них квадратну параболу з вершиною у перерізі  $x_2 = 7 \text{ м}$ .

Якщо на ділянці немає точки з  $Q = 0$ , визначають значення  $M$  посередині ділянки.

Ділянка III. Розсічемо балку в довільному перерізі  $x_3$ ,  $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ . Відкинемо ліву частину балки. Одержуємо

$$Q = qx_3; \quad M = -35 - q \frac{x_3^2}{2}.$$

Поперечна сила змінюється за лінійною залежністю. Значення  $Q$  на початку та в кінці ділянки:  $x_3 = 0$   $Q_D = 0$ ;  $x_3 = 3$  м  $Q_B = 30$  кН.

Згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю. При  $x_3 = 0$   $M_D = -35$  кНм; при  $x_3 = 3$  м  $M_B = -80$  кНм. Відклавши отримані ординати, проведемо через них квадратну параболу з вершиною у перерізі D (у цьому перерізі  $Q = 0$ ). Посередині ділянки ( $x_3 = 1,5$  м)  $M = -35 - 10 \cdot 2,25/2 = -46,25$  кНм.

Перевіримо виконання правил 1 – 4.

На ділянці I немає розподіленого навантаження. Сила  $Q$ , як повинно бути, є сталою, а еюра  $M$  – похилою, причому тангенс кута нахилу дорівнює  $\text{tg } \alpha = -200/2 = -100 = Q$ .

Ділянки II і III завантажені розподіленим навантаженням. Епюри  $Q$  на цих ділянках мають вигляд похилих прямих, причому тангенс кута нахилу обох дорівнює  $\text{tg } \beta = 10$ , тобто співпадає з  $q$ . Еюра згинальних моментів на цих ділянках – квадратна параболою, причому на ділянці II вона має екстремум.

У точках А і В прикладені зосереджені сили (реакції). На епюрі  $Q$  у цих точках, як і повинно бути, є стрибки в напрямку цих сил (тобто вгору), що дорівнюють цим силам (у точці А:  $100 + 50 = 150 = R_A$ ; у точці В:  $10 + 30 = 40 = R_B$ ).

*Другий спосіб побудови епюр.* Можна побудувати епюри, починаючи з п. 3, користуючись правилами 1 – 4 саме для побудови епюр, а не для їх перевірки. Цей спосіб відрізняється від першого тим, що не складаються рівняння для зусиль (крім визначення точки екстремуму), а знаходяться їх значення в крайніх точках ділянок і з'єднуються прямою або параболою залежно від виду навантаження.

Ділянка I. Ця ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, тому поперечна сила є сталою. Достатньо знати  $Q$  в одній точці, наприклад  $Q_C$ . Проведемо переріз праворуч від точки С та відкинемо праву частину балки. Сума сил (з

урахуванням знаків), перпендикулярних до осі, ліворуч від перерізу дорівнює  $Q_C = -F_1 = -100 \text{ кН}$ . На епюрі  $Q$  проводимо пряму, паралельну осі, на відстані -100.

Епюра  $M$  на цій ділянці – похила пряма. Проведемо її через дві точки – С та А. Момент  $M_C$  дорівнює сумі моментів ліворуч від точки С і дорівнює  $M_C = 0$ . Момент  $M_A$  дорівнює сумі моментів ліворуч від точки А (з урахуванням знаків) і дорівнює  $M_A = -F_1 \cdot 2 = -200 \text{ кНм}$ . На епюрі проводимо пряму між 0 та -200.

Ділянка II. Ця ділянка завантажена розподіленим навантаженням, тому поперечна сила на ній лінійна. Потрібно знати  $Q$  на початку і в кінці ділянки (праворуч точки А і ліворуч від точки В). У точці А прикладена зосереджена сила  $R_A$ , отже, в цій точці має бути стрибок на величину і в напрямку  $R_A$ , тобто  $Q_A = -100 + 150 = 50 \text{ кН}$ . Далі проводимо переріз ліворуч від точки В і відкидаємо праву частину балки. Додаємо усі сили, перпендикулярні до осі, ліворуч від перерізу:  $Q_B = -100 + 150 - q \cdot 6 = -10 \text{ кН}$ . На епюрі  $Q$  проводимо пряму між  $Q = 50$  і  $Q = -10$ . Епюра на ділянці перетинає вісь.

Епюра  $M$  на цій ділянці – парабола, причому на ній є екстремум у точці перетинання епюри  $Q$  з віссю. Значення  $M$  в точці А вже визначено і дорівнює значенню  $M$  у кінці ділянки I (у цій точці не прикладений зовнішній зосереджений момент, тому відсутній стрибок). Значення  $M$  в точці В зручно розрахувати, відкинувши частину балки ліворуч від точки В:  $M_B = -M - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -80 \text{ кНм}$ . Значення екстремуму визначаємо так само, як це було зроблено у першому способі побудови епюр.

Ділянка III. Ця ділянка завантажена розподіленим навантаженням, тому поперечна сила лінійна. Потрібно знати  $Q$  на початку і в кінці ділянки (праворуч від точки В і у точці D). У точці В визначаємо поперечну силу, враховуючи стрибок у точці прикладання  $R_B$ :  $Q_B = -10 + 40 = 30 \text{ кН}$ . Проводимо переріз у точці D і відкидаємо ліву частину балки, одержуємо  $Q_D = 0$ . З'єднуємо ці точки прямою лінією.

Епюра  $M$  на цій ділянці є параболою без екстремуму. Значення  $M$  у точці В праворуч та ліворуч однакові,



$M_B = -80 \text{ кНм}$ . Значення  $M$  у точці D одержимо, додавши всі моменти праворуч від перерізу D:  $M_D = -35 \text{ кНм}$ .

## 2.5 Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, стержні якої (стійки та ригелі) у всіх або деяких вузлах жорстко з'єднані між собою, називається рамою. Вісь таких систем являє собою ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині, то її називають плоскою.

У випадку плоскої рами внутрішні зусилля, які виникають у якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту  $M$ , поперечної сили  $Q$  та поздовжньої сили  $N$ .

Поняття про згинальний момент не змінюється.

Поперечна сила в перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх сил по один бік від перерізу на перпендикуляр до осі елемента.

Поздовжня сила в перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх сил по один бік від перерізу на вісь елемента.

Зазначені суми беруться з урахуванням знаків.

Правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил не змінюється (рисунок 2.6). Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стержня, і від'ємною, якщо вона викликає стиск (див. п. 2.2).

Поняття «низ» і «верх» при визначенні знака згинального моменту у вертикальних елементах залежать від положення спостерігача (ліворуч або праворуч від вертикальної осі). Однак можна помітити, що при будь-якому положенні спостерігача епюра буде відкладена з боку розтягнутих волокон.

**Приклад побудови епюр  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  у рамі (рисунок 2.9)**

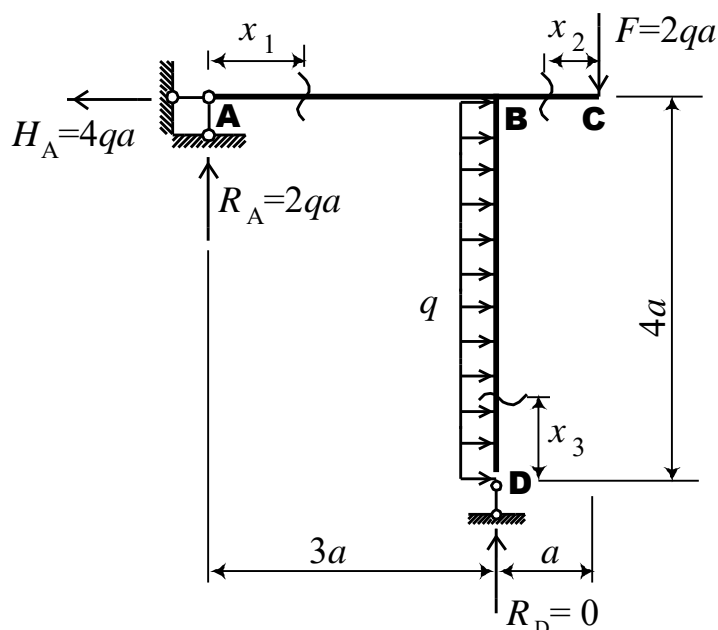


Рисунок 2.9 – Розрахункова схема рами

Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги:

$$\sum X = 0: H_A - 4qa = 0,$$

$$H_A = 4qa;$$

$$\sum M_A = 0: R_D \cdot 3a - F \cdot 4a + 4qa \cdot 2a = 0,$$

$$R_D = (F \cdot 4a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (8qa^2 - 8qa^2) / 3a = 0;$$

$$\sum M_D = 0: -R_A \cdot 3a + H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a = 0,$$

$$R_A = (H_A \cdot 4a - F \cdot a - 4qa \cdot 2a) / 3a = (16qa^2 - 2qa^2 - 8qa^2) / 3a = 2qa.$$

Усі реакції знайдено незалежно одна від одної. Правильність їх визначення підтверджується виконанням таких рівнянь рівноваги (вони не використовувалися при визначенні реакцій):

$$\sum Y = R_A - F = 0,$$

$$\sum M_C = R_A \cdot 4a - 4qa \cdot 2a = 0.$$

Таким чином, опорні реакції визначено правильно.

Розділимо раму на три ділянки: АВ, ВС, ВD. На кожній ділянці в довільному місці проведемо переріз (рисунок 2.9) і складемо рівняння рівноваги для відсічених частин рами.

На ділянці АВ розглянемо довільний переріз  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq 3a$ ), відкинувши праву частину рами. Ця ділянка не завантажена розподіленим навантаженням, тому поздовжня і поперечна сили є сталими, згинальний момент – лінійною функцією. Отже  $N$  і  $Q$  досить визначити в одній точці,  $M$  – на початку і в кінці ділянки:

$$\begin{aligned} N_A = H_A = 4qa, \quad Q_A = R_A = 2qa, \\ M_A = 0, \quad M_B = R_A \cdot 3a = 6qa^2. \end{aligned}$$

Додатні значення  $M$  відкладаємо знизу від осі ділянки і з'єднуємо їх похилою прямою (рисунок 2.10, а, б, в).

На ділянці ВС розглянемо довільний переріз  $x_2$  ( $0 \leq x_2 \leq a$ ), відкинувши ліву частину рами. Ця ділянка також не завантажена розподіленим навантаженням, отже характер епюр на ній такий самий, як на ділянці АВ; значення  $N$  і  $Q$  визначаємо в одній точці,  $M$  – на початку і в кінці ділянки (рисунок 2.10, а, б, в):

$$\begin{aligned} N_C = 0, \quad Q_C = F = 2qa, \\ M_C = 0, \quad M_B = -F \cdot a = -2qa^2. \end{aligned}$$

На ділянці ВD розглянемо довільний переріз  $x_3$  ( $0 \leq x_3 \leq 4a$ ), відкинувши верхню частину рами. Ця ділянка завантажена розподіленим навантаженням, тому поздовжня сила є сталою, поперечна сила є лінійною функцією, згинальний момент – квадратичною. Отже  $N$  визначаємо в одній точці,  $M$  і  $Q$  – на початку і в кінці ділянки.

При визначенні знака згинального моменту припустимо, що спостерігач знаходиться ліворуч від осі, тоді відповідно до правила знаків одержуємо:

$$\begin{aligned} N_D = 0, \quad Q_D = 0, \quad Q_B = 4qa, \\ M_D = 0, \quad M_B = 8qa^2. \end{aligned}$$

Знак плюс перед  $M_B$  означає, що його значення на епюрі потрібно відкласти у бік спостерігача, тобто вліво.

Ординати  $Q$  в точках В та D з'єднуємо похилою прямою, ординати  $M$  – квадратичною параболою (рисунок 2.10, а, б, в).

На розглянутій ділянці епюра  $Q$  не перетинає вісь, тому на епюрі  $M$  відсутній екстремум. Якщо ж екстремум має місце, то його положення і значення визначаються так само, як і при побудові епюр внутрішніх зусиль у балці.

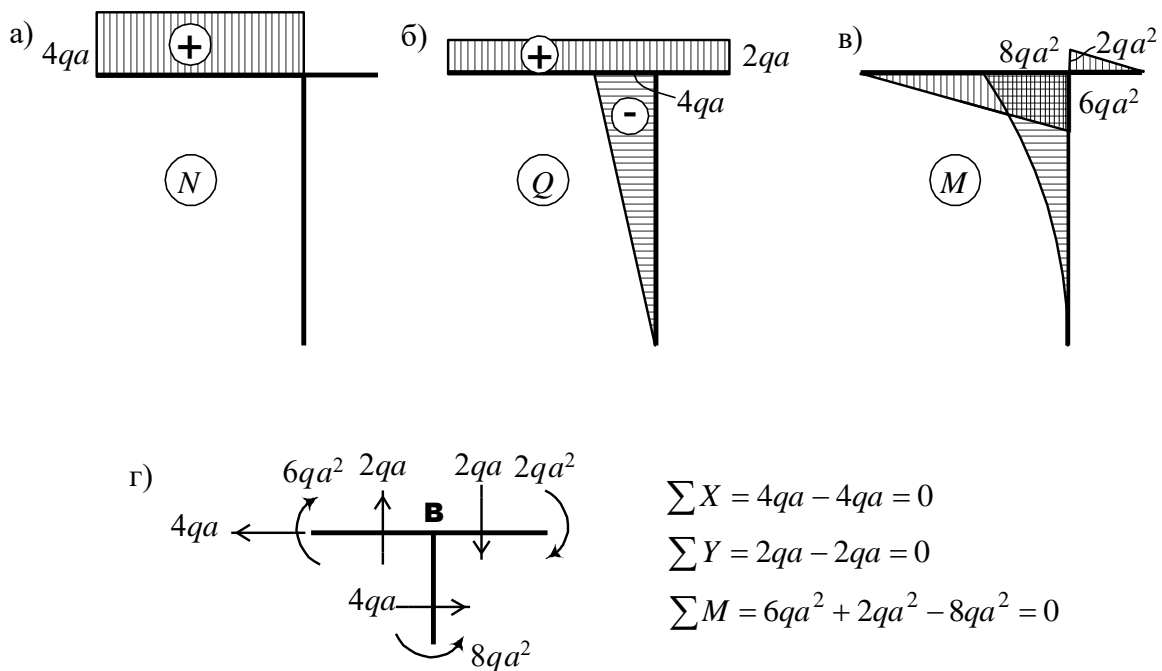


Рисунок 2.10 – Епюри внутрішніх зусиль (а, б, в) і їхня перевірка (г)

Після побудови епюр необхідно перевірити рівновагу вузлів рами, у яких з'єднуються два або більше елементів. У даному випадку – це вузол В. Виріжемо цей вузол трьома перерізами (ліворуч, праворуч і знизу) і покажемо зусилля  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  у цих перерізах відповідно до побудованих епюр (рисунок 2.10, г). Перевірка, наведена на рисунку, показує, що вузол В знаходиться в рівновазі.

## 2.6 Внутрішні сили в криволінійних стержнях

У поперечних перерізах криволінійного стержня виникають ті самі внутрішні сили, що у рамі. Згинальний момент визначається так само, як для прямолінійного стержня. Поздовжня сила в перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх

сил по один бік від перерізу, на дотичну до осі стержня у цьому перерізі. Поперечна сила в перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил по один бік від перерізу на нормаль (перпендикуляр) до осі стержня у цьому перерізі. Покажемо це на наступному прикладі (рисунок 2.11, а).

Обмежимося спочатку випадком вертикального навантаження. На рисунку 2.11, а показана сила  $F_i$ , яка прикладена в довільному перерізі бруса на відстані  $a_i$  від лівої опори і  $b_i$  – від правої. У загальному випадку кількість сил дорівнює  $n$ .

Для визначення вертикальних опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  складемо рівняння рівноваги вигляду  $\sum M_A = 0$  і  $\sum M_B = 0$ .

У результаті одержимо:

$$R_A = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i b_i ; \quad R_B = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^n F_i a_i .$$

Горизонтальна опорна реакція в точці В дорівнює нулю. Це впливає з рівняння  $\sum F_x = 0$ .

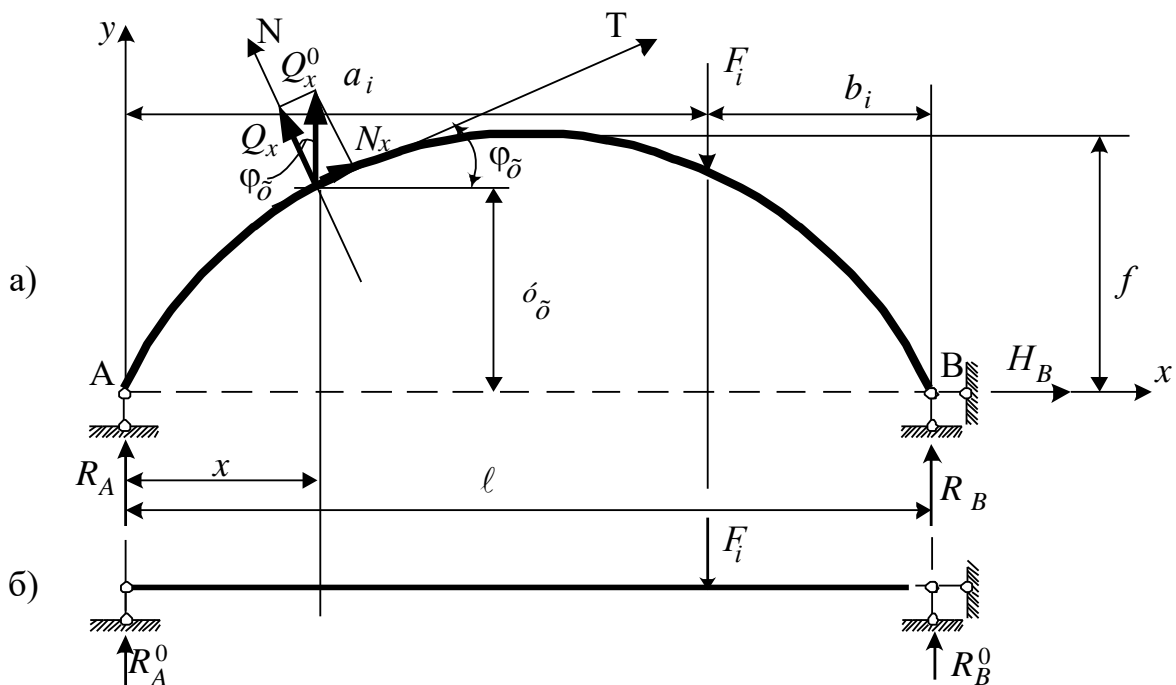


Рисунок 2.11 – Розрахункова схема криволінійного бруса

Розглянемо поряд із кривим брусом балку, що опирається в точках А і В та навантажена так само, як брус (рисунок 2.11, б).

Отримані формули для реакцій показують, що реакції  $R_A$  та  $R_B$  збігаються з опорними реакціями в балці:  $R_A = R_A^0$ ,  $R_B = R_B^0$ .

У довільному перерізі  $x$  кривого бруса згинальний момент, поперечна і поздовжня сили відповідно дорівнюють

$$M_x = M_x^0, \quad Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x, \quad N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x,$$

де  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  – відповідно згинальний момент і поперечна сила від заданого вертикального навантаження в перерізі  $x$  у балці;

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}}; \quad \sin \varphi_x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}},$$

де  $\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx}$  – похідна функції  $y(x)$ , що описує вісь балки.

У криволінійних стержнях, обкреслених по дузі кола, положення довільного перерізу доцільно визначати за допомогою полярної системи координат. Тоді вирази внутрішніх зусиль будуть представлені як функції кута  $\alpha$  (наприклад, як на рисунку 2.12).

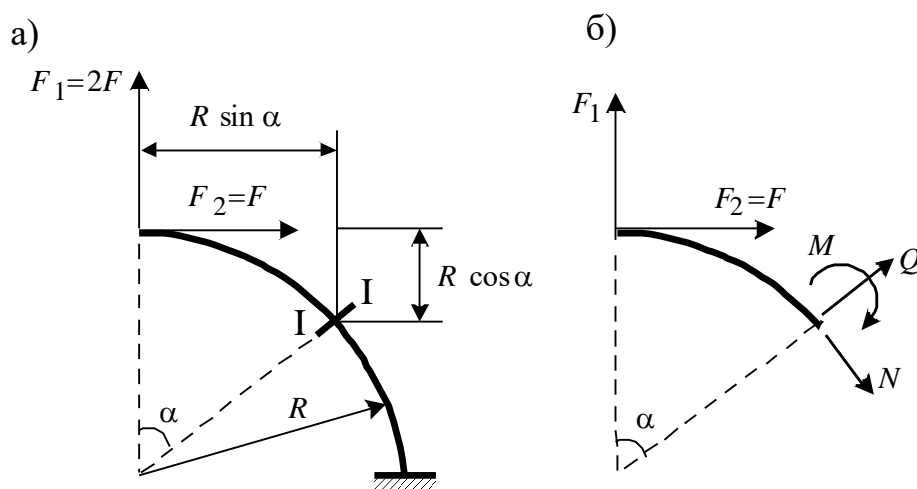


Рисунок 2.12 – Визначення зусиль у кривому стержні, обкресленому по дузі кола

Розсічемо стержень у перерізі I-I під довільним кутом  $\alpha$  і відкинемо праву частину стержня (рисунок 2.12, б). Врівноважимо залишену частину внутрішніми зусиллями  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  додатного напрямку. Запишемо вирази цих внутрішніх зусиль:

$$N = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha,$$

$$Q = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha,$$

$$M = F_1 R \sin \alpha + F_2 (R - R \cos \alpha).$$

Обчислимо значення  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  при різних кутах  $\alpha$ :

$$\text{при } \alpha = 0 \quad N = -F, \quad Q = 2F, \quad M = 0,$$

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \quad N = 0,7F, \quad Q = 2,1F, \quad M = 1,7FR,$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \quad N = 2F, \quad Q = F, \quad M = 3FR.$$

Відкладаючи отримані значення внутрішніх зусиль по нормалі до осі (тобто по радіусу), побудуємо епюри  $N$ ,  $Q$  і  $M$  (рисунок 2.13).

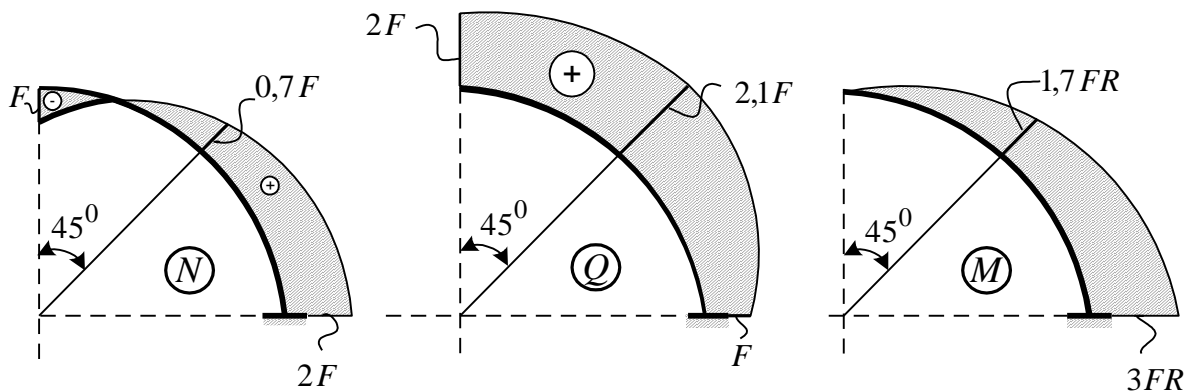


Рисунок 2.13 – Епюри  $N$ ,  $Q$ ,  $M$

### *Диференціальні залежності при згині кругового стержня*

Виділимо з довільно завантаженого кругового стержня елемент  $ds$  двома нескінченно близькими перерізами під кутами  $\alpha$  і  $\alpha + d\alpha$  (рисунок 2.14). Елемент завантажений розподіленим

навантаженням  $q$ . Через малість елемента воно вважається рівномірним.

У перерізах, що обмежують елемент, діють внутрішні сили: поздовжні сили  $N$  і  $N+dN$ , поперечні сили  $Q$  і  $Q+dQ$ , згинальні моменти  $M$  і  $M+dM$ .

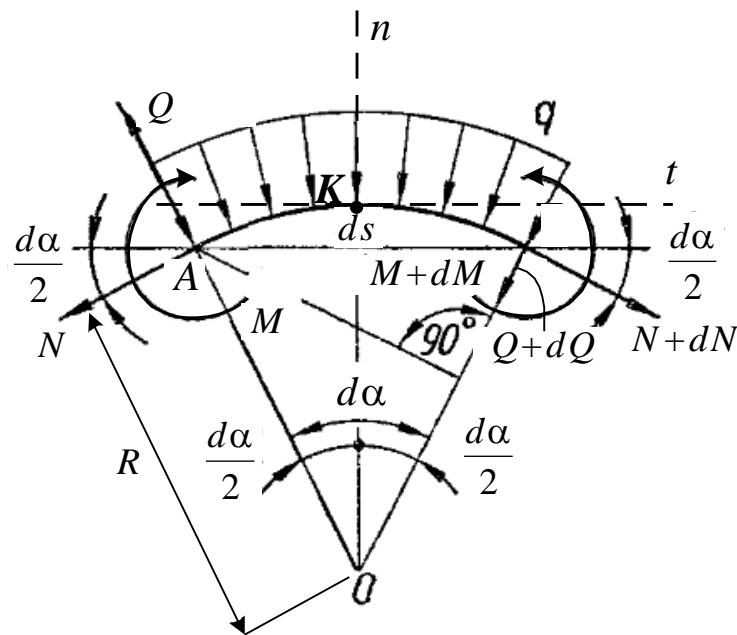


Рисунок 2.14 – До визначення диференціальних залежностей у круговому стержні

Позначимо через  $n$  нормаль до елемента в точці  $K$ , через  $t$  позначимо дотичну до елемента в точці  $K$ . Складемо рівняння рівноваги елемента.

Перше рівняння рівноваги

$$\sum_t = 0:$$

$$Q \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cos \frac{d\alpha}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Враховуючи, що для малих кутів  $d\alpha$   $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$ ,

одержимо



$$\frac{dN}{d\alpha} = Q. \quad (2.4)$$

Друге рівняння рівноваги:

$$\sum_n = 0:$$

$$Q \cos \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\alpha}{2} - N \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\alpha}{2} - qR d\alpha = 0,$$

звідки

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -N - qR. \quad (2.5)$$

Третє рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0: \quad Qrd\alpha + M - (M + dM) - qrd\alpha \frac{rd\alpha}{2} = 0,$$

звідки, відкидаючи величини другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{d\alpha} = QR. \quad (2.6)$$

З формул (2.4) – (2.6) випливають такі властивості епюр  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  для кругових стержнів:

1) згідно з формулами (2.4) і (2.6), у перерізах, де  $Q=0$ , на епюрах  $N$  і  $M$  є екстремуми, тобто дотичні до епюр паралельні дотичним до осі стержня в цих перерізах;

2) згідно з виразом (2.5), у перерізах, де  $N=0$ , на епюрі  $Q$  є екстремуми (за відсутності розподіленого навантаження  $q$ ).

Залежності (2.4) – (2.6) дозволяють перевіряти правильність складання виразів для  $N$ ,  $Q$  і  $M$  при згині кругового криволінійного стержня. Так, неважко переконатися, що вирази для  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  у прикладі (рисунок 2.12) складені правильно:

$$\frac{dN}{d\alpha} = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha = Q,$$

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha = -N \quad (q=0),$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = F_1 R \cos \alpha + F_2 R \sin \alpha = QR.$$

## 3 РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСК

**Розтягання (стиск)** – це деформація, яка відбувається під дією сил, спрямованих уздовж осі елемента.

Розтягнутий (стиснутий) стержень називають також брусом.

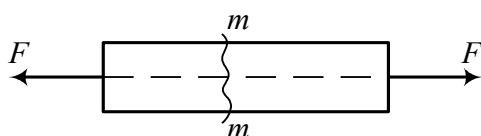


Рисунок 3.1

Найпростіший варіант такої деформації – розтягання під дією двох однакових протилежно спрямованих сил, прикладених до торців елемента і спрямованих уздовж його осі (рисунок 3.1).

Для врівноважування зовнішніх сил при розтяганні (стиску) у перерізі виникає єдине *внутрішнє зусилля, що діє уздовж осі елемента, – поздовжня (осьова) сила  $N$*  (п.п. 1.6, 2.2).

Розтягання або стиск відбувається в різних елементах конструкцій і машин. Наприклад, трос підйомника при підніманні вантажу розтягнутий, колони каркаса багатоповерхового будинку переважно стиснуті, елементи ферм можуть бути розтягнутими або стиснутими і т. д. Прикладом розтягнутого елемента може служити також гвинт вагонної стяжки.

### 3.1 Напруження в перерізах, перпендикулярних до осі бруса

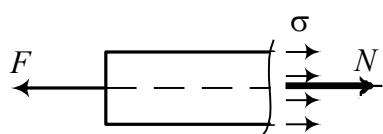


Рисунок 3.2

Зробимо поперечний розріз  $m-m$  на деякому віддаленні від торцю стержня (рисунок 3.1) і відкинемо праву частину, дію якої замінимо поздовжньою силою  $N$ , розподіленою по перерізу (рисунок 3.2).

Переріз при розтяганні залишився плоским (гіпотеза плоских перерізів, п. 1.1). Інтенсивність внутрішніх сил у перерізі, тобто величина їх на одиницю площі, є нормальним напруженням  $\sigma$  (п. 1.7.1).

Згідно з гіпотезою Сен-Венана (п. 1.1), у перерізі, досить віддаленому від торця, напруження розподілені рівномірно:  $\sigma = \text{const}$ . Виразимо поздовжню силу як рівнодіючу напружень по перерізу:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A ,$$

звідки одержуємо формулу для визначення нормальних напружень у перерізі, перпендикулярному до осі:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} , \quad (3.1)$$

де  $N$  – поздовжня сила в перерізі;

$A$  – площа поперечного перерізу.

Формулу (3.1) можна застосовувати при визначенні нормальних напружень у розтягнутих стержнях і в коротких стиснутих стержнях (поняття короткого та довгого стержнів уводиться при вивченні стійкості стиснутих стержнів; довгий стержень може вигнутися при осьовому стиску).

Дотичні напруження  $\tau$  в поперечному перерізі дорівнюють нулю, оскільки всі внутрішні сили перпендикулярні до перерізу.

### 3.2 Напруження в перерізах, похилих до осі бруса

Розглянемо напруження, які виникають у брусі по площинках, похилих до його осі (рисунок 3.3).

Розсічемо стержень по похилому перерізу і відкинемо праву його частину (рисунок 3.3, б). На похилій площинці повні напруження  $p_\alpha$  будуть спрямовані уздовж поздовжньої осі та розподілені рівномірно. Залишена ліва частина врівноважується поздовжньою силою  $N$ :

$$N = p_\alpha A_\alpha ,$$

де  $A_\alpha$  – площа похилого перерізу,

$$A_\alpha = A / \cos \alpha .$$

Таким чином, повне напруження на похилій площинці дорівнює

$$p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \frac{N}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha, \quad (3.2)$$

де  $\sigma$  – напруження в перерізі, перпендикулярному до осі ( $\alpha = 0$ ).

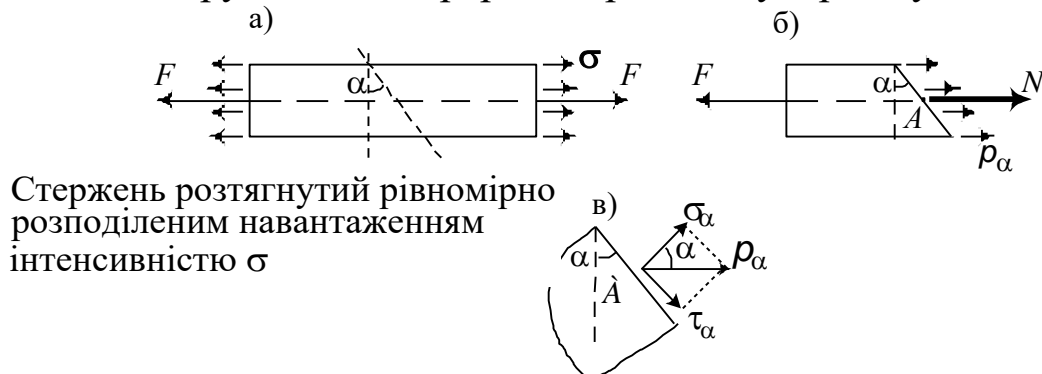


Рисунок 3.3 – Напруження на похилих площинках розтягнутого стержня

Розкладемо повне напруження на нормальне і дотичне напруження (п. 1.7.1, рисунок 3.3, в):

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha, \quad \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha,$$

звідки з урахуванням формули (3.2) маємо

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad - \quad (3.3)$$

формули для напружень у перерізі, похилому до поперечного під кутом  $\alpha$ .

Досліджуємо ці вирази.

*Нормальне напруження:*

– максимально  $\sigma_{\max} = \sigma$  при  $\alpha = 0$ , тобто в поперечному перерізі;

– мінімально  $\sigma_{\min} = 0$  при  $\alpha = 90^\circ$ , тобто на площинках, паралельних осі бруса;

–  $\sigma_{\alpha} = 0,5\sigma$  при  $\alpha = 45^\circ$ .

*Дотичне напруження:*

– максимально за абсолютною величиною при  $\alpha = 45^\circ$  ( $\alpha = 135^\circ$ ), тобто на площинках, нахилених до осі бруса під кутом  $45^\circ$  (рисунок 3.4), значення максимального напруження

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2};$$

– мінімально за абсолютною величиною при  $\alpha = 0$  і  $\alpha = 90^\circ$ , тобто на площинках, перпендикулярних і паралельних осі бруса, при цьому  $\tau_{\min} = 0$ .

Напруження, що діють по площинках  $\alpha = 45^\circ$  ( $135^\circ$ ), показано на рисунку 3.4.

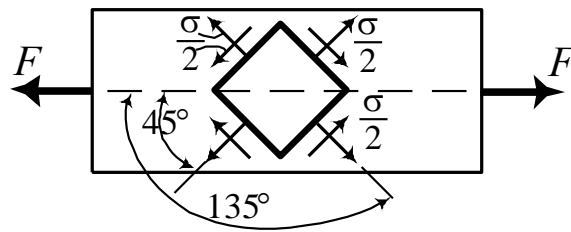


Рисунок 3.4 – Дія напружень на площинках, нахилених до осі бруса під кутом  $\alpha = 45^\circ$  ( $135^\circ$ )

### 3.3 Деформації при розтяганні та стиску

#### 3.3.1 Поздовжня та поперечна деформації

Розглянемо брус, завантажений на кінці силою  $F$  (рисунок 3.5).

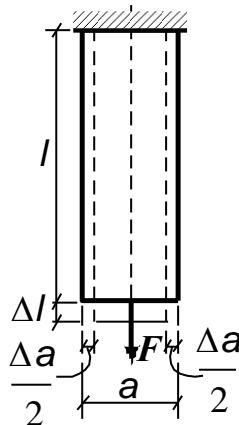


Рисунок 3.5 – Деформації бруса при розтяганні

Довжину бруса до деформації позначимо через  $l$ , а зміну довжини – через  $\Delta l$ . Зміна довжини бруса  $\Delta l$  називається *абсолютним подовженням* (укороченням) або *абсолютною*

поздовжньою деформацією. Повне подовження (укорочення) вимірюється в лінійних одиницях (м, см, мм).

Відносним подовженням (відносною поздовжньою деформацією) називають ту частку абсолютної поздовжньої деформації, яка припадає на одиницю довжини бруса. Відносне подовження дорівнює відношенню абсолютного подовження до початкової довжини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.4)$$

Величини як відносних, так і абсолютних поздовжніх деформацій стержнів, виконаних з найпоширеніших будівельних матеріалів, є досить малими (див. п. 1.1). Так, для реальних будівельних матеріалів вони мають порядок  $\varepsilon \approx 10^{-3}$ .

Поздовжня деформація супроводжується зміною поперечних розмірів: при розтяганні вони зменшуються, а при стиску збільшуються. Зміна поперечних розмірів бруса при розтяганні і стиску називається поперечною деформацією.

Позначимо через  $a$  один з поперечних розмірів бруса до деформації (рисунок 3.5). При розтяганні цей розмір зменшується на величину  $\Delta a$ , яка називається *абсолютною поперечною деформацією* або абсолютним поперечним звуженням. Відношення абсолютного поперечного звуження до початкового розміру називається *відносною поперечною деформацією*

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad (3.6)$$

Відносна деформація – безрозмірна величина.

### 3.3.2 Коефіцієнт Пуассона

Відносна поперечна деформація при малих деформаціях прямо пропорційна відповідній поздовжній деформації і протилежна їй за знаком:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon, \quad (3.7)$$

де  $\nu$  – *коефіцієнт поперечної деформації*, або *коефіцієнт Пуассона*.

Отже, коефіцієнт Пуассона дорівнює абсолютній величині відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (3.8)$$

Це безрозмірний коефіцієнт, що характеризує пружні властивості матеріалу та визначається експериментально.

Вважаючи, що об'єм елемента при деформації не зменшується, можна показати, що значення коефіцієнта Пуассона не перевищує 0,5:  $0 < \nu \leq 0,5$ . Наприклад, для корка  $\nu$  близький до нуля, для каучуку – близький до 0,5, для прокатної сталі  $\nu = 0,3$ .

### 3.3.3 Закон Гука при розтяганні - стиску (зв'язок між деформацією та напруженням)

У 1676 р. англійський учений Р. Гук дослідним шляхом виявив пропорційну залежність між величиною розтягувальної сили і відповідним їй подовженням. У 1826 р. французький учений Л. Нав'є визначив коефіцієнт пропорційності як модуль пружності  $E$  – відношення навантаження, що діє на одиницю площі перерізу, до викликаного нею відносного подовження (це визначення відрізняється від уведеного Т. Юнгом модуля, але Юнг установив, що закон Гука є правильним тільки в межах пружності).

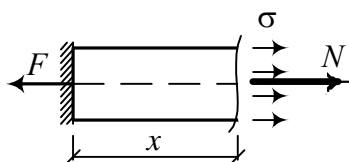
Застосовуючи введене в 1822 р. французьким ученим Л. Коші поняття напруження, закон Гука формулюють як

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.9)$$

тобто нормальне напруження в перерізі дорівнює добутку модуля пружності і роду на відносне подовження.

Модуль пружності характеризує одну з найважливіших властивостей матеріалу – жорсткість. Його значення для кожного матеріалу визначається дослідним шляхом, вимірюється в мегапаскалях (МПа).

### 3.3.4 Розтягання бруса зосередженою силою





Розглянемо довільний переріз стержня, у якому діє поздовжня сила  $N$  (рисунок 3.6).

Рисунок 3.6

Підставимо в закон Гука вирази  $\sigma$  (3.1) і  $\varepsilon$  (3.4):

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta x}{x},$$

звідки для довільного перерізу на відстані  $x$  від закріплення

$$\Delta x = \frac{N x}{EA}. \quad (3.10)$$

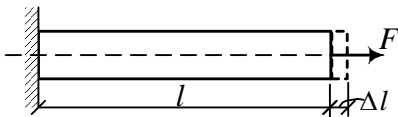


Рисунок 3.7

Для подовження всього бруса зосередженою силою (рисунок 3.7) одержуємо

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (3.11)$$

де  $\Delta l$  – подовження бруса (рисунок 3.7);

$l$  – вихідна довжина бруса;

$F$  – сила, прикладена на вільному кінці бруса;

$E$  – модуль пружності I роду;

$A$  – площа поперечного перерізу.

Добуток  $EA$  називається *жорсткістю при розтяганні-стиску* і має розмірність сили.

Якщо брус подовжується, то  $\Delta l > 0$ , якщо коротшає –  $\Delta l < 0$ .

### 3.3.5 Розтягання східчастого бруса

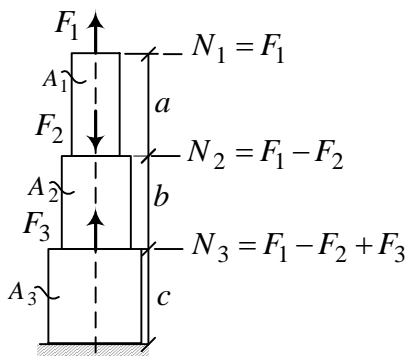


Рисунок 3.8

... від

Якщо брус розтягується декількома силами, як показано на рисунку 3.8, то в межах кожної ділянки, де поздовжня сила має постійне значення, обчислення переміщень від кожної сили можна робити за формулами (3.9). Повне подовження відповідно до принципу незалежності дії сил (п. 1.1) дорівнює

кожної із сил окремо. Для наведеного стержня подовження дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N_1 a}{EA_1} + \frac{N_2 b}{EA_2} + \frac{N_3 c}{EA_3} = \\ &= F_1 \left( \frac{a}{EA_1} + \frac{b}{EA_2} + \frac{c}{EA_3} \right) - F_2 \left( \frac{b}{EA_2} + \frac{c}{EA_3} \right) + F_3 \frac{c}{EA_3}. \end{aligned}$$

### 3.3.6 Розтягання бруса під дією власної ваги

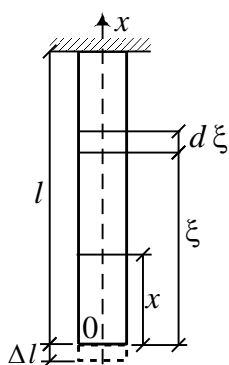


Рисунок 3.9

Розглянемо розтягання бруса власною вагою, розподіленою по довжині стержня (рисунок 3.9). Питома вага матеріалу дорівнює  $\gamma$ , площа поперечного перерізу –  $A$ . Початок координат помістимо в нижню точку стержня.

Визначимо подовження частини стержня вище перерізу  $x$ .

Подовження елемента нескінченно малої довжини  $d\xi$ , на якому поздовжню силу можна прийняти постійною, дорівнює згідно з виразом (3.10)

$$\Delta d\xi = \frac{N_\xi d\xi}{EA}.$$

У перерізі на відстані  $\xi$  від вільного кінця бруса поздовжня сила дорівнює

$$N_\xi = \gamma \xi A.$$

Повне подовження ділянки довжиною  $x$  одержимо, додавши подовження всіх нескінченно малих відрізків вище перерізу:

$$\Delta x = \int_x^l \frac{N_\xi d\xi}{EA} = \int_x^l \frac{\gamma x A d\xi}{EA} = \frac{\gamma}{EA} (l^2 - x^2).$$

Подовження всього бруса одержимо при  $x = 0$ :

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (3.12)$$

*Зауваження*

1 Якщо прикласти вагу бруса  $P = \gamma l A$  до нижнього перерізу як зосереджену силу, то його подовження, згідно з виразом (3.11), буде дорівнювати

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{(\gamma l A)l}{EA} = \frac{\gamma l^2}{E}.$$

Таким чином, *подовження бруса від власної ваги вдвічі менше від того, яке викликав би вантаж, який дорівнює вазі бруса і прикладений на його кінці.*

2 Прикладемо вагу бруса як зосереджену силу на середині його довжини. Подовження бруса одержимо за виразом (3.10), підставивши в якості початкової довжини  $x = l/2$ :

$$\Delta l = \frac{P(l/2)}{EA} = \frac{(\gamma l A)l}{2EA} = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Таким чином, *подовження бруса від власної ваги таке саме, як від зосередженої сили, яка дорівнює вазі бруса і прикладена в його центрі ваги.*

### 3.3.7 Брус рівного опору

У деяких інженерних конструкціях власна вага – одне з основних навантажень. При розрахунку канатів підйомників, опор мостових ферм, стін високих будинків, веж маяків вплив власної ваги потрібно враховувати. При цьому подовження сили і напруження зростають з наближенням перерізу до основи. Якщо площа поперечного перерізу при цьому не змінюється, то всі перерізи, крім нижнього, виявляються недовантаженими. Тому у випадках, коли необхідно враховувати вагу, застосовують бруси змінного перерізу, у яких напруження у всіх перерізах однакові та дорівнюють допустимому (див. нижче п. 3.5.1). Такий брус найбільш економічний з погляду витрат матеріалу і називається брусом рівного опору або рівномірним.

Бічна поверхня такого бруса з розподіленою вагою  $\gamma$  має складну форму (рисунок 3.10, а), тому замість нього часто застосовують бруси у вигляді усічених пірамід або східчасті (рисунок 3.10, б, в).

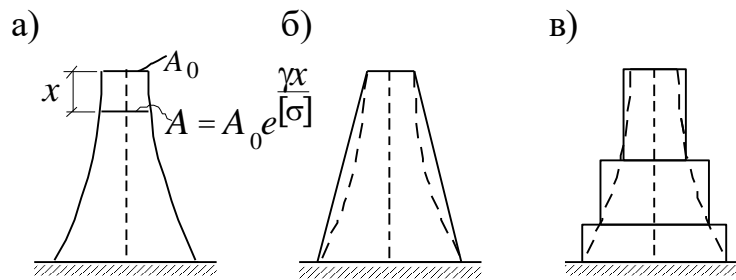


Рисунок 3.10 – Бруси змінного перерізу: брус рівного опору (а); усічена піраміда (б); східчастий брус (в)

### 3.4 Випробування матеріалів на розтягання та стиск. Механічні характеристики матеріалів

Щоб мати можливість судити про міцність елементів конструкцій під навантаженням, потрібно вивчити основні властивості застосовуваних матеріалів і їх поведінку при збільшенні навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробовують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтягання виготовляють у вигляді циліндричних стержнів круглого перерізу або прямокутних плоских зразків. Циліндричні зразки мають на кінцях стовщення (головки), а плоскі – розширення. Частина зразка між головками називається робочою частиною. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань даного матеріалу, зроблених на різних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні співвідношення розмірів. Ці співвідношення і самі розміри встановлені стандартом (ДЕРЖСТАНДАРТ 1497-84).

#### 3.4.1 Діаграми розтягання пластичних і крихких матеріалів

Розглянемо спочатку результати випробувань на розтягання зразків *пластичних матеріалів* на прикладі низьковуглецевої сталі (рисунок 3.11).

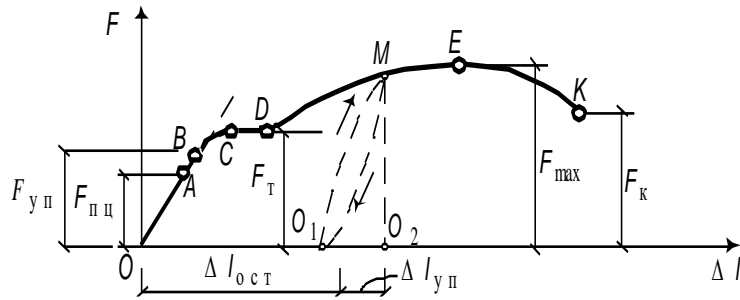


Рисунок 3.11 – Діаграма розтягання низьковуглецевої сталі

У початковій стадії навантаження до точки *A* діаграма розтягання являє собою похилу пряму, що вказує на пропорційність між навантаженням і деформацією – справедливості закону Гука (3.9). Максимальне навантаження, при якому ця пропорційність ще не порушується, на діаграмі позначена через  $F_{пц}$  і використовується для обчислення границі пропорційності. *Границею пропорційності* називається напруження  $\sigma_{пц}$ , до якого існує прямо пропорційна залежність між навантаженням і деформацією:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

де  $A_0$  – площа поперечного перерізу зразка.

Для сталі Ст3 границя пропорційності приблизно дорівнює  $\sigma_{пц} = (195 - 200)$  МПа.

Зона *OA* називається зоною пружності. Тут виникають тільки пружні, дуже незначні деформації (0,1 %). Дані, що характеризують цю зону, дозволяють визначити значення модуля пружності  $E$ .

Після досягнення границі пропорційності деформації починають зростати швидше, ніж навантаження, і діаграма стає криволінійною. На цій ділянці, у безпосередній близькості від точки *A*, знаходиться точка *B*, що відповідає границі пружності. *Границею пружності*  $\sigma_{п}$  називається максимальне напруження, при якому в матеріалі не виявляється ознак пластичної (залишкової) деформації (0,001 – 0,03 %). Границя пружності характеризує початок переходу від пружної деформації до пластичної.

У більшості металів значення границі пропорційності і границі пружності незначно відрізняються одна від одної. Для сталі Ст3  $\sigma_{\text{п}} = (205 - 210)$  МПа.

При подальшому навантаженні криволінійна частина діаграми переходить у майже горизонтальну ділянку  $CD$  – площадку текучості. Тут деформації зростають практично без збільшення навантаження. Навантаження  $F_{\text{T}}$ , що відповідає точці  $D$ , використовується при визначенні фізичної границі текучості

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{F_{\text{T}}}{A_0}.$$

*Фізичною границею текучості*  $\sigma_{\text{T}}$  називається найменше напруження, при якому зразок деформується без помітного збільшення розтягувального навантаження.

Границя текучості є однією з основних механічних характеристик міцності металів. Для Ст3  $\sigma_{\text{T}} = (220 - 250)$  МПа. При цьому відносна деформація становить  $\varepsilon = (\Delta l / l) \cdot 100\% \approx 2\%$ .

Зона  $BD$  називається *зоною загальної текучості*. У цій зоні значно розвиваються пластичні деформації. При цьому у зразка підвищується температура, змінюються електропровідність і магнітні властивості. Особливо наочно фронт поширення пластичної деформації уздовж зразка можна спостерігати при випробуванні плоских полірованих зразків. На поверхні таких зразків у момент виникнення пластичної деформації з'являються темні похилі смуги, які, як правило, з віссю зразка становлять кути  $45^\circ - 60^\circ$  (лінії Людерса-Чернова). Ці лінії виникають внаслідок необоротних зрушень, що відбуваються в кристалах під дією невеликих дотичних напружень. Описані явища викликають зміну внутрішньої структури металу, що призводить до його зміцнення. Діаграма після зони текучості знову стає криволінійною. Зразок здатний сприймати зростаюче зусилля до значення  $F_{\text{max}}$  – точка  $E$  на діаграмі. Зусилля  $F_{\text{max}}$  використовується для обчислення тимчасового опору

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{F_{\text{max}}}{A}.$$

Напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, що передуює руйнуванню зразка, називається *тимчасовим опором* (*границею міцності*).

Для сталі марки Ст3 тимчасовий опір  $\sigma_B = (370 - 470)$  МПа. Відносна деформація при цьому становить  $\approx 16\%$ .

Зона *DE* називається зоною зміцнення. Тут подовження відбувається рівномірно по всій довжині, первісна циліндрична форма зразка зберігається, а поперечний переріз змінюється незначно і також рівномірно. При максимальному зусиллі на зразку в найбільш слабкому місці виникає локальне зменшення поперечного перерізу – *шийка* (а іноді і дві). Подальша деформація відбувається в цій зоні зразка. Переріз у середині шийки продовжує швидко зменшуватися, але напруження в цьому перерізі увесь час зростають, хоча розтягувальне зусилля зменшується. Поза областю шийки напруження зменшуються, і тому подовження іншої частини зразка не відбувається. Нарешті, у точці *K* зразок руйнується. Сила, що відповідає точці *K*, називається руйнуючою, а напруження – дійсною границею міцності, яка дорівнює

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A_K},$$

де  $A_K$  – площа поперечного перерізу в місці розриву.

Зона *EK* називається зоною місцевої текучості. Дійсне напруження в момент розриву (у шийці) у зразку зі сталі Ст3 досягає 900 – 1000 МПа.

Крім зазначених характеристик міцності за результатами випробувань зразка (рисунок 3.11) визначають *характеристики пластичності*.

Відносне подовження після розриву

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

де  $l_K$  – розрахункова довжина робочої частини зразка після розриву;

$l_0$  – початкова довжина робочої частини зразка;

$d_0$  – початковий діаметр зразка,  $l_0/d_0 = 5 \div 10$ .

Для сталі марки Ст3 характеристика пластичності  $\delta = (25 - 27)\%$ .

Іншою характеристикою пластичності є відносне звуження після розриву  $\psi$ , %:

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%,$$

де  $A_0$  – початкова площа поперечного переріза зразка.

Для сталі марки Ст3  $\psi = (60 - 70)\%$ .

Якщо зразок після навантаження, що відповідає границі текучості (рисунок 3.11), розвантажити, то процес розвантаження буде зображений лінією  $MO_1$ , майже паралельною вихідній пружній ділянці діаграми. Подовження, отримане зразком до початку розвантаження, при розвантаженні повністю не зникає. *Залишкове подовження  $\Delta l_{ост}$  називається пластичним подовженням* ( $\Delta l_{п}$  – пружне подовження). Отже, за границею пружності повне подовження зразка складається із двох частин – пружної і пластичної:

$$\Delta l = \Delta l_{п} + \Delta l_{зал},$$

а до границі пружності – тільки із чисто пружної:  $\Delta l_{зал} = 0$ .

Якщо після розвантаження зразка його відразу знову навантажити, то процес повторного навантаження відобразиться лінією  $O_1M$ , яка майже збігається з лінією  $MO_1$ , що описує процес розвантаження. Обидві лінії (розвантаження й навантаження) утворюють петлю – петлю гістерезису. Площа петлі гістерезису відповідає втратам механічної енергії за один цикл, які досить малі. Ці втрати називаються внутрішнім (молекулярним) тертям.

При подальшому навантаженні (після точки  $M$ ) крива продовжується так, начебто не було проміжного розвантаження. Отже, у зразка після попереднього деформування покращилися пружні властивості – підвищилися границя пропорційності та границя пружності, але погіршилися пластичні властивості – поменшилося залишкове подовження після розриву, тобто матеріал став більш крихким.



Явище підвищення пружних властивостей матеріалу в результаті попереднього пластичного деформування називається *наклепом*.

Діаграма розтягання в осях  $F - \Delta l$  (рисунок 3.11) характеризує властивості зразка, оскільки залежить від його розмірів. Для оцінки механічних властивостей матеріалу діаграму розтягання перебудовують у координатах “напруження-деформація”. Для цього всі ординати ділять на вихідну площу поперечного переріза  $A_0$ , а всі абсциси – на вихідну довжину робочої частини  $l_0$ . У результаті одержуємо діаграму напружень  $\sigma - \varepsilon$ , яка має той самий вигляд, що діаграма  $F - \Delta l$ , оскільки  $A_0$  та  $l_0$  є сталими. Ця діаграма є умовною, оскільки при її побудові не враховується зміна значень  $A_0$  і  $l_0$  в процесі випробування. Дійсні напруження в кожний момент навантаження будуть більше від умовних. Помітне відхилення дійсних напружень від умовних відбувається після границі текучості, тому що звуження перерізу стає більш значним.

Діаграми дійсних напружень будуються, як правило, для теоретичних досліджень, наприклад, при вирішенні завдань утворення більших деформацій. Умовні діаграми використовуються на практиці для визначення механічних характеристик матеріалу  $\sigma_{\text{пл}}, \sigma_{\text{уп}}, \sigma_{\text{T}}, \sigma_{\text{В}}, \sigma_{\text{К}}, \delta, \psi$  та модуля пружності  $E$ .

Деякі матеріали не мають фізичної границі текучості (наприклад, низьколегована сталь), у цьому випадку він визначається умовно як напруження, при якому залишкове подовження досягає 0,2 % робочої довжини зразка.

При розтяганні зразків з *крихкого матеріалу* (чавуну) на діаграмі (рисунок 3.12) майже немає прямолінійної ділянки: скривлення лінії графіка починається при порівняно низьких напруженнях, але оскільки деформації в цьому випадку малі, відхилення від закону Гука є незначним.

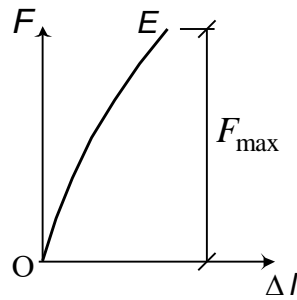


Рисунок 3.12 – Діаграма розтягання чавуну

Розрив зразків з крихких матеріалів відбувається майже раптово при дуже малих подовженнях ( $\approx 0,4-1\%$  розрахункової довжини зразка).

Характер руйнування чавунного зразка суттєво відрізняється від руйнування сталевого. Руйнування чавунного зразка відбувається в результаті відриву по площинці, перпендикулярній до напрямку розтягувальної сили. На поверхні зламу видна грубозерниста структура матеріалу.

### 3.4.2 Діаграми стиску різних матеріалів

Якщо на кінцях прямого бруса прикладені сили, спрямовані уздовж його осі назустріч одна одній, то в брусі виникає стиск. Довжина бруса повинна бути не більш ніж у п'ять-шість разів більше від меншого з його поперечних розмірів, щоб не виникало поздовжнього згину (тобто викривлення прямолінійної форми бруса).

Випробуванню на стиск піддають короткі зразки звичайно круглого або квадратного перерізу. Зразок поміщають між опорними плитами преса, які, зближаючись, стискають його. Але на результат досліду сильно впливає тертя, що виникає між основами зразка і опорними плитами преса. Стиснутий у поздовжньому напрямку зразок прагне розширитися в поперечних напрямках, однак у кінців зразка тертя перешкоджає такому розширенню.

Для зменшення впливу тертя роблять змащення мастилом або парафіном. При цьому границя міцності виходить трохи нижче порівняно зі зразками, випробовуваними без змащення.

Таким чином, одержувана з досліду границя міцності є значною мірою умовною величиною, тому встановлені стандартні границі.

Крихкі матеріали, наприклад, чавун, при випробуванні на стиск без змащення торців руйнується здебільшого від зсуву по площинках з найбільшими дотичними напруженнями (рисунок 3.13, б). Діаграма із самого початку має майже лінійну залежність. На цій ділянці діаграми форма і розміри зразка змінюються незначно. При наближенні до максимального навантаження крива діаграми стає більш пологою, і зразок набуває дещо бочкоподібної форми.

При добре змащених торцях руйнування зразків з крихких матеріалів супроводжується утворенням поздовжніх тріщин (рисунок 3.13, в). Причиною їх появи є нерівномірний розподіл зусиль по поверхні зіткнення зразка із плитою, яке при більших деформаціях викликає перекіс елементарних часток усередині зразка. У результаті з'являються відриваючі зусилля у перерізах, паралельних осі бруса.

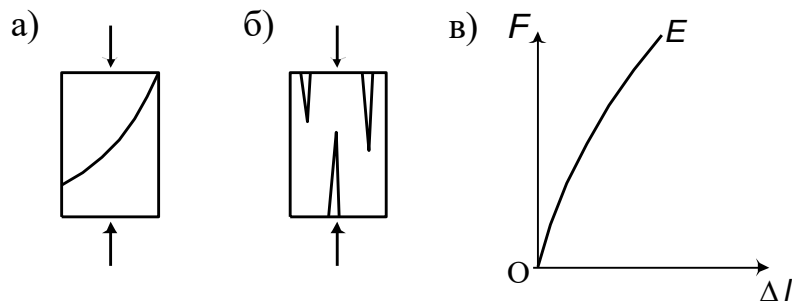


Рисунок 3.13 – Діаграма стиску чавуну

Більшість крихких матеріалів (бетон, камінь) руйнуються при стиску так само, як чавун, і мають подібну діаграму (рисунок 3.13, а). Крихкі матеріали опираються стиску значно краще, чим розтягання. Наприклад, у сірого чавуну границя міцності на стиск дорівнює 560–900 МПа, а на розтягання – 120–190 МПа, тобто приблизно в 4-5 раз менше.

Зразки із пластичних матеріалів – сталі, свинцю, міді (рисунок 3.14) при стиску значно коротшають, сильно розширюючись у поперечному напрямку, але тріщин, характерних для зсуву, у них не спостерігається.

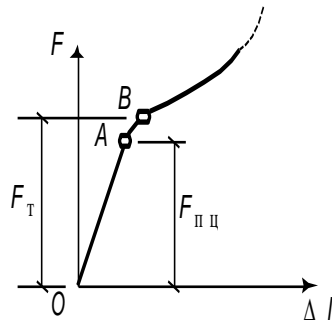


Рисунок 3.14 – Діаграма стиску низьковуглецевої сталі

Початкова ділянка діаграми є прямолінійною – до точки А (рисунок 3.14). Кут нахилу збігається з кутом нахилу аналогічної ділянки діаграми розтягання. Це свідчить про те, що модуль пружності в сталі при розтяганні і стиску можна приймати однаковим. Після точки А діаграма плавно переходить у криву, подібну до діаграми розтягання. Площинка текучості тут виражена слабо. При подальшому навантаженні, коли розвиваються значні пластичні деформації, зразок сплющується, набуваючи бочкоподібної форми. Звичайно на цьому випробування закінчують, тому що зразок зруйнувати не вдається, не вдається визначити і границю міцності. Значення границі пропорційності і границі текучості при розтяганні та стиску практично однакові.

Роздивимось ще діаграму стиску деревини (рисунок 3.15). Деревина належить до анізотропних матеріалів, опірність яких зовнішньому навантаженню залежить від розташування волокон при випробуванні.

При стиску зразка уздовж волокон (крива 1 на рисунок 3.15, а) на ділянці ОА деревина працює майже пружно, і ріст деформацій фактично відбувається пропорційно збільшенню навантаження.

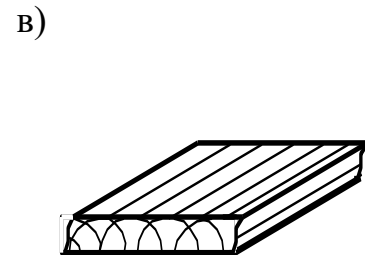
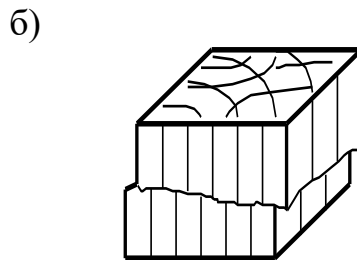
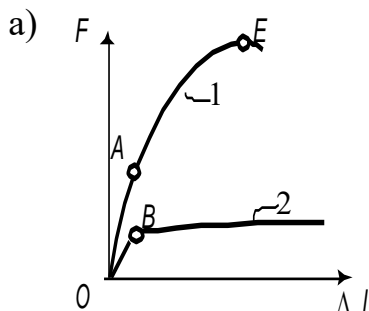


Рисунок 3.15 – Діаграма стиску деревини

При подальшому збільшенні навантаження деформації починають зростати швидше, ніж зусилля. Це вказує на пружно-пластичну область роботи матеріалу. Руйнування зразка відбувається при навантаженні  $F_{\max}$  (точка  $E$ ) з утворенням характерної складки (рисунок 3.15, б).

При стиску зразка поперек волокон (крива 2 на рисунку 3.15, а) до невеликого навантаження (точка  $B$ ), що відповідає границі пропорційності, між навантаженням і деформацією існує лінійна залежність. Потім деформації швидко збільшуються, а навантаження зростає незначно. У результаті зразок спресовується – ущільнюється. Руйнівне навантаження визначається умовно. Воно відповідає деформації стиску зразка на  $1/3$  своєї первісної висоти. *Опір деревини стиску уздовж волокон у 8-10 раз більше від опору поперек волокон.*

Описані вище випробування матеріалів проводяться при нормальних умовах, тобто при температурі  $20^{\circ}\text{C}$ , безперервному і плавному переміщенні захватів машини зі швидкістю не більше  $10\text{ мм/хв}$ . Однак існують різні умови, у яких доводиться працювати матеріалу будівельних конструкцій. Наприклад, при підвищених або знижених температурах, при дії радіоактивних, особливо нейтронних проникаючих випромінюваннях, при швидкій зміні навантаження та ін. При цьому механічні властивості матеріалів змінюються і залежать від умов експлуатації конструкцій, елементів машин і механізмів.

Механічні характеристики деяких матеріалів наведені в додатку А.

### 3.5 Розрахунки на міцність

У будівництві та машинобудуванні застосовують різні методи розрахунку на міцність, які відрізняються вибором критерію настання небезпечного стану, при якому може настати

руйнування, тобто вибором умови міцності. При розрахунку механічних вузлів і деталей машинобудівних конструкцій основним залишається метод допустимих напружень.

### 3.5.1 Метод допустимих напружень

При виборі розмірів елемента конструкції потрібно забезпечити деякий запас, що забезпечує неможливість його руйнування або пластичних деформацій. Елемент повинен бути запроектований так, щоб не настав *небезпечний стан*, тобто щоб найбільші напруження, що виникають у ньому при роботі, були не більше тих, при яких матеріал руйнується (тобто границі міцності  $\sigma_B$ ) або спостерігається текучість (тобто границі текучості  $\sigma_T$ ).

Щоб не допустити ризик руйнування споруди, можна допускати в її елементах напруження, які будуть становити лише частину границі міцності матеріалу. Таким чином, повинна виконуватися *умова міцності*

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.13)$$

де  $\sigma_{\max}$  – найбільше напруження, що виникає в одній із точок небезпечного перерізу і обумовлене розрахунком;

$[\sigma]$  – *допустиме напруження*, отримане для даного матеріалу на підставі експериментальних досліджень.

*Допустимим напруженням* називають те найбільше напруження, при якому конструкція буде працювати тривалий час без небезпеки її руйнування.

Допустиме напруження  $[\sigma]$  визначається в такий спосіб:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{неб}}}{n},$$

де  $n > 1$  – коефіцієнт запасу;

$\sigma_{\text{неб}}$  – напруження в небезпечному стані, яке дорівнює

$$\sigma_{\text{неб}} = \begin{cases} \sigma_B & \text{для крихких матеріалів} \\ \sigma_T & \text{для пластичних матеріалів.} \end{cases}$$

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення споруди, характеру дії навантажень і багатьох інших факторів. Основними факторами, які впливають на вибір його значення, є відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції і окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції; ступінь точності методу визначення напружень; неточність завдання зовнішнього навантаження; довговічність і значущість проекрованої споруди або машини.

Для будівельних сталей значення коефіцієнта запасу міцності приймається  $n=1,4-1,6$ ; для крихких матеріалів  $n=2,5-3,5$ ; для деревини  $n=3,5-6$ .

Значення допустимих напружень задаються технічними умовами та нормами проектування.

### **3.5.2 Умова міцності при розтяганні-стиску.**

#### **Три основні задачі**

При розтяганні (стиску) максимальні напруження виникають у перерізах, перпендикулярних до осі (п. 3.1).

Підставивши в умову (3.13) вираз для напруження (3.1), одержимо умову міцності при розтяганні-стиску:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.14)$$

де  $N$  – поздовжня сила в перерізі;

$A$  – площа поперечного перерізу.

Записавши умову (3.14) у трьох варіантах, одержимо три основні задачі, що виникають при розтяганні-стиску.

1 **Перевірка міцності.** При заданих зовнішньому навантаженні і поперечному перерізі перевірити міцність елемента. Для цього визначаються поздовжні сили в стержні, і у небезпечних перерізах перевіряється виконання умови (3.14).

2 **Добір перерізу.** Для цього визначаються поздовжні сили в стержні, і у небезпечному перерізі (одному або декількох) з умови (3.14) виражається площа:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (3.15)$$

3 Визначення найбільшої допустимої сили. Визначається найбільша сила, при якій забезпечена міцність елемента із заданими розмірами. З виразу (3.14)

$$F_{\max} \leq [\sigma]A. \quad (3.16)$$

### 3.6 Потенційна енергія деформації і робота, затрачувана на розтягання стержня

У пружній стадії після розвантаження деформованих тіл їх первісний об'єм і форма повністю відновлюються. Це вказує на наявність у навантаженому тілі деякого запасу енергії – потенційної енергії деформації.

Визначимо роботу, затрачувану на розтягання призматичного стержня, закріпленого верхнім кінцем і навантаженого на нижньому кінці силою  $F$  (рисунок 3.16, а). Залежність між розтягувальною силою і подовженням у пружній стадії лінійна, тому зображується на діаграмі похилою прямою (рисунок 3.16, б).

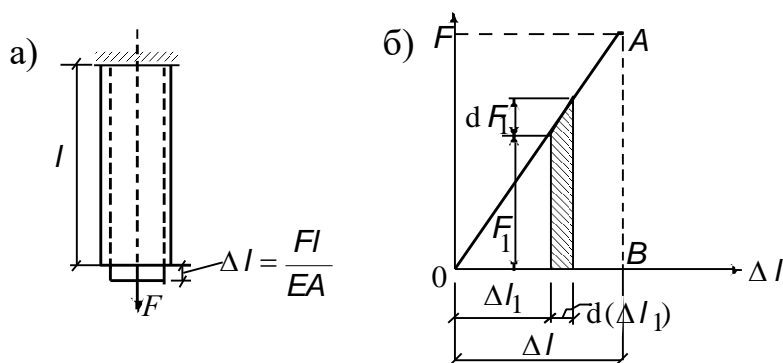


Рисунок 3.16 – До визначення потенційної енергії деформації

Нехай у деякий момент навантаження розтягувальна сила дорівнює  $F_1$ , а подовження –  $\Delta l_1$ .



Розтягувальній силі дамо нескінченно мале збільшення  $dF_1$ , тоді стержень одержить нескінченно мале подовження  $d(\Delta l_1)$  і сила  $F_1$  виконає на переміщенні  $d(\Delta l_1)$  роботу  $F_1 \cdot d(\Delta l_1)$ .

Робота, затрачувана на розтягання зразка в пружній стадії, дорівнює

$$W = \int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1).$$

Інтеграл у правій частині рівності є площею трикутника  $OAB$  (рисунок 3.16, б) і дорівнює

$$W = \frac{F \Delta l}{2}.$$

При прийнятих передумовах витрачена на розтягання зразка робота цілком переходить у потенційну енергію  $U$ . Виникаючими при цьому втратами, через їхню малість, нехтуємо. Тоді

$$U = W = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.17)$$

Підставивши в (3.17) замість  $\Delta l$  його вираз (3.11), знайдемо

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (3.18)$$

Формулою (3.18) можна користуватися тільки в тому випадку, коли подовжня сила і площа поперечного перерізу є сталими.

Питома потенційна енергія, тобто енергія, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F^2 l}{2EA} \frac{1}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \cdot (E\varepsilon)}{2E} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Для визначення роботи, затрачуваної на розтягання стержня за границею пропорційності, можна поширити проведені міркування на всю діаграму розтягання (рисунок 3.17).

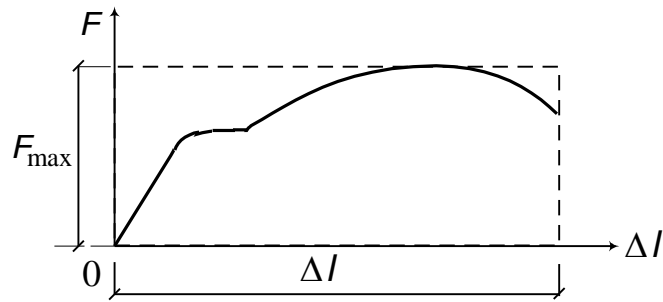


Рисунок 3.17 – До визначення роботи, затрачуваної на розтягання стержня за границею пропорційності

З цих міркувань можна зробити висновок, що робота, витрачена на розрив зразка, дорівнює повній площі діаграми розтягання

$$A = \eta F_{\max} \Delta l,$$

де  $\eta$  – коефіцієнт заповнення діаграми. Для сталі марки Ст3  $\eta = 0,85 - 0,87$ .

Основні формули для розрахунків при розтяганні-стиску наведені в додатку Б.

### 3.7 Статично невизначувані системи, які працюють на розтягання-стиск

**Статично невизначуваними системами** називаються системи, що мають кількість невідомих реакцій або зусиль, що перевищує число кількості рівноваги, які можна скласти для визначення цих невідомих. Для розв'язання таких задач складають додаткові рівняння, виходячи з розгляду умов деформації системи.

#### 3.7.1 Розрахунок на силові впливи

Нехай стержень  $AB$  постійного перерізу, виконаний з однорідного матеріалу, закріплений по кінцях, навантажений силою  $F$  в межах його довжини  $l$ , як показано на рисунку 3.18, а.

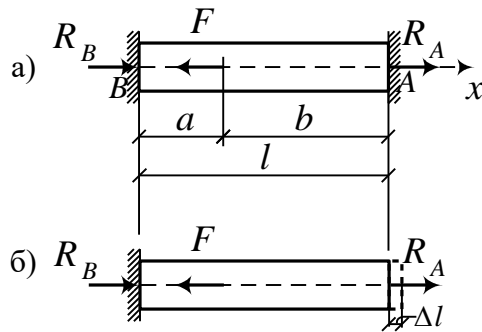


Рисунок 3.18 – До розрахунку статично невизначуваної системи на силові впливи

Від дії сили  $F$  в защемленнях  $A$  і  $B$  виникають опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$ . Прийmemo їхні напрямки протилежними напрямку сили  $F$ . Для системи сил, що діють уздовж однієї осі, можливо скласти єдине рівняння рівноваги

$$\sum x = 0: R_A + R_B = F.$$

Кількість невідомих перевищує кількість можливих рівнянь рівноваги на одиницю, тобто система один раз статично невизначувана. Для її розв'язання потрібно скласти одне додаткове рівняння. Воно в даному завданні виражає таку умову: довжина бруса  $l$  не може змінитися, тому що він жорстко закріплений із двох боків, тобто

$$\Delta l = 0.$$

Відкинемо одне із защемлень, наприклад, праве, і заміниmo його дію на стержень реакцією  $R_A$  (рисунок 3.18, б). У цій системі (тепер статично визначуваній), використовуючи вираз (3.11) і принцип незалежності дії сил, знайдемо  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{R_A l}{EA} - \frac{Fb}{EA} = 0.$$

Звідси визначимо

$$R_A = \frac{Fb}{l}.$$

З рівняння рівноваги випливає

$$R_B = \frac{Fa}{l}.$$

Реакції  $R_A$  і  $R_B$  отримані зі знаком плюс, що вказує на правильність обраного напрямку. Таким чином, розкрита статична невизначуваність системи. Епюра поздовжніх сил будується звичайним шляхом із застосуванням методу перерізів (див. пп. 1.6, 2.2).

### 3.7.2 Розрахунок на температурні впливи

У статично визначуваних системах температурні впливи та неточність виготовлення елементів систем не викликають зусиль.

При зміні температури в статично невизначуваних системах виникають відмінні від нуля зусилля.

Покажемо це. Розглянемо сталевий брус (рисунок 3.19, а), забитий своїми кінцями в стіни, які вважаються нерухожими, так що довжина бруса  $l$  залишається незмінною.

Нехай температура бруса підвищилася з  $t_1$  до  $t_2$ . Підвищення температури становить  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Від підвищення температури брус прагне подовжитися, але стіни перешкоджають цьому подовженню, дають на кінці бруса та викликають у ньому стискаючі напруження від реакції  $R_t$ . За відсутності зовнішніх сил єдине для даної системи рівняння рівноваги  $\sum x = 0$  дає, що реакції на обох опорах однакові за величиною і протилежно спрямовані, як і показано на рисунку 3.19, а.

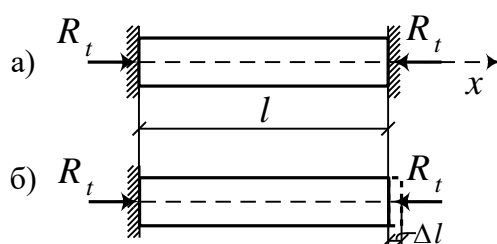


Рисунок 3.19 – До розрахунку статично невизначуваних систем на температурні впливи

Припустимо, що права стіна прибрана (рисунок 3.19, б). Тоді подовження бруса, викликане температурою, дорівнює

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t ,$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу бруса (для сталі  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  1/град).

У дійсності стіна праворуч кінця бруса  $\epsilon$ . Вона стискає брус силою  $R_t$ , укорочуючи його:

$$\Delta l_R = \frac{R_t l}{EA}.$$

Подовження  $\Delta l_t$  і укорочення  $\Delta l_R$  повинні бути рівними, тому що в дійсності довжина бруса не змінюється:

$$\alpha t l = \frac{R_t l}{EA},$$

звідки

$$R_t = EA \alpha t.$$

### 3.7.3 Розрахунок на неточність виготовлення

При виготовленні конструкції неминучі невеликі неточності, наприклад, у довгих елементах. У статично визначуваних системах такі неточності викликають додаткові напруження.

Нехай брус підвішений на трьох стержнях (рисунку 3.20), причому середній стержень 2 зроблений коротше на величину  $\delta$ , ніж стержні 1.

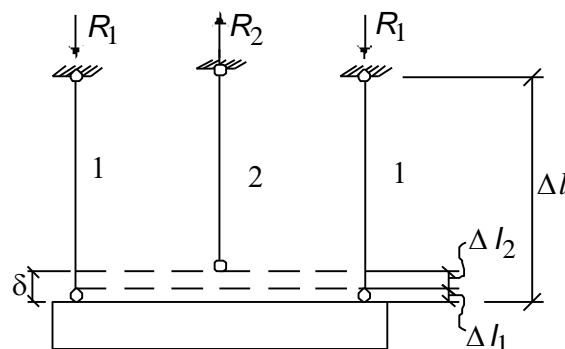


Рисунок 3.20 – До розрахунку статично невизначуваних систем на неточність складання

Якщо стержні розташовані симетрично, то ліва і права крайні реакції збігаються, рівняння рівноваги має вигляд

$$2R_1 - R_2 = 0 \quad (3.20)$$

і містить дві невідомі реакції.

Запишемо умову деформування стержнів.

Щоб зібрати конструкцію та з'єднати із брусом, середній стержень необхідно розтягнути на величину  $\Delta l_2$ , а крайні стержні стиснути на величину  $\Delta l_1$  так, щоб нижні кінці всіх стержнів розташувалися на одній горизонталі. Звідси одержимо рівняння спільності деформацій:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta.$$

Виразимо подовження через зусилля (3.11):

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} + \frac{R_2 l}{E_2 A_2} = \delta. \quad (3.21)$$

Розв'язуючи спільно отримане рівняння спільності (3.21) та рівняння рівноваги (3.20), знайдемо:

$$R_1 = \frac{\delta}{l \left[ \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}; \quad R_2 = \frac{2\delta}{l \left[ \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}.$$

### 3.8 План вирішення завдань опору матеріалів

- 1 З'ясувати характер і величину всіх зовнішніх сил, прикладених до елемента або конструкції, включаючи реакції. Створити розрахункову схему елемента.
- 2 Для матеріалу, з якого виконаний елемент або конструкція, з'ясувати величину допустимого напруження. Якщо потрібно, самостійно вибрати матеріал, що відповідає призначенню конструкції та характеру дії зовнішніх сил.
- 3 Визначити положення небезпечного перерізу, побудувавши за необхідності епюри внутрішніх зусиль (тема 2).
- 4 Записати умову міцності  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  в одній із точок небезпечного перерізу і, користуючись ним, перевірити міцність, підібрати переріз або визначити допустиме навантаження. Правило визначення  $\sigma_{\max}$  залежить від виду

деформації і напруженого стану. Для розтягання-стиску

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}.$$

- 5 У більшості випадків перевірка міцності повинна бути доповнена перевірками на жорсткість (обмеження деформацій) і стійкість (неможливість загальної зміни елементами запроєктованої форми рівноваги).

### 3.9 Приклад розв'язання задачі

Розглянемо гвинт вагонної стяжки (рисунок 3.21). При рівномірному русі поїзда сила тяги локомотива, що передається через стяжку, урівноважується опором руху іншої частини поїзда. Сила тяги передається на гвинт стяжки за допомогою гвинтової нарізки так, що сили  $P$  спрямовані вздовж осі гвинта. Стержень гвинта зазнає розтягання.

*Задача.* Підібрати поперечні розміри гвинта, що забезпечують його міцність. Сила тяги  $P = 25$  т.

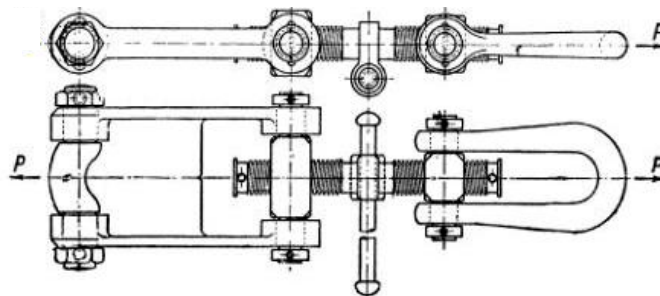


Рисунок 3.21 – Гвинт вагонної стяжки

*Розв'язання.* На гвинт діють зовнішні сили  $P = 25$  т.

Стержень стяжки виконується зі сталі з допустимим напруженням  $[\sigma] \approx 1500$  кг/см<sup>2</sup>. Це значення, яке можна узяти з довідника, отримують у такий спосіб. Границя міцності застосовуваної сталі  $\sigma_B = 5000$  кг/см<sup>2</sup>. Вибір такої сталі визначається тим, що гвинт стяжки повинен бути не дуже важким, а це вимагає матеріалу високої міцності. З іншого боку, матеріал гвинта повинен добре опиратися ударам і поштовхам, а сталь із дуже високою границею міцності є крихкою.

Гвинт стяжки не тільки не повинен розриватися, але в ньому не повинно виникати залишкових деформацій, щоб не відбулося заїдання в нарізці. Границя пружності для обраного матеріалу становить приблизно 0,6 границі міцності:  $\sigma_{II} \approx 0,6\sigma_B$ . Як показує

вивчення динамічних навантажень, при раптовому прикладанні сил (вирушення з місця) напруження збільшуються приблизно вдвічі порівняно зі статичним розтяганням, при якому визначають механічні характеристики матеріалів у лабораторії. Тому величина допустимого напруження не повинна перевищувати

$$0,5 \cdot 0,6 \sigma_B = 0,3 \sigma_B.$$

Це дає коефіцієнт запасу  $1/0,3 \approx 3,3$ . Таким чином, допустиме напруження може бути прийняте рівним

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} = 1500 \text{ кг/см}^2.$$

Необхідна площа при  $P = 25 \text{ т}$  дорівнює (3.15)

$$A \geq \frac{P}{[\sigma]} = \frac{25000 \text{ кг}}{1500 \text{ кг/см}^2} = 16,7 \text{ см}^2.$$

Діаметр стержня стяжки  $d$  визначається умовою

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \geq 16,7 \text{ см}^2,$$

звідки

$$d \geq \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\pi}} = \sqrt{\frac{16,7 \cdot 4}{\pi}} \approx 4,5 \text{ см}.$$

Отриманий діаметр визначений по дну нарізки для найменшої площі поперечного перерізу.



## 4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

У розрахунках з опору матеріалів визначаються напруження, деформації та переміщення в стержнях при зовнішніх впливах. Для розрахунку цих величин при розтяганні-стиску було досить знати площу поперечного перерізу. При інших деформаціях цього виявляється недостатньо.

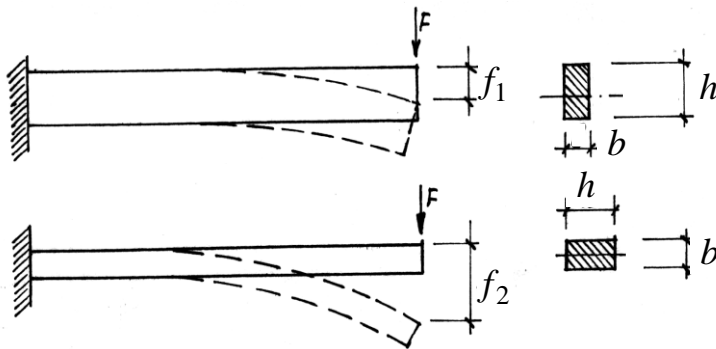


Рисунок 4.1

Це можна продемонструвати, розглядаючи згин двох консольних балок з однаковою площею поперечного перерізу, але по-різному орієнтованих, як показано на рисунку 4.1.

Очевидно, прогин другої консолі  $f_2$  більше, ніж першої  $f_1$ . Таким чином, площа не характеризує повною мірою деформації і, як буде видно далі, напруження при згині та крученні.

Дана тема присвячена уведенню необхідних геометричних характеристик.

### 4.1 Площа поперечного перерізу

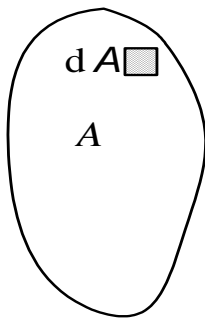


Рисунок 4.2

Площа перерізу  $A$  (рисунку 4.2) визначається як сума елементарних площинок по всьому перерізу:

$$A = \int_A dA .$$

Очевидно, *розмірність* площі –  $m^2$ , *знак* –  $A > 0$ , площа строго додатна.

## 4.2 Статичний момент площі

Нехай дано переріз бруса площею  $A$  та осі  $z, y$ , що лежать у площині цього перерізу (рисунок 4.3).

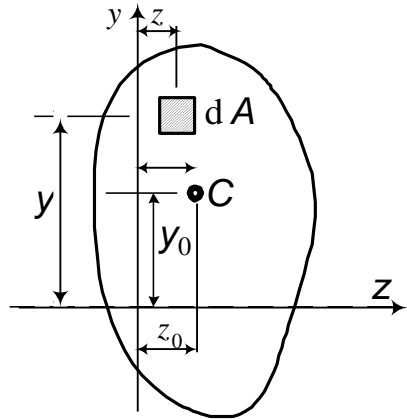


Рисунок 4.3 – До визначення статичного моменту площі перерізу

Виділимо елемент площі  $dA$ , розташований на відстані  $y$  від осі  $z$ . Статичним моментом елементарної площинки  $dA$  відносно осі  $z$  називається добуток цієї площинки на координату  $y$ :

$$dS_z = y \cdot dA.$$

Статичний момент усієї площі відносно осі  $z$  дорівнює сумі статичних моментів елементарних площинок (аналогічно вводиться статичний момент відносно осі  $y$ ). Оскільки елементарних площинок нескінченно багато, то суму заміняємо інтегралом по всій площі перерізу:

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. \quad (4.1)$$

Отже, **статичним моментом** відносно осі називається інтеграл по всій площі перерізу від добутоків елементарних площинок на їхні координати щодо цієї осі (4.1).

*Властивості статичного моменту.*

1 *Розмірність* статичного моменту – одиниця довжини у кубі ( $m^3$ ), *знак* може бути довільним (тобто момент може бути додатним, від'ємним або нульовим).

2 На підставі відомої з теоретичної механіки теореми про момент рівнодіючої сума статичних моментів елементарних площинок відносно якої-небудь осі дорівнює моменту всієї площі відносно цієї осі. Отже, *статичний момент перерізу відносно осі дорівнює добутку площі перерізу на координату центру ваги відносно цієї осі:*

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = z_c \cdot A, \quad (4.2)$$

де  $A$  – площа перерізу;

$y_c, z_c$  – координати центру ваги перерізу  $C$  відносно осей відповідно  $z$  та  $y$ .

3 *Статичний момент перерізу відносно центральної осі дорівнює нулю.* Насправді, якщо вісь проходить через центр ваги, то координата центра ваги відносно цієї осі дорівнює нулю. Тому згідно зі співвідношеннями (4.2) статичний момент відносно цієї осі дорівнює нулю. Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральними*.

### 4.3 Положення центра ваги перерізу

*Випадок 1* (див. також п. 4.8).

Якщо переріз має вісь симетрії, то центр ваги знаходиться на цій осі.

Якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги знаходиться в точці перетинання цих осей.

*Випадок 2* (див. також п. 4.8). Переріз не має осей симетрії. Розглянемо цей випадок на прикладі рисунка 4.4.

Уведемо довільні осі  $z, y$ . Розіб'ємо переріз на прості фігури, для яких положення центрів ваги  $C_1, C_2, C_3$  відомо (тобто відомі їхні координати  $z_1, z_2, z_3, y_1, y_2, y_3$  відносно осей  $z$  і  $y$ ). При визначенні  $z_3, y_3$  користуємося тим, що центр ваги прямокутного трикутника знаходиться на відстані однієї третьої частини катета від прямого кута.

Складемо статичний момент площі відносно осі  $y$ . Це можна зробити двома способами: по-перше, статичний момент –

інтегральна величина, тому момент «суми» перерізів дорівнює сумі моментів цих перерізів:

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3;$$

по-друге, згідно з виразом (4.2),

$$S_y = A \cdot z_c,$$

де

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 16 + 18 + 20,25 = 54,25 \text{ см}^2.$$

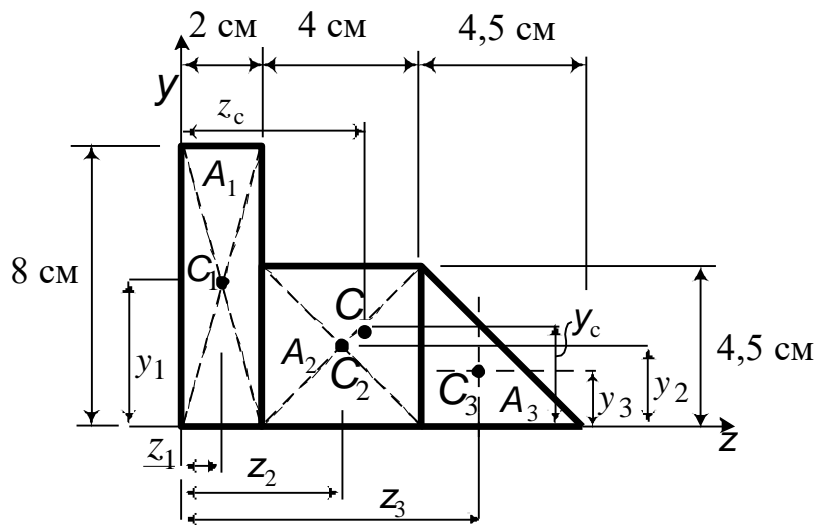


Рисунок 4.4 – До виведення формул для координат центра ваги

Прирівнюємо ці вирази один до одного:

$$A z_c = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3,$$

звідки знайдемо

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A} = \frac{16 \cdot 1 + 18 \cdot 4 + 20,25 \cdot 7,5}{54,25} = 4,42 \text{ см}. \quad (4.3)$$

Аналогічно

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{16 \cdot 4 + 18 \cdot 2,25 + 20,25 \cdot 1,5}{54,25} = 2,49 \text{ см}. \quad (4.4)$$

Таким чином, щоб знайти положення центра ваги поперечного перерізу відносно заданих осей, потрібно додати статичні моменти площ складових фігур відносно цих осей і поділити їх суму на площу фігури.

#### 4.4 Моменти інерції перерізу

Візьмемо довільний переріз площею  $A$  та проведемо осі координат  $z$  і  $y$  (рисунок 4.5).

Виділимо елемент площі  $dA$ , розташований на відстані  $y$  від осі  $z$  і відстані  $z$  від осі  $y$ . Складемо добутки  $dA \cdot y^2$  та  $dA \cdot z^2$ . Добуток  $dA \cdot y^2$  називається моментом інерції елементарної площинки  $dA$  відносно осі  $z$ . Аналогічно  $dA \cdot z^2$  – момент інерції площинки  $dA$  відносно осі  $y$ .

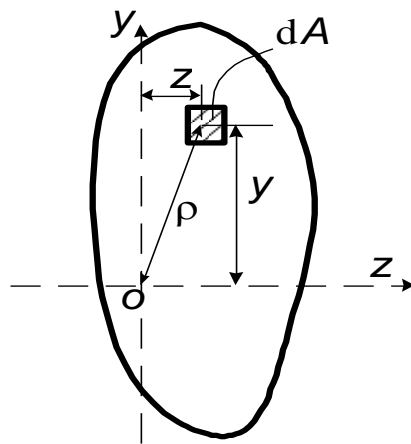


Рисунок 4.5 – До виведення формул для визначення моментів інерції

Момент інерції всієї площі дорівнює сумі моментів інерції елементарних площинок:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad (4.5)$$

$$J_y = \int_A z^2 dA. \quad (4.6)$$

Отже, *моментом інерції перерізу відносно осі* називається інтеграл, узятий по всій площі перерізу від добутку елементарної площинки на квадрат її відстані до цієї осі.

*Відцентровим моментом перерізу відносно осей  $z, y$*  називається інтеграл по площі перерізу від добутку площинки  $dA$  на її координати  $z$  та  $y$ :

$$J_{zy} = \int_A z y dA. \quad (4.7)$$

*Полярним моментом інерції перерізу* називається інтеграл по площі перерізу від добутку площинки  $dA$  на квадрат її відстані до точки  $O$  (полюса):

$$J_p = \int_A \rho^2 dA . \quad (4.8)$$

*Розмірність* осьових і полярного моментів інерції – одиниця довжини у четвертій степені ( $m^4$ ), *знак*:  $J_z, J_y, J_p$  строго більше нуля.

*Розмірність* відцентрового моменту – одиниця довжини у четвертій степені ( $m^4$ ) ; *знак* – відцентровий момент може бути величиною додатною, від’ємною або дорівнювати нулю.

#### 4.4.1 Залежність між моментами інерції при паралельному перенесенні центральних осей

Нехай задані моменти інерції  $J_z, J_y$  перерізу відносно осей  $z$  і  $y$ , що проходять через центр ваги перерізу. Знайдемо моменти інерції відносно осей  $z_1$  і  $y_1$ , паралельних осям  $z$  і  $y$  та розташованих від них на відстанях  $a, b$  (рисунок 4.6).

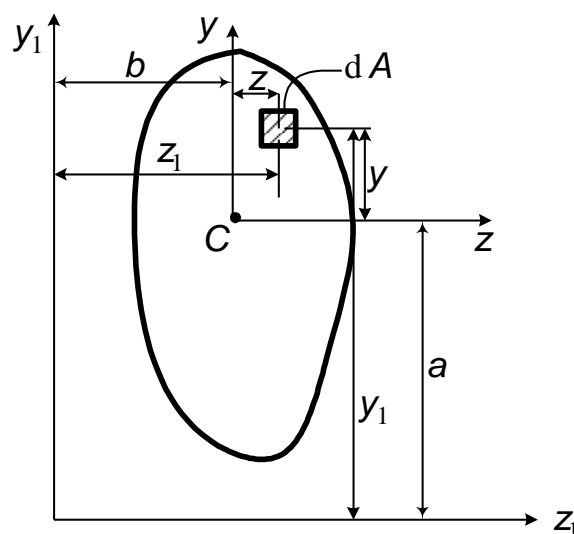


Рисунок 4.6 – До виведення залежностей між моментами інерції при паралельному перенесенні центральних осей

Визначимо момент інерції площі фігури відносно осі  $z_1$ :

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Перший член у правій частині отриманого рівняння являє собою осьовий момент інерції  $J_z$  (4.5).

Інтеграл другого доданка – статичний момент площі (4.2) відносно осі  $z$ . Він дорівнює нулю, оскільки за умовою завдання вісь  $z$  проходить через центр ваги. Інтеграл у третьому доданку дорівнює площі перерізу.

Таким чином, при паралельному переносі центральної осі

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A, \quad (4.9)$$

тобто момент інерції перерізу відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

Аналогічно отримуємо

$$J_{y_1} = J_y + b^2 A. \quad (4.10)$$

Формула перерахунку відцентрового моменту інерції при паралельному переносі центральних осей (рисунок 4.6), має вигляд

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abA. \quad (4.11)$$

При обчисленні моментів інерції за формулою (4.11)  $a$  і  $b$  слід брати з урахуванням знака в системі координат  $z_1, y_1$ .

Додаючи формули (4.9), (4.10) і враховуючи, що  $J_{\rho_1} = J_{z_1} + J_{y_1}$ , одержуємо залежність для полярного моменту інерції при паралельному перенесенні осей із центра ваги (полюс  $O$ ) у довільну точку (полюс  $O_1$ ):

$$J_{\rho_1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2) A. \quad (4.12)$$



#### 4.4.2 Зміна осьових і відцентрового моментів інерції при повороті координатних осей

У перерізі площею  $A$  виберемо довільні осі координат  $z$  і  $y$ . Припустимо, що відносно цих осей обчислені моменти інерції  $J_z, J_y, J_{zy}$ . Повернемо осі координат проти ходу годинникової стрілки (додатне значення кута) на деякий кут  $\alpha$  (рисунок 4.7).

Виділимо елементарну площинку  $dA$  і виразимо її нові координати  $z_1, y_1$  через старі:

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

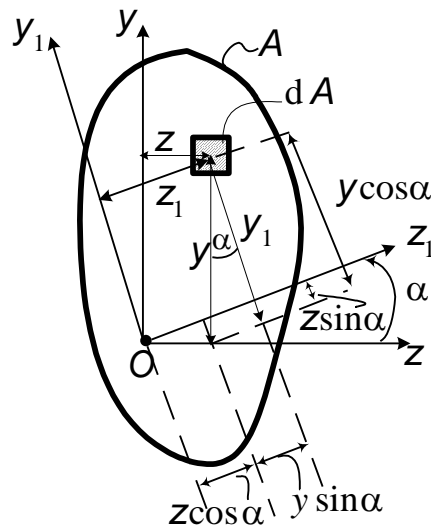


Рисунок 4.7 – До виведення залежностей між моментами інерції при повороті осей

Знайдемо моменти інерції відносно нових осей:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A zy \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{zy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Остаточно

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha. \quad (4.13)$$

$$J_{y_1} = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \quad (4.14)$$

Одержимо тепер залежність для відцентрового моменту інерції відносно осей  $z_1$  і  $y_1$ :

$$J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA.$$

Розкриваючи дужки і враховуючи, що  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ , одержуємо

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \quad (4.15)$$

#### 4.4.3 Властивості осьових моментів

1 Полярний момент інерції дорівнює сумі осьових моментів інерції відносно будь-якої пари взаємно перпендикулярних осей, що проходять через полюс (див. рисунок 4.5):

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = J_z + J_y. \quad (4.16)$$

2 Полярний момент  $J_\rho$  визначається тільки положенням точки О. Тому з виразу (4.16) випливає, зокрема, що *сума осьових моментів  $J_z + J_y$  при повороті осей є сталою і дорівнює  $J_\rho$ .*

Цей самий результат можна одержати, склавши вирази (4.13) і (4.14):

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y -$$

сума осьових моментів при повороті осей не змінюється і дорівнює, наприклад, сумі центральних моментів.

3 З формул (4.9) – (4.11) видно, що моменти інерції приймають мінімальні значення при  $a=0$  або  $b=0$ , тобто коли осі проходять через центр ваги. Отже, *при довільному паралельному перенесенні осей мінімальним моментом інерції є момент відносно центральної осі.*

4 Якщо одна з пари взаємно перпендикулярний осей  $z$ ,  $y$  є віссю симетрії, то відцентровий момент щодо цієї пари осей дорівнює нулю.

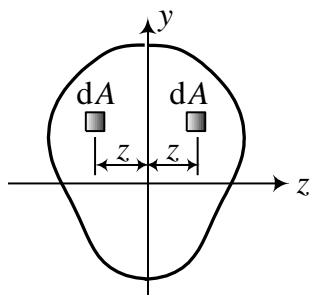


Рисунок 4.8

Нехай, наприклад, переріз симетричний відносно осі  $y$ . Тоді будь-якому елементу площі  $dA$ , розташованому праворуч від осі  $y$ , відповідає симетрично розташований елемент ліворуч від осі. Координати  $z$  цих елементів різняться тільки знаком, тому кожний добуток  $zy dA$  має пару, таку саму за величиною і протилежну за знаком, і сума цих добутоків дорівнює нулю, значить  $J_{zy} = 0$ .

5. При повороті осей на  $90^\circ$  відцентровий момент міняє знак на протилежний: підставимо у вираз (4.15)  $\alpha = 90^\circ$ , одержимо

$$J_{z_1y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = \frac{J_z - J_y}{2} \cdot 0 + J_{zy} \cdot (-1) = -J_{zy}.$$

#### 4.5 Головні осі і головні моменти інерції

Формули (4.13), (4.14), (4.15) показують, що якщо осі координат поступово повертати, то величини моментів інерції будуть безперервно змінюватися. При деякому значенні кута відцентровий момент  $J_{zy}$  стане рівним нулю. Таке положення осей і моменти відносно них використовуються при визначенні напружень і переміщень при різних видах деформацій і тому виділяються серед інших.

Пари взаємно перпендикулярних осей, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю, а осьові моменти приймають екстремальні значення, називаються **головними осями**.

Головні осі, що проходять через центр ваги, називаються **головними центральними осями**.

Моменти інерції відносно головних осей називаються **головними моментами інерції**.

Головні осі позначаються буквами  $u, v$ .

### *Положення головних осей*

1 Кут між головними та центральними осями отримаємо, якщо прирівняємо до нуля відцентровий момент (4.15):

$$J_{z_1y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (4.17)$$

2 Покажемо, що кут повороту осей, при якому  $J_{zy} = 0$ , забезпечує екстремум осьових моментів.

Моменти приймають екстремальні значення, якщо їх похідні за кутом дорівнюють нулю:

$$\frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} = -(J_z - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$
$$\frac{dJ_{y_1}}{d\alpha} = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha + 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

звідки одержуємо те саме значення  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

Отже, *положення головних осей* визначається за виразом (4.17).

За цією формулою визначаються два значення кута  $\alpha$ , які відрізняються одне від одного на  $90^\circ$ , і положення двох взаємне перпендикулярних головних осей.

### *Деякі властивості головних осей*

1 З формули (4.17) випливає, що  
– якщо  $J_{zy} \neq 0$  і  $J_z - J_y \neq 0$ , то для  $\alpha$  одержимо два корені:  $\alpha_1$  і  $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ ;

– якщо  $J_{zy} = 0$ ,  $J_z - J_y \neq 0$ , то  $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$ ,  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ , тобто вихідні осі – головні;

– якщо  $J_{zy} \neq 0$ ,  $J_z - J_y = 0$ , то  $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$  і  $\alpha_2 = 135^\circ$ .  
Прикладом цього випадку може бути переріз у вигляді

рівнобічного кутника (рисунок 4.9), для якого осьові моменти інерції відносно центральних осей  $z$  і  $y$  рівні між собою, а відцентровий момент інерції  $J_{zy} \neq 0$ ; головні осі  $u$  і  $v$  складають із цими осями кути  $45^\circ$  і  $135^\circ$ .

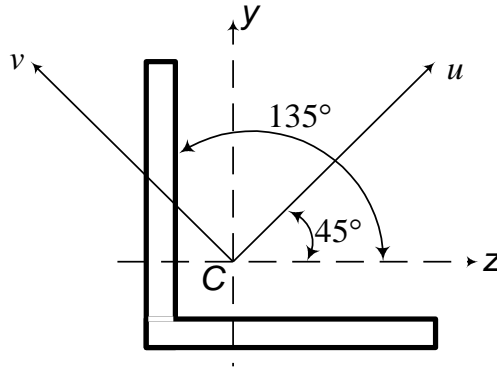


Рисунок 4.9 – Головні центральні осі інерції рівнобічного кутника

2 З п. 4.3 (властивість 4) випливає, що *пари осей, одна з яких є віссю симетрії, – головні осі.*

3 Якщо головні моменти інерції відносно осей, що проходять через точку  $O$ , рівні за величиною, то всі осі, що проходять через цю точку, – головні. Крім того, усі осьові моменти в цьому випадку однакові. Дійсно, нехай  $u, v$  – головні осі ( $J_{uv} = 0$ ), і  $J_u = J_v$ . Проведемо осі  $z, y$  під довільним кутом  $\alpha$  до осей  $u, v$ . Тоді згідно з виразом (4.15),

$$J_{zy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha = 0,$$

тобто осі  $z, y$  також є головними.

Далі, з виразу (4.13) при  $J_u = J_v$  одержуємо

$$J_z = J_y = J_u \cos^2 \alpha + J_u \sin^2 \alpha = J_u = J_v.$$

4 Якщо через точку  $O$  можна провести більше однієї пари головних осей перерізу, то всі осі, що проходять через цю точку, є головними. Дійсно, нехай  $u, v$  і  $z, y$  – дві пари головних осей із загальним початком координат, причому друга пара повернена відносно першої на кут  $\alpha$ . Тоді згідно з виразом (4.15),

$$J_{zy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha.$$

Оскільки моменти  $J_{zy}$  і  $J_{uv}$  за умовою дорівнюють нулю, одержуємо  $J_u = J_v$ , і на підставі властивості 2 усі осі, що проходять через точку  $O$ , – головні.

На підставі пунктів 2, 4 випливає, що в *перерізах, що мають більше двох осей симетрії, усі центральні осі є головними*. До таких перерізів належать круг, правильні багатокутники (див. рисунок 4.10), тобто перерізи, що мають кругову симетрію.

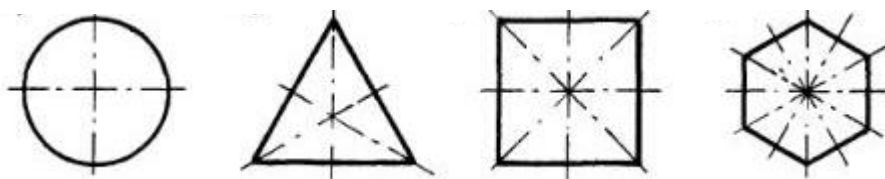


Рисунок 4.10 – Перерізи з круговою симетрією

*Осьові моменти інерції цих перерізів відносно всіх центральних осей однакові.*

### **Значення головних моментів інерції**

Оскільки сума осьових моментів є сталою (4.16), то при постійному збільшенні кута  $\alpha$  один з моментів інерції зростає, а інший зменшується, і відносно головних осей перший приймає значення  $\max$ , а другий –  $\min$ . Ці моменти позначаються через  $J_v (J_{\max})$ ,  $J_u (J_{\min})$ .

Вирази для знаходження головних моментів інерції  $J_{\max}$  і  $J_{\min}$  можна одержати, виключивши з (4.13) і (4.14) кут  $\alpha$  за допомогою (4.17):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}. \quad (4.18)$$

Знак плюс перед другим доданком в (4.18) відноситься до  $J_{\max}$ , знак мінус – до  $J_{\min}$ .

Розглянемо ще одне питання. За отриманими результатами обчислень за (4.18) неможливо встановити, відносно якої з головних осей момент інерції приймає найбільше або найменше значення. Для цього використовують таке правило: вісь  $\max$  (або

min) становить менший кут з тією центральною віссю ( $z$  або  $y$ ), відносно якої момент інерції є більшим (або відповідно меншим).

## 4.6 Радіуси інерції перерізу

**Радіусом інерції** перерізу відносно осі  $z$  називається величина  $i_z$ , яка визначається рівністю

$$J_z = A i_z^2.$$

З визначення випливає, що радіус інерції дорівнює відстані від осі  $z$  до тієї точки, у якій слід зосередити (умовно) площу перерізу  $A$ , щоб момент інерції однієї цієї точки дорівнював моменту інерції всього перерізу.

Аналогічно визначається  $i_y$ :

$$J_y = A i_y^2.$$

Таким чином,

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (4.19)$$

Радіуси інерції, відповідні головним осям, називаються головними радіусами інерції і визначаються за формулами

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}. \quad (4.20)$$

З визначення випливає, що значення радіуса інерції додатне, його розмірність – одиниця довжини (м).

## 4.7 Моменти інерції найпростіших фігур

### 4.7.1 Момент інерції прямокутника

Обчислимо момент інерції прямокутника відносно горизонтальної центральної осі  $z$  (рисунок 4.11).

Розіб'ємо весь прямокутник на нескінченно малі елементи лініями, паралельними осі  $z$ .

Момент інерції елемента

$$dJ_z = y^2 dA = y^2 (b dy).$$

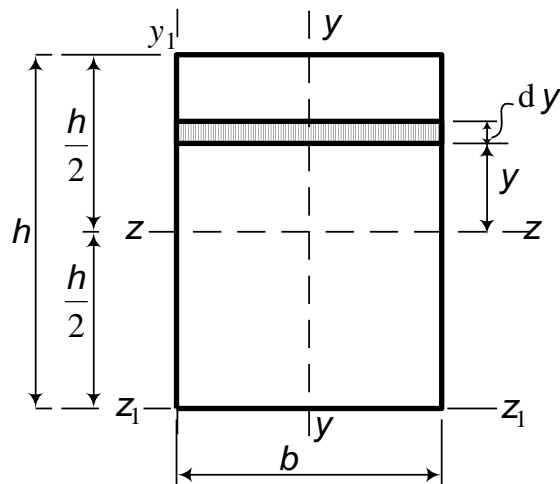


Рисунок 4.11 – До визначення моментів інерції прямокутника

Момент інерції всього прямокутника

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Аналогічно одержуємо

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (4.22)$$

Момент інерції *відносно осі  $z_1$ , що проходить по основі*, знайдемо за формулою паралельного перенесення (4.9):

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогічно

$$J_{y_1} = \frac{b^3 h}{3}.$$

## 4.7.2 Моменти інерції трикутника

Визначимо момент інерції трикутника *відносно осі  $z_1$ , що проходить через його вершину паралельно основі* (рисунок 4.12).

Розіб'ємо весь трикутник на тонкі смуги лініями, паралельними осі  $z_1$ . Розглянемо смугу, що знаходиться на



відстані  $y$  від вершини. Висота цієї смуги дорівнює  $dy$ , ширина  $by/h$  (знайдена із пропорції  $z/y = b/h$ ).

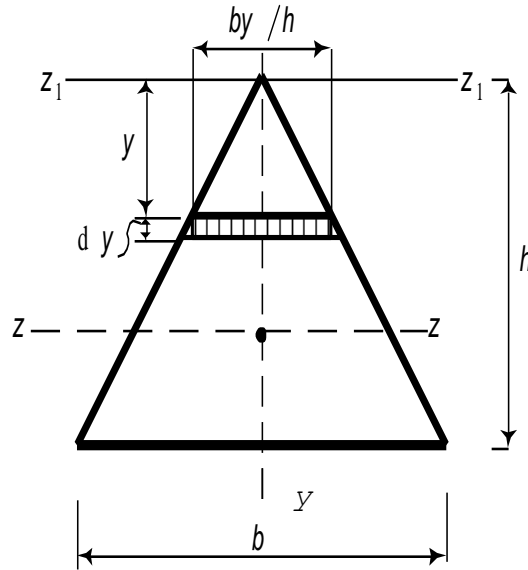


Рисунок 4.12 – До визначення моментів інерції трикутника

Момент інерції смуги

$$dJ_{z_1} = y^2 \frac{b}{h} y dy.$$

Момент інерції всього трикутника

$$J_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{4}.$$

Знайдемо момент інерції відносно *центральної осі*  $z$ , використовуючи формулу (4.9):

$$J_z = J_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.23)$$

Відносно осі симетрії можна одержати

$$J_y = \frac{b^3 h}{48}. \quad (4.24)$$

### 4.7.3 Моменти інерції круга

Для круга (рисунок 4.13) знайдемо спочатку полярний момент інерції відносно його центра. Круг з радіусом  $R$  розіб'ємо на нескінченно малі елементи, що являють собою концентричні

кільця. Візьмемо одне з таких кілець із радіусом  $\rho$  і товщиною  $d\rho$ .

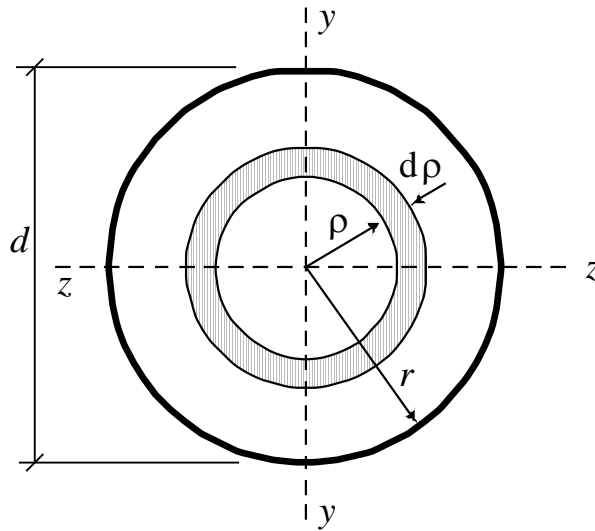


Рисунок 4.13 – До визначення моменту інерції круга

Полярний момент інерції кільця

$$d J_{\rho} = (2 \pi \rho d \rho) \rho^2 .$$

Щоб одержати полярний момент інерції всієї площі круга, потрібно просумувати моменти інерції всіх кілець:

$$J_{\rho} = \int_0^R 2 \pi \rho^3 d \rho = 2 \pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} . \quad (4.25)$$

Внаслідок симетрії круга моменти інерції відносно всіх осей, що проходять через центр круга, рівні між собою, тобто  $J_z = J_y$ . З іншого боку, знаючи, що  $J_{\rho} = J_z + J_y$  (4.16), одержимо

$$J_z = J_y = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} . \quad (4.26)$$

#### 4.8 Моменти інерції складних фігур

При розрахунках балок на міцність і жорсткість необхідно визначати значення геометричних характеристик складних

поперечних перерізів, а саме положення головних центральних осей і головних центральних моментів інерції.

Порядок їх визначення розглянемо на прикладах.

**Випадок 1.** Переріз має 2 осі симетрії (рисунок 4.14). Визначити моменти інерції кільця. Центральні та головні осі співпадають з осями симетрії.

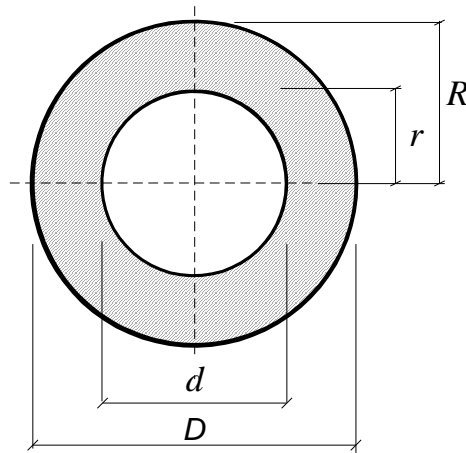


Рисунок 4.14

Представляємо кільце як складний переріз: зовнішній круг діаметра  $D$ , з якого вирізаний внутрішній круг діаметра  $d$ . Співвідношення внутрішнього та зовнішнього діаметрів дорівнює  $\alpha = d/D = r/R$ .

Згідно з формулами (4.25), (4.26), одержуємо

$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4);$$

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4) \quad (4.27)$$

**Випадок 2.** Переріз має одну вісь симетрії. Визначити положення головних центральних осей і головні моменти інерції симетричного поперечного перерізу сталевго стержня, складеного із прокатних профілів – двотавра І 40 і швелера [ 30 (рисунок 4.15).

Випишемо із сортаменту (додаток В) необхідні розміри і геометричні характеристики двотавра і швелера.

Для І40: розміри зазначені на рисунку 4.15,  $A_1 = 72,6 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_1} = 19062 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 667 \text{ см}^4$ . Центр ваги знаходиться на перетинанні осей симетрії двотавра в точці  $C_1$ .

Для швелера [ 30: розміри і відстань по вертикалі від зовнішньої грані до центра ваги  $C_2$  зазначені на рисунку (ця відстань  $z_0 = 2,52 \text{ см}$  дана в сортаменті),  $A_2 = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_2} = 327 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 5810 \text{ см}^4$ . Зазначимо, що в сортаменті (додаток В) швелер поставлений на коротку сторону, і його вісь  $y$  паралельна довгій стороні. Відносно цього положення наш швелер повернутий на  $90^\circ$ , отже, його осі помінялися місцями. Тому і індекси в моментах інерції із сортаменту ми поміняли місцями.

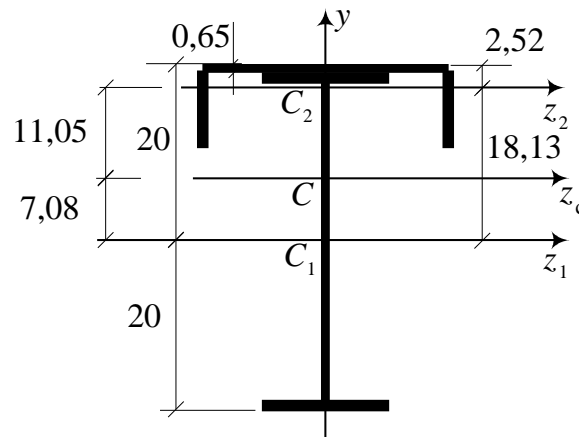


Рисунок 4.15 – Симетричний переріз, розміри – у сантиметрах (см)

Переріз має вісь симетрії  $y$ , отже, центр ваги лежить на цій осі (центральна вісь  $y_c$  збігається з віссю  $y$ ). Залишається визначити положення центральної осі  $z_c$ .

Для цього проведемо довільним образом допоміжну вісь  $z$ , наприклад, поєднаємо її із центральною віссю двотавра  $z_1$ . Тоді координати центрів ваги складових 1 і 2 (тобто двотавра та швелера) і площа перерізу дорівнюють

$$y_1 = 0; y_2 = 20 + 0,65 - 2,52 = 18,13 \text{ см}; A = A_1 + A_2 = 119,1 \text{ см}^2.$$

*Центр ваги перерізу (4.3):*

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{18,13 \cdot 46,5}{119,1} = 7,08 \text{ см.}$$

### *Моменти інерції відносно центральних осей*

Момент інерції – це інтегральна величина, тому момент інерції складного перерізу дорівнює сумі моментів інерції його складових, тобто в нашому випадку двотавра і швелера. Згідно з виразами (4.9), (4.10), для осьових моментів інерції одержуємо:

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_c}^I + J_{z_c}^L = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + A_i a_i^2) = \\ &= J_{z_1} + A_1 (y_1 - y_c)^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_c)^2 = 28706 \text{ см}^4; \\ J_{y_c} &= \sum_{i=1}^2 (J_{y_i} + A_i b_i^2) = J_{y_1} + J_{y_2} = 6477 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Центральна вісь  $y$  є віссю симетрії перерізу, тому (п. 4.4.3, властивість 4) відцентровий момент перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:  $J_{z_c y_c} = 0$ .

### *Головні осі*

Оскільки  $y$  – вісь симетрії, то пара осей  $z_c, y_c$  є головними осями (п. 4.5, властивість 2), а моменти інерції відносно центральних осей – головними моментами інерції. Розташуємо їх по зростанню:

$$J_{\min} = J_u = J_{y_c} = 6477 \text{ см}^4, \quad J_{\max} = J_v = J_{z_c} = 28706 \text{ см}^4.$$

Вісь  $z_c$  є максимальною головною віссю  $v$ ;  $y_c$  – мінімальною головною віссю  $u$ .

**Випадок 3.** Переріз не має осей симетрії (рисунок 4.16). Розіб'ємо його на два прямокутники, як це показано на рисунку 4.16.

Координати та площі складових 1 і 2:

$$z_1 = 0,5 \text{ см}; \quad y_1 = 6 \text{ см}; \quad A_1 = 12 \text{ см}^2;$$

$$z_2 = 4,5 \text{ см}; \quad y_2 = 11,5 \text{ см}; \quad A_2 = 7 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 = 19 \text{ см}^2$$

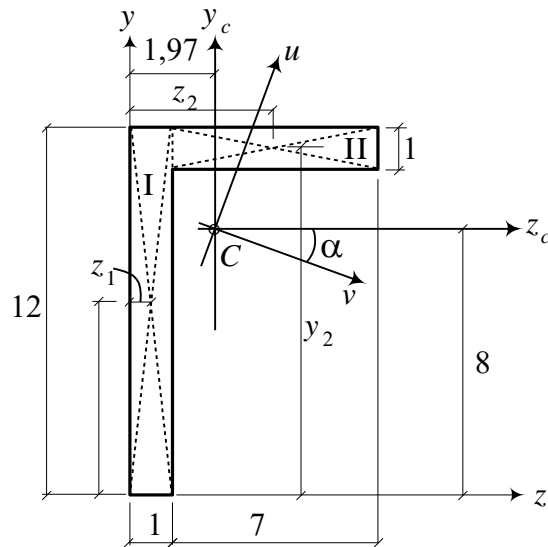


Рисунок 4.16 – Схема заданого перерізу, усі розміри – у сантиметрах (см)

*Центр ваги перерізу (4.3), (4.4):*

$$z_c = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A} = \frac{0,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 7}{19} = 1,97 \text{ см} \approx 2 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{6 \cdot 12 + 11,5 \cdot 7}{19} = 8 \text{ см}.$$

Моменти інерції складових простих перерізів відносно власних осей  $z_1, y_1$ ;  $z_2, y_2$  обчислюються за формулами для прямокутного перерізу (4.21), (4.22):

$$J_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{1^3 \cdot 12}{12} = 1 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{7 \cdot 1^3}{12} = 0,6 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{7^3 \cdot 1}{12} = 28,6 \text{ см}^4.$$

*Моменти інерції всього перерізу відносно центральних осей обчислюємо за формулами (4.9), (4.10):*

$$J_{z_c} = J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II} = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + A_i a_i^2) =$$

$$= J_{z_1} + A_1 (y_1 - y_c)^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_c)^2 = 278 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II} = \sum_{i=1}^2 (J_{y_i} + A_i b_i^2) =$$

$$= J_{y_1} + A_1 (z_1 - z_c)^2 + J_{y_2} + A_2 (z_2 - z_c)^2 = 100 \text{ см}^4.$$

*Відцентровий момент відносно центральних осей* обчислюємо за формулою (4.11) з урахуванням того, що для перерізів 1 і 2 їх центральні осі є осями симетрії, отже їх відцентрові моменти  $J_{z_1 y_1}$  і  $J_{z_2 y_2}$  дорівнюють нулю. Таким чином,

$$J_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i y_i} + A_i a_i b_i) =$$

$$= 0 + A_1 (y_1 - y_c)(z_1 - z_c) + 0 + A_2 (y_2 - y_c)(z_2 - z_c) = 97 \text{ см}^4$$

*Кут нахилу головних осей* визначаємо, використовуючи формулу (4.17):

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot 97}{100 - 278} = -1,09,$$

звідси  $2\alpha = -47,5^\circ$ ,  $\alpha = -23,7^\circ$ .

*Головні моменти інерції* обчислюємо за формулою (4.18):

$$\frac{J_{\max}}{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}.$$

Звідси

$$J_v = J_{\max} = 320 \text{ см}^4,$$

$$J_u = J_{\min} = 58 \text{ см}^4.$$

*Виконаємо перевірку правильності обчислень:*

1)  $J_{z_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min} = 378 \text{ см}^4$  – сума головних моментів дорівнює сумі центральних моментів;

2)  $J_{uv} = \frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0$  – відцентровий момент відносно осей  $u, v$  дійсно дорівнює нулю;

3) головні моменти дійсно є екстремальними:

$$J_{\min} < J_{z_c}, \quad J_{\min} < J_{y_c}; \quad J_{\max} > J_{z_c}, \quad J_{\max} > J_{y_c}.$$

Неважно переконатися, що умови перевірок виконуються.

#### 4.9 Моменти опору перерізу

*Моментом опору перерізу  $W_z$  відносно осі  $z$*  називається відношення моменту інерції перерізу відносно цієї осі  $J_z$  до максимальної відстані від осі до границі перерізу (рисунок 4.17).

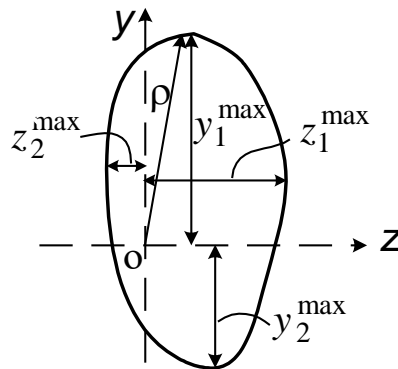


Рисунок 4.17 – До визначення моменту опору

Є дві максимальні відстані від осі  $y$  до границі перерізу (рисунок 4.17): у додатному напрямку осі  $y$  – це відстань  $y_1^{\max}$ , у від’ємному напрямку  $y_2^{\max}$ . Аналогічно є дві максимальні відстані від осі  $z$ . Тому визначаються два моменти опору відносно кожної осі:

$$W_{z,1} = \frac{J_z}{y_1^{\max}}, \quad W_{z,2} = \frac{J_z}{|y_2^{\max}|}; \quad W_{y,1} = \frac{J_y}{z_1^{\max}}, \quad W_{y,2} = \frac{J_y}{|z_2^{\max}|}. \quad (4.28)$$

Аналогічно визначається *полярний момент* опору  $W_\rho$ :



$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{\rho_{\max}}. \quad (4.29)$$

З визначення випливає, що *розмірність* моменту опору – одиниця довжини у кубі (м<sup>3</sup>), *значення* строго додатне.

Для найпростіших перерізів моменти опору відносно центральних осей розраховуються в такий спосіб.

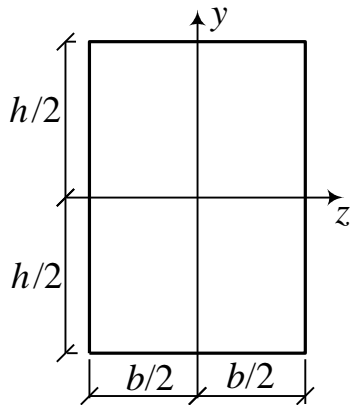


Рисунок 4.18

Осьові моменти опору прямокутника (рисунок 4.18) дорівнюють

$$W_{z,1} = W_{z,2} = W_z = \frac{J_z}{(h/2)} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6},$$

$$W_{y,1} = W_{y,2} = W_y = \frac{J_y}{(b/2)} = \frac{b^3h}{12(b/2)} = \frac{b^2h}{6},$$

де  $J_z, J_y$  визначаються за формулами (4.21), (4.22).

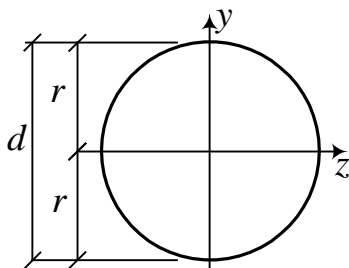


Рисунок 4.19

Осьовий і полярний моменти опору круга (рисунок 4.19) дорівнюють

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{r} = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16},$$

де  $J_z, J_\rho$  визначаються за формулами (4.25), (4.26).

Полярний момент опору кільця (рисунок 4.14) з урахуванням (4.27), (4.29) дорівнює

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{R} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = d/D. \quad (4.30)$$

При  $\alpha = 0$  за цією формулою отримується полярний момент опору суцільного круглого перерізу.

В основні формули при розрахунку елементів на згин входять моменти інерції та опору відносно головних центральних осей. При розрахунках на кручення стержнів круглого перерізу використовуються полярні моменти інерції і опору.

Геометричні характеристики деяких перерізів наведені в додатку Г.

## 5 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

У темі 1 (п. 1.7, 1.8) були уведені поняття напруженого та деформованого стану в точці і перелічені компоненти напружень і деформацій, що діють по довільних площинках (рисунок 1.18, формули (1.1), (1.8)). Якщо змінювати положення елементарного кубика (повертати), то напруження на його гранях будуть безперервно змінюватися, і при деякому положенні дотичні напруження на всіх площинках обернуться на нуль.

Площинки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю, називаються *головними площинками*.

Нормальні напруження, що діють по головних площинках, називаються *головними напруженнями*. Головні напруження позначають не за назвою осей, а цифрами і розташовують у порядку убутання з урахуванням знака:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Як буде доведено, напруження  $\sigma_1$  та  $\sigma_3$ , аналогічно головним моментам інерції, приймають екстремальні значення, тобто при будь-якому повороті елемента значення нормальних напружень містяться між  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ .

### 5.1 Види напруженого стану

При різних зовнішніх навантаженнях деякі головні напруження можуть бути нульовими. Залежно від кількості ненульових головних напружень розрізняють види напруженого стану.

1 Якщо відмінно від нуля одне головне напруження:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , напружений стан називається лінійним.

2 Якщо відмінні від нуля дві головні напруження:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_3 \neq 0, \sigma_2 = 0$ , напружений стан називається плоским (двохосьовим).

3 Якщо відмінні від нуля всі головні напруження, напружений стан називається об'ємним (тривісним).

## 5.2 Лінійний напружений стан

Лінійний напружений стан являє собою деформацію розтягання-стиску, вивчену в темі 3. Наведемо отримані там положення в загальному контексті вивчення напруженого стану. Нами були отримані вирази для напружень (3.3) по похилих площинках (рисунок 5.1):

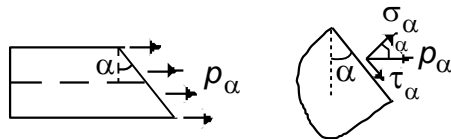


Рисунок 5.1

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

### 5.2.1 Положення головних площинок

Дотичне напруження  $\tau_{\alpha} = 0$  при  $\alpha = 0$ , тобто головною є площинка, перпендикулярна до осі бруса.

При  $\alpha = 90^{\circ}$  також  $\tau_{\alpha} = 0$ , але в цьому перерізі дорівнює нулю також нормальне напруження.

### 5.2.2 Значення головних напружень

При  $\alpha = 0$   $\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma$  – головним є нормальне напруження в поперечному перерізі бруса.

### 5.2.3 Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження

Згідно з виразом (3.3),

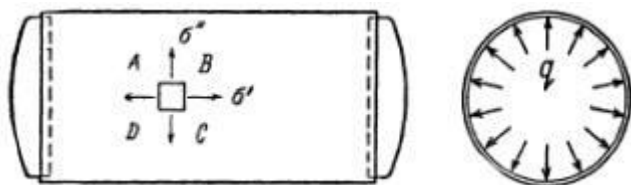
$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

### 5.2.4 Максимальні дотичні напруження

Максимальні дотичні напруження виникають на площинках  $\alpha = 45^{\circ}$  ( $\alpha = 135^{\circ}$ ) (рисунок 3.5) і дорівнюють  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ .

### 5.3 Плоский напружений стан

Як приклад можна привести напруження, що виникають у циліндричній частині тонкостінного резервуара (котла), заповненого парою або водою під тиском  $q$  (рисунок 5.2). Бічні стінки і днища зазнають рівномірно розподіленого тиску  $q$ . Тиск



на днища прагне розірвати циліндричну частину по поперечному перерізу, тиск на бічні стінки викликає в них прагнення розірватися

Рисунок 5.2

по твірним циліндра. Таким чином, кожний елемент зазнає розтягання у двох напрямках, як показано на рисунку 5.2. Це ознака плоского напруженого стану.

Одержимо формули для визначення напружень по похилих площинках. Розглянемо нескінченно малий елемент, на гранях якого відомі напруження, і розсічемо його площиною під кутом  $\alpha$ , одержавши призматичний елемент (рисунок 5.3, а, б).

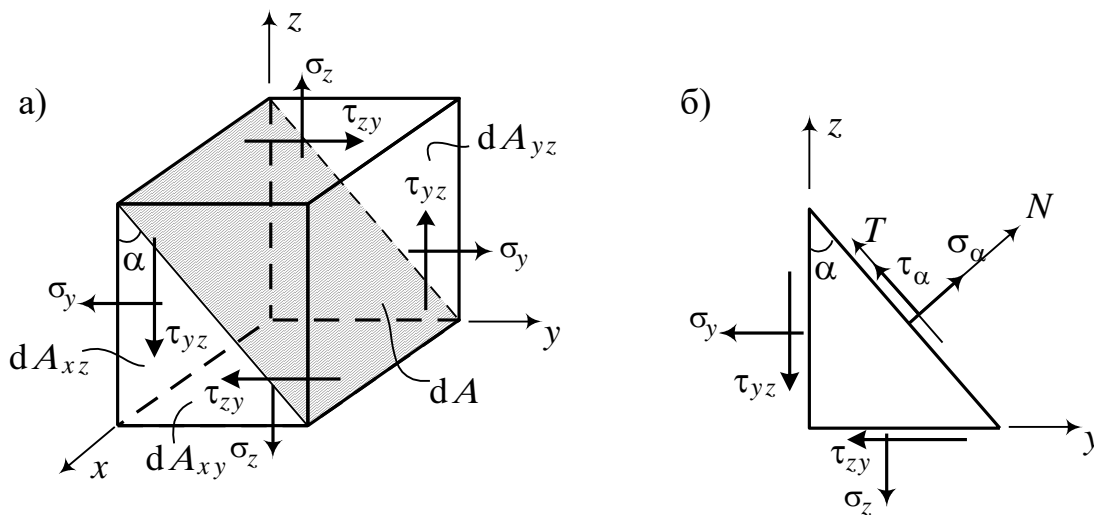


Рисунок 5.3 – Елементарний об'єм (а);  
відсічений призматичний елемент у плані (б)

На похилій площинці уведемо взаємно перпендикулярні осі  $N$  і  $T$  (перпендикулярна і дотична до площинки). Уздовж цих осей діють напруження  $\sigma_\alpha$  та  $\tau_\alpha$ . Для їхнього визначення складемо рівняння рівноваги:

$$\sum N = 0:$$

$$\sigma_{\alpha} dA - (\tau_{zy} dA_{xy}) \cos \alpha - (\sigma_z dA_{xy}) \sin \alpha - (\tau_{yz} dA_{xz}) \sin \alpha - (\sigma_y dA_{xz}) \cos \alpha = 0;$$

$$\sum T = 0:$$

$$\tau_{\alpha} dA + (\tau_{zy} dA_{xy}) \sin \alpha - (\sigma_z dA_{xy}) \cos \alpha - (\tau_{yz} dA_{xz}) \cos \alpha + (\sigma_y dA_{xz}) \sin \alpha = 0.$$

Підставимо в ці рівняння вирази для площ:  $dA_{xy} = dA \sin \alpha$ ;  $dA_{xz} = dA \cos \alpha$  і розділимо обидві частини рівнянь на  $dA$ . З урахуванням закону парності (п. 1.7.2) одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{yz} \sin 2\alpha; \\ \tau_{\alpha} &= (\sigma_z - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.1)$$

*Наслідок.* Сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних площинках не залежить від кута  $\alpha$  і, отже, для даної точки ця сума постійна. Дійсно, згідно з першим виразом (5.1), одержуємо

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_z + \sigma_y.$$

### 5.3.1 Положення головних площинок

Прирівнявши до нуля дотичне напруження (5.1), одержимо

$$(\sigma_z - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{yz} \cos 2\alpha = 0, \quad (5.2)$$

звідки одержуємо тангенс шуканого кута:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}. \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) дає два взаємно перпендикулярні напрямки з кутами нахилу  $\alpha$  і  $\alpha + 90^\circ$ , по яких діють головні напруження. У випадку  $\sigma_y = \sigma_z$  будь-яка площинка є головною.

Легко перевірити, що при таких значеннях кута нормальні напруження приймають екстремальні значення, оскільки  $\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0$ .

### 5.3.2 Значення головних напружень

Виключивши з першої формули (5.1) і (5.3) кут  $\alpha$ , одержимо

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (5.4)$$

Повернемося до формули (5.3). Вона дає напрямки, але не вказує, у якому з них діє  $\sigma_1$  ( $\sigma_{\max}$ ), а в якому  $\sigma_3$  ( $\sigma_{\min}$ ). З формули  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$  випливає, що при  $\tau_\alpha > 0$  маємо  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} > 0$ . Отже,  $\sigma_\alpha$

зростає зі збільшенням  $\alpha$ . Можна одержати таке правило: напрямок  $\sigma_{\max}$  завжди проходить через ті дві координатні чверті, до яких сходяться стрілки дотичних напружень (це проілюстроване на рисунку 5.4).

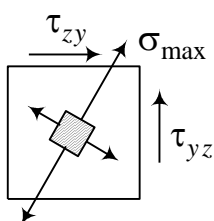


Рисунок 5.4

### 5.2.3 Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження

Припустивши, що  $z$  і  $y$  – головні площинки та  $z$  – максимальна вісь, з виразів (5.1) одержимо

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha; \quad (5.5)$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (5.6)$$

### 5.2.4 Максимальні дотичні напруження

З формули (5.6) випливає, що максимальні дотичні напруження виникають на площинках  $\alpha = 45^\circ$  з головними осями. Оскільки кути можна відкладати по різні боки від головних осей, таких площинок чотири в кожній точці деформованого середовища.

Значення  $\tau_{\max}$  дорівнює напіврізниці максимального і мінімального головних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$



## 5.4 Об'ємний напружений стан

Одержимо формули для визначення напружень по похилих площинках. Розглянемо нескінченно малий елемент, на гранях якого відомі напруження, і відсічемо площиною елементарний чотиригранник – тетраедр (рисунок 5.5, а, б).

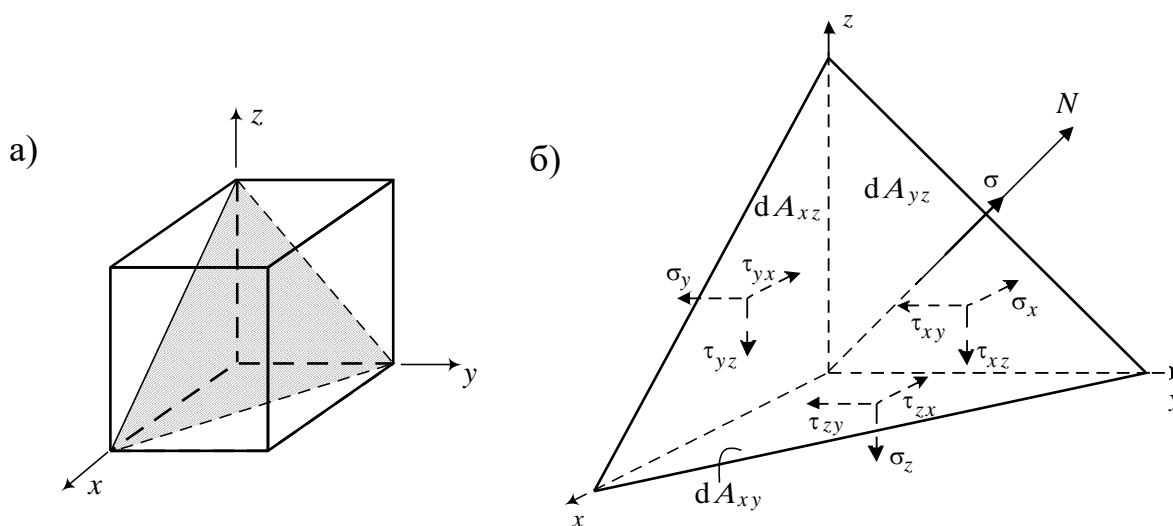


Рисунок 5.5 – Елементарний об'єм (а);  
відсічений чотиригранник (б)

Припустимо, що обрана нами площинка є головною. Тоді на ній діє тільки нормальне напруження  $\sigma$ , спрямоване уздовж нормалі  $N$  до цієї площинки.

Позначимо напрямні косинуси:  $\cos(N,x)=l$ ,  $\cos(N,y)=m$ ,  $\cos(N,z)=n$ . Тоді елементарні площі бічних і нижньої граней тетраедра виражаться через площу похилої площинки  $dA$ :  $dA_{xy} = dA \cdot n$ ;  $dA_{xz} = dA \cdot m$ ;  $dA_{yz} = dA \cdot l$ .

Запишемо аналогічно до п. 5.3 рівняння рівноваги елемента:

$$\sum_x = 0; \quad \sum_y = 0; \quad \sum_z = 0.$$

Після перетворень із урахуванням уведених позначень і закону парності дотичних напружень одержимо

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Отримані вирази можна розглядати як систему лінійних рівнянь відносно напрямних косинусів головної площинки  $l, m, n$ . Якщо визначник цієї однорідної системи дорівнює нулю, то існує єдиний розв'язок системи:  $l = m = n = 0$ . Оскільки

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (5.8)$$

(це доводиться в курсі лінійної алгебри), то всі косинуси одночасно не можуть дорівнювати нулю. Тому для існування розв'язку системи рівнянь (5.7) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю.

Розкривши цей визначник і зробивши угруповання членів, одержимо

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (5.9)$$

де

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (5.10)$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2; \quad (5.11)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}. \quad (5.12)$$

Вираз (5.9) використовується як кубічне рівняння для визначення значень трьох головних напружень. Він має три корені  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Виразимо коефіцієнти у (5.10) – (5.12) через головні напруження:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad (5.13)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3; \quad (5.14)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (5.15)$$

Головні напруження не залежать від вибору осей  $x, y, z$ . Отже, і коефіцієнти  $J_1, J_2, J_3$  не змінюються при повороті осей координат.

Тому величини  $J_1, J_2, J_3$  називаються першим, другим і третім *інваріантами напруженого стану*.

### 5.4.1 Положення головних площинок

Для відшукування  $\ell, m, n$ , що відповідають одному із трьох головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , треба значення цього головного напруження підставити в систему рівнянь (5.7) замість  $\sigma$  і розв'язати отриману систему разом з виразом (5.8). Таким чином, одержимо три набори напрямних косинусів, що відповідають трьом головним площинкам:  $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ .

### 5.4.2 Вираження напружень по довільних площинках через головні напруження

Як було раніше сказано, головні напруження отримуються розв'язанням кубічного рівняння (5.9).

Наведемо без виведення формули для напружень на довільній площинці, заданій напрямними косинусами  $l, m, n$ :

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \quad (5.16)$$

$$\tau_\alpha^2 = \sigma_1^2 \ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (5.17)$$

### 5.4.3 Максимальні дотичні напруження

Аналіз виразу (5.16) показує, що максимальні значення дотичних напружень досягаються на площинках, які визначаються напрямними косинусами:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad \ell = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ n = 0, \quad \ell = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \ell = 0, \quad n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, площинками дії екстремальних дотичних напружень є площинки, що проходять через одну з головних осей і складають із двома іншими осями кути  $45^\circ$ . Іншими словами, ці площинки перпендикулярні до однієї з головних площинок і нахилені до двох інших під кутом  $45^\circ$ . Оскільки кути можна

відкладати по різні боки від головних осей, таких площинок шість у кожній точці деформованого середовища.

Дотичні напруження на цих площинках дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.18)$$

#### 5.4.4 Узагальнений закон Гука

Розглянемо елементарний прямокутний паралелепіпед із гранями, паралельними головним осям, по гранях якого діють головні напруження (рисунок 5.3). Розглянемо дію кожного з них окремо.

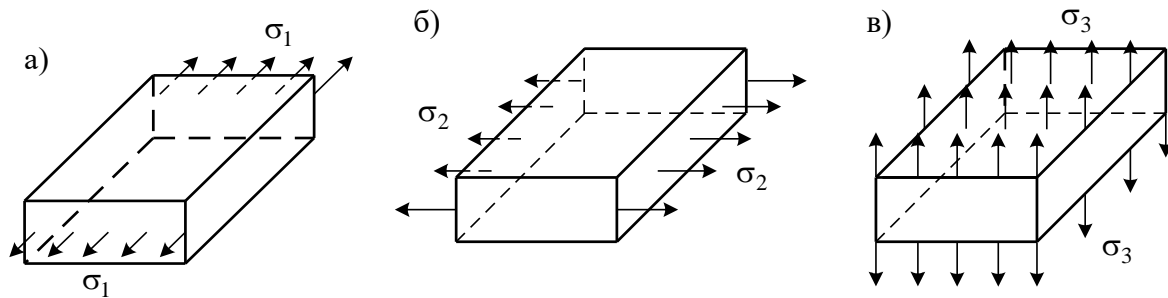


Рисунок 5.6 – До виведення узагальненого закону Гука

У напрямку дії  $\sigma_1$  (рисунок 5.6, а) елемент одержує відносне подовження

$$\varepsilon'_1 = \sigma_1 / E$$

відповідно до виразу (3.9) – до закону Гука при розтяганні.

Напрямок  $\sigma_1$  для напрямків  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  є поперечним (рисунок 5.6, б, в). Тому ці напруження викликають укорочення в напрямку  $\sigma_1$ , які дорівнюють (п. 3.3.2)

$$\varepsilon''_1 = -\nu \sigma_2 / E, \quad \varepsilon'''_1 = -\nu \sigma_3 / E.$$

Згідно із принципом незалежності дії сил, повна деформація в напрямку дії  $\sigma_1$  дорівнює

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Записавши аналогічно вирази для деформацій  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$ , одержимо *узагальнений закон Гука для ізотропного тіла*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] ; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] ; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] .\end{aligned}\tag{5.19}$$

Відносні подовження  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  по напрямках головних осей називаються головними деформаціями.

Якщо осі  $x, y, z$  не є головними, то крім відносних подовжень, виникають і кутові деформації (п. 1.8.2). Але кутові деформації є величиною більш високого порядку малості, ніж лінійні, так що ними можна знехтувати. Тому формулами (5.19) можна користуватися не тільки для головних деформацій, але і для відносних подовжень по будь-яких трьох взаємно перпендикулярних напрямках  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] .\end{aligned}\tag{5.20}$$

#### 5.4.5 Об'ємна деформація

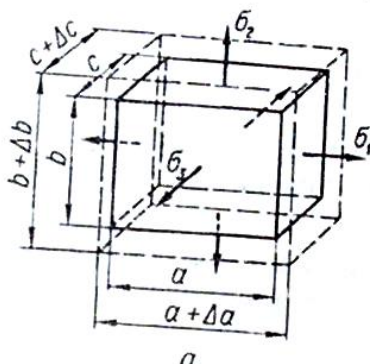


Рисунок 5.7

Розглянемо зміну об'єму елемента під дією головних напружень (рисунок 5.7). Об'єм елемента до деформації дорівнює  $V_0 = abc$ . Запишемо об'єм у деформованому стані, враховуючи малість відносних деформацій і тим більше їх попарних добутків:

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) =$$

$$= V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Відносна зміна об'єму

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Виразимо головні деформації через головні напруження:

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.21)$$

Зокрема при рівномірному всебічному обтисненні, коли  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ , маємо

$$\varepsilon_V = -\frac{\sigma}{K},$$

де

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Величина  $K$  називається модулем об'ємної деформації.

Остаточно з виразу (5.21) одержуємо

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}. \quad (5.22)$$

#### 5.4.6 Потенційна енергія деформації при об'ємному напруженому стані

При простому розтяганні або стиску питома потенційна енергія деформації визначається формулою (3.19)

$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}.$$

При об'ємному напруженому стані у випадку малих деформацій питома потенційна енергія може бути знайдена шляхом підсумовування:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}.$$

Підставивши сюди  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  за законом Гука (5.19), одержимо

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (5.23)$$

У загальному випадку деформування відбувається зміна об'єму і форми розглянутого елемента. Відповідно до цього питому потенційну енергію деформації можна представити як питому енергію зміни об'єму  $u_{об}$  та питому енергію зміни форми  $u_{\phi}$ .

Представимо, що кожне з діючих головних напружень складається із двох доданків:

$$\sigma_1 = \sigma_{1,об} + \sigma_{1,\phi}; \quad \sigma_2 = \sigma_{2,об} + \sigma_{2,\phi}; \quad \sigma_3 = \sigma_{3,об} + \sigma_{3,\phi}.$$

Зміна об'єму при збереженні форми характеризується умовою рівності відносних лінійних деформацій у напрямку трьох осей  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ . Дотримання цієї умови можливо лише при всебічному рівномірному розтяганні або стиску.

Припустимо, що напруження, що викликають зміну об'єму, дорівнюють середньому арифметичному  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\sigma_{1,об} = \sigma_{2,об} = \sigma_{3,об} = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (5.24)$$

Тоді напруження, що викликають зміну форми, будуть дорівнювати

$$\sigma_{1,\phi} = \sigma_1 - \sigma_{cp}; \quad \sigma_{2,\phi} = \sigma_2 - \sigma_{cp}; \quad \sigma_{3,\phi} = \sigma_3 - \sigma_{cp}. \quad (5.25)$$

Енергію зміни об'єму одержимо, підставивши у вираз (5.23) напруження (5.24):

$$u_{об} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (5.26)$$

Енергію зміни форми знайдемо за формулою (5.23), підставивши в неї вираз (5.25):

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (5.27)$$

Отримані формули (5.27) підтверджують, що при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  відбувається тільки зміна об'єму, оскільки енергія зміни форми в цьому випадку дорівнює нулю.

## 6 ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

Здатність матеріалів опиратися розтягання-стиску добре вивчена експериментально (тема 3). Для цієї простої деформації уведено поняття небезпечного стану та сформульований критерій міцності, заснований на дослідних даних: повинна виконуватися умова  $N/A \leq [\sigma]$  (пп. 3.7.1, 3.7.2).

Для складних видів навантаження, при яких виникають різні комбінації головних напружень, такі досліди відсутні. У зв'язку із цим необхідно мати якийсь критерій, за яким можна було б на підставі дослідів при розтягання-стиску судити про міцність матеріалу в більш складних випадках навантаження. Такі положення, теоретично обґрунтовані і апробовані, називаються *гіпотезами або теоріями міцності*.

### 6.1 Теорія найбільших нормальних напружень

Небезпечний стан настає тоді, коли найбільші нормальні напруження досягають деякого граничного значення. При розтягання граничним напруженням є границя міцності на розтягання  $\sigma_0$ , при стиску – границя міцності на стиск  $\sigma'_0$ . Відповідно до формулювання I *теорії* небезпечний стан визначається рівністю

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \text{або} \quad |\sigma_3| = \sigma'_0. \quad (6.1)$$

Таким чином, відповідно до гіпотези найбільших нормальних напружень граничний стан не може бути визначений однією рівністю. Умову міцності одержимо з виразу (5.1) після заміни  $\sigma_0$  і  $\sigma'_0$  допустимими напруженнями  $[\sigma]_p$  і  $[\sigma]_c$ :

$$\sigma_{\text{екв I}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad \text{або} \quad \sigma_{\text{екв I}} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c. \quad (6.2)$$

Недоліки теорії. Складний напружений стан у ній прирівнюється до лінійного. Ця теорія не підтверджується експериментально. Так, при всебічному рівномірному стиску



матеріали не руйнуються навіть при напруженнях, що перевищують границю міцності при стиску  $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| = \sigma'_0$ .

Незважаючи на зазначені недоліки, для перевірки міцності елементів, напружений стан яких незначно відхиляється від лінійного (якщо абсолютні значення двох головних напружень малі порівняно із третім), гіпотеза найбільших нормальних напружень застосовується в інженерно-технічних розрахунках. Вона дає експериментально підтвержені результати для дуже крихких матеріалів (цегла, кераміка, інструментальна сталь).

## 6.2 Теорія найбільших відносних подовжень

Небезпечний напружений стан настає, коли найбільше відносне подовження досягає деякого граничного значення  $\varepsilon_0$ , тобто в небезпечному або граничному стані маємо

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0.$$

Вважаючи закон Гука (1.27) прийнятним до моменту руйнування та виражаючи  $\varepsilon_{\max}$  і  $\varepsilon_0$  через напруження, одержуємо

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E.$$

Умова граничного стану набуває вигляду

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \quad (6.3)$$

При розрахунку за допустимими напруженнями умова міцності за II теорією записується в такий спосіб:

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p. \quad (6.4)$$

*Недоліки теорії.* При одержанні критерію (6.4) передбачалося виконання закону Гука аж до руйнування, що відповідає тільки крихкому руйнуванню матеріалів. Теорія не підтверджується експериментально: у дослідах із всебічним обтисненням розміри зразків помітно зменшуються, тобто

виявляються більші деформації, але це не призводить до руйнування.

Ця теорія дає експериментально підтверджені результати перевірки міцності конструкцій і деталей з *крихких матеріалів*.

Таким чином, *перші дві теорії міцності застосовні при крихкому руйнуванні*.

### 6.3 Теорія максимальних дотичних напружень

Руйнування пластичних матеріалів суттєво відрізняється від руйнування крихких. Воно супроводжується розвитком залишкових деформацій, тобто зсувів у матеріалі, і тому повинно бути пов'язане не з нормальними напруженнями і відносними подовженнями, а з дотичними напруженнями. Небезпечний (пластичний) стан матеріалу починається тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають деякої граничної величини. Такою граничною величиною є границя текучості для дотичних напружень  $\tau_T$ , отже, умова пластичності може бути записана у вигляді

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

$$\text{Оскільки } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ (5.18), } \sigma_0 = \sigma_T, \tau_T = \frac{\sigma_T}{2} \text{ (див. п. 3.2),}$$

то маємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T.$$

Умова міцності за III *теорією* має такий вигляд:

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (6.5)$$

Експерименти з різними пластичними матеріалами підтверджують результати прогнозу згідно з цією теорією.

*Недоліком* є те, що не враховується головне напруження  $\sigma_2$ . Тому теорія не завжди знаходить дослідне підтвердження.

### 6.4 Енергетична теорія міцності

Кількісною характеристикою початку пластичних деформацій у цій теорії прийнята питома потенційна енергія зміни форми  $u_\phi$  (5.27). Небезпечний (пластичний) стан матеріалу починається тоді, коли  $u_\phi$  досягне деякої граничної величини:

$$u_\phi = u_0. \quad (6.6)$$

У якості  $u_0$  у виразі (6.6) слід прийняти потенційну енергію зміни форми при розтяганні

$$u_0 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2.$$

Після підстановки  $u_\phi$  і  $u_0$  у вираз (6.6) і перетворень одержуємо таку умову, що визначає початок текучості:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_0 = \sigma_T. \quad (6.7)$$

Звідси випливає така форма умови міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (6.8)$$

Для плоского напруженого стану, коли  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{zy} = \tau$ , використовуючи вираз (5.4), з (6.8) одержуємо таку умову міцності за IV теорією:

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]_p. \quad (6.9)$$

*Недоліки.* У випадку зсуву ( $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ) на підставі рівності (6.7) маємо  $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \approx 0,57 \sigma_0$ , тобто границя текучості для дотичних напружень  $\tau_T$  повинна дорівнювати 0,57 границі текучості при розтяганні  $\sigma_T$ . Згідно з експериментальними дослідженнями пластичних матеріалів,  $\tau_T$  знаходиться в межах  $(0,55 - 0,60) \sigma_T$ . Крім того, у випадку рівномірного тристороннього стиску або розтягання, а також у випадку близьких між собою за значеннями як завгодно великих за абсолютною величиною головних напружень, відповідно до енергетичної умови небезпечного стану, як і за умовою найбільших дотичних напружень, перехід матеріалу в пластичний стан неможливий. Це не підтверджується практикою.

Незважаючи на зазначені невідповідності, енергетична умова досить точно визначає початок пластичних деформацій для широкого класу напружених станів, що звичайно зустрічаються на практиці. Енергетична гіпотеза міцності з успіхом застосовується для перевірки міцності конструкцій і деталей машин із пластичного матеріалу.

*Третя та четверта теорії міцності є критеріями пластичності.*

## 7 ПЛОСКИЙ ЗГИН ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

*Згином* називається деформація, яка викликається силами, які прикладені перпендикулярно до осі елемента та викликають скривлення його поздовжніх волокон.

*Плоским поперечним згином* називається такий вид згину, при якому усі діючі активні та реактивні сили лежать в одній площині, що проходить через вісь балки, і в тій же площині лежить вигнута вісь стержня. Такий згин має місце, якщо площина дії сил є головною.

При цих умовах у поперечному перерізі елемента виникають такі внутрішні зусилля: поперечна сила  $Q$  і згинальний момент  $M$ .

Стержень, що працює на згин, називається балкою.

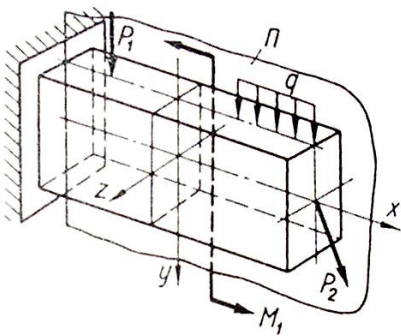


Рисунок 7.1

Будемо розглядати балки, що мають площину симетрії і завантажені в цій площині (рисунок 7.1). Оскільки площина симетрії є головною площиною, згин у цьому випадку є плоским.

### 7.1 Чистий згин

Згин на ділянці називається *чистим*, якщо поперечна сила на цій ділянці дорівнює нулю ( $Q=0$ ). Згинальний момент  $M$  на цій ділянці постійний, оскільки  $dM/dx = Q = 0$ . Наприклад, чистий згин виникає на ділянці вагонної осі CD між рейками (рисунок 7.2, а) або між точками прикладення сили у випадку, наведеному на рисунку 7.2, б.

Під дією системи сил балка згинається, її вісь (пряма до вигину) після вигину набуває вигнутої форми (рисунок 7.2, в). Верхні волокна балки стискаються; при наближенні волокон до нижньої частини перерізу стиск переходить у розтягання. Між стиснутими і розтягнутими волокнами є шар, волокна якого при згині не змінюють своєї довжини. Цей шар називається нейтральним (рисунок 7.2, г).

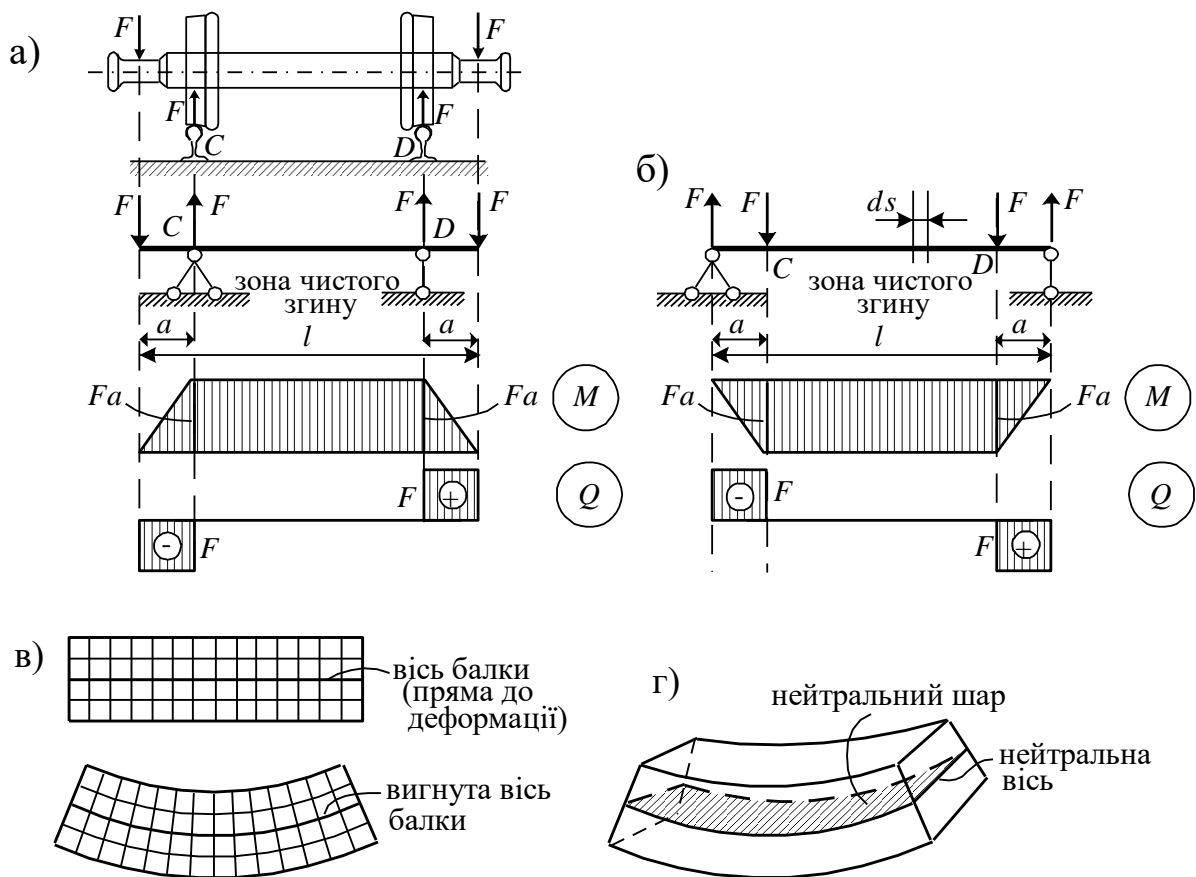


Рисунок 7.2 – Чистий згин: приклад (а);  
схема скривлення горизонтальних і вертикальних ліній  
у зоні чистого згину (б); нейтральний шар (в)

Лінія перерізання нейтрального шару і перерізу балки називається нейтральною віссю перерізу.

Далі, на рисунку 7.2, в показано, що після деформації прямі лінії, перпендикулярні до поздовжніх волокон, залишилися прямими і перпендикулярність не порушена. Це ілюстрація гіпотези плоских перерізів (п. 1.1).

### 7.1.1 Деформації при чистому згині

Двома поперечними перерізами виріжемо в середній ділянці балки елемент довжиною  $ds$  (рисунок 7.2, б) і подамо його на рисунку 7.3. Вісь  $z$  направимо уздовж нейтральної осі.

До деформації перерізи балки паралельні між собою. Після деформації вони трохи нахилиються, утворюючи кут  $d\varphi$  (рисунок 7.3, а). Нехай III – нейтральне волокно балки, його

довжина дорівнює вихідній довжині  $ds$ ,  $\rho$  – радіус його кривизни (розмір елемента  $ds$  і його деформація є малими, тому можна вважати, що всі волокна є елементами кіл), так що

$$ds = \rho d\varphi.$$

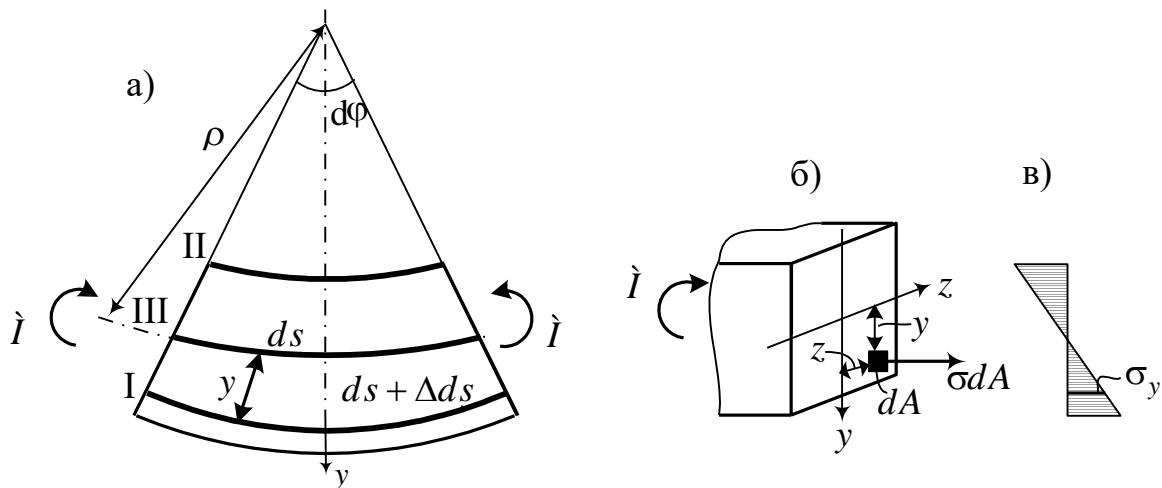


Рисунок 7.3 – Елемент балки

При згині нижні волокна розтягуються, і довжина  $ds + \Delta ds$  деякого волокна I з геометрії дорівнює

$$ds + \Delta ds = (\rho + y)d\varphi.$$

Одержуємо відносно подовження цього волокна:

$$\varepsilon = \frac{(ds + \Delta ds) - ds}{ds} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (7.1)$$

Для кожного перерізу радіус кривизни вигнутої осі балки  $\rho$  є величиною сталою, і тому відносне подовження волокна прямо пропорційно відстані цього волокна до нейтральної осі балки.

### 7.1.2 Напруження при чистому згині

Приймемо, що при згині поздовжні волокна не натискають одне на одне і не прагнуть відірватися одне від одного. При такому припущенні кожне волокно деформується ізольовано, зазнаючи простого одноосьового стиску або розтягання, для якого можна використовувати закон Гука у вигляді (3.10), тобто  $\sigma = E \varepsilon$ . З урахуванням (7.1) одержимо

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (7.2)$$



Ці напруження нормальні до площини поперечного перерізу балки і змінюються за лінійним законом (рисунок 7.3, в).

Розсічемо балку і запишемо умови рівноваги її лівої частини (рисунок 7.3, б).

$$1) \sum X = 0: \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

$$\text{Оскільки } E \neq 0, \rho \neq 0, \text{ то } \int_A y dA = S_z = 0.$$

Рівність  $S_z = 0$  можлива лише в тому випадку, якщо вісь  $z$  є центральною віссю перерізу балки (п. 4.2). Отже, нейтральна вісь є центральною, нейтральний шар у балці проходить через центри ваги поперечних перерізів;

$$2) \sum M_y = 0: \int_A (\sigma dA) z = \frac{E}{\rho} \int_A z y dA = \frac{E}{\rho} J_{zy} = 0.$$

Звідси випливає, що відцентровий момент відносно пари осей  $z, y$  дорівнює нулю. Це означає, що нейтральна вісь є головною віссю;

$$3) \sum M_z = 0: \int_A (\sigma dA) y = M,$$

$$\text{звідки одержимо } \frac{E}{\rho} J_z = M, \text{ або}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}}, \quad (7.3)$$

де  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна вигнутої осі балки;

$EJ_z$  – жорсткість балки при згині.

Залежність (7.3) називається *законом Гука при згині*.

У формулу (7.2) підставимо (7.3). У результаті знайдемо вирази для нормальних напружень при згині у волокні на відстані  $y$  від нейтральної осі з урахуванням знака (рисунок 7.3, в):

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{J_z}}. \quad (7.4)$$

### 7.1.3 Умова міцності

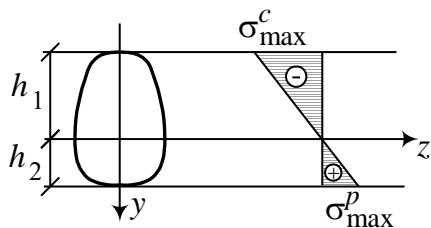


Рисунок 7.4 – Епюра нормальних напружень

З виразу (7.4) видно, що максимальні за абсолютною величиною нормальні напруження виникають у крайніх волокнах, у яких і потрібно перевіряти умови міцності (рисунок

$$\sigma_{\max}^p = \frac{Mh_1}{J_z} = \frac{M}{J_z/h_1} = \frac{M}{W_{z1}} \leq [\sigma]_p,$$

$$|\sigma_{\max}^c| = \frac{Mh_2}{J_z} = \frac{M}{J_z/h_2} = \frac{M}{W_{z2}} \leq [\sigma]_c.$$

Тут  $W_{z1}$ ,  $W_{z2}$  – моменти опору перерізу (п. 4.9).

Для матеріалів, які однаково добре працюють на розтягання і стиск (наприклад, сталь) найбільш уживані перерізи, симетричні відносно нейтральної осі (прямокутники, двотаври, швелери). Для них  $W_{z1} = W_{z2} = W_z$ , і умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.5)$$

### 7.1.4 Раціональна форма перерізів

Раціональною є найбільш економічна форма перерізу (тобто та, що має найменшу площу), яка забезпечує його міцність.

Якщо матеріал елемента однаково добре працює на розтягання і стиск, то переріз раціонально вибирати симетричним відносно осі  $z$ . Такі перерізи мають однаковий запас міцності розтягнутих і стиснутих волокон, оскільки відносно осі симетрії  $W_{z1} = W_{z2}$ .

Якщо матеріал погано опирається розтяганням (бетон, чавун), раціональним є переріз, несиметричний відносно нейтральної осі, причому  $h_1/h_2 = [\sigma]_c/[\sigma]_p$  ( $h_1$  і  $h_2$  – відстані від нейтральної осі до крайнього стиснутого і розтягнутого волокон).

Цим досягається збіг моментів опору  $W_{z1} = W_{z2}$  і, отже, однаковий запас міцності для розтягнутих і стиснутих волокон.

Розглянемо тепер різні симетричні перерізи однакової висоти, наведені на рисунку 7.5. З епюри нормальних напружень видно, що найбільше навантаження припадає на крайні і близькі до них волокна. Тому переріз тим більш раціональний при згині, чим він ближче до форми двотавра, тобто чим більша частина перерізу далі від нейтральної осі і знаходиться в області дії великих напружень  $\sigma$ .

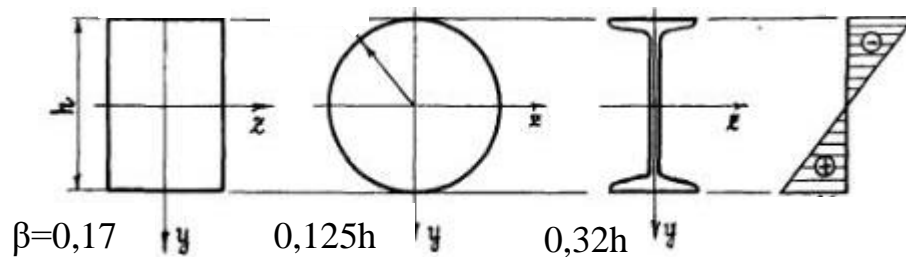


Рисунок 7.5

Це можна показати й чисельно. Залежно від форми перерізу змінюються його площа  $A$  (яку потрібно вибрати з економії якомога меншою) і момент опору  $W_z$  (який повинен бути якомога більшим, щоб зменшити напруження). Тому раціональність можна оцінювати коефіцієнтом  $\beta = W_z/A \rightarrow \max$ . Значення  $\beta$  для наведених перерізів дані на рисунку 7.5. Для двотавра його значення максимальне.

## 7.2 Поперечний згин

При поперечному згині в поперечному перерізі стержня виникає поперечна сила  $Q$ , при цьому згинальний момент уже не є сталим.

Однак дослідженнями встановлено, що вплив поперечної сили на величину нормальних напружень незначно. Воно залежить від відношення висоти балки до її прогону. При невеликій висоті перерізу  $h = (0,1 \div 0,05)l$  гіпотеза плоских перерізів і припущення про ненависнення волокон (п. 7.1) виконуються з великою точністю, тому нормальні напруження при поперечному згині можна визначати за формулами, виведеними у припущенні чистого згину (7.4), (7.5).

### 7.2.1 Дотичні напруження при поперечному згині (формула Журавського)

При поперечному згині напруження в перерізі повинні врівноважувати не тільки згинальний момент, але і поперечну силу. Таким чином, у перерізі повинні діяти дотичні напруження.

Припустимо, що: 1) дотичні напруження паралельні поперечній силі  $Q$ ; 2) на площинках, рівновіддалених від нейтральної осі, дотичні напруження  $\tau$  однакові.

Виріжемо на ділянці балки двома поперечними перерізами елемент  $dx$  (рисунок 7.6, а). Виділимо з нього тонкий шар товщиною  $dy$  на відстані  $y$  від нейтральної осі (рисунок 7.6, б). Покажемо виділений шар окремо (рисунок 7.6, в). За законом парності (п. 1.7.2), на верхній грані елемента повинні діяти такі самі за величиною напруження  $\tau$ .

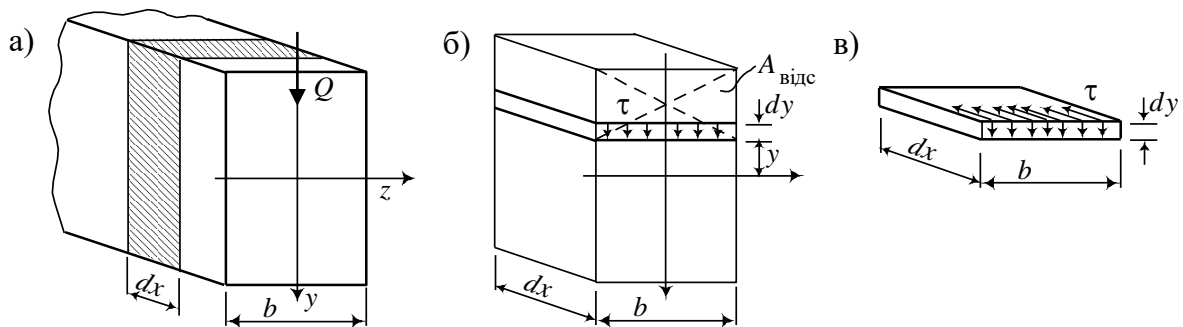


Рисунок 7.6 – До виведення формули Журавського

Розсічемо елемент (рисунок 7.6, б) площиною, паралельною основі, на відстані  $y$  від осі  $z$ . По перерізах балки, паралельних осі, нормальні напруження відсутні (згідно з п. 7.1.2, поздовжні волокна не натискають одне на одне). Таким

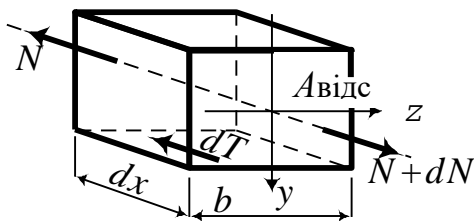


Рисунок 7.7 – До умови рівноваги відсіченого елемента

чином, на відсічену частину діють сили, показані на рисунку 7.7.

Запишемо умову рівноваги елемента:

$$\Sigma_x = (N + dN) - N - dT = 0,$$

звідки

$$dT = dN. \quad (7.6)$$

Згідно з виразами (1.2), (7.4), одержуємо

$$dN = \int_{A_{\text{відс}}} d\sigma dA = \frac{dM}{J_z} \int_{A_{\text{відс}}} y dA = \frac{dM \cdot S_z^{\text{відс}}}{J_z}.$$

Рівнодіюча дотичних напружень дорівнює

$$dT = b dx \tau.$$

Підставимо отримані вирази в (7.6):

$$\frac{dM \cdot S_z^{\text{відс}}}{J_z} = b dx \tau, \quad \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_z^{\text{відс}}}{b J_z}.$$

Звідси з урахуванням  $\frac{dM}{dx} = Q$  остаточно одержуємо

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{відс}}}{bJ_z}, \quad (7.7)$$

де  $b$  – ширина перерізу на рівні тієї площинки, на якому визначається дотичне напруження;  $S_z^{\text{отс}}$  – статичний момент площі тієї частини поперечного перерізу, яка лежить вище розглянутої площинки, відносно нейтральної осі.

Формула (7.7) називається **формулою Журавського**.

### 7.2.2 Дотичні напруження в прямокутному перерізі

Розглянемо прямокутний переріз (рисунок 7.8) і визначимо дотичне напруження для волокна  $y$ .

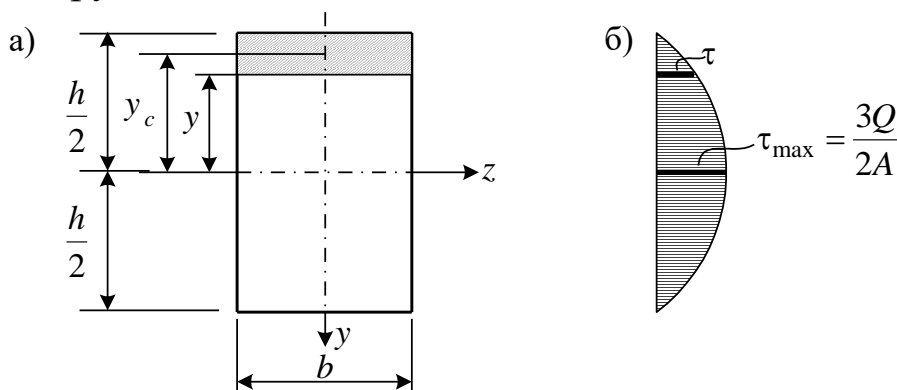


Рисунок 7.8 – Дотичні напруження у прямокутному поперечному перерізі

Статичний момент заштрихованої площі відносно осі  $z$  дорівнює:

$$S_z^{\text{відс}} = y_c A_{\text{відс}} = \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \left[ \left( \frac{h}{2} - y \right) b \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Підставивши отриманий вираз у вираз (7.7), знайдемо:

$$\tau = \frac{Q}{2J_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (7.8)$$

де момент інерції прямокутника  $J_z = \frac{bh^3}{12}$  (4.21). З формули (7.8) видно, що дотичні напруження по висоті перерізу змінюються за параболічним законом. Ці напруження дорівнюють нулю при  $y = \pm \frac{h}{2}$  і досягають максимуму на рівні нейтральної осі ( $y = 0$ ), де вони дорівнюють

$$\tau_{\max} = Q \frac{12}{bh^3} \frac{h^2}{8} = \frac{3Q}{2A}. \quad (7.9)$$

Тут  $A$  – площа поперечного перерізу,  $A = bh$ .

### 7.2.3 Дотичні напруження для двотаврового перерізу

Формули для дотичних напружень у двотавровому перерізі (рисунок 7.9) одержуємо аналогічно до виразу (7.8).

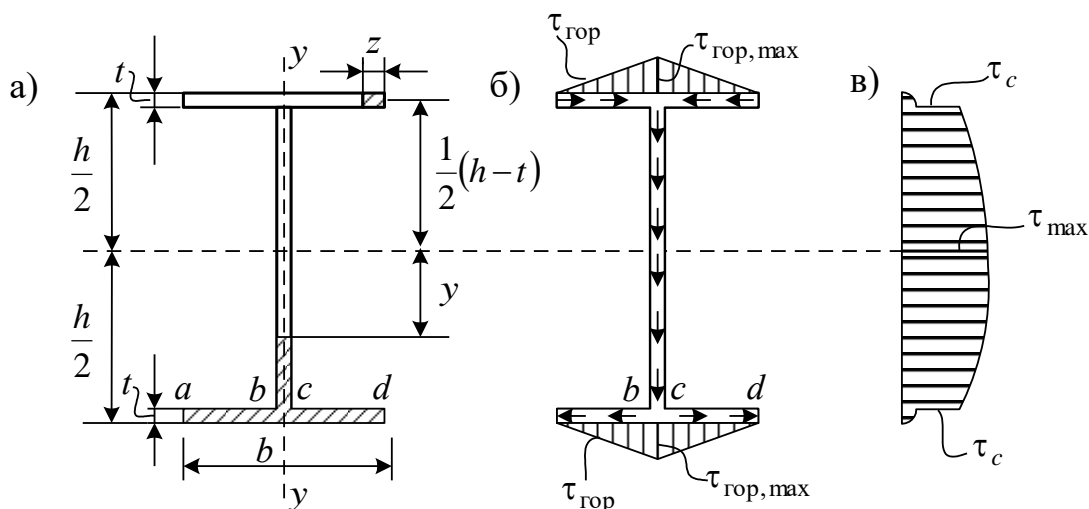


Рисунок 7.9 – Дотичні напруження в балці двотаврового поперечного перерізу

При  $y = 0$  (на рівні нейтральної осі) дотичні напруження сягають максимального значення

$$\tau_{\max} = \frac{Q \left[ d \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 + b t (h - t) \right]}{2 J_z d}. \quad (7.10)$$

При  $y = h/2 - t$ , тобто в місці переходу від стінки до полиці, дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_c = \frac{Q b t (h - t)}{2 J_z d}. \quad (7.11)$$

Звичайно товщина стінки  $d$  дуже мала порівняно із шириною полиці  $b$ , тому різниця між  $\tau_{\max}$  та  $\tau_c$  є невеликою. У місцях переходу від широкої частини перерізу до більш вузької має місце концентрація напружень. Для її зменшення кути в місці переходу стінки до полиці округляються. У полках напруження дуже малі, оскільки більшу частину поперечної сили сприймає вертикальна стінка (п. 7.1.4 і рисунок 7.9, в).

У полках двотаврової балки виникають також горизонтальні напруження (рисунок 7.9, б). Їхні величини

$$\tau_{\text{гор}} = Qz(h-t)/2J_z, \quad \tau_{\text{гор, max}} = Qb(h-t)/4J_z. \quad (7.12)$$

### 7.3 Вид напруженого стану і теорії міцності

При згині, як видно з рисунка 7.10, має місце плоский напружений стан (п. 5.3).

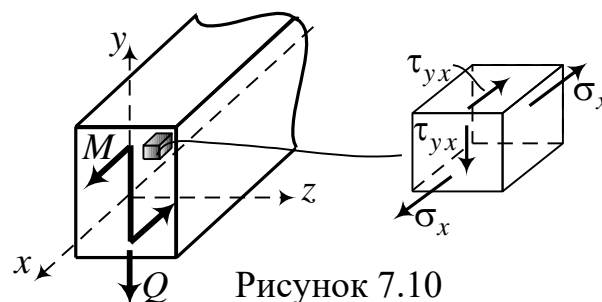


Рисунок 7.10

Користуючись формулами (5.4) для випадку  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{yx} = \tau$ , одержуємо значення головних напружень:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2}. \quad (7.13)$$

Перевірку міцності в точках поперечного перерізу проводять за однією з теорій міцності (тема б):

I Теорія найбільших нормальних напружень:

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p; \quad \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq [\sigma]_c. \quad (7.14)$$

II Теорія найбільших відносних подовжень:

$$\frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

III Теорія найбільших дотичних напружень:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

IV Енергетична теорія міцності:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.17)$$

#### 7.4 Порядок добору перерізу та перевірки міцності при згині

1 Будуються епюри  $M$  і  $Q$ .

2 За епюрою  $M$  визначається значення максимального за абсолютною величиною моменту  $M_{\max}$ .

3(а) Якщо проводиться перевірка міцності перерізу, перевіряється виконання умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

3(б) Якщо виконується добір перерізу, то з умови міцності визначається значення  $W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ .

При доборі прокатного профілю його номер визначається за сортаментом (вибирається номер профілю, у якого момент опору  $W_z$  має значення найближче більше, ніж розраховане).

При доборі непрокатного профілю його момент опору виражається через розміри перерізу (п. 4.9). Отриманий вираз використовується як рівняння для визначення розмірів перерізу.

У п. 3 забезпечується міцність крайніх волокон перерізу.

4 За епюрою  $Q$  визначається значення максимальної за абсолютною величиною поперечної сили  $Q_{\max}$ . У цьому перерізі



виконується перевірка міцності заданого або отриманого в п. 3(б) перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq [\tau].$$

Якщо ця умова не виконується, збільшуються розміри перерізу (номер профілю). Якщо умова виконується, проводиться подальша перевірка.

У п. 4 забезпечується міцність нейтрального волокна.

5 Визначається положення небезпечного перерізу (одного або декількох), у якому  $M$  і  $Q$  хоча і не приймають найбільших значень, але у своїй комбінації створюють найбільш не вигідну комбінацію, тобто головні напруження будуть найбільшими.

6 У небезпечних перерізах будуються епюри  $\sigma$  і  $\tau$  по висоті перерізу та визначаються небезпечні точки на цих епюрах (наприклад, для двотавра – це волокно на стику стінки і полки (рисунок 7.9).

7 У небезпечних точках проводиться перевірка міцності за однією з теорій міцності для плоского напруженого стану (7.14) – (7.17).

Основні формули для розрахунків на згин наведені в додатку Б.

### ***Приклад розрахунку на підбір перерізу і перевірку міцності***

Підібрати двотавровий переріз для сталевий балки, показаної на рисунку 7.11;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

Побудувавши епюри внутрішніх сил (рисунок 7.11), визначаємо значення  $M_{\max} = 26,25 \text{ кНм}$  в перерізі С. З умови міцності за нормальними напруженнями обчислюємо

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{26,25 \text{ кНм}}{160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 164 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 164 \text{ см}^3.$$

На підставі сортаменту (додаток В) вибираємо двотавр № 20 з  $W_z = 184 \text{ см}^3$  (найближчий більший, ніж  $164 \text{ см}^3$ ). Для цього двотавра  $h = 20 \text{ см}$ ,  $b = 20 \text{ см}$ ,  $t = 8,4 \text{ мм}$ ,  $d = 5,2 \text{ мм}$ ,  $J_z = 1840 \text{ см}^4$ , статичний момент півперерізу  $S_z = 104 \text{ см}^3$ .

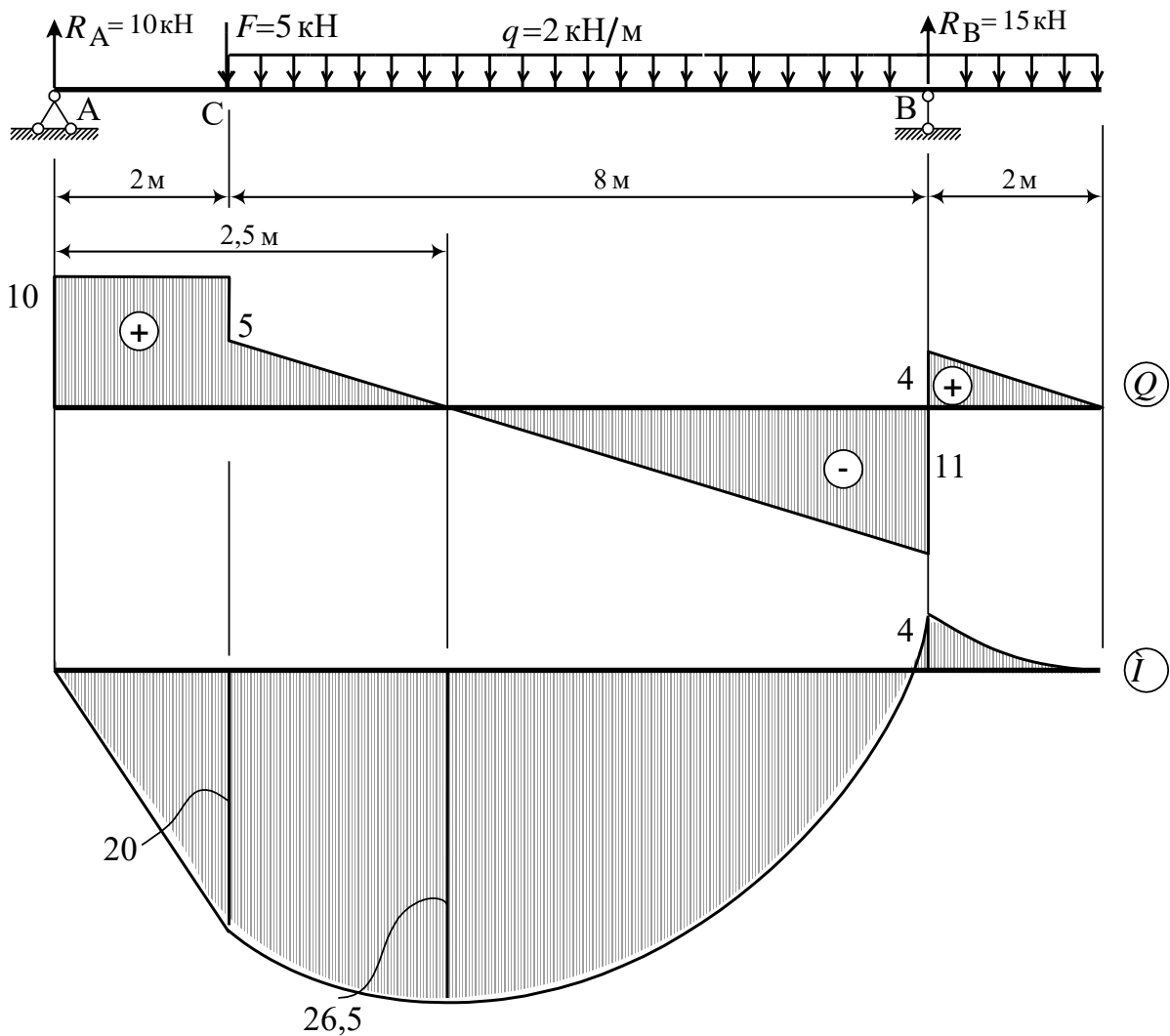


Рисунок 7.11 – Розрахункова схема балки і епюри внутрішніх сил

Перевіримо міцність балки за *дотичними напруженнями*. Ця перевірка проводиться в перерізі з максимальної за модулем поперечної силою  $Q_{\max} = 11$  кН (цей переріз ліворуч від опори В):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{dJ_z} = \frac{11 \text{ кН} \cdot 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 12 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 12 \text{ МПа} < [\tau].$$

*Небезпечним перерізом* є переріз ліворуч від точки С:  $Q = 10$  кН,  $M = 20$  кНм.

Для перевірки міцності за висотою перерізу будемо в перерізі С епюри  $\sigma$  та  $\tau$ . Розраховуємо  $\tau_c, \tau_{\max}, \sigma_c, \sigma_{\max}$  за формулами (7.10), (7.11), (7.4). Одержуємо значення, наведені на рисунку 7.12.

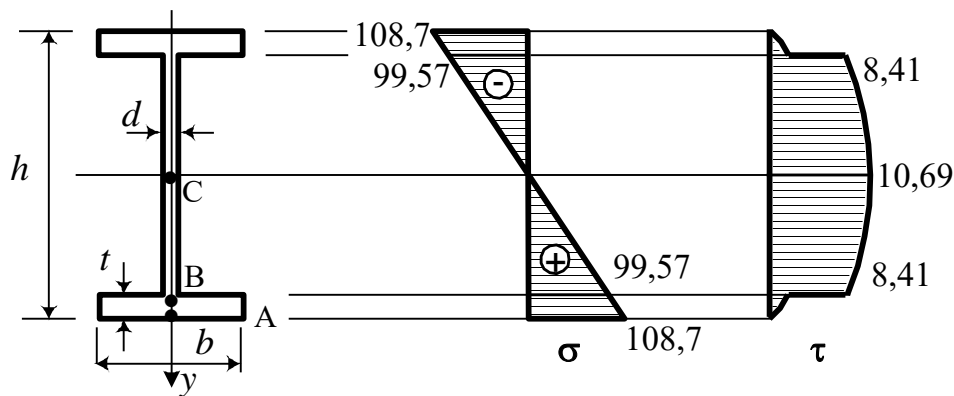


Рисунок 7.12

Перевіряємо міцність у небезпечній точці 2, у якій має місце плоский напружений стан, за IV теорією міцності (6.9):

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = 100,6 \text{ МПа} < [\sigma].$$

### 7.5 Вигнута вісь балки

При практичних розрахунках елементів, що згинаються, крім перевірки на міцність проводять і перевірки на жорсткість – перевіряють, чи не перевищують переміщення допустимі значення.

У якості переміщень при згині розглядаються прогин і кут повороту перерізу. *Прогин* – це переміщення центра ваги перерізу в напрямку, перпендикулярному до осі. *Кут повороту перерізу* – це кут, на який переріз повертається відносно початкового положення. Цей кут збігається з кутом між дотичною до вигнутої осі в перерізі і початковим положенням осі.

Знаючи ці величини для кожного перерізу, можна побудувати вигнуту вісь балки. *Вигнутою віссю балки*, або її *пружною лінією*, називається та крива, у яку переходить прямолінійна до деформації вісь балки після прикладання до неї навантаження.

Розглянемо балку (рисунок 7.13). Помістимо початок координат на лівому кінці балки, вісь  $y$  направимо вниз.

Позначимо через  $y$  прогин балки в перерізі  $x$ , через  $\varphi$  – кут повороту. З геометрії видно, що ці величини пов'язані: для малих деформацій

$$y' = \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi.$$

Кут  $\varphi$  будемо вважати додатним, якщо він утворений обертанням дотичної за годинниковою стрілкою.

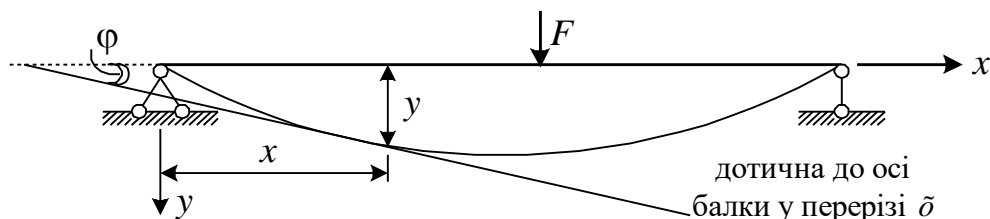


Рисунок 7.13 – Деформації при згині

### 7.5.1 Диференціальне рівняння вигнутої осі

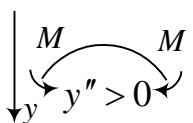
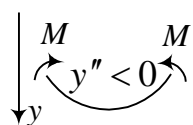
Скористаємося законом Гука при згині (7.3):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ},$$

де  $J = J_z$  – момент інерції поперечного перерізу відносно головної центральної осі  $z$ .

У курсі вищої математики наводиться такий вираз для визначення кривизни:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \left[ \frac{y''}{1 + (y')^2} \right]^{3/2}. \quad (7.18)$$



Друга похідна функції  $y''$  додатна, якщо вершина кривої звернена у бік, протилежний додатній осі  $y$ . При додатному напрямку моменту це правило має вигляд, наведений на рисунку 7.14. Таким чином, у формулі (7.18) потрібно обрати знак

Рисунок 7.14 мінус.

З виразів (7.3), (7.18) одержуємо нелінійне диференціальне рівняння щодо прогину

$$\left[ \frac{y''}{1 + (y')^2} \right]^{3/2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (7.19)$$

У більшості застосовуваних у будівництві балок прогини являють собою величини дуже малі порівняно з їхньою

довжиною (це відображено в гіпотезах п. 1.1). Для більшості балок максимальні прогини не перевищують  $\left(\frac{1}{200} \div \frac{1}{600}\right)l$ , а кути нахилу не перевищують  $1^\circ$ , отже,  $y' = \text{tg}\varphi < 0,017$ ,  $(y')^2 < 2,89 \cdot 10^{-4}$ . Цією величиною можна знехтувати, і (7.19) здобуває вигляду

$$y'' = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (7.20)$$

Враховуючи, що кривизна при обраному напрямку осей від'ємна та вважаючи момент додатним, вибираємо у виразі (7.20) знак мінус. Таким чином, одержуємо *наближене диференціальне рівняння вигнутої осі* балки:

$$\boxed{y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}}. \quad (7.21)$$

Розв'язуючи це рівняння, можна одержати прогин у будь-якому перерізі балки. Для його розв'язання використовують різні методи: метод безпосереднього інтегрування, метод початкових параметрів, метод фіктивних навантажень, чисельний (наближений) метод для розв'язання на комп'ютері.

### 7.5.2 Метод безпосереднього інтегрування

Розглянемо цей метод на прикладі балки, показаної на рисунку 7.15.

Складемо вирази згинального моменту на ділянках, відкладаючи  $x$  від точки А і відкидаючи праву частину балки. Після цього складемо на кожній ділянці рівняння (7.21) і двічі його проінтегруємо, як показано нижче.

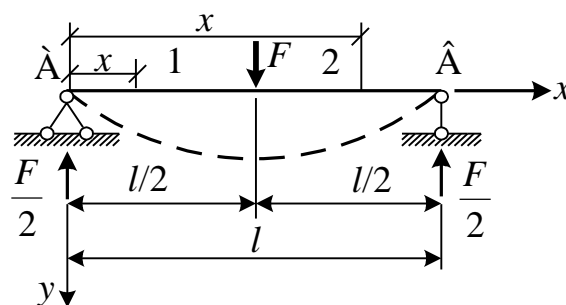


Рисунок 7.15 – Розрахункова схема балки

Ділянка 1, $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	Ділянка 2, $\frac{l}{2} \leq x \leq l$
$M_1 = \frac{F}{2} x$	$M_2 = \frac{F}{2} x - F \left( x - \frac{l}{2} \right)$
$EJ y_1'' = -\frac{F}{2} x$	$EJ y_2'' = -\frac{F}{2} x + F \left( x - \frac{l}{2} \right)$
$EJ y_1' = -\frac{F x^2}{4} + C_1$	$EJ y_2' = -\frac{F x^2}{4} + \frac{F}{2} \left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + D_1$
$EJ y_1 = -\frac{F x^3}{12} + C_1 x + C_2$	$EJ y_2 = -\frac{F x^3}{12} + \frac{F}{6} \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 + D_1 x + D_2$

Тут  $C_1, C_2, D_1, D_2$  – константи інтегрування, які визначаються із граничних умов:

при  $x = 0$   $y_1 = 0$ ;

при  $x = l$   $y_2 = 0$ ;

при  $x = \frac{l}{2}$   $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Використовуючи ці умови, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення констант:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ -\frac{Fl^3}{12} + \frac{Fl^3}{48} + D_1 l + D_2 = 0 \\ C_1 = D_1 \\ C_2 = D_2 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо вирази для прогинів:

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{Fx^3}{12} + \frac{Fl^2}{16} x \right],$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{Fx^3}{12} + \frac{F}{6} \left( x - \frac{l}{2} \right)^3 + \frac{Fl^2}{16} x \right].$$

Підставляючи в перший вираз  $x = \frac{l}{2}$ , одержимо максимальний прогин у середині прогону:  $y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EJ}$ .

Очевидно, метод безпосереднього інтегрування доцільно використовувати за наявності лише однієї ділянки (іноді – двох), тому що при великій їхній кількості він стає громіздким через велику кількість довільних постійних. Якщо балка складається з  $n$  ділянок, то у вирази для прогинів входять  $2n$  констант інтегрування, для визначення яких потрібно скласти та розв'язати систему  $2n$  рівнянь із  $2n$  невідомими.

### 7.5.3 Метод початкових параметрів

При інтегруванні рівняння (7.21) цим методом дотримуються низки правил, які дозволяють уникнути великої кількості констант інтегрування і дають можливість виразити прогин у загальному вигляді для довільної розрахункової схеми.

Ці правила називаються умовами Клебша і формулюються в такий спосіб (рисунок 7.16):

- 1 Початок координат завжди співпадає з початком балки.
- 2 При складанні виразу для згинального моменту  $M(x)$  завжди відкидається права частина балки.
- 3 Якщо у вираз для  $M(x)$  входить зовнішній момент  $M$ , то він записується як  $M \cdot (x - a)^0$ , де  $a$  – координата точки прикладання моменту.
- 4 Якщо ділянка з розподіленим навантаженням  $q$  не доходить до кінця балки, то її продовжують до кінця і прикладають компенсуюче навантаження  $-q$ .
- 5 При інтегруванні рівняння (7.21)  $y''(x) = -M(x)/EJ$  не розкривають дужки.

Розглянемо довільним образом завантажену балку, дію опор замінимо їх реакціями (рисунок 7.11).

У перерізі  $x$  на ділянці 5 запишемо вирази для  $M(x)$ , відкинувши праву частину балки:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x \Big|_1 + M(x-a)^0 \Big|_2 - F(x-b) \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{2} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^2}{2} \Big|_5.$$

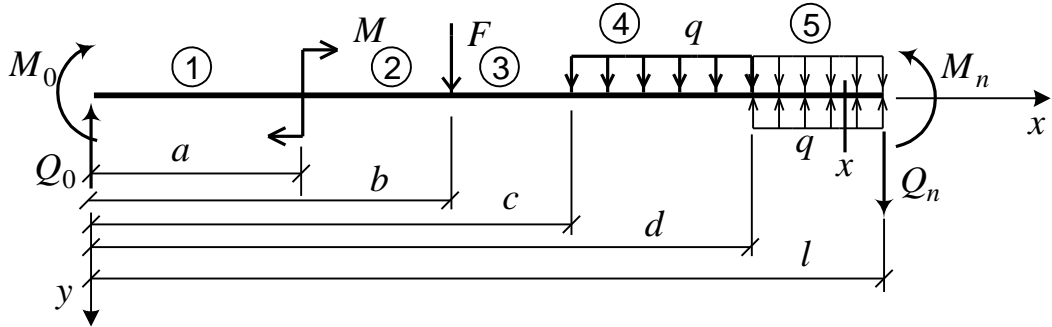


Рисунок 7.16 – До виведення рівнянь методу початкових параметрів

Підставимо вирази для  $M(x)$  в рівняння вигину (7.21):

$$y'' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 + Q_0 x \Big|_1 + M(x-a)^0 \Big|_2 - F(x-b) \Big|_3 - \frac{q(x-c)^2}{2} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^2}{2} \Big|_5 \right].$$

Двічі інтегруємо це рівняння, одержуємо (використовуючи поняття факторіала:  $2! = 1 \cdot 2$  ;  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$  ;  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ):

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^3}{3!} \Big|_5 \right] + C_5; \quad (7.23)$$

$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^4}{4!} \Big|_5 \right] + C_5 x + D_5. \quad (7.24)$$

Аналогічно для ділянки 4:

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 \right] + C_4 \quad (7.25)$$



$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 \right] + C_4 x + D_4. \quad (7.26)$$

Так само для ділянок 1, 2 і 3 одержимо вирази, у які входять константи  $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ .

На границі між ділянками 4 і 5 прогини  $y$  повинні збігатися при розрахунках за формулах (7.23) і (7.25) при  $x=d$ . Те саме стосується і кутів повороту  $y'$  при розрахунках за формулами (7.24) і (7.26). Записавши це, одержимо

$$C_4 = C_5; D_4 = D_5.$$

Сформулювавши аналогічні умови нерозривності на границях ділянок 1 і 2, 2 і 3, 3 і 4, дійдемо до висновку, що

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C; D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D. \quad (7.27)$$

Таким чином, для будь-якої кількості ділянок досить визначити 2 константи.

Для цього знайдемо прогин і кут повороту на 1-й ділянці з урахуванням (7.27):

$$y'' = -\frac{1}{EJ} [M_0 + Q_0 x];$$

$$y' = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \right] + C; \quad (7.28)$$

$$y = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \right] + Cx + D. \quad (7.29)$$

Підставимо у вирази (7.28), (7.29)  $x=0$ , одержимо

$$y'(0) = C; y(0) = y_0 = D,$$

тобто для визначення переміщень методом початкових параметрів досить знати прогин  $y(0) = y_0$  і кут повороту  $y'(0) = y'_0 = \varphi_0$  на початку балки.

Підставивши отримані значення констант у вирази (7.23) і (7.24), записуємо вирази для визначення переміщень довільного перерізу методом початкових параметрів:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} \Big|_1 + M(x-a) \Big|_2 - F \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_3 - \right. \\ \left. - \frac{q(x-c)^3}{3!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^3}{3!} \Big|_5 \right]; \quad (7.30)$$

$$y = y_0 + \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2 - F \frac{(x-b)^3}{3!} \Big|_3 - \right. \\ \left. - \frac{q(x-c)^4}{4!} \Big|_4 + \frac{q(x-d)^4}{4!} \Big|_5 \right]. \quad (7.31)$$

Вхідні у формули (7.30), (7.31) величини  $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0$  називаються початковими параметрами.

Прогин  $y_0$  і кут повороту  $\varphi_0$  на початку балки – геометричні початкові параметри; згинальний момент  $M_0$  і поперечна сила  $Q_0$  на початку балки – статичні початкові параметри.

Параметри  $M_0$  і  $Q_0$  визначаються з умов завантаження балки. Параметри  $y_0$  і  $\varphi_0$  визначаються з умов закріплення.

При використанні формул (7.30), (7.31) потрібно дотримуватися таких правил:

1 Знаки у формулах відповідають напрямку силових факторів ( $M_0, Q_0, M, F, q$ ) на рисунку 7.16. При зміні напрямку силового фактора змінюється знак перед відповідним доданком у формулі.

2 При визначенні переміщень у перерізі  $x$  до формул входять тільки ті доданки, у яких силові фактори розташовані строго ліворуч від перерізу  $x$ .

3 Додатний напрямок прогину  $y$  (зокрема,  $y_0$ ) – униз, додатний напрямок кута повороту  $\varphi$  (зокрема,  $\varphi_0$ ) – за годинниковою стрілкою від осі балки.

## Приклади застосування методу початкових параметрів

1 Знайти прогин  $y$  у точці прикладання сили для балки з п. 7.4.2 (рисунок 7.17)

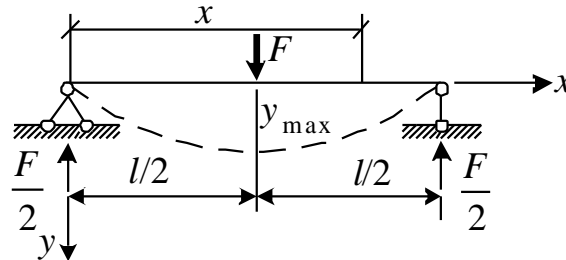


Рисунок 7.17 – Розрахункова схема шарнірної балки

Початкові параметри:

на лівій шарнірній опорі

$$y_0 = 0, M_0 = 0, Q_0 = F/2.$$

Кут повороту  $\varphi_0 \neq 0$ , його значення невідоме. Визначаємо його з умови закріплення на другій опорі:

$$\text{при } x = l \quad y(l) = 0.$$

Запишемо спочатку за виразом (7.31) прогин у довільному перерізі:

$$y(x) = \varphi_0 x - \frac{1}{EJ} \left[ Q_0 \frac{x^3}{3!} - F \frac{(x - l/2)^3}{3!} \right].$$

Звідси

$$y(l) = \varphi_0 l - \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F l^3}{2 \cdot 3!} - F \frac{(l - l/2)^3}{3!} \right] = 0.$$

Цей вираз використовуємо як рівняння для визначення  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \frac{Fl^2}{16EJ}.$$

Усі початкові параметри визначені. Обчислимо тепер  $y(x)$  при  $x = l/2$ :

$$y(l/2) = \frac{Fl^2}{16EJ} \frac{l}{2} - \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F}{2} \frac{(l/2)^3}{3!} \right],$$

звідки

$$\boxed{y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EJ}} \quad (7.32)$$

Цей результат збігається з отриманим за методом безпосереднього інтегрування.

2. Знайти прогин у точці прикладання сили – на кінці консольної балки (рисунок 7.18)

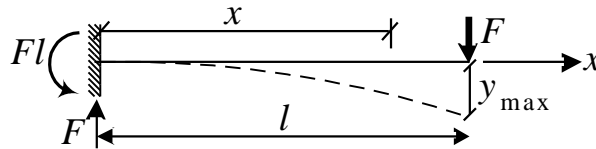


Рисунок 7.18 – Розрахункова схема консольної балки

Початкові параметри:  $M_0$  і  $Q_0$  збігаються з реакціями на лівому кінці балки:

$$M_0 = -Fl$$

(напрямок протилежний зазначеному на рисунку 7.14, тому взятий знак мінус);

$$Q_0 = F.$$

Початкові параметри  $y_0$  і  $\varphi_0$  дорівнюють нулю, оскільки лівий кінець балки затиснений:

$$\varphi_0 = y_0 = 0.$$

Для даної схеми вираз (7.31) при довільному  $x$  має вигляд

$$y(x) = -\frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{3!} \right].$$

При  $x = l$

$$\boxed{y(l) = y_{\max} = F \frac{l^3}{3EJ}} \quad (7.33)$$

Формули (7.32) і (7.33) можна використовувати як табличні.

## 8 ЗСУВ

Зсув (зріз) викликається дією двох однакових протилежно спрямованих сил, що діють перпендикулярно до осі елемента, і розташованих досить близько одна до одної (рисунок 8.1, а).

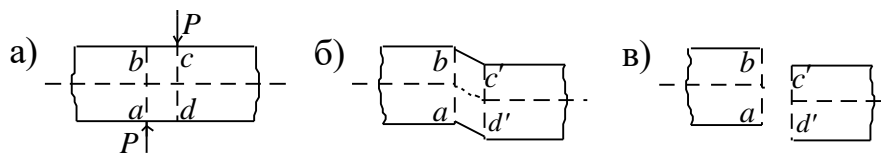


Рисунок 8.1 – Схема зсуву

Для врівноважування зовнішніх сил у поперечних перерізах виникає поперечна сила  $Q$ .

Наприклад, зсув виникає при розрізуванні ножицями прута, при зрізі головки болта. При цьому відбувається спочатку зминання, а потім зріз (рисунок 8.1, б, в). Зсув рідко спостерігається в чистому вигляді, найчастіше він супроводжується згином, як на рисунку 8.1, б. У свою чергу, при згині виникають поперечні сили, тобто згин супроводжується зсувом.

### 8.1 Дотичні напруження при зсуві

Поперечні сили розподіляються по площині перерізу  $A$ , їх інтенсивність – дотичне напруження  $\tau$  (рисунок 8.2):

$$Q = \int_A \tau dA .$$

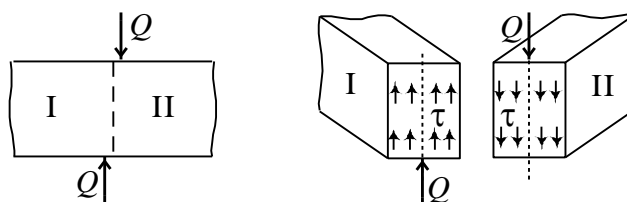


Рисунок 8.2 – Дотичні напруження в перерізі

Вважаючи, що напруження розподілені рівномірно по перерізу, одержимо  $Q = \tau A$ , звідки

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (8.1)$$

Допущення про рівномірність розподілу  $\tau$  приймається при практичних розрахунках болтових, заклепувальних і зварених з'єднань та інших деталей. У загальному випадку (при нерівномірному розподілі  $\tau$ ) формула (8.1) дає середнє значення напруження.

## 8.2 Чистий зсув

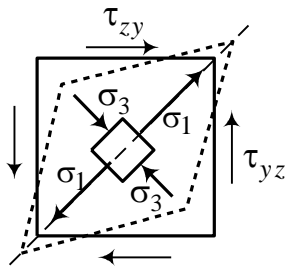


Рисунок 8.3

Якщо на гранях виділеного з перерізу елемента виникають тільки дотичні напруження (рисунок 8.3), зсув називають чистим зсувом. При такому напруженому стані відмінні від нуля тільки напруження  $\tau_{zy} = \tau$ .

Як бачимо, при чистому зсуві має місце плоский напружений стан. Згідно (5.2) одержуємо, що  $\cos 2\alpha = 0$ , отже, кут нахилу головних площинок  $\alpha = 45^\circ$ ; згідно (5.4), головні напруження  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ . При деформації елемента діагональ, що збігається з лінією дії  $\sigma_1$ , подовжується, а друга діагональ коротшає, при цьому квадрат перетворюється на ромб – прямі кути деформуються.

### 8.2.1 Деформації при чистому зсуві

Закріпимо для наочності одну із граней елемента. Його деформація буде виглядати, як показано на рисунку 8.4, а.

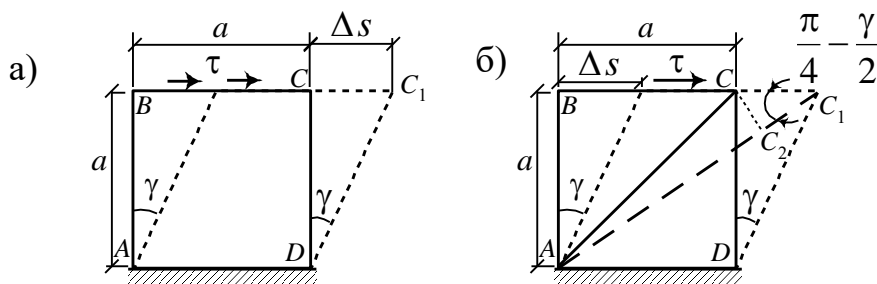


Рисунок 8.4 – Деформація елемента при зсуві

Зсув грані  $\Delta s$  називається абсолютним зсувом. Кут  $\gamma$  називається кутом зсуву, або відносним зсувом. Очевидно,  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}$ , а через малість деформацій  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , так що

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (8.2)$$

### 8.2.2 Закон Гука при чистому зсуві. Зв'язок між $G$ і $E$

Як і при розтяганні, дослідним шляхом можна показати, що при зсуві в межах пружності має місце пропорційна залежність деформації і напруження, яка називається *законом Гука при зсуві*:

$$\tau = G \gamma. \quad (8.3)$$

Тут  $G$  – модуль зсуву або модуль пружності II роду.

Для ізотропних матеріалів між модулем зсуву  $G$  і модулем пружності при розтяганні  $E$  існує залежність. Щоб одержати цю залежність, розглянемо рисунок 8.4, б. Визначимо спочатку подовження  $\Delta l$  діагоналі AC, вихідна довжина якої  $l = CC_1 = a\sqrt{2}$ :

$$\Delta l = C_1 C_2 = CC_1 \cos(\pi/4 - \gamma/2) \approx CC_1 \cos(\pi/4) = \Delta s / \sqrt{2}.$$

Тоді відносне подовження діагоналі з урахуванням  $\gamma = \tau/G$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{a} = \frac{1}{2} \gamma = \frac{\tau}{2G}.$$

Згідно з узагальненим законом Гука (5.20), подовження  $\varepsilon = \varepsilon_1$  в напрямку  $\sigma_1$  для отриманих  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$  дорівнює

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{1+\nu}{E} \tau.$$

Прирівнюючи два вирази для  $\varepsilon$ , маємо

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8.4)$$



### 8.2.3 Перевірка міцності при зсуві

Оскільки при зсуві має місце плоский напружений стан, міцність елемента потрібно перевіряти за однією з теорій міцності. Аналіз умов, отриманих за цими теоріями, говорить про те, що їх можна об'єднати одним виразом:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] = \begin{cases} (0,7-1)[\sigma] & \text{для крихких матеріалів;} \\ (0,5-0,6)[\sigma] & \text{для пластичних матеріалів.} \end{cases}$$

Основні формули для розрахунків на зсув наведені в додатку Б.

### 8.2.4 Розрахунки з'єднань, що працюють на зсув

*Заклепувальні й болтові однозрізні з'єднання* (рисунок 8.5)

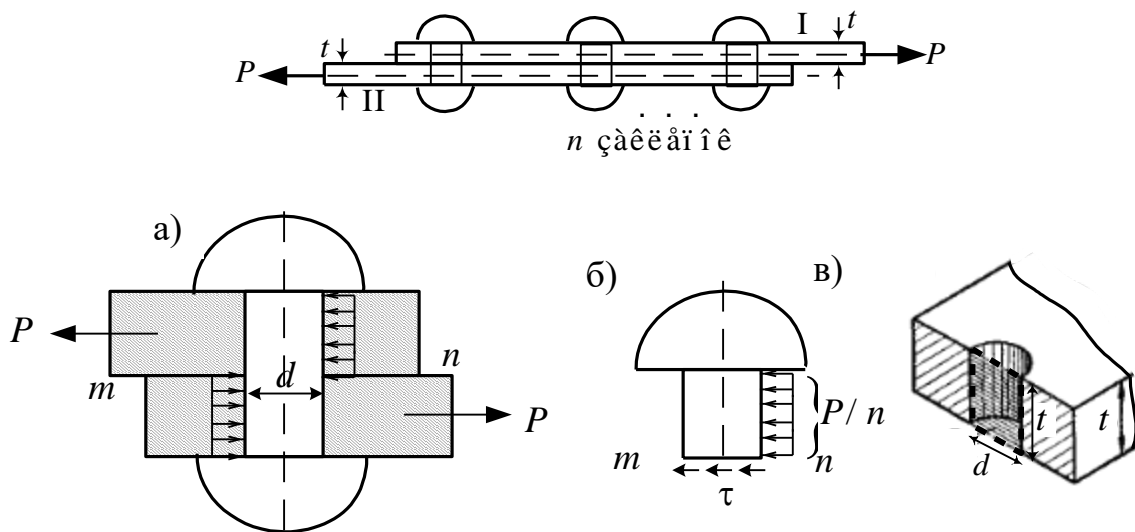


Рисунок 8.5 – Розрахунок заклепки і болта на зріз і зминання

Одним з видів руйнування є зріз заклепки (болта) по перерізу  $m n$  (рисунок 8.5, а). Сили  $P$  прагнуть зсунути листи один відносно одного та зрізати кожен заклепку по площині  $m n$

площею  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  (рисунок 8.5, б). Вважаючи, що дотичні напруження розподілені рівномірно по перерізу, а кількість

заклепок дорівнює  $n$ , одержуємо умову міцності для однозрізних заклепок (болтів):

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} = \frac{Q}{nA} = \frac{P}{n(\pi d^2/4)} \leq [\tau]. \quad (8.5)$$

Значення допустимих напружень  $[\tau] = [\tau]_з$  деяких матеріалів на зріз для заклепувальних і зварених з'єднань наведені в додатку А.

Умова (8.5) може бути використана для розрахунку діаметра заклепки:

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi n [\tau]}}. \quad (8.6)$$

При розрахунку болтових і заклепувальних з'єднань потрібно також урахувувати, що крім зрізу заклепки може відбутися її зминання по контакту з листом (рисунок 8.5, б, в). Напруження зминання спрямоване перпендикулярно поверхні контакту, тобто є нормальним. Площу поверхні зминання приймають рівною  $A_{\text{зм}} = td$ , тобто рівною площі показаного пунктиром на рисунку 8.5, в прямокутника. Умова міцності на зминання має, таким чином, вигляд

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{P}{n t d} \leq [\sigma]_{\text{зм}}. \quad (8.7)$$

Допустиме напруження на зминання  $[\sigma]_{\text{зм}} \approx (2 - 2,5)[\sigma]$ .

З виразу (8.6) діаметр болта

$$d \geq \frac{P}{n t [\sigma]_{\text{зм}}}. \quad (8.8)$$

Якщо умови міцності використовуються для добору діаметра заклепки, береться більший з діаметрів, отриманих згідно з виразами (8.6) і (8.8).

На практиці діаметр звичайно вибирається згідно з нормами:  $d \approx 2t$ , тому умова (8.5) частіше застосовується для визначення необхідної кількості заклепок (болтів):

$$n \geq \frac{P}{(\pi d^2/4)[\tau]}, \quad (8.9)$$

а після цього перевіряється виконання умови (8.7).

### Задача

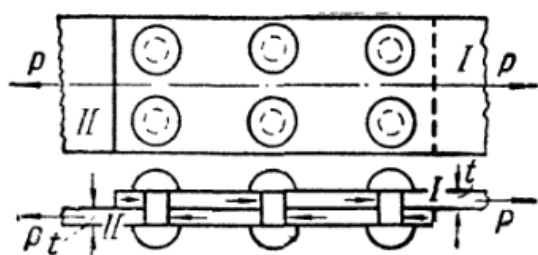


Рисунок 8.6

Визначити кількість однозрізних заклепок, необхідне для з'єднання, показано на рисунку 8.6;  $P = 72000$  кг,  $d = 2$  см,  $\delta = 1$  см,  $[\tau]_3 = 1000$  кг/см<sup>2</sup>,  $[\sigma]_{3М} = 2400$  кг/см<sup>2</sup>.

З умови міцності, згідно з виразом (8.9) одержуємо

$$n \geq \frac{P}{(\pi d^2/4)[\tau]_3} = \frac{72000 \text{ кг}}{(3,14 \cdot 4 \text{ см}^2/4)1000 \text{ кг/см}^2} \approx 24.$$

З умови міцності на зминання (8.7)

$$n \geq \frac{P}{d \delta [\sigma]_{3М}} = \frac{72000 \text{ кг}}{2 \text{ см} \cdot 1 \text{ см} \cdot 2400 \text{ кг/см}^2} = 15.$$

Очевидно, необхідно поставити 24 заклепки. Робота заклепок на зріз виявляється небезпечніше за їхню роботу на зминання. Це звичайно буває в з'єднаннях з однозрізними заклепками.

### Заклепувальні та болтові двозрізні з'єднання

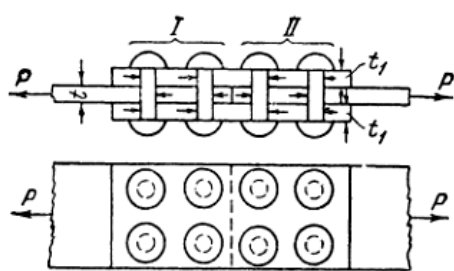
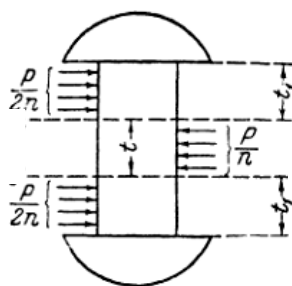


Рисунок 8.7  
(рисунок 8.7).



Розглянемо випадок, у якому стик листів здійснено за допомогою двох накладок

У цьому випадку заклепки зрізуються по двох площинах, і в умові міцності потрібно враховувати подвійну площу зрізу:

$$\tau = \frac{P}{2(\pi d^2/4)n} \leq [\tau]_3, \quad (8.10)$$

звідки

$$n \geq \frac{P}{2(\pi d^2/4)[\tau]_3}, \quad (8.11)$$

що у два рази менше, ніж для однозрізних заклепок.

Виконаємо перевірку на зминання. Товщина листів, які склепуються дорівнює  $t$ ; товщина накладок не повинна бути менше  $0,5t$ , оскільки дві накладки повинні сприйняти силу  $P$ . Тому  $0,5t < t_1 \leq t$ .

Сила  $P/n$  зминає верхню, нижню та середню частини заклепки. Оскільки товщина середнього листа не перевищує суму товщин обох накладок, то в гірших умовах зі зминання знаходиться середня частина, і умова міцності залишається такою самою, як для однозрізних заклепок (8.7).

Нехай  $t_1 = 0,8\text{мм}$ , а інші дані такі самі, як у попередньому прикладі. Тоді з умови міцності на зріз (8.11) одержуємо  $n \approx 12$ , а умова міцності на зминання дає таку саму кількість, як для однозрізних заклепок  $n = 15$ . Таким чином, у цьому випадку при двозрізних заклепках умови роботи на зминання важче, ніж на зріз, і слід прийняти  $n = 15$ .

### ***Перевірка міцності листів при заклепувальних і болтових з'єднаннях***

Наявність заклепок або болтів вносить деякі зміни також у перевірку міцності на розтягання і стиск самих з'єднаних листів.

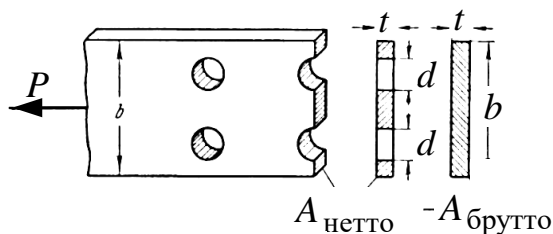


Рисунок 8.8

Небезпечним перерізом кожного листа є тепер переріз, що проходить через заклепувальні (болтові) отвори – цей переріз ослаблений, тут робоча ширина листа найменша (рисунок 8.8).

Умова міцності в ослабленому перерізі набуває вигляду

$$\frac{P}{A_{\text{нетто}}} = \frac{P}{t(b - md)} \leq [\sigma],$$

де  $m$  – кількість отворів, що попадають у переріз (у випадку, показаному на рисунку 8.8,  $m = 2$ ).

Звідси можна знайти розмір  $b$ , якщо задати товщину листа  $t$ . Площа ослабленого перерізу називається  $A_{\text{нетто}} = t(b - md)$ , площа повного перерізу – площа бруто  $A_{\text{брутто}} = bt$ .

### Зварені з'єднання

Зварені з'єднання не дають ослаблення елементів, менш трудомісткі, ніж інші види з'єднань, і тому більш економічні.

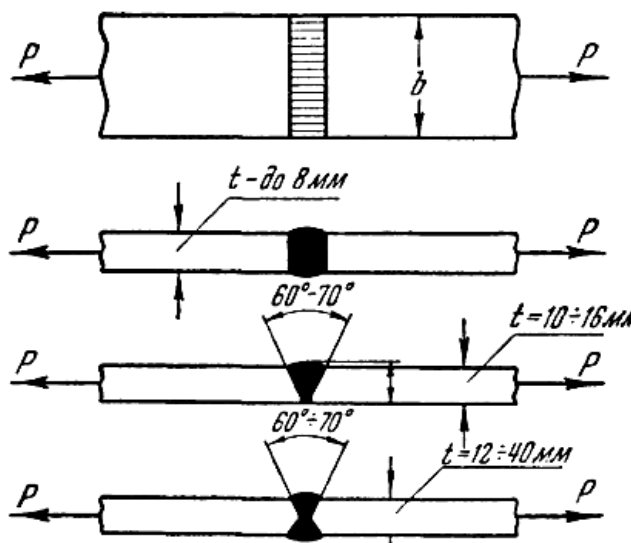


Рисунок 8.9

Найбільш простим і надійним видом зварювального з'єднання є з'єднання встик, утворене шляхом заповнення зазора між торцями елемента, що з'єднуються, наплавленим металом.

З'єднання здійснюється залежно від товщини елементів, що з'єднуються, по одному з типів, показаних на рисунку 8.9. Перевірка міцності проводиться на розтягання або стиск за формулою

$$\sigma_e = \frac{P}{lt} \leq [\sigma_e],$$

де  $lt$  – умовна робоча площа перерізу шва,  $l = b - 10$  мм – розрахункова довжина шва.

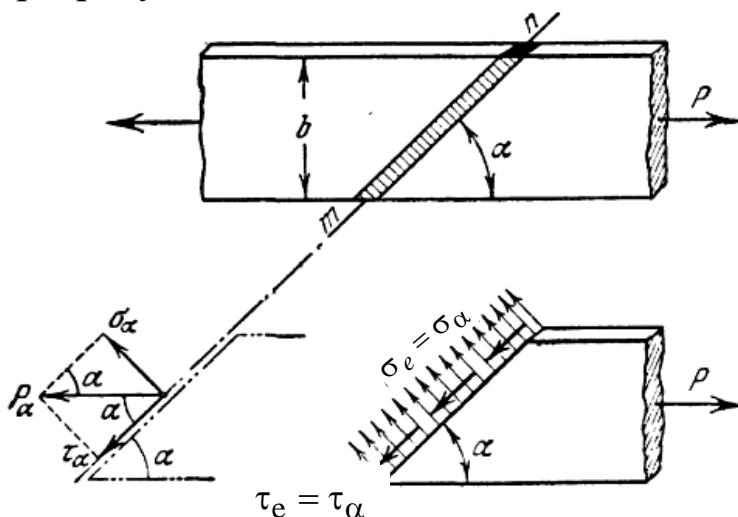


Рисунок 8.10

Оскільки допустиме напруження вареного шва нижче, ніж для основного металу, прагнуть до збільшення довжини шва. Із цією метою застосовують з'єднання встик з косим

швом (рисунок 8.10).  
Перевірка міцності  
косих швів проводиться  
за нормальними і за  
дотичними  
напруженнями:

$$\sigma_e = \frac{P}{lt} \sin \alpha \leq [\sigma_e], \quad \tau_e = \frac{P}{lt} \cos \alpha \leq [\tau_e].$$

Розрахункова довжина шва приймається рівною  $l = b / \sin \alpha - 10 \text{ мм}$ .

Як показав досвід, найбільш раціональним кутом є кут нахилу  $\alpha = 45 - 50^\circ$ . Спосіб зварювання косим швом через незручність центрування елементів, які зварюються, застосовують рідко.

Іншим способом зварювального з'єднання є з'єднання *внапуск*. Розглянемо зварене з'єднання двох листів, наприклад, кутовими швами (рисунок 8.11). Руйнування швів у розглянутому з'єднанні відбувається від зрізу по найменшій можливій площі зрізу, розташованій в бісекторній площині кута, де наплавляється шов (рисунок 8.11, б).

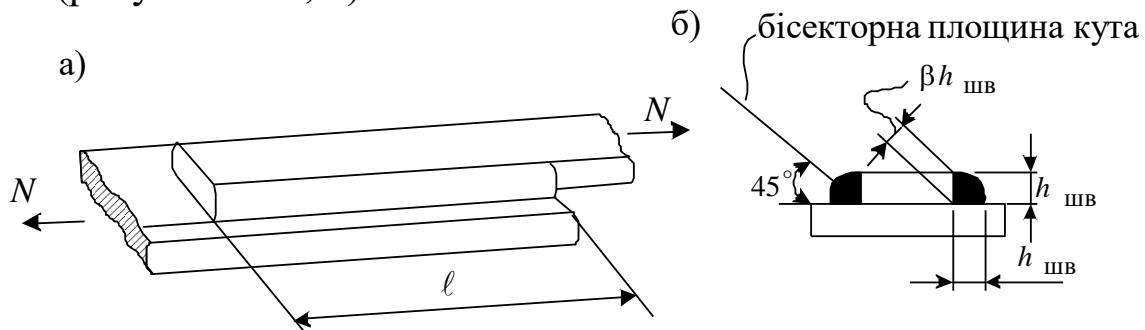


Рисунок 8.11 – Зварене з'єднання кутовими швами

При цьому площа зрізу на два шви дорівнює  $A_{зр} = 2l_{ш}h_{ш}\beta$ , де  $h_{ш}$  – висота катета кутового шва;  $l_{ш} = l - 10 \text{ мм}$  – розрахункова довжина шва, що враховує можливе погіршення якості зварювання по кінцях шва;  $\beta$  – коефіцієнт форми кутового шва. Він залежить від виду зварювання: для однопрохідної автоматичної –  $\beta = 1$ ; однопрохідної напівавтоматичної та ручної  $\beta = 0,8$ ; багатопрохідної авто- і напівавтоматичної  $\beta = 0,7$ .

Припускаючи рівномірний розподіл дотичних напружень по площі зрізу шва, умову міцності запишемо у вигляді

$$\tau = \frac{N}{A_{зр}} = \frac{N}{2\ell_{ш}h_{ш}\beta} \leq [\tau]_{зр},$$

де  $[\tau]_{зр}$  – допустиме дотичне напруження матеріалу кутового звареного шва на зріз.

Щоб не допускати надмірної нерівномірності розподілу напружень по довжині шва, ставиться обмеження на його довжину:  $\ell \leq 60 h_{ш}$ . З умови міцності, задавшись яким-небудь одним розміром шва, наприклад  $h_{ш}$ , можна знайти інший розмір – довжину шва  $\ell$ .

## 9 КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ З КРУГЛИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

Кручення – це деформація, яка викликається парами сил (моментами), що діють у перерізах, перпендикулярних до осі елемента, як показано на рисунку 9.1.

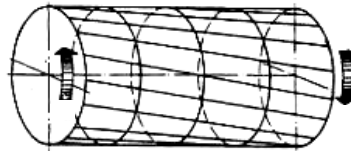


Рисунок 9.1

На практиці на кручення працюють трансмісійні вали, пружини, осі рухомого состава, елементи просторових конструкцій і т. д.

Вали призначені для передачі крутного моменту від однієї обертової деталі до іншої, а також для сприйняття згинального моменту від мас деталей механізму, розташованих на цьому валу. Тому вони працюють одночасно на згин і кручення. У даній темі розглядається тільки кручення стержня; спільна дія кручення і згину буде розглянута при вивченні складних деформацій.

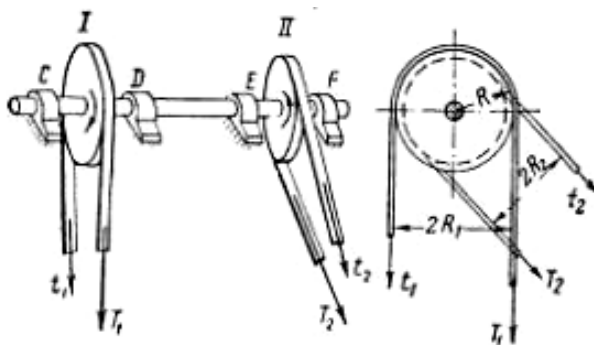


Рисунок 9.2

Наприклад, на наведеному рисунку показаний вал CF, на який насаджені шків I і II. Вал підтримується підшипниками C, D, E, F. Розташування

підшипників дозволяє знехтувати деформацією згину. Шків I передає валу обертання за допомогою ремінної передачі від електромотора, шків II передає це обертання верстату також за допомогою ремня.



При крученні в перерізах вала виникає одне *внутрішнє зусилля* – *крутний момент*  $M_K$  (п. 1.6). Правило знаків для  $M_K$  сформульоване в п. 2.3.

*При вивченні кручення круглого стержня приймаються*  
**Гіпотези**

- 1 Плоскі перерізи залишаються плоскими.
- 2 Радіуси перерізів залишаються прямими.
- 3 Відстані між перерізами не змінюються.

Перша гіпотеза (плоских перерізів) сформульована на початку курсу і стосується всіх деформацій, інші дві стосуються кручення і установлені експериментально. Вони означають, що одні перерізи вала повертаються відносно інших як жорстке ціле, а довжина вала залишається незмінною.

### 9.1 Обчислення моментів, переданих на вал

Для обчислення крутних моментів необхідно знати моменти, передані на вал кожним шківом. Для цього потрібно знати кількість обертів вала в одиницю часу та потужність, передану шківом.

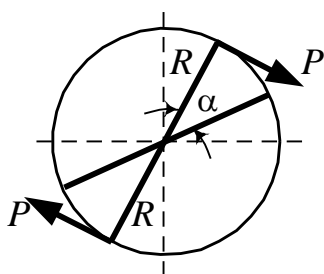


Рисунок 9.3

Нехай на шків радіуса  $R$  діє пара сил  $P$ , тоді крутний момент  $M_K = 2PR$  (рисунок 9.3). При обертанні пари  $M_K$  робить роботу. При повороті шківа на кут  $\alpha$  кожна сила пари пройде шлях  $R\alpha$ , так що вся пара виконає роботу

$$A = 2PR\alpha = M_K\alpha.$$

Якщо вал робить  $n$  обертів в одиницю часу, то робота в одиницю часу, тобто потужність  $W$ , дорівнює

$$W = M_K \cdot 2\pi n.$$

Таким чином, крутний момент можна виразити через передану шківом потужність і кількість обертів вала в одиницю часу:

$$M_K = \frac{W}{2\pi n}. \quad (9.1)$$

## 9.2 Напруження та деформації в поперечному перерізі

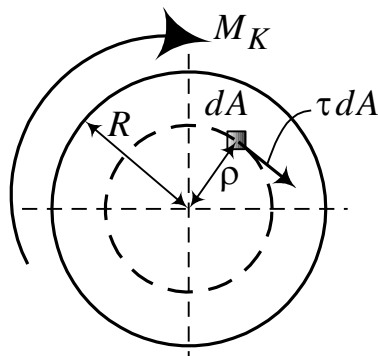


Рисунок 9.4

Крутний момент, що діє в площині перерізу, урівноважується дією *дотичних напружень* у кожній точці перерізу на відстані  $\rho$  від центра перерізу (рисунок 9.4). Елементарний момент  $dM_K$  дорівнює добутку елементарної сили  $\tau dA$  на плече  $\rho$ . Сумарний момент  $M_K$  дорівнює

$$M_K = \int_A (\tau dA) \rho. \quad (9.2)$$

Цей вираз можна розглядати як рівняння відносно дотичного напруження  $\tau$  в точці. Оскільки напруження в загальному випадку в кожній точці різні, одного цього рівняння недостатньо для визначення напружень, тобто завдання є статично невизначеним. Для вирішення таких завдань вивчаються деформації елемента.

### 9.2.1 Деформації

Можна умовно вважати, що при крученні один переріз, наприклад, лівий, є нерухомим, а інші повертаються відносно

лівого на кути  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і т. д. у результаті дії моменту  $M$  (це показано на рисунку 9.5).

Кут повороту радіуса перерізу  $\varphi$  називається *кутом закручування перерізу*.

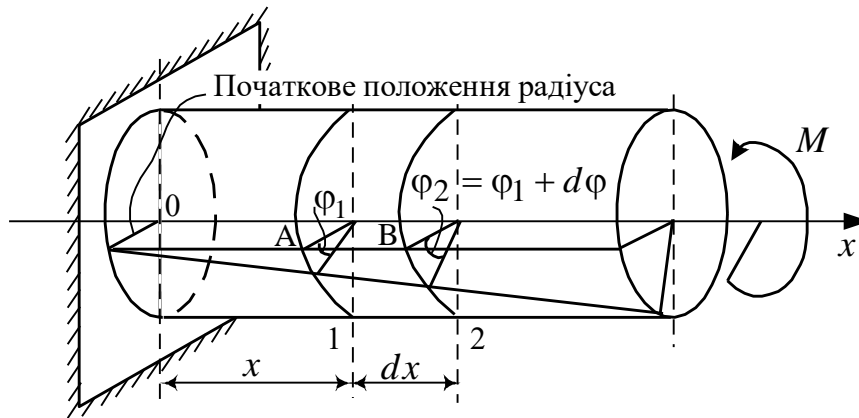
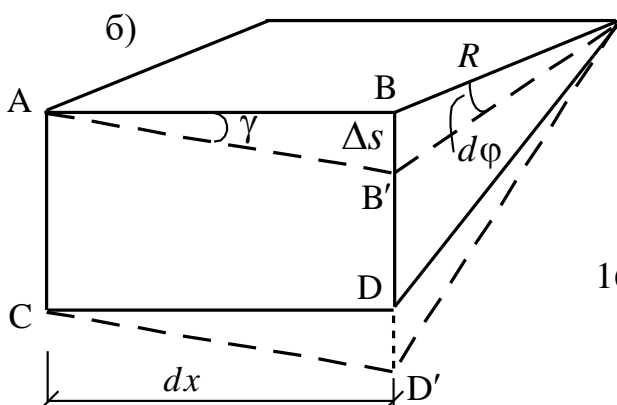
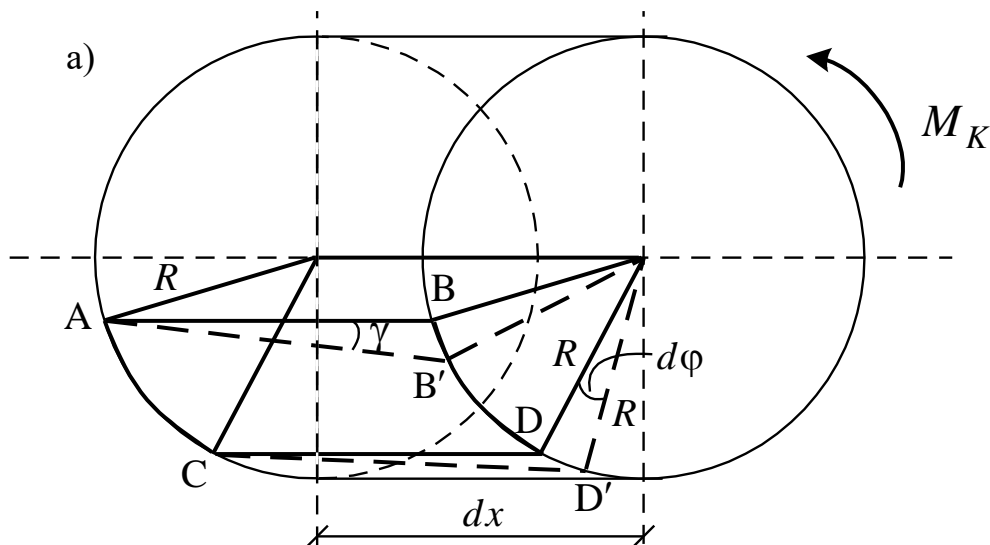


Рисунок 9.5 – Деформації при крученні

Виріжемо з вала двома перерізами елемент довжиною  $dx$  і розглянемо взаємний кут повороту перерізів 1 і 2, що дорівнює  $d\varphi$ , як показано на рисунку 9.6, а. При цьому радіус перерізу  $R$  повертається на кут  $d\varphi$ , твірна  $AB$  нахиляється на кут  $\gamma$ , а відстань між перерізами  $dx$  не змінюється.



Через малість  $dx$  елемент поверхні  $ABCD$  можна вважати плоским, і

деформацію виділеного сектора розглядати як деформацію зсуву (тема 8), як показано на рисунку 9.6, б.

Тоді для точки В одержуємо

$$\gamma = \frac{\Delta s}{dx} = \frac{R d\varphi}{dx},$$

аналогічно для довільної точки перерізу на відстані  $\rho$  від центра

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.3)$$

За законом Гука при зсуві (п. 8.2.2),

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.4)$$

Підставивши цей вираз у формулу (9.2), одержуємо

$$M_K = \int_A \tau \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} J_\rho,$$

звідки одержуємо закон Гука при крученні:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{G J_\rho}}, \quad (9.5)$$

де  $\varphi$  – кут закручування;  $\frac{d\varphi}{dx}$  – кут закручування на одиницю

довжини (погонний кут закручування);  $J_\rho$  – полярний момент інерції (п. 4.4); добуток  $G J_\rho$  називається *жорсткістю при крученні*.

### 9.2.2 Напруження

Повернувшись до виразу (9.4) і підставивши в нього вираз(9.5), одержуємо вираз для дотичних напружень при крученні в довільній точці поперечного перерізу круглого стержня на відстані  $\rho$  від центра:

$$\boxed{\tau = \frac{M_K \rho}{J_\rho}}. \quad (9.6)$$

Згідно з виразом (9.6), при  $\rho=0$   $\tau=0$ ; при  $\rho=R$  напруження  $\tau$  досягає максимального значення і дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{M_K R}{J_\rho}.$$

Згідно з п. 4.9,  $\frac{J_\rho}{R} = W_\rho$  – це полярний момент опору перерізу.

З урахуванням цього максимальне напруження в перерізі виникає на границі перерізу і дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}. \quad (9.7)$$

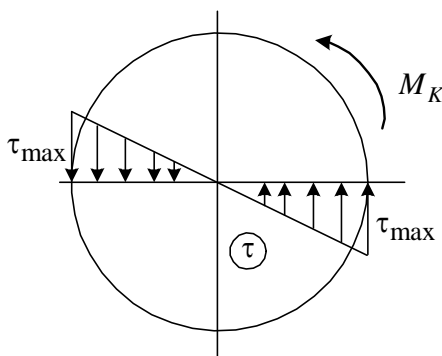


Рисунок 9.7

Епюра дотичних напружень, побудована на довільному діаметрі має вигляд прямої, що проходить через початок координат та має максимальну ординату при  $\rho=R$ , як показано на рисунку 9.7.

### 9.3 Умова міцності

Умова міцності при крученні елементів конструкцій круглого перерізу за методом допустимих напружень має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (9.8)$$

де  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження матеріалу.

Цю умову можна використовувати для добору розмірів суцільного та кільцевого перерізів (у кільцевого перерізу  $d$  і  $D$  – відповідно внутрішній і зовнішній діаметри), застосувавши вираз (4.30):

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{M_K \cdot 16}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\tau], \quad \alpha = \frac{d}{D},$$

звідки

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}. \quad (9.9)$$

Для суцільного перерізу  $\alpha = 0$ .

#### 9.4 Аналіз напруженого стану та руйнування при крученні

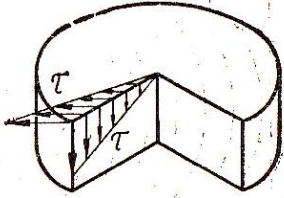


Рисунок 9.8

Аналіз формули (9.6) для дотичних напружень  $\tau$  показав, що напруження в площині перерізу вала розподілені нерівномірно та змінюються від 0 у центрі перерізу до максимуму на границі. У силу закону парності дотичних напружень, в осьових перерізах стержня виникають такі самі за величиною, але зворотні за знаком дотичні напруження, як показано на рисунку 9.8.

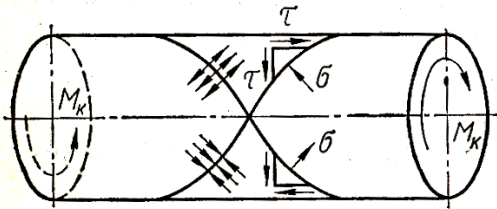


Рисунок 9.9

У виділеному елементі вала по гранях діють тільки дотичні напруження (рисунок 9.9). У перерізах, нахилених до осі, виникають також нормальні напруження, як при чистому зсуві (п. 8.2), тобто має місце *плоский напружений стан*. *Найбільші нормальні напруження діють на головних площинках, нахилених під кутом  $45^\circ$  до осі вала.*

Таким чином, при крученні круглих валів небезпечними можуть стати як дотичні напруження, що виникають у поперечних і поздовжніх перерізах вала, так і нормальні напруження, що виникають на площинках під кутом  $45^\circ$  до поздовжніх площинок. У зв'язку із цим характер руйнування вала залежить від здатності матеріалу опиратися дії нормальних і дотичних напружень.

Так, якщо матеріал погано опирається дотичним напруженням (дії зсуву), то перші тріщини виникнуть по твірних у місцях дії найбільших дотичних напружень. Наприклад, у випадку кручення дерев'яних валів з поздовжнім розташуванням волокон тріщини орієнтовані уздовж твірної (паралельні осі), тому що деревина погано опирається дії дотичних напружень уздовж волокон.



Рисунок 9.10  
Якщо матеріал погано опирається розтягувальним напруженням, наприклад, чавун, то тріщини пройдуть по лініях, нормальних до дії головних розтягувальних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут  $45^\circ$  з віссю стержня (рисунок 9.10).

Сталеві вали на практиці руйнуються по поперечному перерізу, перпендикулярному до осі вала. Цей вид руйнування обумовлений дією в поперечному перерізі дотичних напружень.

### 9.5 Визначення кутів закручування

Для визначення кутів закручування скористаємося рівнянням (9.5). Проінтегрувавши обидві частини рівності, знайдемо в довільному перерізі на відстані  $x$  від початку координат:

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi = \int_0^x \frac{M_K}{GJ_\rho} dx + \varphi_0, \quad (9.10)$$

де  $\varphi_0$  – кут повороту, який визначається із граничних умов.

В окремому випадку при  $M_K = \text{const}$ ,  $GJ_\rho = \text{const}$  одержуємо

$$\boxed{\varphi = \frac{M_K x}{GJ_\rho} + \varphi_0}. \quad (9.11)$$

Якщо на початку координат вал жорстко закріплений (як на рисунку 9.5), то при  $x = 0$   $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$ , і для кута закручування перерізу  $x$  отримуємо вираз

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{M_K x}{GJ_\rho}}, \quad (9.12)$$

де  $M_K$  – крутний момент у перерізі.

### 9.6 Умова жорсткості

При розрахунках на кручення, крім умови міцності, потрібно виконувати умови, що обмежують кут закручування на деякій відстані  $l$  від нерухомого перерізу або погонний кут закручування. Відповідні умови жорсткості формулюються в такий спосіб:

$$\frac{M_K l}{G J_\rho} \leq [\varphi], \quad (9.13)$$

$$\frac{M_K}{G J_\rho} \leq \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] = [\theta], \quad (9.14)$$

де  $[\varphi]$  – допустимий кут закручування;

$[\theta]$  – допустимий погонний кут закручування;

$[\varphi]$ ,  $[\theta]$  задаються технічними умовами.

З умов жорсткості одержуємо вирази для визначення діаметра вала, застосовуючи (4.27):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K l}{G \pi (1 - \alpha^4) [\varphi]}} \quad \text{або} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K}{G \pi (1 - \alpha^4) [\theta]}}, \quad (9.15)$$

звідки

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K l}{G \pi (1 - \alpha^4) [\varphi]}} \quad \text{або} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K}{G \pi (1 - \alpha^4) [\theta]}}. \quad (9.15)$$

Для суцільного перерізу у формулах (9.15)  $\alpha = 0$ .

Із двох діаметрів вала, отриманих з умови міцності (9.8) або умов жорсткості (9.13), (9.14), приймається більше значення.

## 9.7 Розв'язання задач на розрахунок вала

*Задача 1.* Знайти діаметр сталевого вала, що передає потужність  $N = 150$  к.с. при  $n = 70$  об/хв. Допустиме дотичне напруження  $[\tau] = 400$  кг/см<sup>2</sup>, допустимий погонний кут закручування  $[\theta] = 0,3$  град/м.

*Розв'язання.* Використовуючи співвідношення  $1$  к.с. =  $75$  кгм/с і формулу (9.1), знайдемо крутний момент



$$M_K = \frac{W}{2\pi n} = \frac{150 \cdot 75 \text{ кгм/с}}{2\pi \cdot 70 \text{ об/60 с}} = 1535 \text{ кгм} = 153500 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

З умови міцності (9.8) одержуємо згідно (9.9)

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{153500 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot 16}{\pi 400 \text{ кг/см}^2}} \approx 12,5 \text{ см}.$$

Згідно з умовою жорсткості (9.14) одержуємо діаметр за (9.15):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_K 32}{G \pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{153500 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \pi(0,3 \cdot 0,017) \text{ рад/100 см}}} \approx 14,0 \text{ см}.$$

Діаметр, отриманий з умови жорсткості, більше отриманого з умови міцності на  $(14 - 12,5)/12,5 \approx 12\%$ .

*Таким чином, умова жорсткості в багатьох випадках висуває більш жорсткі вимоги до розміру перерізу, ніж умова міцності.*

**Задача 2.** Замінити суцільний вал діаметра  $D = 300$  мм порожнім (пустотілим) рівномічним валом із зовнішнім діаметром  $D_3 = 350$  мм. Знайти внутрішній діаметр порожнього вала  $D_B$  та порівняти ваги цих валів.

**Розв'язання.** Умова рівноміцності означає, що максимальні дотичні напруження в обох валах повинні бути однаковими при однаковому крутному моменті:

$$\tau_{\text{max}}^{\text{суцільний}} = \tau_{\text{max}}^{\text{порожній}}, \text{ тобто } \frac{M_K}{W_{\rho}^{\text{суцільний}}} = \frac{M_K}{W_{\rho}^{\text{порожній}}},$$

звідки

$$W_{\rho}^{\text{суцільний}} = W_{\rho}^{\text{порожній}}.$$

З останньої рівності з урахуванням (4.30) випливає

$$\frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi D_3^3}{16} (1 - \alpha^4), \text{ де } \alpha = \frac{D_B}{D_3}.$$

Звідси знаходимо

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{D}{D_3}\right)^3} = 0,78.$$

Внутрішній діаметр порожнього вала знаходимо, знаючи зовнішній діаметр:

$$D_B = \alpha D_3 = 0,78 \cdot 350 = 273 \text{ мм} .$$

Відношення ваги порожнього вала до ваги суцільного при однаковій довжині дорівнює відношенню площ поперечних перерізів:

$$\frac{\pi(D_3^2 - D_B^2)}{4} \cdot \frac{4}{\pi D^2} = 0,534 .$$

*Задача 3.* У суцільному валі діаметром  $D$  вирізали отвір діаметром  $d$ , причому  $d = 0,4D$ . Показати самостійно, що в отриманому порожньому валі порівняно із суцільним максимальне напруження збільшилося на 2,6 %; вага зменшилася на 16 %.

*Висновки із задач 2 і 3.* Виготовлення пустотілих валів, тобто валів, з яких вирізається малонавантажена внутрішня частина, є ефективним засобом зниження витрат матеріалу та полегшення валів. При цьому максимальні напруження в пустотілому валі мало відрізняються від максимальних напружень у валі суцільного перерізу при тому самому зовнішньому діаметрі. Такі вали широко застосовуються в машинобудуванні, зокрема, у моторобудуванні.

*Задача 4.* Побудувати епюру кутів закручування для вала, показаного на рисунку 9.11, а.

*Розв'язання.* Попередньо побудуємо епюру крутних моментів – рисунок 9.11, б.

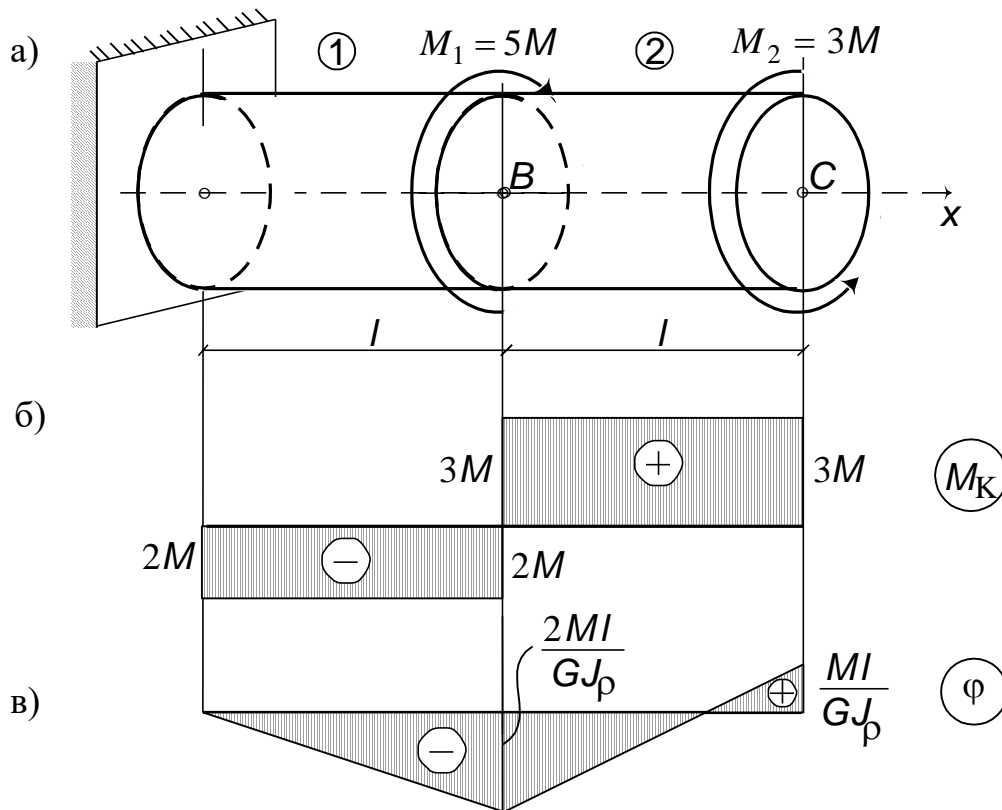


Рисунок 9.11

На ділянці 1  $\varphi_0 = 0$  (защемлення), тому згідно (9.11), при  $x = l$  і  $M_K = -2M$  маємо

$$\varphi_B = -\frac{2Ml}{GJ_p}.$$

На ділянці 2  $\varphi_0 = \varphi_B$ , тому

$$\varphi = -\frac{2Ml}{GJ_p} + \frac{2M_K x}{GJ_p}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

У точці С при  $x = l$  і  $M_K = 3M$  одержуємо

$$\varphi_C = -\frac{2Ml}{GJ_p} + \frac{3Ml}{GJ_p} = \frac{Ml}{GJ_p}.$$

Епюру кутів закручування показано на рисунку 9.11, в.

## 9.8 Напруження та деформації у гвинтових циліндричних пружинах

У ресорах вагонів, у клапанах і в інших деталях механізмів застосовуються гвинтові циліндричні пружини, що зазнають дії розтягувальних або стискаючих сил. При проектуванні таких

пружин для перевірки міцності необхідно вміти обчислювати найбільші напруження. Крім того, на практиці регулюють навантаження, що прикладаються до пружини, викликаючи більші або менші деформації розтягання або стиску, тому потрібно вміти обчислювати її подовження або осідання.

### 9.8.1 Напруження

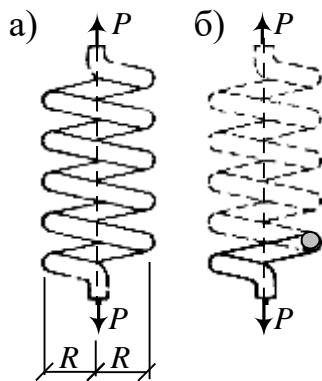


Рисунок 9.12

Розглянемо циліндричну пружину з малим кроком витка під дією розтягувальної сили  $P$  (рисунок 9.12, а). Малість кроку означає, що кутом нахилу витків можна знехтувати. Радіус пружини дорівнює  $R$ , радіус поперечного перерізу прутка пружини  $r$ , кількість витків пружини дорівнює  $n$ .

Для обчислення напружень розсічемо пружину, як показано на рисунку 9.12, б. Відкинемо верхню частину і розглянемо рівновагу нижньої частини.

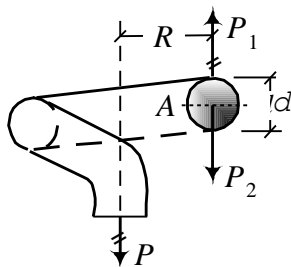


Рисунок 9.13

На нижню частину діє зовнішня сила  $P$ . Щоб визначити внутрішні зусилля в поперечному перерізі, прикладемо до його центра дві однакові протилежно спрямовані сили, які дорівнюють  $P_1 = P_2 = P$  (рисунок 9.13). Сила  $P_2$  – це поперечна сила в перерізі:  $Q = P$ . Сили  $P_1$  і  $P$  утворюють у перерізі крутний момент з плечем  $R$ :  $M_K = PR$ .

Розподіл цих зусиль по перерізу – дотичні напруження, як показано на рисунку 9.14: при зсуві, згідно з виразом (8.1), виникає  $\tau_c = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\pi r^2}$  від поперечної сили  $Q$ ; при крученні згідно

(9.6) виникає  $\tau_K = \frac{M_K \rho}{J_\rho}$  від крутного моменту  $M_K$ , причому

згідно з виразом (9.7),  $\tau_K^{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{PR}{\pi r^3/2}$ .

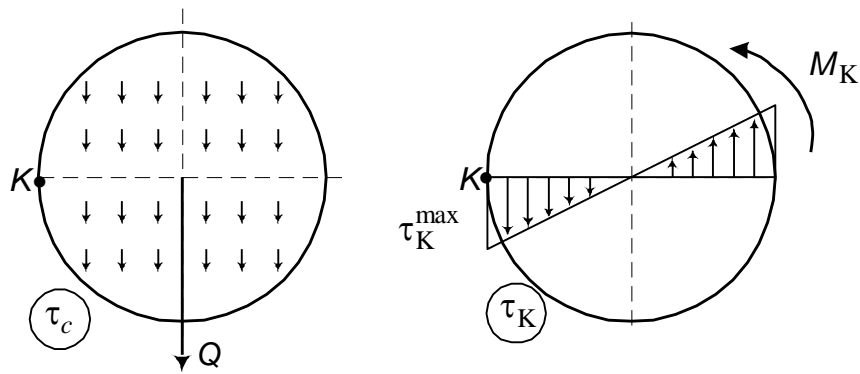


Рисунок 9.14 – Напруження в перерізі циліндричної пружини

Найбільші сумарні напруження виникають на внутрішній стороні навивання (у внутрішніх точках  $K$  витків), де напруження  $\tau_c$  і  $\tau_K$  мають один знак:

$$\tau_{\max} = \tau_K^{\max} + \tau_c = \frac{PR \cdot 2}{\pi r^3} + \frac{P}{\pi r^2} = \frac{2PR}{\pi r^3} (1 + \beta), \quad \beta = \frac{2r}{R}. \quad (9.16)$$

Якщо радіус прутка малий порівняно з радіусом пружини, то величина  $\beta$  дуже мала (наприклад, при  $R = 10r$   $\beta = 0,05$ ). Для таких пружин основну роль у деформації прутка відіграє деформація кручення, і другий доданок у виразі (9.16) можна не враховувати.

Однак при розрахунку потужних гвинтових ресор з великим співвідношенням  $r/R$  слід користуватися повною формулою (9.16), оскільки напруження від зрізу в цьому випадку дають істотний внесок. Такі пружини застосовуються, наприклад, на залізничному транспорті.

### 9.8.2 Деформації

Деформація пружини  $\lambda$  – це подовження при розтяганні силами  $P$  або осідання при стиску силами  $P$ .

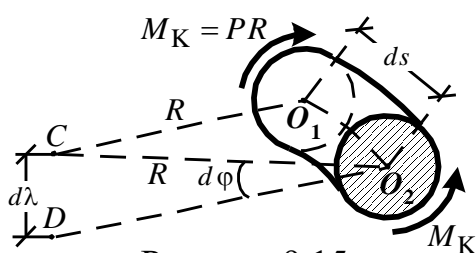


Рисунок 9.15

Виріжемо із пружини елемент  $ds$  двома суміжними перерізами –  $CO_1$  і  $CO_2$  (рисунок 9.15).

Оскільки ці перерізи розташовані близько, то можна вважати, що до деформації

радіуси  $R$ , що йдуть від осі пружини до центрів проведених перерізів, лежать в одній площині і утворюють трикутник  $O_1CO_2$ . Після деформації другий переріз внаслідок скручування ділянки прутка  $ds$  повернеться відносно першого, згідно з виразом (9.12), на кут  $d\varphi = \frac{M_K ds}{GJ_\rho}$ . Радіус  $CO_2$  повернеться відносно радіуса  $CO_1$  на той самий кут, і точка  $C$  переміститься в положення  $D$ , внаслідок цього кінець пружини опуститься на величину

$$d\lambda = R d\varphi = R \frac{M_K}{GJ_\rho} ds = R \frac{PR \cdot 2}{G\pi r^4} ds = \frac{2PR^2}{G\pi r^4} ds.$$

Якщо всі елементи  $ds$  деформуються в такий самий спосіб, то повне подовження пружини дорівнює інтегральній сумі подовжень  $d\lambda$  по всій довжині пружини  $l = 2\pi Rn$ :

$$\lambda = \int_0^l d\lambda = \int_0^l \frac{2PR^2}{G\pi r^4} ds = \frac{2PR^2}{G\pi r^4} 2\pi Rn.$$

Після перетворень

$$\lambda = \frac{4PR^3}{Gr^4} n. \quad (9.17)$$

*Жорсткість пружини  $C$*  – це сила  $P$ , яка викликає подовження пружини на  $\lambda = 1$ . Прирівнюючи у (9.17)  $\lambda = 1$ , одержимо

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}.$$

### 9.8.3 Потенційна енергія пружини

При розрахунку пружин іноді заданою буває не сила, що стискає або розтягує пружину, а енергія  $U$ , яка повинна бути нею поглинена. Потенційна енергія деформації дорівнює роботі зовнішніх сил, тобто роботі сил  $P$  на переміщенні  $\lambda$  (3.17):

$$U = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{2R^3P^2}{Gr^4} n.$$

### 9.8.4 Практичні висновки

Формули (9.16) і (9.17) дають можливість перевірити міцність і визначити деформацію пружини.

Чим більше допустиме напруження  $[\tau]$ , тим менше може бути поперечний переріз прутка, а отже тим більше буде осідання при рівних вантажах  $P$ . Оскільки ресори повинні бути досить гнучкими, то для них береться загартована сталь із дуже високою границею пружності; допустиме дотичне напруження для неї досягає 400 – 800 МПа.

Ці напруження можуть бути допущені при спокійному навантаженні. Для змінного навантаження вони знижуються приблизно на 1/3, а для безупинно працюючих пружин (пружини клапанів) приблизно на 2/3. У цих випадках велику роль відіграє можливість розвитку тріщин утоми (див. п. 11.6). Крім того, пружини клапанів часто працюють при високих температурах, що також вимагає зниження основних допустимих напружень.

На практиці при розрахунку пружин замість формули (9.16), що враховує тільки додатковий вплив зсуву, розрахунок роблять за формулою

$$\tau_{\max} = k \frac{2PR}{\pi r^3},$$

де  $k$  – поправковий коефіцієнт, що враховує як вплив зсуву, так і ряд інших факторів (згин прутка, поздовжні деформації і т. д.). Величина цього коефіцієнта збільшується зі збільшенням співвідношення  $r/R$ , тобто зі збільшенням жорсткості пружини. Значення коефіцієнта  $k$  наведені в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

$R/r$	3	4	5	6	7	8	9	10
$k$	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

### 9.8.5 Задачі на розрахунок циліндричної пружини

#### Задача 1

Гвинтова пружина зроблена із дроту радіусом  $r = 2\text{мм}$ . Радіус витка пружини  $R = 50\text{мм}$ . У ненапруженому стані зазор у просвіті між витками дорівнює  $t = 1\text{мм}$ ; модуль зсуву  $G = 8 \cdot 10^5 \text{кг/см}^2$ . Якою силою треба стиснути пружину, щоб зазор зник?

### Розв'язання

Щоб зазор закrywся, потрібно, щоб осідання кожного витка дорівнювала зазору. Тоді

$$\lambda = t = \frac{4PR^3}{Gr^4},$$

звідки

$$P = \frac{Gr^4 t}{4R^3} = \frac{8 \cdot 10^3 \text{кг/мм}^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{мм}^4 \cdot 1\text{мм}}{4 \cdot 25^3 \text{мм}^3} = 2,05 \text{кг}.$$

Напруження при цьому навантаженні невеликі:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{PR}{\pi r^3/2} = \frac{2,05 \text{кг} \cdot 25\text{мм}}{3,14 \cdot 2^3 \text{мм}^3/2} = 4,1 \text{кг/мм}^2 = 410 \text{кг/см}^2 = 41 \text{МПа}$$

(для порівняння, допустиме напруження пружинної сталі має порядок 600 – 1000 МПа).

### Задача 2

Запобіжний клапан діаметром  $D = 75\text{мм}$  повинен відкриватися при тиску  $q = 6\text{атм}$ . Пружина клапана – сталева діаметром  $d = 12\text{мм}$ ; діаметр витка пружини  $2R = 60\text{мм}$ . За відсутності навантаження відстань між осями суміжних витків по вертикалі (крок пружини) дорівнює  $t = 17\text{мм}$ . Знайти необхідну кількість витків пружини  $n$ , припускаючи, що при максимальному піднятті клапана повинне залишатися не менше  $\lambda_2 = 35\text{мм}$  у запас на подальший стиск пружини (до стикання витків), а також визначити початковий стиск пружини  $\lambda_1$ . Модуль зсуву  $G = 8 \cdot 10^5 \text{кг/см}^2$ .



### Розв'язання

Сила, що піднімає клапан, дорівнює

$$P = q \frac{\pi D^2}{4} = 6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \frac{3,14 \cdot 7,5^2 \text{см}^2}{4} = 265 \text{кг}.$$

Для того щоб при цій силі пружина почала стискуватися, треба їй дати первісне осідання:

$$\lambda = \frac{4PR^3}{Gr^4} n = \frac{4 \cdot 265 \text{кг} \cdot 3^3 \text{см}^3}{8 \cdot 10^5 \text{кг/см}^2 \cdot 0,6^4 \text{см}^4} n = 0,276 \text{см} \cdot n.$$

Повна довжина пружини в ненавантаженому стані (рахуючи її по вертикальній осі) складається з  $\lambda_1$  і запасу  $\lambda_2$ . Ця сума повинна дорівнювати граничному стиску пружини  $\lambda_0 = (t - d)n$ :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (t - d)n, \quad \text{або} \quad 0,276n + 3,5 = (1,7 - 1,2)n,$$

звідки кількість витків

$$n = \frac{3,5}{0,224} = 16 \text{витків}.$$

Початкове осідання пружини дорівнює

$$\lambda_1 = 0,276 \cdot 16 = 4,4 \text{см}.$$

Основні формули для розрахунків на кручення наведені в додатку Б.

## 10 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

### 10.1 Поняття про стійкість

Для надійної роботи конструкції під навантаженням недостатньо зробити її елементи міцними, необхідно ще забезпечити збереження первісної форми рівноваги як самих елементів, так і всієї конструкції в цілому. Здатність конструкції і її елементів зберігати задану форму рівноваги називається *стійкістю*. Втрата стійкості при певних видах навантаження є характерною для різних гнучких елементів: стержнів (рисунок 10.1, а), пластинок і оболонок (випучування, рисунок 10.1, б).

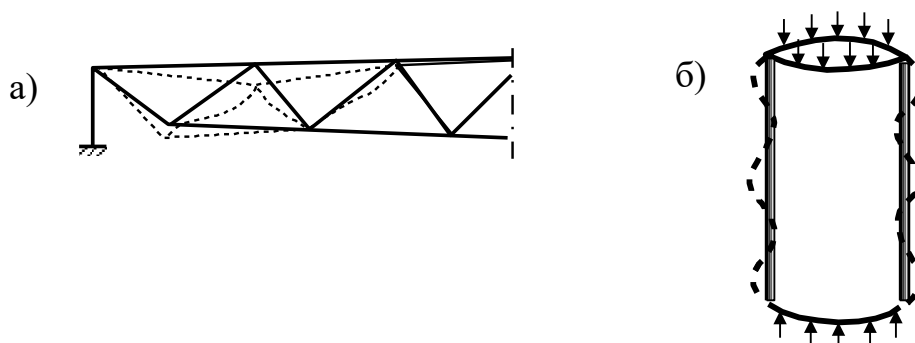
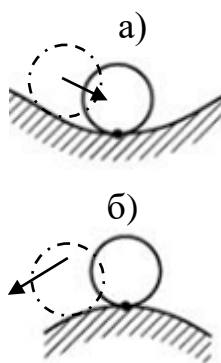


Рисунок 10.1 – Втрата стійкості (пунктир): фрагмент деформованої ферми (а); випучування сталеві оболонки колони (б)

### 10.2 Форми рівноваги

Виділяють стійку, нестійку та байдужу форми рівноваги. Проілюструвати їх можна на прикладі стійкості твердого тіла.



Якщо при малому відхиленні від положення рівноваги система вертається в початкове положення після усунення причини відхилення, *рівновага називається стійкою* (рисунок 10.2, а).

Якщо віддалення від рівноваги після малого відхилення не зникає, а продовжує зростати, *рівновага називається нестійкою* (рисунок 10.2, б).

Рисунок 10.2

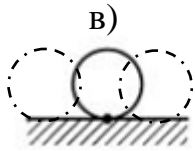


Рисунок 10.2

Рівновага називається *байдужою*, якщо як завгодно близько з нею існує нескінченно багато інших положень рівноваги.

Усі уведені поняття стосуються також пружних тіл і їх систем, як було проілюстровано в п. 10.1.

### 10.3 Поздовжній згин. Критична сила

У випадку пружних систем характер рівноваги залежить від величини прикладеного навантаження.

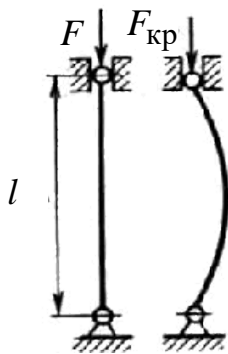


Рисунок 10.3

Наприклад, якщо показаний на рисунку 10.3 стержень стиснути відносно невеликою силою  $F$  ( $F < F_{кр}$ ), то після зняття сили він відновить вихідну прямолінійну форму рівноваги. При збільшенні сили до деякого значення вихідна форма перестане відновлюватися.

Навантаження, при якому стійка рівновага переходить у нестійку, називається *критичною силою*, а стан системи – *критичним станом*. Перехід зі стійкої форми рівноваги в нестійку називається *втратою стійкості*.

Отже, *критичною силою* називається максимальне значення сили, при якій стержень зберігає прямолінійну форму рівноваги. Рівносильне визначення: *критичною силою* називається мінімальне значення сили, при якій стержень втрачає прямолінійну форму рівноваги.

Втрата прямолінійної форми рівноваги, тобто згин стержня під дією поздовжньої сили називається *поздовжнім згином*.

### 10.4 Формула Ейлера визначення критичної сили для шарнірно закріпленого стержня

Розглянемо стержень  $AB$ , шарнірно обпертий по кінцях (рисунок 10.4).

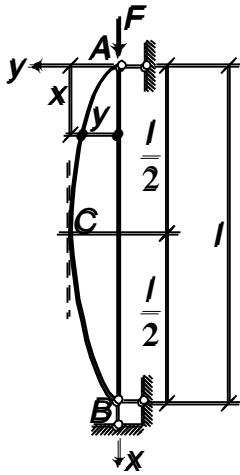


Рисунок 10.4

Припустимо, що стержень під дією стискаючої сили дещо вигнувся. Розглядаємо малі відхилення стійки від первісного положення, так що опусканням точки *A* можна знехтувати.

Згинальний момент у перерізі *x*

$$M_x = Fy. \quad (10.1)$$

Диференціальне рівняння вигнутої осі стержня (7.21) з урахуванням (10.1) має вигляд

$$EJ y'' = -M_x = -Fy. \quad (10.2)$$

У якості жорсткості тут потрібно брати  $EJ = EJ_{\min}$ , оскільки вигин відбудеться у бік найменшої жорсткості.

Якщо ввести позначення  $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$ , то рівняння (10.2) набуде вигляду

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \quad (10.3)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x, \quad (10.4)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – константи, що визначаються із граничних умов. У даному випадку це умови відсутності переміщень кінців стержня уздовж осі *y*:

при  $x = 0$   $y = 0$ , звідки  $C_1 = 0$ ;

при  $x = l$   $y = 0$ . З урахуванням  $C_1 = 0$  і виразу (10.4) ця умова дає

$$y = C_2 \sin \kappa l = 0. \quad (10.5)$$

Оскільки  $C_2 \neq 0$  (у цьому випадку відхилення *y* було б нульовим), необхідно, щоб  $\sin \kappa l = 0$ . Це виконується в одному з випадків

$$\kappa l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Рівність  $\kappa l = 0$  не виконується, оскільки  $l \neq 0$  і  $\kappa^2 = \frac{F}{EJ} \neq 0$ .

Візьмемо  $\kappa l = \pi$ . Зведемо цей вираз у квадрат і підставимо значення  $\kappa$ :

$$\frac{F}{EJ} l^2 = \pi^2.$$

Звідси з урахуванням  $EJ = EJ_{\min}$  маємо

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (10.6)$$

За цією формулою отримуємо мінімальне значення сили, при якій виконується (10.5), тобто критична сила  $F_{\text{кр}}$ . Ця формула називається формулою Ейлера, оскільки вона була отримана в 1744 р. великим математиком Леонардом Ейлером. При  $F < F_{\text{кр}}$  стержень має тільки одну – прямолінійну – форму рівноваги, і ця форма рівноваги стійка.

Оскільки  $\kappa l = \pi$ , з (10.5) одержуємо

$$y = C_2 \sin \frac{\pi x}{l},$$

отже, при втраті стійкості вісь шарнірно закріпленого стержня викривляється по півхвилі синусоїди.

Розглянемо інші випадки розв'язків рівняння (10.5), а саме  $\kappa l = 2\pi, 3\pi, \dots$ . У цьому випадку  $F > F_{\text{кр}}$ , і поряд із прямолінійною має місце інша – криволінійна – форма рівноваги. У цьому випадку прямолінійна форма рівноваги є нестійкою, а скривлена – стійкою. Тому практичне значення має тільки перша сила  $F_{\text{кр}}$ , при якій зберігається прямолінійна форма рівноваги.

### 10.5 Формула Ейлера при різних умовах закріплення кінців стержня

Формула Ейлера (10.6) отримана в припущенні шарнірного обпирання стержня по кінцях. Визначаючи константи  $C_1$  і  $C_2$  у виразі (10.4) при інших умовах закріплення кінців стержня, можна одержати формулу Ейлера для критичної сили при довільних умовах обпирання:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_{пр}^2}. \quad (10.7)$$

Тут  $l_{пр}$  – приведена довжина стержня, яку можна інтерпретувати як довжину умовного шарнірно обпертого по кінцях стержня, для якого критична сила визначається згідно з виразом (10.6). На цій частині довжини стержень згинається по півхвилі синусоїди. Визначити  $l_{пр}$  можна за формулою

$$l_{пр} = l \cdot \mu, \quad (10.8)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт приведеної довжини, який визначається згідно з рисунком 10.5.

Коефіцієнт  $\mu$  залежить тільки від умов закріплення стержня.

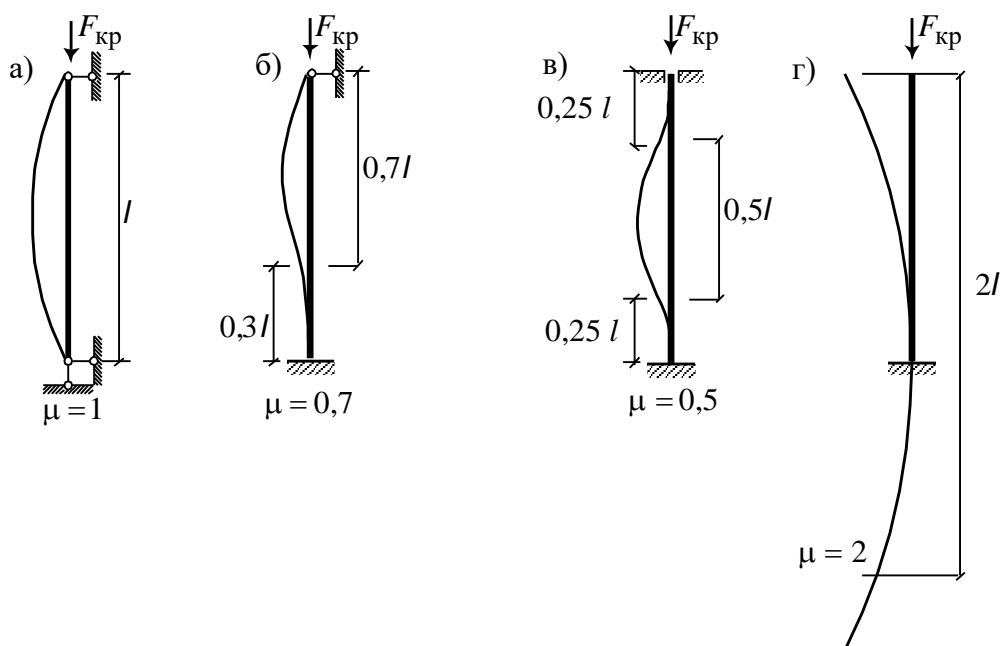


Рисунок 10.5 – Значення коефіцієнта приведеної довжини  $\mu$  для стиснутих стержнів при різних способах закріплення кінців

## 10.6 Границі застосовності формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера (10.6) а отже, вираз (10.7), була виведена в припущенні, що деформування матеріалу підпорядковується закону Гука (на підставі закону Гука отримано рівняння вигнутої осі стержня (7.21), п. 7.4.1). Отже, напруження  $\sigma$ , що виникає при

критичному навантаженні, не повинне перевищувати границі пропорційності:  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ .

Оскільки при дії критичного навантаження стержень усе ще зберігає первісну прямолінійну форму рівноваги, то критичні напруження в ньому можна знайти як при простому стиску, тобто

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_{пр}^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l_{пр}^2},$$

де  $i^2$  – квадрат радіуса інерції (п. 4.6).

Уведемо величину, яка називається *гнучкістю* стержня:

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i_{\min}}. \quad (10.8)$$

Очевидно, гнучкість – безрозмірна величина, яка залежить від співвідношення розмірів перерізу і наведеної довжини стержня. Вона не залежить від механічних характеристик матеріалу стержня.

Остаточно формула для критичних напружень набуває вигляду

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

звідки одержуємо границю застосовності формули Ейлера:

$$\lambda \geq \lambda_{гран} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \quad (10.9)$$

Тут  $\lambda_{гран}$  – гранична гнучкість, яка, як видно з (10.9), залежить тільки від фізико-механічних властивостей матеріалів стержня – його модуля пружності і границі пропорційності. Значення граничних гнучкостей для стержнів, виконаних з деяких матеріалів, що найчастіше зустрічаються, наведені в додатку Д.

### **Формула Ясинського**

При значеннях гнучкості, менших від граничної, критичні сили і критичні напруження значно менше від величин, які

визначаються за формулою Ейлера (10.9). Для таких стержнів критичні напруження визначаються за емпіричними формулами (тобто обґрунтованими дослідним шляхом). Так, критичні напруження для сталевих, дюралюмінієвих і дерев'яних стержнів визначаються за лінійною емпіричною залежністю

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (10.10)$$

яку називають формулою Ясинського (вона запропонована російським інженером і механіком Ф.С. Ясинським). Коефіцієнти  $a$  і  $b$ , що мають розмірність напруження, визначаються експериментально. Їхні значення для деяких матеріалів наведені в додатку Д.

Критична сила

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A .$$

## 10.7 Класифікація стержнів

Стиснуті стержні за методикою їх розрахунку поділяють на три групи:

1 Стержні великої гнучкості ( $\lambda \geq \lambda_{\text{гран}}$ ), для яких критичну силу визначають за формулою Ейлера (10.7):  $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{l_{\text{пр}}^2}$ ;

критичне напруження дорівнює  $\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A}$ .

2 Стержні середньої гнучкості ( $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гран}}$ ), для них критичне напруження визначають за емпіричною формулою Ясинського (10.10):  $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$ ; критична сила дорівнює  $F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = (a - b\lambda)A$ .

3 Стержні малої гнучкості ( $\lambda < \lambda_0$ ), які розраховують не на стійкість, а на міцність.

Значення  $\lambda_0$  для деяких матеріалів дано в додатку Д.

Для стиснутих стержнів великої гнучкості застосування сталі з кращими механічними характеристиками не виправдане, оскільки величина модуля пружності  $E$  майже однакова для



сталей різних марок і, отже, застосування сталі більш високої якості не призводить до підвищення  $\sigma_{кр}$ .

### 10.8 Умова стійкості

Критичні напруження  $\sigma_{кр}$  є небезпечними для стиснутого стержня. Тому, щоб забезпечити стійкість прямолінійної форми рівноваги, необхідно, крім умови міцності

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma],$$

забезпечити виконання умови стійкості

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma]_{\text{ст}}, \quad [\sigma]_{\text{ст}} = \frac{\sigma_{кр}}{k_{\text{ст}}},$$

де  $[\sigma]_{\text{ст}}$  – допустиме напруження на стійкість;

$k_{\text{ст}}$  – коефіцієнт запасу на стійкість.

При розрахунках на міцність площа поперечного перерізу  $A_{\text{нетто}}$  береться з урахуванням ослаблень (отвори для болтів і таке інше); при розрахунках на стійкість ці ослаблення не враховуються, тому у формули входить  $A_{\text{брутто}}$ .

Коефіцієнт запасу на стійкість  $k_{\text{ст}}$  більше від коефіцієнта запасу на міцність  $k$ . Це пояснюється необхідністю врахувати при стиску можливість початкової кривизни; невеликого ексцентриситету, тобто зсувом лінії дії сили від осі; неоднорідності матеріалу і таке інше.

Встановимо зв'язок між  $[\sigma]_{\text{ст}}$  і  $[\sigma]$ . Для цього розглянемо їхнє співвідношення

$$\frac{[\sigma]_{\text{ст}}}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{k_{\text{ст}}} \cdot \frac{k}{\sigma_{\text{неб}}}, \quad \text{звідки} \quad [\sigma]_{\text{ст}} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{\text{неб}}} \frac{k}{k_{\text{ст}}} [\sigma],$$

де  $\sigma_{\text{неб}}$  – небезпечне напруження при розрахунках на міцність (дорівнює границі текучості  $\sigma_T$  для пластичних матеріалів і границі міцності  $\sigma_B$  для крихких).

Позначивши

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{\text{неб}}} \frac{k}{k_{\text{ст}}},$$

одержимо

$$[\sigma]_{\text{ст}} = \varphi[\sigma],$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при поздовжньому згині.

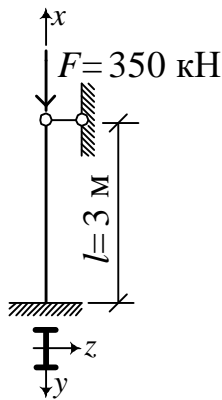
Коефіцієнт  $\varphi$  залежить від матеріалу і гнучкості стержня  $\lambda$ . Значення коефіцієнта  $\varphi$  залежно від  $\lambda$  для різних матеріалів наведені в додатку Д.

Остаточно умову стійкості одержуємо у вигляді

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma]. \quad (10.11)$$

### 10.9 Розв'язання задач на стійкість

При розрахунку стиснутих стержнів на стійкість, як і при розрахунку на міцність, розв'язуються три задачі: перевірка стійкості; добір перерізу; визначення несучої здатності (допустимого навантаження з умови стійкості або критичної сили).



**Задача 1.** Перевірити стійкість сталеві (Ст3) колони двотаврового перерізу I №22;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Визначити критичну силу  $F_{\text{кр}}$ .

Для перевірки умови стійкості (10.11) і визначення критичної сили потрібно знати гнучкість стержня (10.8) (для визначення коефіцієнта  $\varphi$  та для вибору формули розрахунку  $F_{\text{кр}}$ ).

рисунок 10.6

Стержень буде втрачати стійкість у площині найменшої жорсткості  $xOz$ . Виписуємо із сортаменту (таблиця Б. 1) відповідні геометричні характеристики:  $J_{\text{min}} = J_y = 157 \text{ см}^4$ ;  $i_{\text{min}} = i_y = 2,27 \text{ см}$ ;  $A = 30,6 \text{ см}^2$ . Приведена довжина стержня при заданих опорних закріпленнях дорівнює  $l_{\text{пр}} = l \cdot \mu = 3 \cdot 0,7 = 2,1 \text{ м} = 210 \text{ см}$ . Визначаємо гнучкість за

формулою (10.8) і відповідне наближене значення  $\varphi$  (таблиця Д. 2):

$$\lambda = \frac{l_{зв}}{i_{\min}} = \frac{210}{2,27} = 93; \quad \varphi = 0,66.$$

Для визначення  $\varphi$  було записане рівняння прямої, що проходить через 2 точки:  $\lambda_1 = 90$ ,  $\varphi_1 = 0,69$  і  $\lambda_2 = 100$ ,  $\varphi_2 = 0,60$  (з таблиці Д. 2). Для будь-якої точки  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  відповідне  $\varphi$  дорівнює

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (10.12)$$

$$\text{Для } \lambda = 93 \text{ одержуємо } \varphi = 0,69 + \frac{93 - 90}{100 - 90} (0,60 - 0,69) \approx 0,66.$$

Перевіряємо виконання умови стійкості (10.11):

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{350 \text{ кН}}{30,6 \text{ см}^2} = \frac{350 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 11,4 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 0,66 \cdot 160 = 106 \text{ МПа}.$$

Для Ст3 гранична гнучкість  $\lambda_{\text{гран}} = 100$  (таблиця Д. 1), отже розглянутий стержень є стержнем середньої гнучкості ( $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гран}}$ ), і критичну силу для нього потрібно обчислювати, користуючись формулою Ясинського (10.10), у якій коефіцієнти  $a, b$  беруться з таблиці Д. 1:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 \text{ МПа} - 1,19 \text{ МПа} \cdot 93 = 199 \text{ МПа},$$

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 199 \text{ МПа} \cdot 30,6 \text{ см}^2 = 199 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 610 \text{ кН}.$$

**Задача 2.** Заданий сталевий стержень зі Ст3 довжиною  $l$ , який стискується силою  $F$  (рисунок 10.7, а). Переріз стержня прямокутний (рисунок 10.7, б). Знайти розміри поперечного перерізу;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

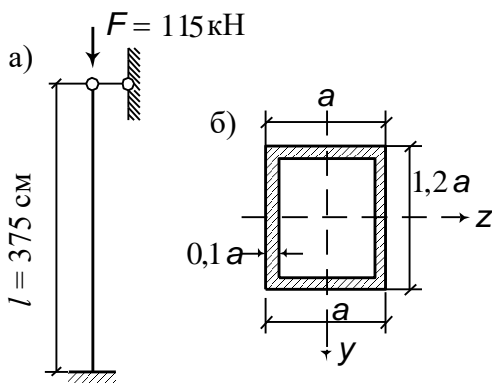


Рисунок 10.7

В умову стійкості (10.11) входять дві невідомі величини  $\varphi$  і

А. Вони зв'язані між собою, однак залежність між ними не виражається простою формулою, так що виключити одну із цих величин і виразити її через іншу неможливо. Тому, якщо необхідно підібрати переріз, доводиться застосовувати метод послідовних наближень. Проілюструємо його на прикладі даної задачі.

Знайдемо геометричні характеристики перерізу:

$$- \text{площа } A = a \cdot 1,2a - 0,8a \cdot a = 0,4a^2; \quad (10.13)$$

$$- \text{мінімальний момент інерції } J_{\min} = J_y = 0,0573 a^4; \quad (10.14)$$

$$- \text{мінімальний радіус інерції } i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 0,379 a. \quad (10.15)$$

$$\text{Гнучкість стержня } \lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 375}{0,379 a} = \frac{693}{a}. \quad (10.16)$$

З формули (10.11) знайдемо

$$A = 0,4a^2 = \frac{F}{\varphi[\sigma]}; \quad a = \sqrt{\frac{F}{0,4\varphi[\sigma]}}. \quad (10.17)$$

Тут, як і зазначалося раніше, невідомими є  $\varphi$  та  $a$ . Задамо довільним образом початкове значення  $\varphi$ , наприклад,  $\varphi_0 = 0,19$  (або будь-яке інше значення).

0 наближення.  $\varphi_0 = 0,19$ .

$$\text{З виразу (10.17) } a = \sqrt{\frac{115}{0,4 \cdot 0,19 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,0972 \text{ м} = 9,72 \text{ см}.$$

$$\text{З виразу (10.16) } \lambda = \frac{693}{9,72} = 71.$$

З таблиці Д. 2 знаходимо коефіцієнт  $\varphi = 0,81$  (так само, як у задачі 1).

Знайдене значення  $\varphi$  не дорівнює  $\varphi_0$  з великою похибкою:

$$\Delta = \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi_0} 100 \approx 43\%.$$

$$1 \text{ наближення. Приймаємо } \varphi_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,81}{2} = 0,5.$$

Повторюємо розрахунок:  $a = 5,99 \text{ см}$ ;  $\lambda = 115,6$ ;  $\varphi = 0,485$ ;  $\Delta \approx 3\%$ .

2 наближення. Приймаємо  $\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,485}{2} = 0,49$ .

Повторюємо розрахунок:  $a = 6,06 \text{ см}$ ;  $\lambda = 114$ ;  $\varphi = 0,485$ ;  $\Delta \approx 1\%$ .

Похибка  $\Delta \approx 1\%$  вважається задовільною. На цьому розрахунок закінчується, розмір перерізу  $a = 6,06 \text{ см}$ .

## 11 ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕННЯ

*Динамічне навантаження* – це навантаження, яке під час дії передає масам системи прискорення, викликаючи виникнення сил інерції.

До динамічних навантажень належать *удар* (швидкість тіла, яке ударяють, змінюється в дуже короткий проміжок часу); *імпульс* (характерний майже миттєвою дією); *сейсмічне навантаження* (хаотичний рух ґрунту, поштовхи, удари і коливання при землетрусі); *рухоме навантаження* (змінює своє положення на споруді, за величиною може бути постійним або змінним); *періодичне (вібраційне)* навантаження (діаграма його зміни багаторазово повторюється через рівні проміжки часу) та ін.

При динамічній дії навантаження в елементах виникають змінні в часі напруження, деформації і переміщення. Розрахунок на динамічне навантаження полягає у визначенні цих величин і перевірці на резонанс у випадку вібраційного навантаження.

### 11.1 Пружні коливання

З пружними коливаннями доводиться мати справу в машинобудуванні та будівництві. Вивчення цих коливань важливе при розрахунках на міцність при змінних напруженнях.

#### 11.1.1 Вільні та вимушені коливання

*Вільними* називаються коливання, що виникають в ізольованій системі внаслідок однократного зовнішнього збудження (наприклад, поштовху) і тривають потім завдяки наявності внутрішніх пружних сил, що прагнуть відновити рівновагу.

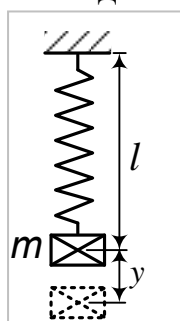
*Вимушеними* називаються коливання пружної системи, що відбуваються при дії на систему зовнішніх періодично змінних сил протягом усього часу коливань.

### 11.1.2 Ступінь свободи динамічної системи

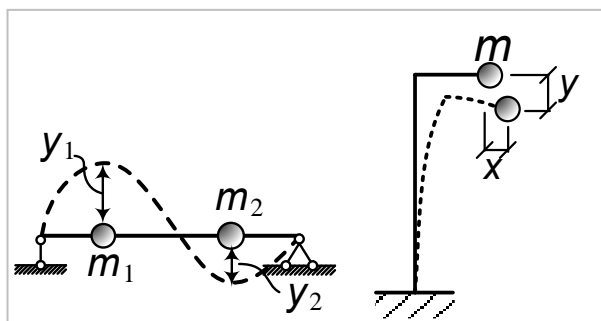
*Ступенем свободи* динамічної системи називається кількість незалежних геометричних параметрів, які задають положення всіх мас системи в кожний момент часу.

Приклади систем з різними ступенями свободи наведені на рисунку 11.1.

1 ступінь свободи



2 ступені свободи



Нескінченна кількість ступенів свободи

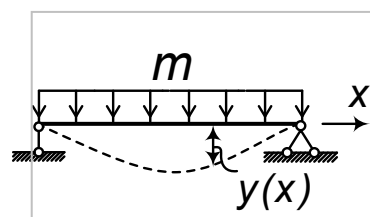


Рисунок 11.1

### 11.1.3 Вільні коливання системи з одним ступенем свободи

#### *Вільні коливання без урахування сил опору*

Розглянемо невагому пружину із зосередженим на ній вантажем масою  $m$ . Виведемо цю систему зі стану рівноваги (наприклад, поштовхом або відтягнемо і відпустимо вантаж). При цьому виникають вільні коливання, причому положення маси в кожний момент часу визначається однією координатою  $y$  (рисунок 11.2, а).

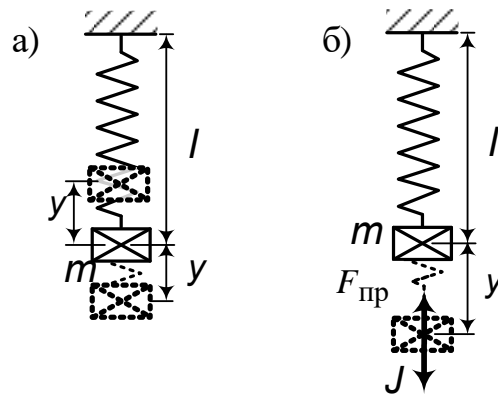


Рисунок 11.2 – Вільні коливання системи з одним ступенем свободи

Для запису умови рівноваги системи використовуємо принцип Даламбера: динамічна система знаходиться в рівновазі, якщо векторна сума активних, реактивних сил і сил інерції дорівнює нулю, тобто сила інерції розглядається як зовнішня сила.

Розглянемо одне з можливих положень маси, як показано на рисунку 11.2, б. У цьому положенні на масу діють сила пружності  $F_{\text{пр}}$ , пропорційна жорсткості пружини  $c$ , і сила інерції  $J$ :

$$F_{\text{пр}} = cy, \quad J = -m\ddot{y}. \quad (11.1)$$

Жорсткість  $c$  чисельно дорівнює  $c = 1/\delta_{11}$ , де  $\delta_{11}$  – переміщення вантажу, що виникає під дією одиничної сили  $F = 1$ ; через  $\ddot{y}$  позначається друга похідна від  $y$  за часом, тобто прискорення.

Таким чином, одержуємо умову рівноваги:

$$F_{\text{пр}} - J = 0.$$

З урахуванням виразу (11.1) вона набуває вигляду

$$cy + m\ddot{y} = 0,$$

або

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0}, \quad (11.2)$$

де введене позначення  $\omega^2 = c/m$ .

Рівняння (11.2) називається *диференціальним рівнянням вільних коливань*.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t), \quad (11.3)$$



де  $A_1, A_2$  – константи інтегрування, які визначаються з початкових умов

$$t = 0: \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0,$$

$\dot{y}$  – це перша похідна від  $y$  за часом, тобто швидкість переміщення маси  $v$ .

Із цих умов одержуємо, використовуючи вираз (11.3):

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 = y_0; \\ \dot{y}(t) &= -\omega A_1 \sin(\omega t) + \omega A_2 \cos(\omega t), \\ \dot{y}(0) &= \omega A_2 = \dot{y}_0 = v_0, \quad A_2 = v_0/\omega. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$A_1 = y_0, \quad A_2 = v_0/\omega. \quad (11.4)$$

Розв'язок (11.3) можна привести до більш зручного для аналізу вигляду, уводячи нові константи  $A$  та  $\lambda$  у такий спосіб:

$$A_1 = A \sin \lambda; \quad A_2 = A \cos \lambda. \quad (11.5)$$

Знайдемо ці константи, і тим самим покажемо, що така заміна правомірна. З виразу (11.4) одержуємо

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2; \quad A_1/A_2 = \operatorname{tg} \lambda,$$

звідки

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0/\omega)^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda = y_0\omega/v_0. \quad (11.6)$$

Підставимо у вираз (11.3) вираз (11.5):

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin \lambda \cos(\omega t) + A \cos \lambda \sin(\omega t) = \\ &= A (\sin \lambda \cos(\omega t) + \cos \lambda \sin(\omega t)). \end{aligned}$$

Згорнувши вираз у дужках, одержуємо розв'язок рівняння (11.3)

$$\boxed{y(t) = A \sin(\lambda + \omega t)}, \quad (11.7)$$

де  $y(t)$  – відхилення маси від стану статичної рівноваги в момент часу  $t$ .

Зміст параметрів  $A$ ,  $\lambda$  та  $\omega$ , що входять у розв'язок (11.7), з'ясуємо, побудувавши графік функції  $y(t)$  (рисунок 11.3).

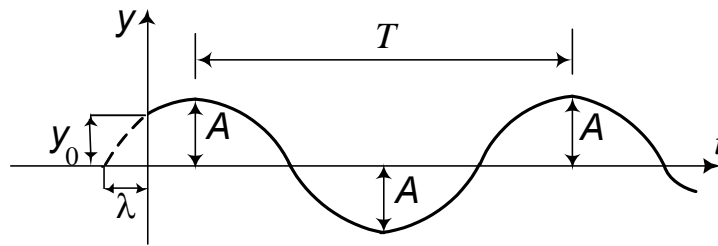


Рисунок 11.3 – Графік функції  $y(t)$  при вільних коливаннях

Очевидно, графіком  $y(t)$  є синусоїда з *амплітудою*  $A$  і *початковою фазою коливань*  $\lambda$ . *Період* функції позначений буквою  $T$ .

З'ясуємо зміст змінної  $\omega$ . Для цього запишемо умову періодичності  $y(t)$ :

$$y(t) = y(t + T), \text{ тобто}$$

$$\sin(\lambda + \omega t) = \sin[\lambda + \omega(t + T)] = \sin[(\lambda + \omega t) + \omega T].$$

Оскільки період синуса дорівнює  $2\pi$ , звідси випливає  $\omega T = 2\pi$ , отже

$$\omega = 2\pi/T.$$

Таким чином,  $\omega$  – це *кругова частота вільних коливань*, яка дорівнює кількості повних коливань за  $2\pi$  секунд.

### **Обчислення частоти вільних коливань $\omega$**

Значення  $\omega$  було уведено як  $\omega^2 = c/m$ . Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{G \delta_{11}}},$$

де  $G$  – вага вантажу масою  $m$ ,  $G = mg$ ;

$g$  – прискорення вільного падіння.

Скористаємося принципом незалежності дії сил: переміщення вантажу від одиничної сили (у цьому випадку – це розтягання пружини) дорівнює  $\delta_{11}$  (рисунок 11.4, а), отже переміщення від сили  $G \cdot 1 = G$  дорівнює  $G \delta_{11}$  (рисунок 11.4, б).

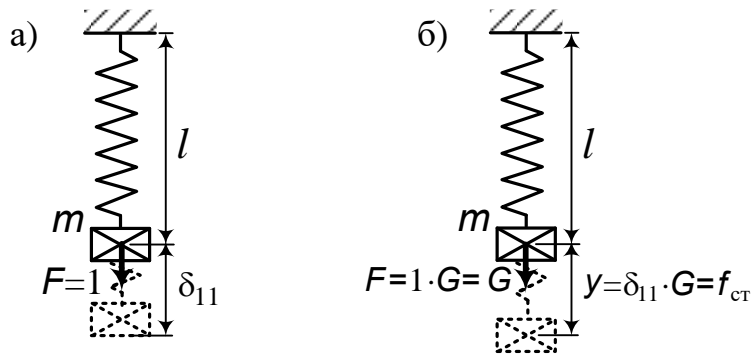


Рисунок 11.4

Таким чином,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f_{ct}}}, \quad (11.8)$$

де  $f_{ct}$  – це переміщення точки прикладання маси під дією статично прикладеної сили, яка дорівнює вазі  $G = mg$ .

**Задача 1.** Визначити частоту вільних коливань шарнірно обпертої невагомої балки з вантажем, прикладеним посередині прогону (рисунок 11.5, а).

У цьому випадку прогин  $f_{ct}$  (рисунок 11.5, б) дорівнює  $f_{ct} = Gl^3/48EJ$  (див., наприклад, метод початкових параметрів, формула (7.32)). Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot 48EJ}{Gl^3}} = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}.$$

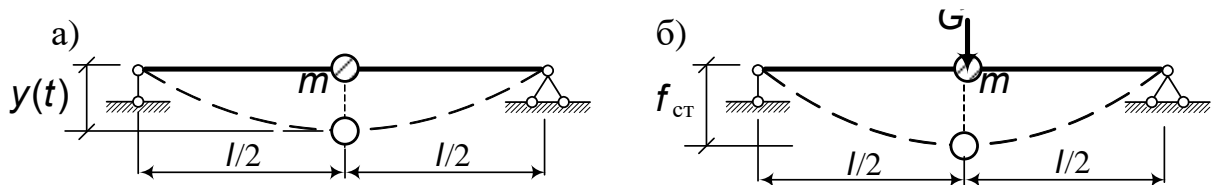


Рисунок 11.5

**Задача 2.** У задачі 1 замінимо шарнірні опори жорсткими, тобто збільшимо кількість зв'язків (рисунок 11.6, а).

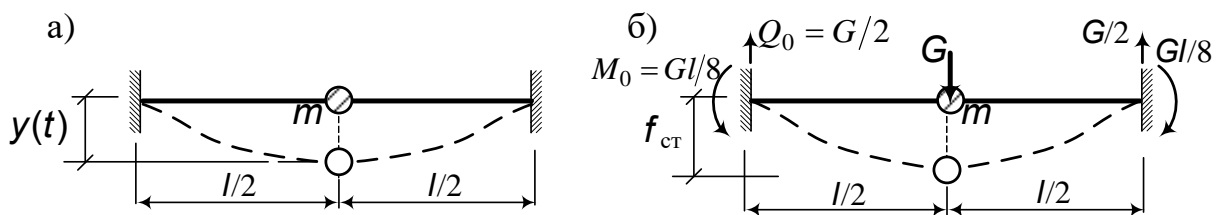


Рисунок 11.6

Тоді  $f_{ст} = Gl^3/192EJ$  (див. рисунок 11.6, б та п. 7.4.3), частота

$$\omega = \sqrt{\frac{192EJ}{ml^3}} = 2\sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}},$$

тобто у цьому випадку частота  $\omega$  вдвічі більша за ту, що отримана в задачі 1 при шарнірному обпиранні балки.

### Висновки

1 Частота  $\omega$  обернено пропорційна  $\sqrt{m}$ ,  $\sqrt{l^3}$  – чим більше маса або розмір системи, тим менша частота вільних коливань;  $\omega$  прямо пропорційна  $\sqrt{EJ}$  – чим менша жорсткість, тим менша частота вільних коливань.

2 Частота вільних коливань збільшується зі збільшенням кількості зв'язків у системі.

### Вільні коливання з урахуванням сил опору

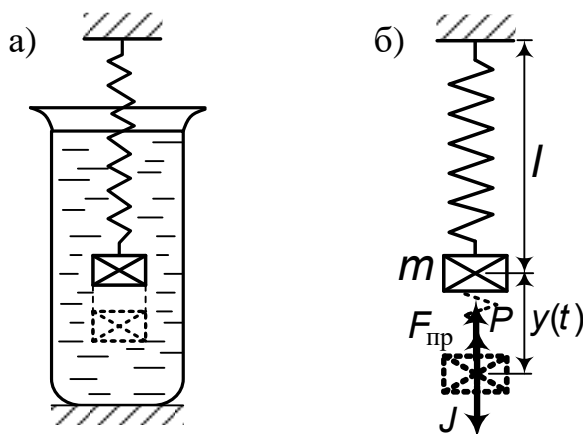


Рисунок 11.7 – Вільні загасаючі коливання

Урахуємо сили опору коливанням (наприклад, сили тертя, в'язкість середовища, див. рисунок 11.7, а). У цьому випадку до сил на рисунку 11.2 додається сила  $P$  (рисунок 11.7, б). Сила опору, за гіпотезою Фойгта, має вигляд  $P = 2\alpha m \dot{y}$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт загасання (1/с).

Диференціальне рівняння коливань набуває вигляду

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y(t) = 0,$$

а його розв'язок

$$y(t) = C_1 e^{-\alpha t} \sin(\lambda_1 + \omega_1 t), \quad (11.9)$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ ;

$C_1, \lambda_1$  визначаються з початкових умов і дорівнюють

$$C_1 = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}.$$

Очевидно, функція  $y(t)$  (11.9) прагне до нуля при зростанні  $t$ , тобто коливання з урахуванням сил опору є загасаючими. Їх графік має вигляд, показаний на рисунку 11.8 (амплітуда  $C_1 e^{-\alpha t}$  прагне до нуля).

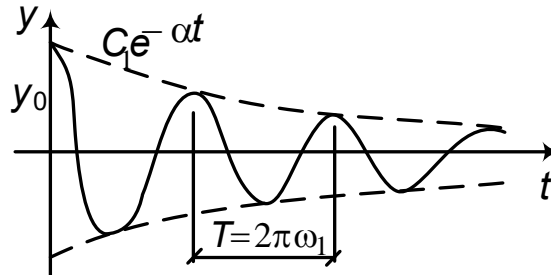


Рисунок 11.8 – Графік функції  $y(t)$  при загасаючих коливаннях

### 11.1.4 Вимушені періодичні коливання системи з одним ступенем свободи

Така динамічна схема зустрічається, наприклад, при розрахунку фундаментних балок і стержнів, що кріплять важкі агрегати (дизелі, турбіни і т. п.). У цих випадках зовнішня змінна сила діє на систему протягом усього періоду коливань.

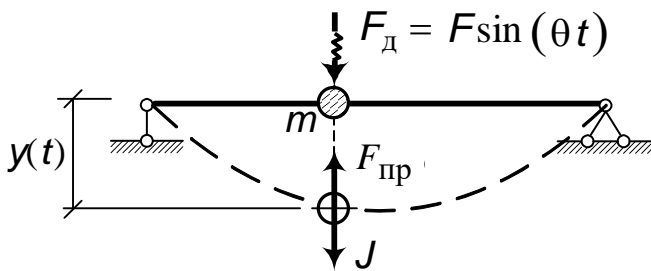


Рисунок 11.9

навантаження (рисунок 11.9).

Розглянемо, наприклад, коливання вантажу масою  $m$  на невагомій балці під дією періодичної збуджуючої сили  $F_D = F \sin(\theta t)$ , тобто *вібраційного*

Такі коливання називаються *гармонічними*.

Величина  $F$  – це *амплітуда збуджуючої сили*;  $\theta$  – *частота вимушених коливань*.

Рівняння рівноваги системи має вигляд

$$F_{\text{пр}} - J - F_D = 0,$$

звідки після підстановки виразів  $F_{пр}$  і  $J$  одержуємо диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (11.10)$$

Загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та окремого розв'язку неоднорідного:

$$y(t) = y_{заг.одн.} + y_{часн.неодн.}$$

Окремий розв'язок знайдемо як  $y_{часн.неодн.} = B \sin \theta t$ . Підставивши цей розв'язок у вигляді (11.10), одержимо

$$B = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F}{c \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{F\delta_{11}}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{y_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (11.11)$$

де  $y_{ст}$  – це переміщення точки прикладення маси  $m$  під дією статично прикладеної сили  $F$ .

Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_{заг.одн.}$  (тобто розв'язок рівняння вільних коливань) є загасаючим, тому при достатньо великому  $t$  маємо  $y_{max}(t) = y_{max \text{ частн.неодн.}} = B$ . Уведемо позначення

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (11.12)$$

тоді відповідно до виразу (11.11)

$$y_{max \text{ дин}} = y_{max}(t) = \mu y_{ст}.$$

Коефіцієнт  $\mu$  називається *динамічним коефіцієнтом*. Він задає відношення динамічного фактора (переміщення, напруження) до статичного значення того самого фактора.

Явище рівності частот вимушених і вільних коливань називається **резонансом**.

Якщо частоти вимушених і вільних коливань збігаються або близькі за величиною, то значення  $\mu$  (11.12) різко збільшується і, отже, амплітуда вимушених коливань  $y_{max \text{ дин}}$  та напруження

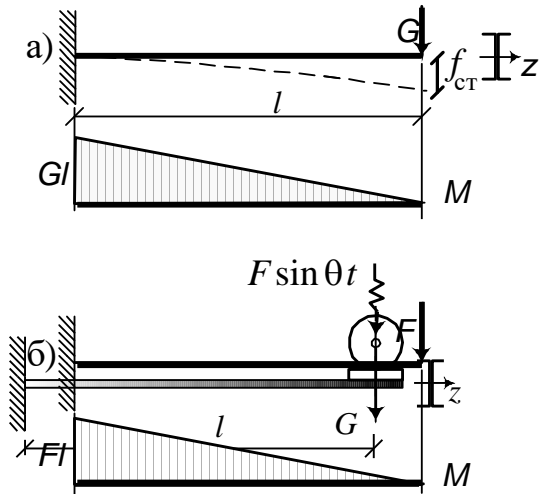


Рисунок 11.10

різко зростають, що створює небезпеку виникнення надмірних деформацій і руйнування системи. Небезпека цього явища обумовлює необхідність перевірки системи на резонанс при вимушених періодичних коливаннях.

*Задача.* Електродвигун вагою  $G=400$  кг, що робить  $n = 1000$  об/хв, установлений на двох швелерних балках, консольно забитих у стіні (рисунок

11.10). Підбрати переріз швелерів, якщо відстань до центра ваги двигуна від заземлення  $l = 1$  м; вертикальна складова відцентрової сили, що виникає від нерівноваженості обертових частин двигуна, дорівнює  $F \sin \theta t$ , де амплітуда відцентрової сили  $F$  становить 25 % від ваги двигуна. Допустиме напруження  $[\sigma] = 1000$  кг/см<sup>2</sup>, модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Урахувати умову нормативів: частота вільних коливань  $\omega$  повинна бути приблизно на 30 % більша за частоту вимушених коливань  $\theta$ .

*Розв'язання.* Підберемо переріз з умови нормативів:  $\omega = 1,3\theta$ . Кругова частота вимушених коливань дорівнює

$$\theta = 2\pi n / 60 = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 / 60 = 104,7 \text{ с}^{-1},$$

звідки  $\omega = 1,3 \cdot 104,7 = 136 \text{ с}^{-1}$ . З іншого боку, за (11.8)  $\omega = \sqrt{g/f_{\text{ст}}}$ , де  $f_{\text{ст}}$  – прогин балки в точці статично прикладеної сили  $G$  (рисунок 11.11, а). Згідно з методом початкових параметрів (7.33), у цьому випадку завантаження

(рисунок 11.11, а)  $f_{\text{ст}} = Gl^3 / (3E \cdot 2J_z)$ , де  $J_z$  – момент інерції одного швелера. Таким чином, одержуємо

$$136 \text{ с}^{-1} = \sqrt{\frac{981 \text{ см/с}^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \cdot J_z}{400 \text{ кг} \cdot 100^3 \text{ см}^3}}.$$

Звідси  $J_z = 629 \text{ см}^4$ .

Згідно до сортаменту (додаток В), найближчий прийнятний швелер з більшим моментом інерції – це № 16 з  $J_z = 747 \text{ см}^4$ ,  $W_z = 93,4 \text{ см}^3$ .

Рисунок 11.11

Перевіримо напруження, що виникають у перерізах, з урахуванням вібраційного навантаження.

Частота вільних коливань для обраного швелера дорівнює

$$\omega = \sqrt{g/f_{\text{ст}}} = \sqrt{\frac{981 \text{ см/с}^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \cdot 747 \text{ см}^3}{400 \text{ кг} \cdot 100^3 \text{ см}^3}} = 148,3 \text{ с}^{-1}.$$

Динамічний коефіцієнт

$$\mu = \frac{1}{1 - \theta^2/\omega^2} = \frac{1}{1 - 104,7^2/148,3^2} = 1,99.$$

Статичне напруження під дією ваги мотора (рисунок 11.11, а)

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{2W_z} = \frac{Gl}{2W_z} = \frac{400 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} = 216 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Динамічне напруження від вібраційного навантаження дорівнює статичному напруженню від сили  $F$  (рисунок 11.11, б), помноженому на  $\mu$ :

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{M_{\text{max}}}{2W_z} \mu = \frac{Fl}{2W_z} \mu = \frac{(0,25G)l}{2W_z} \mu = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} 1,99 = 107 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Максимальне напруження у швелері

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{д}} + \sigma_{\text{ст}} = 216 + 107 = 323 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < [\sigma].$$

## 11.2 Поняття про критичну частоту обертання

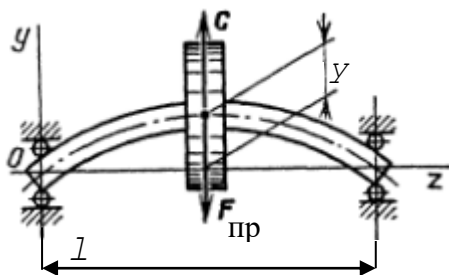


Рисунок 11.12

Розглянемо обертання двохопорного вала довжиною  $l$  з диском посередині (рисунок 11.12). Щоб з'ясувати, чи є обертання стійким, додамо валу деяке відхилення  $y$ . Центр ваги буде рухатися по колу радіусом  $y$ , при цьому виникне відцентрова сила  $C = \theta^2 m y$ , де  $\theta$  –

частота обертання ( $1/\text{с}$ ),  $m$  – маса диска.

Відхилення вала призведе до появи сили пружності, що прагне повернути вал у недеформований стан:

$$F_{\text{пр}} = \frac{1}{\delta_{11}} y,$$



де  $\delta_{11}$  – прогин перерізу вала від одиничної статично прикладеної сили. Для вала постійного перерізу згідно (7.32),

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{48EJ}.$$

Нехтуючи вагою диска, можна сказати, що при  $C < F_{\text{пр}}$  обертання вала буде стійким, тому що після відхилення вал повернеться у вихідний стан. У момент рівноваги, коли  $C = F_{\text{пр}}$ , прогини вала можуть необмежено зростати: у будь-якому відхиленому стані відцентрові сили та відновлюючі сили пружності є однаковими. Частота обертання вала, при якій настає рівність відцентрових сил і сил пружності, називається *критичною*.

Прирівнюючи значення  $C$  та  $F_{\text{пр}}$ , знаходимо

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11}G}} = \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}} = \omega,$$

де  $G$  – вага вала.

Таким чином, одержуємо, що критична частота обертання вала дорівнює круговій частоті власних згинних коливань  $\omega$  (11.8).

### 11.3 Розрахунок кільця, яке рівномірно обертається (маховика)

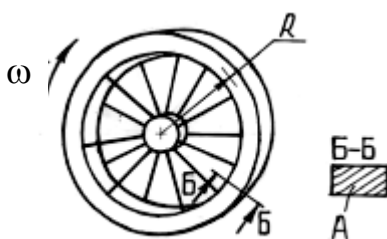


Рисунок 11.13

Розглянемо задачу про визначення напружень у кільці, яке швидко рівномірно обертається (у таких умовах перебувають обід маховика, колеса і т. д.). Прийmemo позначення:  $A$  – площа поперечного перерізу кільця;  $\gamma$  – об'ємна вага матеріалу кільця;  $R$  – середній радіус

кільця (товщиною кільця нехтуємо);  $\omega = \text{const}$  – кутова швидкість обертання (кутове прискорення  $\varepsilon = 0$ );  $v$  – лінійна швидкість точок осі (рисунок 11.13).



Рисунок 11.14

У кожній точці кільця, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = \text{const}$ , виникає тільки доцентрове прискорення

$w_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ , спрямоване до центра кільця (рисунок 11.14), а дотичне прискорення  $w_\tau = \frac{\omega \varepsilon}{2} = 0$ . Тому в точках кільця діє тільки радіальна сила інерції  $J$ , спрямована назовні.

Виділимо елемент кільця  $ds$ , відповідний центральному куту  $d\alpha$  (рисунок 11.15). Сила інерції  $dJ$ , яка прикладена до цього елемента, дорівнює

ок 11.15 
$$dJ = w_n dm = \frac{\omega^2 D A ds \gamma}{2g} = \frac{\omega^2 D A \gamma}{2g} ds = q ds.$$

Таким чином, у кільці виникають такі самі напруження, як при завантаженні розподіленням навантаженням інтенсивністю  $q$ ,

$$q = \frac{\omega^2 D A \gamma}{2g}. \quad (11.13)$$

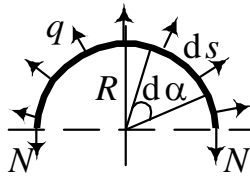


Рисунок 11.16

Розсікаючи кільце довільною діаметральною площиною на дві частини, прикладемо в перерізах осьові сили (рисунок 11.16) і запишемо умову рівноваги:

$$2N = \int_s q \sin \alpha ds = \int_0^\pi q \sin \alpha R d\alpha = qD,$$

звідки

$$N = qD/2.$$

Напруження в перерізі з урахуванням (11.13) дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{qD}{2A} = \frac{\omega^2 D A \gamma D}{2g 2A} = \left( \frac{\omega D}{2} \right)^2 \frac{\gamma}{g} = \frac{\gamma v^2}{g};$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\gamma v^2}{g}}. \quad (11.14)$$

З умови міцності

$$\sigma \leq [\sigma]$$

можна знайти граничну швидкість обертання маховика:

$$\boxed{v \leq \sqrt{\frac{g[\sigma]}{\gamma}}}. \quad (11.15)$$

**Задача.** Знайти напруження в перерізі маховика діаметром  $D = 4\text{ м}$ , що обертається із частотою  $n = 360\text{ об/хв}$ ; об'ємна вага матеріалу маховика  $\gamma = 7,5\text{ г/см}^3$ .

**Розв'язання**

Для даного маховика кутова частота дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 12\pi \frac{1}{\text{с}};$$

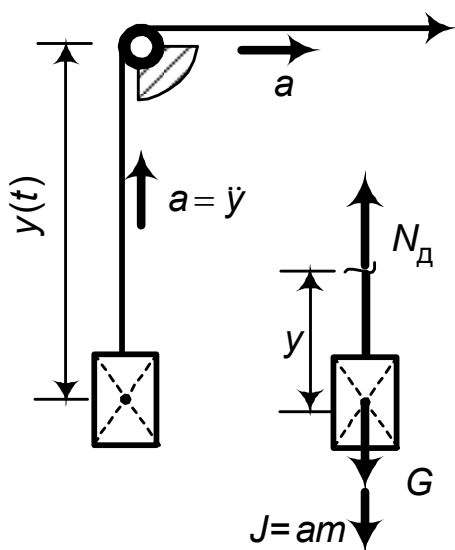
лінійна швидкість

$$v = \frac{\omega D}{2} = \frac{12\pi \frac{1}{\text{с}} \cdot 400\text{ см}}{2} = 7536 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

За формулою (11.14) одержуємо

$$\sigma = \frac{\gamma v^2}{g} = \frac{7,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \cdot \left(7536 \frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^2}{981 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}} = 434 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

#### 11.4 Рівноприскорений рух (піднімання вантажу)



Розглянемо задачу про піднімання вантажу вагою  $G_{\text{вант}}$  з постійним прискоренням  $a$  (рисунок 11.17). Об'ємна вага матеріалу троса дорівнює  $\gamma$ .

Визначимо динамічний коефіцієнт  $\mu$  як відношення  $\sigma_{\text{д}}/\sigma_{\text{ст}}$ :

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{\mu N_{\text{ст}}}{A} = \mu \sigma_{\text{ст}}.$$

Статична поздовжня сила (тобто сила у стані спокою) у перерізі  $x$

дорівнює

Рисунок 11.17

$$N_{\text{ст}} = G = G_{\text{вант}} + G_{\text{троса}} = G_{\text{вант}} + Ay \gamma,$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу троса.

Щоб одержати динамічну поздовжню силу, потрібно до  $N_{\text{ст}}$  додати силу інерції, яка дорівнює

$$J = m_{\text{вант}} a + m_{\text{троса}} a = \frac{G_{\text{вант}}}{g} a + \frac{Ax \gamma}{g} a = \frac{a}{g} (G_{\text{вант}} + Ax \gamma).$$

Одержуємо

$$N_{\text{д}} = N_{\text{ст}} + J = \left(1 + \frac{a}{g}\right) N_{\text{ст}} = \mu N_{\text{ст}}, \quad \sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{\mu N_{\text{ст}}}{A} = \mu \sigma_{\text{ст}}.$$

Таким чином, при рівноприскореному русі динамічний коефіцієнт дорівнює

$$\boxed{\mu = 1 + \frac{a}{g}} \quad (11.15)$$

*Задача.* Визначити діаметр троса  $D$  довжиною  $h = 60$  м, що піднімає рівноприскорено вантаж,  $G_{\text{вант}} = 5$  т. За перші  $t = 3$  с вантаж підняли на висоту  $y = 9$  м. Початкова швидкість  $v_0 = 0$ . Об'ємна вага матеріалу троса  $\gamma = 7 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>;  $[\sigma] = 600$  кг/см<sup>2</sup>.

*Розв'язання.* Площу перерізу троса визначаємо з умови міцності

$$\sigma_{\text{д}} = N_{\text{д}} / A_{\text{троса}} \leq [\sigma],$$

де  $\sigma_{\text{д}}$  – напруження в круглому перерізі троса з урахуванням динаміки,

$$\sigma_{\text{д}} = \mu \sigma_{\text{ст}} = \mu N_{\text{ст}} / A_{\text{троса}};$$

$N_{\text{ст}}$  – статична поздовжня сила в перерізі троса,

$$N_{\text{ст}} = G_{\text{вант}} + G_{\text{троса}} = G_{\text{вант}} + \gamma h A_{\text{троса}}, \quad A_{\text{троса}} = \pi D^2 / 4.$$

Умова міцності набуває вигляду

$$\sigma_{\text{д}} = \mu \left( \frac{G_{\text{вант}}}{A_{\text{троса}}} + \frac{\gamma h A_{\text{троса}}}{A_{\text{троса}}} \right) = \mu \left( \frac{4G_{\text{вант}}}{\pi D^2} + \gamma h \right) \leq [\sigma],$$

звідки

$$D \geq \sqrt{\frac{4G_{\text{вант}}}{\pi \left( \frac{[\sigma]}{\mu} - \gamma h \right)}}.$$

Динамічний коефіцієнт при рівноприскореному русі, згідно (11.16), дорівнює  $\mu = 1 + a/g$ ,  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>. Прискорення  $a$  знайдемо, підставивши

дані задачі в рівняння руху  $y = v_0 t + at^2/2$ . Одержимо  $9 = a \cdot 3^2/2$ , звідки  $a = 2\text{ м/с}^2$ , динамічний коефіцієнт  $\mu = 1 + 2/10 = 1,2$ .

Значення діаметра троса

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 5000 \text{ кг}}{3,14 \cdot \left( \frac{600 \text{ кг/см}^2}{1,2} - 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3 \cdot 6000 \text{ см} \right)}} = 3,58 \text{ см.}$$

## 11.5 Ударна дія навантаження

Задача про розрахунок конструкцій на ударне навантаження (рисунок 11.18) містить багато труднощів, які не завжди можуть бути переборені найпростішими засобами. Сюди належить, у першу чергу, аналіз напруженого стану в зоні контакту тіл, які співударяються, і процесу зміни контактних сил у часі. Однак можна одержати формулу для динамічного коефіцієнта, яка не дає високої точності, але в той же час дозволяє правильно оцінити порядок переміщень, напружень і деформацій при ударі. Цей вираз для  $\mu$  має вигляд

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{ст}}} \cdot \frac{M}{M + t}}, \quad (11.17)$$

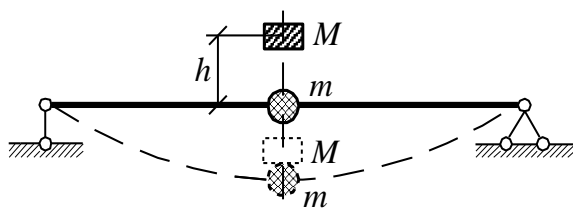
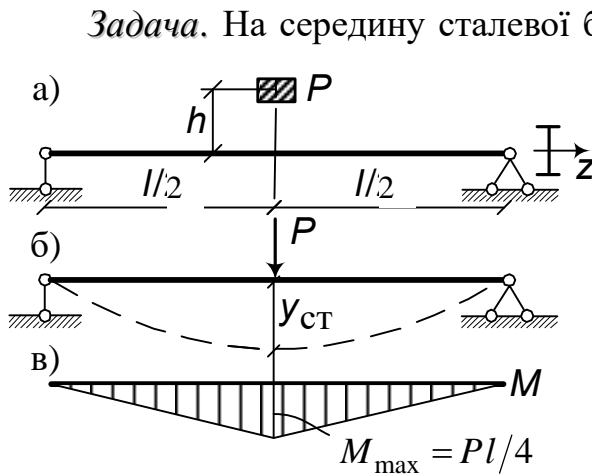


Рисунок 11.18

де  $M$  – маса падаючого тіла;  $t$  – маса, яка зазнає удару;  $h$  – висота, з якої відбувається падіння;  $y_{\text{ст}}$  – переміщення точки удару під дією статично прикладеної сили, яка дорівнює вазі падаючого тіла  $G = Mg$ .

Якщо конструкція, яка зазнає удару, не має в точці удару зосередженої маси  $t$ , то її роль виконує розподілена маса конструкції. Її іноді не враховують ( $t = 0$ ), що збільшує запас міцності. При цьому  $M/(M + t) = 1$ , і формула (11.14) набуває вигляду

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}}}. \quad (11.18)$$



Задача. На середину сталевий балки довжиною  $l = 2$  м двотаврового перерізу (№ 22) з висоти  $h = 10$  см падає вантаж  $P = 1$  кН (рисунок 11.19, а);  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Характеристики двотавра:  $J_z = 2550$  см<sup>4</sup>,  $W_z = 232$  см<sup>3</sup> (додаток В).

Визначити прогин під вантажем і найбільше нормальне напруження в перерізі балки при ударі. Вагу балки не враховувати.

Рисунок 11.19

Визначимо статичні значення прогину  $y_{ст}$  (рисунок 11.19, б) і максимальне напруження (рисунок 11.19, в). Згідно (7.22) і (7.5), маємо

$$y_{ст} = \frac{Pl^3}{48EJ_z} = \frac{1 \text{ кН} \cdot 2^3 \text{ м}^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Pl}{4W_z} = \frac{1 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м}}{4 \cdot 232 \text{ м}^{-3}} = 2,16 \text{ МПа}.$$

Динамічний коефіцієнт (11.18)

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h/y_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + 0,2/(0,33 \cdot 10^{-4})} \approx 78.$$

Динамічні значення шуканих величин

$$y_{д} = \mu y_{ст} = 0,26 \cdot 10^{-2} \text{ см};$$

$$\sigma_{д} = \mu \sigma_{ст} = \mu \cdot 2,16 \text{ МПа} = 168,5 \text{ МПа}.$$

## 11.6 Міцність матеріалів при повторно-змінних напруженнях

### 11.6.1 Поняття про утому матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, що циклічно змінюються в часі за величиною або за величиною та знаком (тобто повторно-змінних навантажень), суттєво відрізняється від опору дії статичних навантажень. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються при значно менших напруженнях, ніж під дією статичних навантажень.

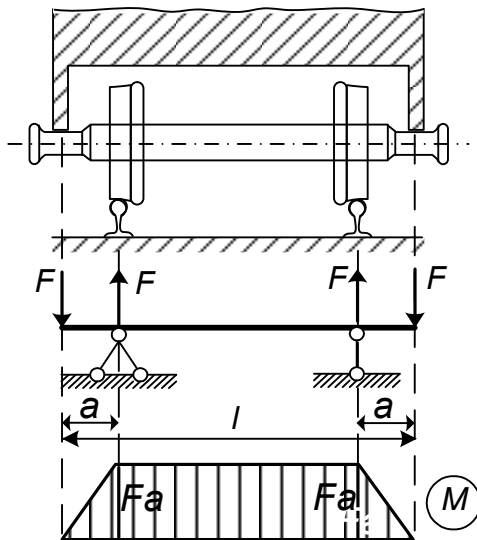


Рисунок 11.20

Якщо рівень напружень, викликаних змінними навантаженнями, перевищує певну межу, то в матеріалі починають відбуватися необоротні процеси нагромадження ушкоджень, які призводять до утворення тріщини. У свою чергу, концентрація напружень на краю тріщини сприяє подальшому її розвитку.

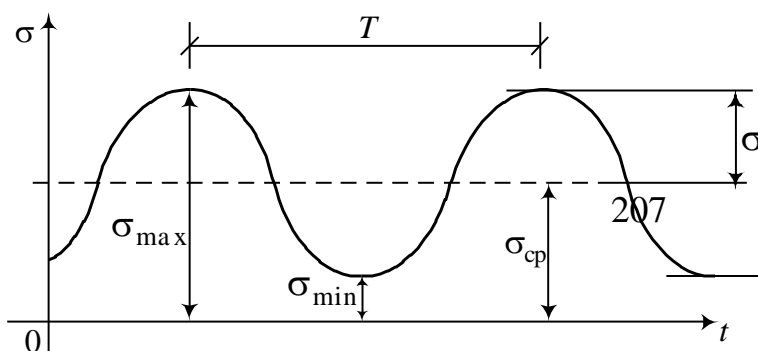
**Утомою** матеріалу називається явище руйнування в результаті поступового накопичення в ньому ушкоджень, що призводять до появи тріщин при багаторазовому повторенні навантажень.

**Витривалістю** матеріалу називається здатність опиратися руйнуванню при багаторазовому повторенні навантажень.

Сукупність значень напружень за один період їх зміни називають *циклом напружень*.

**Границею витривалості** або **границею втоми** називається максимальне напруження циклу, при якому матеріал здатний опиратися, не руйнуючись, будь-якій довільно великій кількості циклів напружень.

### 11.6.2 Характеристики циклів напружень



Цикл змінних напружень (рисунок 11.21)

характеризується величинами:

$\sigma_{\max}$  – максимальне напруження;

$\sigma_{\min}$  – мінімальне напруження;

$T$  – період циклу (або  $\nu$  – частота циклу,  $\nu = 1/T$ ).

Через ці величини виражаються:

$\sigma_A$  – амплітуда циклу,  $\sigma_A = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ ;

$\sigma_{\text{ср}}$  – середнє напруження,  $\sigma_{\text{ср}} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ ;

$r$  – коефіцієнт асиметрії циклу,  $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ .

Основні види циклів напружень показано на рисунку 11.22.

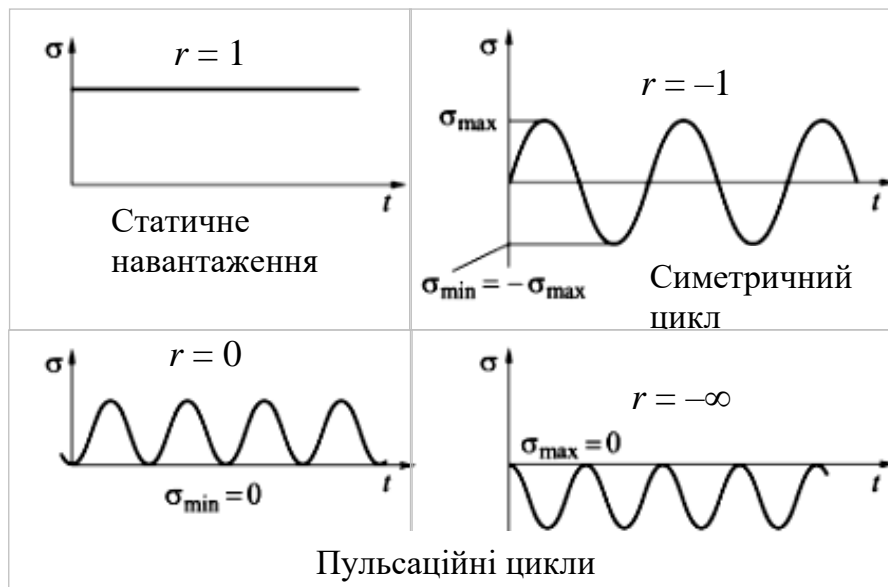


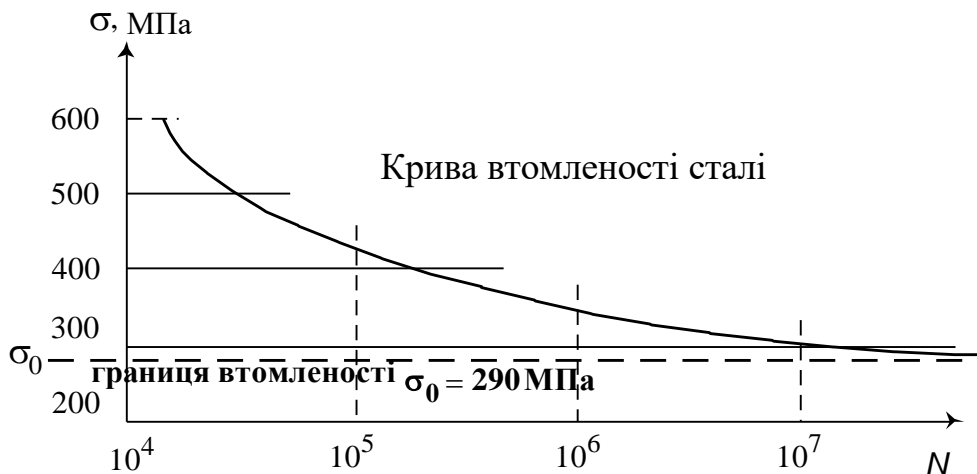
Рисунок 11.22



### 11.6.3 Дослідне визначення границі витривалості

Основною характеристикою витривалості матеріалу є одержувана експериментальним шляхом крива втоми (крива Вьолера). Ординати кривої втоми – значення максимальних напружень циклу, при яких відбувається руйнування зразка, абсциса – кількість циклів  $N$ , що витримав зразок до руйнування.

Найбільш простим і розповсюдженим є випробування зразків при симетричному циклі напружень. Однакові зразки при однакових умовах зазнають періодичного знакозмінного симетричного розтягання-стиску таким чином, що амплітуда напружень  $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ , залишаючись постійною для кожного зразка, змінюється від одного зразка до іншого. Кожний зразок до руйнування витримує  $N$  циклів при деякому найбільшому напруженні  $\sigma$ . Вигляд відповідної кривої показаний на рисунку 11.23.



Рисунк 11.23

Аналіз кривої показує, що при симетричному циклі навантаження з найбільшим напруженням  $\sigma < \sigma_0$  він може витримати без руйнування необмежену кількість циклів. Якщо ж найбільше напруження в зразку  $\sigma > \sigma_0$ , то він зруйнується при кінцевій кількості циклів  $N$ . Таким чином, отримане напруження  $\sigma_0$  є границею втоми (витривалості) (п. 11.6.1).

На границю витривалості матеріалу впливають багато факторів, у тому числі концентрація напружень, зовнішнє середовище (наприклад, корозія металів викликає зниження

границі витривалості), масштабний фактор (зі збільшенням розмірів деталі, головним чином поперечного перерізу, утомлена міцність знижується), якість обробки поверхні та ін.

Оскільки необмежену кількість циклів здійснити не можна, то для встановлення значення границі втоми задаються певною досить великою кількістю циклів і визначають найбільше напруження, при якому зразок витримує усю кількість циклів, не руйнуючись. Для сталей таку кількість циклів, або базу випробувань, приймають у межах  $10^6 - 10^7$  циклів. Для кольорових металів –  $(5 - 10) \cdot 10^7$  циклів.

Границі витривалості зручно виражати в частках тимчасового опору  $\sigma_B$ . Для металів мінімум  $\sigma_0/\sigma_B$  відповідає крученню, максимум – згину. Відношення  $\sigma_0/\sigma_B$  для сталі становить при крученні 0,27, при розтяганні-стиску – 0,37, при згинанні – 0,51.

#### 11.6.4 Розрахунок на витривалість

Розрахунок елементів будівельних конструкцій на витривалість зводиться до перевірки *умови витривалості* вигляду

$$\sigma_{\max} \leq \alpha \gamma_v R_v, \quad (11.19)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне нормальне напруження;  $R_v$  – розрахунковий опір втоми, що залежить від тимчасового опору матеріалу  $\sigma_B$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт, що враховує кількість циклів навантажень;  $\gamma_v$  – коефіцієнт, що залежить від виду напруженого стану та коефіцієнта асиметрії циклу.

Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\gamma_v$  вибираються за СНиП.

Наприклад, для сталевих конструкцій коефіцієнт  $\gamma_v$  визначається за табл. 11.1.

Таблиця 11.1

$\sigma_{\max}$	$r$	$\gamma_v$
Розтягання	$-1 \leq r < 0$	$2,5/(1,5 - r)$
	$0 < r \leq 0,8$	$2,0/(1,2 - r)$

	$0,8 < r < 1$	$1,0/(1-r)$
Стиск	$-1 \leq r < 1$	$2,0/(1-r)$

Для деяких видів конструкцій співвідношення (11.19) може приймати дещо відмінну форму. Так, при розрахунку сталевих конструкцій мостів використовується така нерівність:

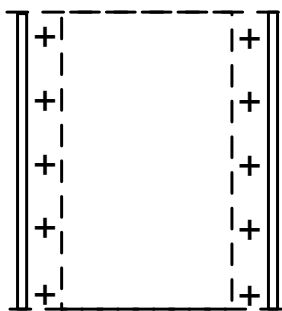
$$\sigma_{\max} \leq \gamma_v m R, \quad (11.20)$$

де  $R$  – розрахунковий опір при розтяганні, стиску і згині по границі текучості матеріалу;  $m$  – коефіцієнт умов роботи;

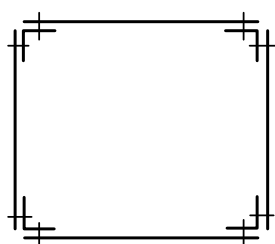
$$\gamma_v = \frac{1}{(\alpha\beta + \delta) - (\alpha\beta - \delta)r}, \quad (11.21)$$

де  $\alpha, \delta$  – коефіцієнти, що враховують марку сталі та нестационарність навантаження;  $r$  – коефіцієнт асиметрії циклу змінних напружень;  $\beta$  – ефективний коефіцієнт концентрації напружень. Усі коефіцієнти вибираються за СНиП.

*Задача.* Розкіс наскрізної сталевий прогону будови залізничного



моста при проходженні поїзда зазнає впливу змінного осевого зусилля. Найбільше розтягувальне зусилля дорівнює  $N_{\max} = 1200$  кН. Найменше стискаюче зусилля  $N_{\min} = 200$  кН. Розрахунковий опір  $R$  низьколегованої сталі марки 15ХСНД дорівнює 295 МПа. Коефіцієнт умов роботи  $m = 0,9$ . Поперечний переріз – складений, його площа дорівнює  $A = 75$  см<sup>2</sup>.



*Розв'язання.* Коефіцієнт асиметрії циклу

$$r = -\frac{|N_{\min}|}{N_{\max}} = -\frac{1}{6}.$$

У відповідності до СНиП 2.05.03-84 коефіцієнт  $\beta$  приймається рівним 1,5; параметри  $\alpha = 0,72$ ,  $\delta = 0,24$ .

Рисунок 11.24

За виразом (11.21) обчислюємо  $\gamma_v = 0,85$ .

Максимальне напруження

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1200 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}.$$

Права частина нерівності (11.20) дорівнює

$$\gamma_v m R = 0,85 \cdot 0,9 \cdot 295 = 226,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Отже, умова витривалості виконується.

Одиниці виміру основних величин, що використовуються, та їх співвідношення наведені у додатку Е.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка, В.Г. Попков, Э.С. Уманский; под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1974. – 672 с.
- 2 Писаренко, Г.С. Опір матеріалів [Текст] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Є.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 3 Горшков, А.Г. Сопротивление материалов [Текст] / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашвили. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
- 4 Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М.: МГСУ, 1995.– 572 с.
- 5 Чихладзе, Э.Д. Сопротивление материалов [Текст] / Э.Д. Чихладзе. – Харьков: УкрГАЗТ, 2011. – 366 с.
- 6 Чихладзе, Е.Д. Опір матеріалів [Текст] / Е.Д. Чихладзе. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 366 с.
- 7 Биргер, И.А. Сопротивление материалов [Текст] / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 580 с.
- 8 Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
- 9 Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.– 456 с.
- 10 Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957. – 536 с.
- 11 Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
- 12 Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1945. – Т.1. – 315 с.
- 13 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Изд. МГТУ, 1999. – 591 с.

## ДОДАТОК А

### МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

Таблиця А.1 – Значення модуля пружності  $E$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu$  деяких матеріалів

Матеріал	$E$ , МПа	$\nu$
Сталь прокатна	$(2 - 2,1) \cdot 10^5$	0,3
Чавун сірий (білий)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^5$	0,3
Алюмінієві сплави	$0,7 \cdot 10^5$	0,31 – 0,35
Мідь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^5$	0,18
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^5$	0,16 – 0,2
Цегельна кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^5$	0,25
Деревина при розтяганні (стиску) вздовж волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^5$	0,5
поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^5$	0,02
Гума	$(0,00007 - 7) \cdot 10^5$	0,47 – 0,5
Корок	–	0
Парафін	–	0,5

Таблиця А.2 – Значення границі міцності  $\sigma_B$ , границі текучості  $\sigma_T$ , відносного подовження  $\delta$  та відносного звуження шийки  $\psi$  при розриві для деяких матеріалів

Матеріал	$\sigma_B$ , МПа		$\sigma_T$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %
	При розтяганні	При стиску			
Ст3	370 – 470	–	220 – 250	23 – 27	60 – 70
О9Г2, 17ГС, 14Г2	450 – 520	–	310 – 350	21 – 23	–
Чавун сірий С4	120 – 380	500 – 1200	–	1 – 1,4	–
Дюралюміній Д16	230 – 465	–	100 – 350	8 – 13	30 – 15
Бетон	0,14 – 2,5	0,95 – 0,43	–	–	–
Цегла	0,7 – 3	7,5 – 100	–	–	–
Деревина уздовж волокон	25 – 34	20 – 33	–	–	–

Таблиця А.3 – Значення допустимих напружень деяких матеріалів

Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
	Розтягання	Стиск
Сталь: вуглецева легована	160 100 – 400	160 100 – 400
Чавун сірий	28 – 80	120 – 150
Мідь	30 – 120	30 – 120
Латунь	70 – 140	70 – 140
Бронза	60 – 120	60 – 120
Алюміній	30 – 80	30 – 80
Дюралюміній	80 – 150	80 – 150
Текстоліт	30 – 40	30 – 40
Гетинакс	50 – 70	50 – 70
Сосна: уздовж волокон поперек волокон	7 – 10 –	10 – 12 1,5 – 2
Дуб: уздовж волокон поперек волокон	9,6 – 13 –	13 – 15 2 – 3,5
Бетон	0,1 – 0,7	1 – 9
Камінь (кладка)	0,1 – 0,3	0,4 – 4
Цегла (кладка)	0,1 – 0,2	0,6 – 2,5



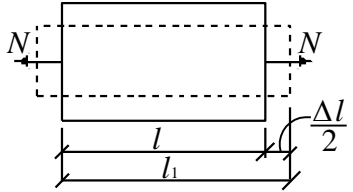
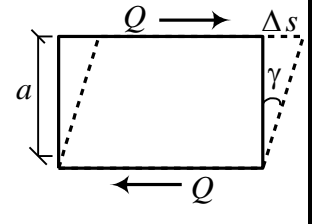
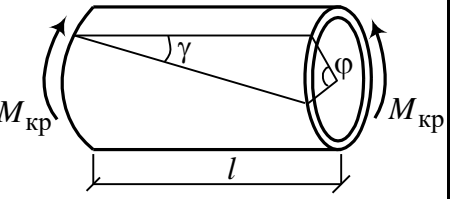
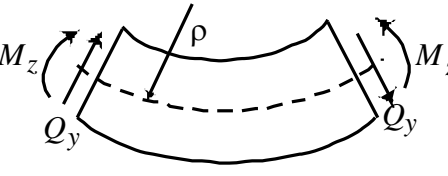
Таблиця А.4 – Допустимі напруження на зріз для заклепувальних і зварених з'єднань для деяких матеріалів

Тип з'єднання	Допустиме напруження на зріз, МПа
Заклепувальне: основні елементи зі сталі 20 заклепка в розсвердлених отворах (клас В) заклепка в продавлених отворах (клас ІЗ)	100  140  100
Зварене: зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою зварювання ручне, електроди з товстою обмазкою зварювання автоматичне	80  110  110

## ДОДАТОК Б

### ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРОСТИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Таблиця Б.1

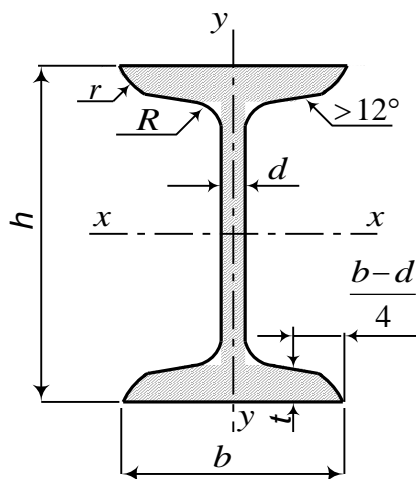
Вид деформації	Розтягання-стиск	Зсув	Кручення	Плоский поперечний згин
1	2	3	4	5
Схема				
Зусилля	$N$	$Q$	$M_{кр}$	$Q_y, M_z$
Напруженн я	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\tau = \frac{Q}{A_{зсув}}$	$\tau = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho$	$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y ; \tau = \frac{Q_y S_z^{відс}}{b J_z}$ $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Деформації	$\Delta l = l_1 - l ; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_1}$	$\Delta s ; \gamma = \frac{\Delta s}{a}$	$\gamma ; \varphi ; \frac{d\varphi}{dx}$	$y'' = \frac{1}{\rho} ; y' ; y$
Закон Гука	$\sigma = \varepsilon E ; \Delta l = \frac{Nl}{EA}$	$\tau = \gamma G ;$ $\Delta s = \frac{Qa}{GA_{зсув}}$	$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} ; \varphi = \frac{M_{кр}x}{GJ_{\rho}}$	$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$

Продовження таблиці Б.1

1	2	3	4	5
<b>Умови міцності</b>	$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$	$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A_{\text{зсув}}} \leq [\tau]$	$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$	$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma];$ $\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{0,5}}{b J_z} \leq [\tau]$ $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$ $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$
<b>Умови жорсткості</b>	$\Delta l_{\max} = \frac{N_{\max} l}{EA} \leq [\Delta l]$	—	$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} \leq \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]$	$y_{\max} \leq [y]$
<b>Добір перерізу</b>	$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$	$A_{\text{зсув}} \geq \frac{Q_{\max}}{[\tau]}$	$W_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}, J_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{G \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]}$	$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]}$

## ДОДАТОК В

### СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ Балки двотаврові (за ГОСТ 8239-89)



#### Позначення

h - висота балки;	J - момент інерції;
b - ширина полиці;	W - момент опору;
d - товщина стінки;	i - радіус інерції;
t - середня товщина полиці;	S - статичний момент півперерізу

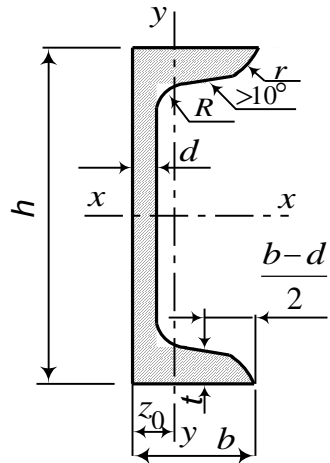
Таблица В.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продовження таблиці В.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t									
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

## Швелери (за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

$h$  - висота швелера;  $J$  - момент інерції;  
 $b$  - ширина полиці;  $W$  - момент опору;  
 $d$  - товщина стінки;  $i$  - радіус інерції;  
 $t$  - середня товщина полиці;  $S$  - статичний момент півперерізу;

$z_0$  - відстань від центра ваги до зовнішньої грані стінки

207

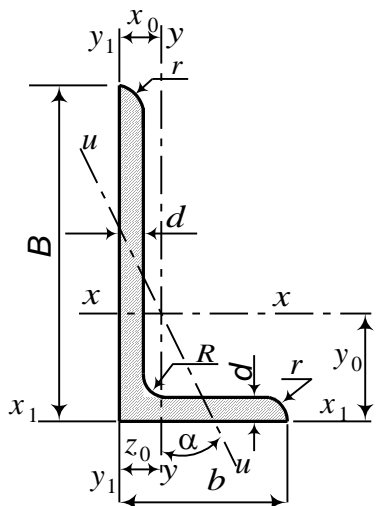
Таблиця В.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа пере-різу, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см	Маса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2

Продовження таблиці В.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа пере-різу, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t										
16а	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18а	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

## Кутники нерівнобічні (за ГОСТ 8510-86\*)



Позначення:  
 У - ширина більшої полиці;  
 b - ширина меншої полиці;  
 d - товщина стінки;  
 J - момент інерції;  
 i - радіус інерції;  
 $x_0, y_0$  - відстань від центра ваги до  
 зовнішніх граней полиць

Таблиця В.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу, $\text{см}^2$	$J_x$ , $\text{см}^4$	$i_x$ , см	$J_y$ , $\text{см}^4$	$i_y$ , см	$J_{u \min}$ , $\text{см}^4$	$i_{u \min}$ , $\text{см}^4$	Кут нахилу осі u $\text{tg } \alpha$	$J_{x1}$ , $\text{см}^4$	$J_{y1}$ , $\text{см}^4$	$x_0$ , см	$y_0$ , см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9



Продовження таблиці В.3

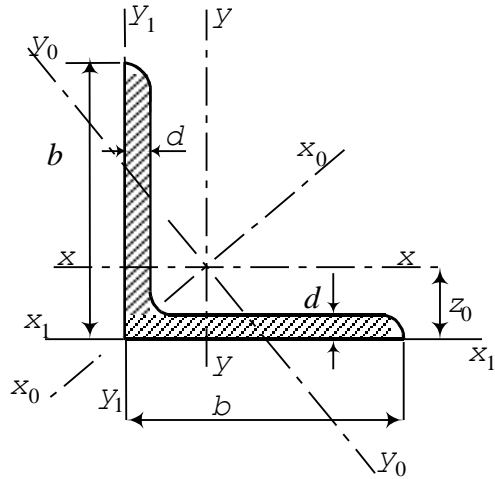
Номер профілю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	Кут нахилу осі u tg α	J <sub>x 1</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y 1</sub> , см <sup>4</sup>	X <sub>0</sub> , см	Y <sub>0</sub> , см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1

Продовження таблиці В.3

211

Номер профілю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	Кут нахилу осі u tg α	J <sub>x 1</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y 1</sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1

### Кутники рівнобічні (за ГОСТ 8509-93)



Позначення:

- b - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- J - момент інерції;
- i - радіус інерції;
- z<sub>0</sub> - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

212

Таблиця В.4

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см	
				J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0 min</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продовження таблиці В.4

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $\text{см}^2$	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см	
	J <sub>x</sub> , $\text{см}^4$	i <sub>x</sub> , см		J <sub>x0 max</sub> , $\text{см}^4$	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 min</sub> , $\text{см}^4$	i <sub>y0 min</sub> , см	J <sub>x1</sub> , $\text{см}^4$				
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72

Продовження таблиці В.4

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см	
	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см		J <sub>x0</sub> max, см <sup>4</sup>	i <sub>x0</sub> max, см	J <sub>y0</sub> min, см <sup>4</sup>	i <sub>y0</sub> min, см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>				
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20

Продовження таблиці В.4

215

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $\text{см}^2$	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$z_0, \text{см}$	
	$J_x,$ $\text{см}^4$	$i_x,$ $\text{см}$		$J_{x0 \text{ max}},$ $\text{см}^4$	$i_{x0 \text{ max}},$ $\text{см}$	$J_{y0 \text{ min}},$ $\text{см}^4$	$i_{y0 \text{ min}},$ $\text{см}$	$J_{x1},$ $\text{см}^4$				
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Продовження таблиці В.4

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см	
	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см		J <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0 min</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>				
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8

Продовження таблиці В.4

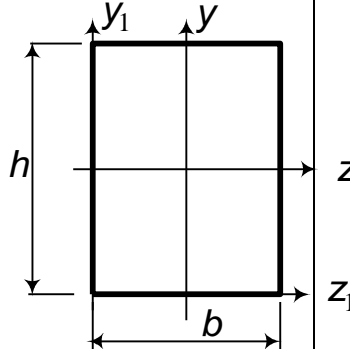
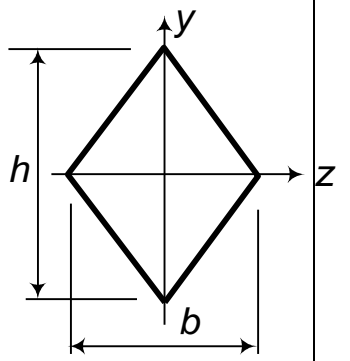
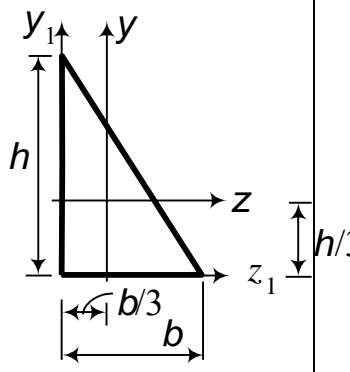
Номер профілю	b	d	Площа перерізу, $\text{см}^2$	Довідкові величини для осей								Маса 1м, кг
				x-x		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$z_0, \text{ см}$	
	$J_x, \text{ см}^4$	$i_x, \text{ см}$		$J_{x0 \text{ max}}, \text{ см}^4$	$i_{x0 \text{ max}}, \text{ см}$	$J_{y0 \text{ min}}, \text{ см}^4$	$i_{y0 \text{ min}}, \text{ см}$	$J_{x1}, \text{ см}^4$				
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4



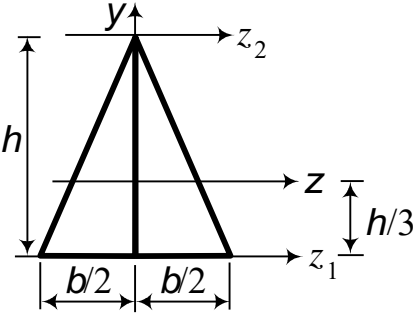
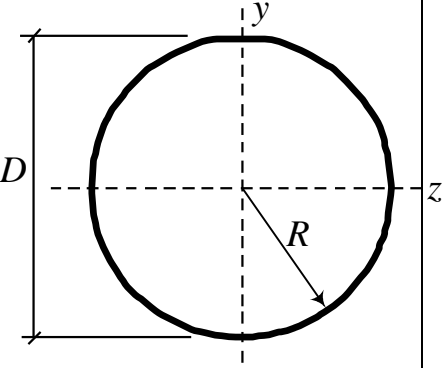
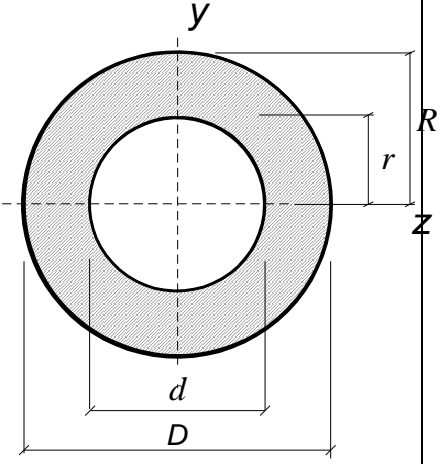
## ДОДАТОК Г

### ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Таблиця Г.1

Переріз	Геометричні характеристики (z, y – центральні осі)
	$A = bh$ $J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}$ $W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{3}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{48}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $W_z = \frac{bh^2}{24}; \quad W_y = \frac{b^2h}{24}$
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{b^3h}{12}$

Продовження таблиці Г.1

Переріз	Геометричні характеристики ( $z, y$ – центральні осі)
	$A = \frac{bh}{2}$ $J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{z_2} = \frac{bh^3}{4}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi R^3}{4}$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi R^2}{2} (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D} = \frac{r}{R}$ $J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4)$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4)$

## ДОДАТОК Д

### ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ НА СТІЙКІСТЬ

Таблиця Д.1 – Значення  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{шц}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda_{гран}$ ,  $\lambda_0$

Матеріал	$\sigma_T$	$\sigma_{шц}$	$a$	$b$	$\lambda_{гран}$	$\lambda_0$
	МПа					
Сталь Ст2	220	190	264	0,7	105	62
Сталь Ст3	240	200	310	1,14	100	61
Сталь 20, Ст4	260	220	328	1,11	96	60
Сталь 25, Ст5, 36Л	280	240	350	1,15	92	57
Сталь 35, 45Л	320	270	398	1,43	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,67	85	52
Сталь 50, 55Л	380	320	473	1,87	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	350	300	429	1,52	83	50
Сталь 30ХНА, 35ХМФА, 30ГСА	850	700	1000	5,57	55	28
Дюралюміній Д16Т	320	255	406	2,83	53	30
Дюралюміній Д6Т	280	220	300	1,43	57	15
Сосна, ялина	-	-	29,3	0,194	70	-
Чавун СЧ 12-28, СЧ 15-32 та ін.	-	-	-	-	80	10

Таблиця Д.2 – Значення коефіцієнтів  $\varphi$ 

Гнуч- кість $\lambda = l_{зв}/i$	Сталь марок			Чавун марок		Дюра- люміній Д16Т	Дере- вина (сосна, ялина)	Сталь із розрахун- ковим опором $R=240\text{МПа}$ за СНИП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147

## ДОДАТОК Е

### ДОВІДКОВІ ДАНІ

Таблиця Е.1 – Деякі величини і їх розмірності в системі СИ

Величина		Розмірність
Позначення	Найменування	
$l$	Довжина	м
$A$	Площа	м <sup>2</sup>
$J_z, J_y, J_{zy}, J_\rho$	Моменти інерції плоского перерізу	м <sup>4</sup>
$S_z, S_y$	Статичні моменти плоского перерізу	м <sup>3</sup>
$W_z, W_y$	Моменти опору плоского перерізу	м <sup>3</sup>
$i_z, i_y$	Радіуси інерції плоского перерізу	м
$F$	Сила	Н
$M$	Момент сили	Нм
$q$	Розподілене навантаження	Н/м, Н/м <sup>2</sup> , Н/м <sup>3</sup>
$\gamma$	Питома вага	Н/м <sup>3</sup>
$A, U$	Робота та енергія	Дж = Нм
$W$	Потужність	Вт = Дж/с = Нм/с
$\sigma, \tau$	Напруження	Па = Н/м <sup>2</sup>
$E, G$	Модулі пружності	Па = Н/м <sup>2</sup>
$\mu$	Коефіцієнт Пуассона	Безрозмірна
$\lambda$	Гнучкість	Безрозмірна

Таблиця Е.2 – Утворення кратних і часткових одиниць

Префікс	Позначення	Множник
Гіга	Г	$10^9$
Мега	М	$10^6$
Кіло	к	$10^3$
Деци	д	$10^{-1}$
Сант	с	$10^{-2}$
Мілі	м	$10^{-3}$
Мікро	мк	$10^{-6}$