ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій

Частина 1

Харків - 2014

Куліш Ю.В., Рибачук О.В. Основи теорії оптимального керування: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – Ч 1. – 66 с.

Конспект лекцій призначений для магістрів спеціальності “Електричний транспорт” і може бути використаний студентами магістрами інших загально технічних спеціальностей.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 9 жовтня 2012 р., протокол № 3.

Рецензент

проф. Ю.А. Бережной (ХНУ ім. В.Н. Каразіна)

Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Конспект лекцій

Частина 1

Відповідальний за випуск Рибачук О.В.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 28.01.13 р.
Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 1,5. Тираж 25. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЛЕКЦІЯ 1

Вступ

Теорія оптимального керування дозволяє знаходити функції, які забезпечують мінімальні або максимальні значення деяких величин при існуванні обмежень та зв'язків між цими функціями.

Слово *оптимальний* походить від латинського слова *optimus*, який перекладається як найкращий та досконалий. Таким чином, задачі оптимального керування відносяться до екстремальних задач, тобто задач на знаходження екстремумів величин в деяких процесах. Значення цих величин (наприклад інтегралів від деяких функцій) залежить також від функцій, які можна змінювати в даному процесі. Такі функції називаються керуваннями.

Метою даного курсу є вивчення методів, які дозволяють мінімізувати енерговитрати на електротранспорті. При вивченні цієї проблеми будемо використовувати методи і позначення [1]. Енерговитрати під час руху потяга по перегону, в загальному вигляді, є криволінійний інтеграл другого роду

$$A_e = \int_{AB} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{\eta(\vec{r})} d\vec{l}\,, \tag{1. 1}$$

де $\vec{F}(\vec{r})$ - сила тяги електродвигунів, $\eta(\vec{r})$ - коефіцієнт корисної дії двигунів, привода і т.д. Точки A та B відповідають початковій та кінцевій точкам перегону. Для елементарної ділянки перегону $d\vec{l}$ можна написати

$$d\vec{l} = \vec{v}(t)dt\,, \tag{1. 2}$$

де $\vec{v}(t)$ швидкість потяга в момент часу t. Тому роботу (1. 1) можна написати у вигляді

$$A_e = \int_0^{T_{xn}} \frac{F(t)v(t)}{\eta(t)} dt, \tag{1. 3}$$

де $T_{хп}$- час ходу потяга по перегону. За другим законом Ньютона, під дією сили змінюється швидкість руху тіла. Тому можна написати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{ds}{dt} = v, \tag{1. 4}$$

$$\frac{dv}{dt} = \xi \left[\frac{F}{P+Q} - w_o(v) - w_g(s) - \frac{B_T}{P+Q} \right], \tag{1. 5}$$

де s – відстань на перегоні від початкової точки s_i, P - вага локомотива або пустого вагона електропотяга, Q - вага потяга без локомотива або вага вантажу (тобто корисна вага) у вагоні електропотяга, $w_o(v)$- питомий основний опір руху потяга (наприклад, для сили тертя можна взяти $w_o(v) = L_1 + L_2 v + L_3 v^2$, $L_1 -, L_2 -, L_3$-сталі); $w_g(s)$-питомий опір руху на уклонах та кривих відрізках колії. Числовий коефіцієнт ξ в (1. 5) дорівнює

$$\xi = \varepsilon \left(1 + \gamma \right), \tag{1. 6}$$

де ε-числовий коефіцієнт, який залежить від вибору одиниць вимірювання величин; γ- коефіцієнт інерції тіл, які обертаються (наприклад, коліс). В (1. 5) F - сила тяги електродвигунів, B_T - сила гальмування.

Оскільки рух потяга по перегону повинен задовольняти розклад руху потягів, то початкові та кінцеві значення відстані s та швидкості v повинні задовольняти певні умови

$$\begin{aligned} s(t)&: \quad s(0) = s_i, \quad s(T) = s_k \\ v(t)&: \quad v(0) = v_i, \quad v(T) = v_k \end{aligned} \tag{1. 7}$$

Окрім цього, потяг відповідно до розкладу повинен проходити перегон за час $\grave{O}_{ðí}$, тобто повинен існувати інтегральний зв'язок

$$\grave{O}_{xn}=\int_{s_i}^{s_k}\frac{ds}{v} \quad . \tag{1. 8}$$

Зрозуміло, що потяг не може рухатись з будь-якою швидкістю, мотори не можуть розвивати будь-яку тягу і сила гальмування не може бути будь-якою. Тому на ці величини повинні бути певні обмеження:

$$\begin{aligned} &0 \le v \le v(s)_{\max} \\ &0 < F < F(v)_{\max} \\ &0 < B_T < B_T(v)_{\max} \end{aligned} \tag{1. 9}$$

Таким чином, нам потрібно знайти такі функції $F(t)$ та $v(t)$, які дають мінімальне значення інтеграла (1. 3), при умові що швидкість повинна задовольняти диференціальні рівняння (1. 4), (1. 5) та крайові умови (1. 7). При цьому коефіцієнт корисної дії є задана функція v або t. Швидкість руху потяга $v(t)$ та місцезнаходження $s(t)$ визначаються силою тяги $F(t)$ та силою гальмування $B_T(t)$, основним опором $w_O(t)$ та опором на поворотах і уклонах $w_g(s)$. При цьому функції $F(t)$ та $B_T(t)$ можуть змінюватися машиністами. Тому в задачі про мінімізацію енерговитрат (1. 3) саме функцій $F(t)$ та $B_T(t)$ є керування. При пошуках мінімального значення інтеграла (1. 3) ми повинні знайти такі керування $F(t)$ та $B_T(t)$, які задовольняють диференціальні рівняння (1. 4), (1. 5), обмеження (1. 9) та інтегральний зв’язок (1. 8).

Задача мінімізації енерговитрат відрізняється від інших екстремальних задач. Давно відомо, що методами диференціального числення можна знайти локальні екстремуми (мінімуми або максимуми) функцій однієї або кількох змінних. При цьому знаходяться числа: значення функцій та їхні аргументи. Вважається, що диференціальне числення розвивається з 17-го століття. Приблизно в той же час було запропоноване варіаційне числення, яке дозволяє знаходити функції, що дають екстремальні значення деяких інтегралів. Самі ці функції повинні задовольняти деякі умови, а інтеграли не залежать від функцій-керувань.

Задачі пошуків екстремальних значень інтегралів, які залежать від керування, розв'язуються методами теорії оптимального керування.

Важливою складовою частиною теорії оптимального керування є принцип максимуму Пантрягіна. Теорія оптимального керування почала розвиватися в 50-х роках 20-го століття. Для розв'язання задачі мінімізації енерговитрат якраз доцільно застосовувати методи теорії оптимального керування.

В теорії оптимального керування використовуються методи і термінологія диференціального та варіаційного числень. Тому в даному курсі спочатку викладаються методи диференціального і варіаційного числень.

1.1 Екстремуми функцій кількох змінних

Означення 1. 1. Функція $u(M_0)$ має максимум (мінімум) в точці M_0, якщо знайдеться окіл точки M_0, в якому $u(M)<u(M_0)$ $(u(M)>u(M_0))$. Розглянемо випадок, коли $d^2u(M_0)\neq 0$, тобто коли в околі максимуму (мінімуму) $d^2u(M_0)<0$ $(d^2u(M_0)>0)$ при будь-яких диференціалах аргументів dx_k.

Як відомо, існують необхідна і достатня умови існування екстремуму функцій.

Необхідна умова. Для того щоб в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ існував екстремум неперервної функції $u(x_1, x_2, .., x_n)$, необхідно, щоб в цій точці частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k=1,2,..,n)$ дорівнювали нулю або хоча б одна з них не існувала.

Означення 1. 2. Точка M_0, в якій всі частинні похідні диференційовної функції дорівнюють нулю, називається стаціонарною.

Таким чином, екстремуми диференційовної функції можуть існувати тільки в стаціонарних точках. Але, як відомо, не у всіх стаціонарних точках існують екстремуми функцій. Відповідь на питання про існування екстремумів функцій в стаціонарних точках дають достатні умови існування екстремумів. Розглянемо достатню умову існування екстремумів двічі диференційовної функції n змінних. Для цього знайдемо повні диференціали такої функції в стаціонарній точці. Легко бачити, що в стаціонарній точці M_0 повний диференціал першого порядку дорівнює нулю. Дійсно,

$$du(M_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^{n} 0\, dx_k = 0. \qquad (1.\ 10)$$

Тому необхідно знайти диференціали другого порядку. Знайдемо похідні другого порядку

$$H_{ik}(M) = \frac{\partial^2 u(M)}{\partial x_i \partial x_k}. \qquad (1.\ 11)$$

Сукупність таких похідних утворює в кожній точці $M(x_1, x_2, .., x_n)$ симетричну матрицю H. Тоді можна написати повний диференціал другого порядку в стаціонарній точці M_0:

$$d^2u(M_0) = \sum_{i,k=1}^{n} H_{ik}(M_0)\, dx_i dx_k. \qquad (1.\ 12)$$

Матрицю H можна привести до діагонального вигляду. Для цього введемо власні числа λ_i і власні вектори $\vec{a}_i$ матриці Н, для яких

$$H(M_0)\vec{a}_i = \lambda_i \vec{a}_i. \qquad (1.\ 13)$$

Припустимо, що $dx_i = Sdz_i$, де dz_i- власний вектор матриці $H(M_0)$, S- ортогональна матриця (тобто $S^{-1} = S^T$). Цією матрицею може бути матриця повороту. Тепер використаємо той факт, що якщо власний вектор матриці помножити на будь-який множник, то новий вектор буде також власним вектором матриці з тим же самим власним числом. Як відомо, матриці мають діагональний вигляд в базисі власних векторів. Тобто будемо вважати, що

$$S^{-1}H(M_0)S = D\,,\ D_{ik} = \begin{cases} \lambda_i, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{1. 14}$$

Тепер ми маємо

$$\begin{aligned} d^2u(M_0) &= \sum_{i=1,k}^{n}(Sdz_i)H(M_0)_{ik}(Sdz_k) = \sum_{i,k=1}^{n} dz_i(S^T H(M_0)S)_{ik}\,dz_k = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} dz_i(S^{-1}H(M_0)S)_{ik}\,dz_k = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(dz_i)^2 \end{aligned} \tag{1. 15}$$

Оскільки $(dz_i)^2 > 0$, то питання про існування екстремумів функцій $u(x_1, x_2,.., x_n)$ зводиться до питання про знаки власних чисел λ_k матриці $H(M_0)$.

1.2 Достатня умова існування екстремуму функції n змінних

Для того щоб в стаціонарній точці M_0 існував екстремум двічі диференційовної функції $u(x_1, x_2,.., x_4)$ необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці $H(M_0)$ (1. 11) мали одинакові знаки (при всіх додатних λ_k функція в точці M_0 має мінімум, а при всіх від’ємних λ_k - максимум). Відмітимо, що при різних знаках власних чисел матриці $H(M_0)$ функція $u(x_1, x_2,.., x_n)$ при зміщенні в околі точки M_0 в одних напрямках буде зростати, а в деяких інших напрямках спадати, тобто функція в точці M_0 не має екстремуму. В цьому випадку точка M_0 буде точкою мінімакса функції $u(x_1, x_2,.., x_n)$.

Розглянемо частинний випадок функції двох змінних $u(x, y)$. Позначимо елементи матриці H:

$$H_{11}(M_0) = \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x^2} = A,$$

$$H_{12}(M_0) = \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x \partial y} = B = H_{21},$$

$$H_{22}(M_0) = \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial y^2} = C.$$

Знайдемо визначник матриці $H(M_0)$:

$$\begin{aligned} &\det H(M_0) = \det SS^{-1}H(M_0) = \det S^{-1}H(M_0)S = \\ &= \det D = \lambda_1\lambda_2 = AC - B^2 = \Delta \end{aligned} \tag{1. 16}$$

Якщо знаки власних чисел матриці $H(M_0)$ однакові, то $\Delta > 0$ і функція має екстремум. Знайдемо слід (шнур, трейс) матриці H_0: $TrH(M_0) = TrSS^{-1}H(M_0) = TrS^{-1}H(M_0)S = \lambda_1 + \lambda_2 = A + C$.

Якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то $AC > 0$ і функція $u(x, y)$ має екстремум. У випадку додатних λ_1 та λ_2 величина $A > 0$ та $C > 0$ і функція має мінімум. У випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ величина $A < 0$, $C < 0$ і функція в точці M_0 має максимум. Ми одержали відому достатню умову існування екстремуму функції двох змінних: при $\Delta = AC - B^2 > 0$ екстремум функції $u(x, y)$ в стаціонарній точці M_0 існує:

при $A > 0$ $(C > 0)$ – мінімум, а при $A < 0$ $(C < 0)$ - максимум;

при $\Delta < 0$ екстремум не існує;

при $\Delta = 0$ необхідні додаткові дослідження.

Для функції n змінних ми знайшли достатню умову існування екстремуму при різних власних числах матриці $H(M_0)$. При однакових власних числах матриці $H(M_0)$ необхідні додаткові дослідження.

1.3 Умовні екстремуми функцій

В деяких випадках зустрічаються функції $f(x_1, x_2, .., x_n)$, в яких не всі аргументи незалежні. В таких випадках між аргументами є деякі зв'язки

$$\varphi_k(x_1, x_2, .., x_n) = 0, k = 1, 2.., m \tag{1. 17}$$

Постає питання знаходження екстремумів функцій $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, .., x_n)$ при зв'язках (1. 17) $\vec{\varphi}(\vec{x}) = 0$. Цю задачу записуємо у розгорнутому вигляді

$$f(x_1, x_2, .., x_n) \to extr, \tag{1. 18}$$

$$\varphi_k(x_1, x_2, .., x_n) = 0 \tag{1. 19}$$

або у скороченому (векторному) вигляді

$$f(\vec{x}) \to extr, \tag{1. 18, a}$$

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = 0 \tag{1. 19, a}$$

Ми вважаємо, що функції $\vec{\varphi}_k(\vec{x})$ є диференційовні функції своїх аргументів. В деяких випадках частину змінних можна знайти методом виключень із зв'язків. В таких випадках функція $f(\vec{x})$ може стати функцією $n - m$ незалежних змінних. Тоді для дослідження функції $f(\vec{x})$ на екстремуми можна застосувати звичайні методи дослідження функцій незалежних змінних. Але розв'язання рівняння зв'язків (1. 17) не завжди можливе.

Існує загальний метод розв'язання екстремальних задач (1. 18), (1. 19). За цим методом складається функція $L(\vec{x}, \lambda_0, \vec{\lambda}) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, яка називається функцією Лагранжа

$$L(\vec{x},\lambda_0,\vec{\lambda})=\lambda_0 f(\vec{x})+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(\vec{x}), \qquad (1.\ 20)$$

де $\lambda_0, \vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$- множники Лагранжа. Тепер функція Лагранжа досліджується на екстремум як функція $m+n+1$ змінних.

1.4 Правило множників Лагранжа

1 Нехай в задачі на екстремум (1. 18), (1. 19) функції $f(\vec{x})$ та $\varphi_k(\vec{x})$ неперервні і диференційовні в околі точки $M_0(x_{10}, x_{20},\ldots, x_{n0})$. Якщо точка M_0 є точка локального екстремуму, то знайдуться множники Лагранжа λ_0, $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ (не всі з яких рівні нулю) такі, що

$$\frac{\partial L(\vec{x},\lambda_0,\vec{\lambda})}{\partial x_i}=0, \qquad (1.\ 21)$$

$$\frac{\partial L(\vec{x},\lambda_0,\vec{\lambda})}{\partial \lambda_k}=\varphi_k(\vec{x})=0,\ k=1,2,..,\mathrm{m}. \qquad (1.\ 22)$$

2 Для того щоб $\lambda_0\neq 0$, достатньо, щоб вектори $grad\varphi_k(\vec{x})$ були лінійно незалежними. Таким чином, ми маємо $m+n$ рівнянь для функції Лагранжа з $m+n+1$ аргументом. Відмітимо, що при цьому всі множники Лагранжа можна визначити з точністю до загального множника. При $\lambda_0\neq 0$ можна покласти $\lambda_0=1$. В зв'язку з питанням про рівність λ_0 нулю можна діяти також так: ми можемо розв'язати екстремальну задачу (1. 18), (1. 19) при $\lambda_0=1$ в функції Лагранжа (1. 20). Якщо ми одержимо протиріччя, то покладаємо $\lambda_0=0$ і розв'язуємо задачу знову.

Приклад 1. 1. Знайти координати точки M на параболі $y=3-x^2$, для якої площа прямокутника OAMB буде максимальною (рисунок 1.1).

□

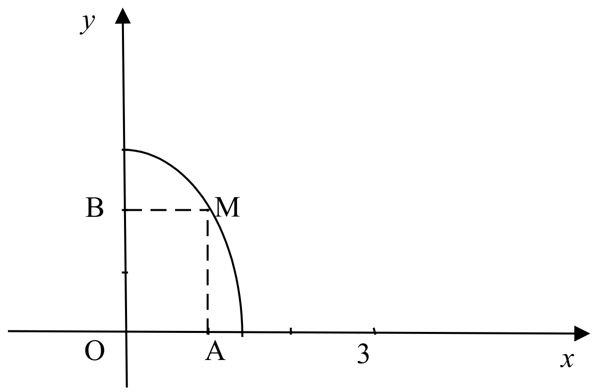

Рисунок 1.1

Нехай точки мають координати $A(x,\,0)$, $M(x,\,y)$, $B(0,\,y)$. Нам потрібно знайти максимум функцій $f(x,y)=S=xy$ при умові, що $y=3-x^2$, тобто $\varphi(x,y)=x^2+y-3=0$ і при цьому $x>0$ і $y>0$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=\lambda_0 xy+\lambda_1(x^2+y-3),$$

спочатку розглянемо випадок $\lambda_0\neq 0$. Беремо $\lambda_0=1$. Знаходимо похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+2x\lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x^2+y-3$$

Прирівнюємо ці похідні нулю і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y + 2x\lambda_1 = 0 \\ x + \lambda_1 = 0 \\ x^2 + y - 3 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо $\lambda_1 = -x$, тоді перше рівняння стає таким: $y = 2x^2$. З третього рівняння маємо $x_{1,2} = \pm 1$. Вибираємо додатне $x_0 = +1$. Тоді $y_0 = 3 - 1^{\,2} = 2$ і точка $M_0(1,2)$. Для перевірки існування екстремуму розглянемо функцію Лагранжа при $\lambda_1 = -1$, тобто ми маємо $L(x, y, 1, -1) = xy - y - x^2 + 3$.

Знаходимо перші похідні: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 2x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x - 1$.

Тепер знайдемо другий диференціал в стаціонарній точці $M_0(1,2)$. Для цього знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0.$$

Тоді

$$d^2 L(1,2,1,-1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \partial y^2 = -2dx^2 + 2dxdy =$$
$$= 2dx(-dx + dy).$$

Тепер необхідно врахувати, що ми повинні розглядати точки на параболі в околі точки $M_0(1,2)$. Тому ми маємо $2xdx + dy = 0$, що в точці M_0 дає $dy = -2dx$. Підставляємо отримане dy в формулу для $d^2 L$, ми одержуємо, що $d^2 L(1,2,1,-1) = -6(dx)^2 < 0$. Таким чином, ми бачимо, що дійсно ми одержали максимальне значення площі прямокутника OAMB, яке дорівнює $f_{\max}(x, y) = x_0 y_0 = 1 \cdot 2 = 2$. Ми не прийшли до протиріччя при $\lambda_0 \neq 0$. Це означає, що дійсно можна взяти $\lambda_0 = 1$.

Тепер зробимо перевірку отриманих результатів за методом виключень. Із зв'язку маємо $y = 3 - x^2$, підставляємо цей y у функцію $f(x, y) = xy = 3x - x^3 = g(x)$. З необхідної умови $g'(x) = 3 - 3x^2 = 0$, $x = \pm 1$, $x_0 = 1$ знаходимо координати стаціонарної точки $M_0(1, 2)$. Для вирішення питання про існування екстремуму знаходимо другу похідну функції $g(x)$: $g''(x) = -6x$. В точці $x_0 = 1$ ця похідна має від'ємний знак. Тому функція $g(x) = f(x, y) = xy$ має максимум. Таким чином, метод множників Лагранжа і метод виключень дають один і той же результат. ■

Приклад 1. 2. Дослідити на екстремуми функцію $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2$, якщо змінні x_1 та x_2 пов'язані рівністю $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$.

□ Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(2x_1 + 7x_2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2).$$

Розглянемо спочатку випадок $\lambda_0 \neq 0$. Беремо $\lambda_0 = 1$.

Знаходимо похідні функції Лагранжа $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + 2\lambda_1 x_1$, $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 7 + 2\lambda_1 x_2$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1^2 + x_2^2$.

Прирівнюємо ці похідні до нуля і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 7 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Із зв'язку маємо $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Тоді перші рівняння стають суперечливими, оскільки $2 \neq 0$ та $7 \neq 0$. Таким чином, в функції Лагранжа повинно бути $\lambda_0 = 0$. Тому ми повинні написати:

$$L(x_1, x_2, 0, \lambda_1) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2).$$

Знову $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1^2 + x_2^2$. В стаціонарній точці $x_1 = x_2 = 0$ і $L_{\text{ñò àö}}(0,0,0,\lambda_1) = 0$, $f(x_1, x_2)_{\text{ñò àö}} = f(0,0) = 0$. Ми бачимо, що функція Лагранжа з $\lambda_0 = 0$ дає результат (на відміну від $\lambda_0 \neq 0$). В правильності результату можна переконатись безпосередньо. Дійсно із зв'язком $x_1^2 + x_2^2 = 0$ узгоджуються координати однієї точки $O(0,0)$, в якій $f(x_1, x_2) = 0$.■

ЛЕКЦІЯ 2

Варіаційне числення

2.1 Задачі, які приводять до варіаційного числення

В історії науки відома велика кількість задач, які розв'язуються єдиним методом, основаним на варіаційному численні. Серед цих задач важливе значення мають задачі Дідони, які відіграють особливу роль, оскільки з цими задачами пов'язана деяка термінологія у варіаційному численні. Події пов'язані із задачами Дідони, відбувалися у 825 (або у 814) році до нової ери. Дідона разом із своїми супутниками висадилася на березі Середземного моря. Вони попросили вождя місцевого племені Ярбу дозволити оселитися на березі моря на ділянці землі, яку можна охопити шкурою бика. Вождю здавалося, що плем'я втратить невелику ділянку землі. Але на їхній подив люди Дідони порізали шкуру бика на вузенькі смужки і зв'язали їх. Утворилась досить довга мотузка, якою можна було обмежити фігуру досить великої площі. Згідно з легендою, на цій ділянці землі була заснована центральна частина (цитадель) міста – держави Карфаген. Відносно способу вибору ділянки землі на березі моря відрізняють кілька задач Дідони. Ми розглянемо дві постановки задач.

1 Задача Дідони з фіксованими кінцями. Знайти фігуру з найбільшою площею, обмежену межою сталої довжини l_{AB}, причому кінці межі знаходяться у фіксованих точках A та B на березі моря.

2 Задача Дідони з рухомими кінцями. Знайти фігуру з найбільшою площею, обмежену межою сталої довжини l_{AB} з кінцями межі, які можуть рухатись по берегу моря.

За допомогою геометричних методів у Древній Греції було доведено, що така фігура є частиною круга. Сформулюємо тепер задачі Дідони в термінах, придатних для використання варіаційного числення.

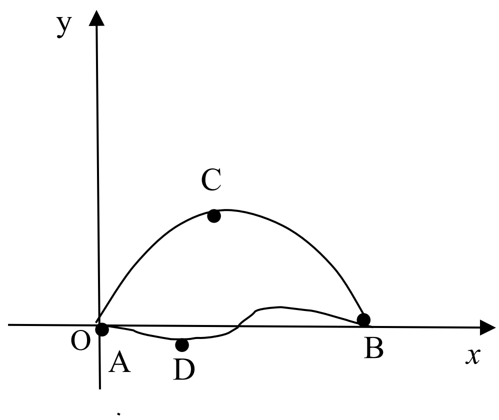

Рисунок 2.1

На рисунку 2.1 зображена ділянка морського берега ADB. Точки A та B поєднані прямою, яку ми приймемо за вісь Ox. Необхідно знайти фігуру, обмежену лініями ACB та ADB, з максимальною площею при фіксованій довжині лінії ACB. Точка C має координати x та y ($x_A \le x \le x_B$, ми обираємо $x_A = 0$). Тоді задача Дідони зводиться до знаходження функції $y(x)$, яка дає максимум інтеграла

$$S[y] = \int_0^{x_B} y(x)\, dx. \tag{2. 1}$$

При цьому повинна бути сталою довжина l_{AB} дуги ACB, тобто повинен бути сталим інтеграл

$$l_{AB} = \int\limits_{ACB} dl = \int\limits_{0}^{x_B} \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx. \qquad (2.\,2)$$

Сума довжин дуг кривих ACB та ADB є периметр фігури обмеженої цими лініями. Таким чином, значення периметра фігури при знаходженні максимуму інтеграла (2. 1) також повинно бути фіксованим. Тому задачі по знаходженню функції, яка дає екстремум деякого інтеграла при сталих значеннях деяких інтегралів від цієї функції та її похідної, називаються ізопериметричними задачами.

2.2 Задача про брахістохрону (криву спуску за найменший час)

Припустимо, що у нас є гірка у формі циліндричної поверхні. Поперечний переріз гірки зображений на рисунку 2.2.

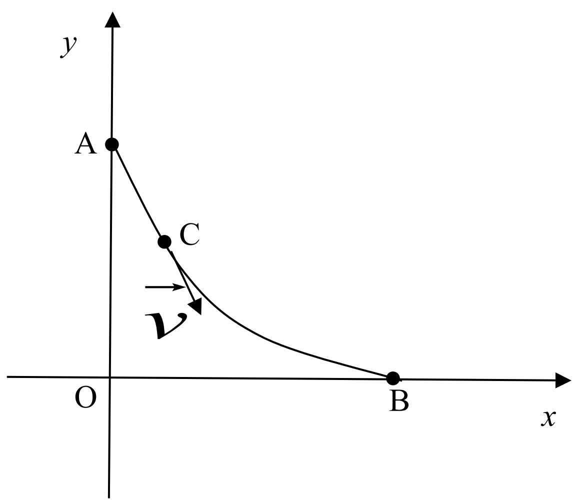

Рисунок 2.2

Потрібно знайти криву ACB (тобто напрямну лінію циліндричної поверхні), щоб час руху матеріальної точки під дією сили тяжіння Землі без тертя від точки $A(x_A,\, h) = A(0, h)$ до точки $B(x_B, 0)$ був найменшим. Ми розглядаємо рух матеріальної точки поблизу поверхні Землі. Тоді всі тіла рухаються рівноприскорено зверху донизу (проти осі Oy) із сталим прискоренням

$g \approx 9.8$ ì / $ñ^2$. Як відомо, швидкість руху в такому випадку дорівнює $\left|\vec{v}(l)\right| = v(l) = \sqrt{2g(h-y)}$. Відмітимо, що цю формулу для швидкості можна одержати із закону збереження енергії. Дійсно, кінетична енергія $W_{ê^{з}n} = mv^2(l)/2$, а потенціальна енергія $W_{pot}(h) - W_{pot}(y) = mg(h-y)$, де m - маса тіла. Ми припускаємо що в точці A матеріальна точка (тіло) вільно, без поштовху відпускається, тобто $v(0) = 0$. Оскільки $v(t) \approx \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$ і $\Delta l = \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\Delta x$, то $\Delta t \approx \dfrac{\Delta l}{v(l)} \approx \dfrac{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}{v(l)}\Delta x$. Час руху від точки A до точки B визначається інтегралом

$$T_{AB} = \int\limits_{ACB} \frac{dl}{v(l)} = \int\limits_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}{\sqrt{2g\left(h-y(x)\right)}}dx. \qquad (2.\ 3)$$

Нам потрібно знайти таку функцію $y(x)$, щоб значення інтеграла (2. 3) було найменшим. Відмітимо дві обставини, пов'язані із інтегралом (2. 3): а) підінтегральна функція в (2. 3) залежить від функції $y(x)$ та її похідної; б) на кінцях інтервалу (в точках A та B) функція має фіксовані значення: $y_A = h, \quad y_B = 0$.

2.3 Функціонали

Означення 2. 1. Функціоналом називається закон, за яким функціям $y(x)$ в області визначення ставляться у відповідність числа J.

Ми вивчаємо функціонали, які є інтегралами. Спочатку розглянемо функціонали вигляду

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad (2.\ 4)$$

Функція $F(x,y,y')$ називається інтегрантом, а також функцією Лагранжа, та лагранжіаном. До таких функціоналів відносяться інтеграли (2. 1) та (2. 3), екстремуми яких шукаються в задачах Дідони та про брахістохрону.

Приклад 2.1. Обчислити $J[y]=\int_0^1 y^2dx$ для функцій: а) $y_1=x^3$; б) $y_2=\cos x$; в) $y_3=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

☐ а) $J[y_1]=\int_0^1 x^6dx=\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1=\frac{1}{7}\approx 0.143$.

б) $J[y_2]=\int_0^1 \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)_0^1=$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\right)\approx 0.727$.

в) $J[y_3]=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2(1-0)=2$.■

Таким чином, значення функціонала залежать від вибору функції.

Означення 2. 2. Функціональним простором називається сукупність функцій. Приклади функціональних просторів:

а) $C[a,b]$ - сукупність функцій неперервних на відрізку $[a,b]$;

б) $C_1[a,b]$ - сукупність неперервних функцій, які мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$ (диференційовних функцій);

в) $C_m[a,b]$ - сукупність неперервних функцій, які мають на відрізку $[a,b]$ неперервні похідні до порядку m включно.

Означення 2. 3. Нормованим функціональним простором називається простір, в якому задана норма функції. Норма є невід'ємне скінченне число, яке для функції $f(x)$ позначається як $\|f(x)\|$. Норма має властивості:

1) $\|f(x)\| \geq 0$, причому $\|f(x)\| = 0$ тільки при $f(x) \equiv 0$;

2) $\|\lambda f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\|$, де λ - число;

3) $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$.

Ми бачимо, що норма функції має властивості модуля числа. Як норму функцій в різних функціональних просторах ми будемо використовувати такі означення:

а) в просторі $C[a,b]$ $\|f(x)\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$;

б) в просторі $C_1[a,b]$ $\|f(x)\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ або $\|f(x)\| = \max\left[\max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|, \max\limits_{a\leq x\leq b} |f'(x)|\right]$;

в) в просторі $C_m[a,b]$ $\|f(x)\| = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{a \leq x \leq b} \left|f^{(k)}(x)\right|$ або $\max\limits_{0 \leq k \leq m}\left[\max\limits_{a \leq x \leq b} \left|f^{(k)}(x)\right|\right]$, причому $f^{(0)}(x) = f(x)$.

В просторах, які називаються метричними, вводиться поняття відстані $\rho(f,g)$ між функціями $f(x)$ та $g(x)$:

$$\rho(f,g) = \|f(x) - g(x)\|. \tag{2. 5}$$

Розглянемо дві функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Позначимо $y_1(x)$ як $\overline{y}(x)$, а $y_2(x) = \overline{y}(x) + \delta y(x)$. Через $\delta y(x)$ ми позначаємо різницю функцій $y_2(x) - y_1(x)$, тобто одна деяка функція а не добуток деякого δ на $y(x)$. Будемо вважати, що $y_2(x)$ близька до $y_1(x)$, тобто на відрізку $[a,b]$ норма $\|\delta y(x)\|$ мала. Функції $y_1(x) = \overline{y}(x)$, $y_2(x)$ та $\delta y(x)$ зображені на рисунку 2.3.

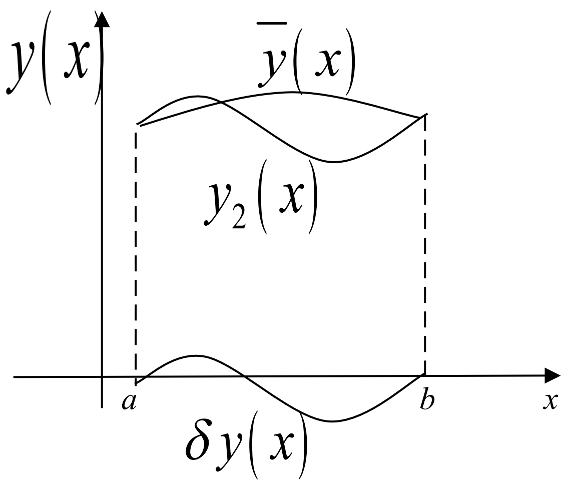

Рисунок 2.3

Тепер розглянемо функціонали $J[y_1] = J\left[\overline{y}\right]$ та $J[y_2] = J\left[\overline{y} + \delta y\right]$.

Означення 2. 4. Величина $\Delta J[y] = J\left[\overline{y} + \delta y\right] - J\left[\overline{y}\right]$ називається приростом функціонала $J[y]$.

Приклад 2. 2. Для функціонала $J[y] = \int\limits_0^1 y^2 dx$

$$\Delta J[y] = \int\limits_0^1 (\overline{y} + \delta y)^2 dx - \int\limits_0^1 \overline{y}^2 dx = \int\limits_0^1 \left[(\overline{y} + \delta y)^2 - \overline{y}^2 \right] dx =$$
$$= 2\int\limits_0^1 \overline{y}(x)\, \delta y(x)\, dx + \int\limits_0^1 \left[\delta(x)\right]^2 dx \qquad (2.\,6)$$

Перший інтеграл в останній рівності залежить від $\delta y(x)$ лінійно, а другий залежить від квадрата $\delta y(x)$. При достатньо малих $\left\|\delta y(x)\right\|$ норма $\left\|\left[\delta y(x)\right]^2\right\| = \left(\left\|\delta y(x)\right\|\right)^2 << \left\|\delta y(x)\right\|$ і другий інтеграл в кінцевій рівності (2. 6) буде нескінченно малою вищого порядку малості в порівнянні з першим інтегралом.

Означення 2. 5. Варіацією $\delta J[y]$ функціонала $J[y]$ називається частина $\Delta J[y]$, яка залежить лінійно від $\delta y(x)$. В прикладі 2. 2 $\delta J[y] = 2\int_0^1 y(x)\,\delta y(x)\,dx$.

Зауваження 2. 1. Варіація функціонала подібна до диференціала функції в диференціальному численні.

2.4 Екстремуми функціонала

Різні функції у функціоналі будемо називати припустими функціями або функціями порівняння. Будемо вважати, що такі функції, якщо вони задовольняють умови існування функціонала, належать класу E.

Означення 2. 6. ε -околом функції $\overline{y}(x)$ називається сукупність функцій $y(x)$, для яких відстань (2. 5) $\rho\left(\overline{y}, y\right) < \varepsilon$.

Означення 2. 7. Функціонал $J[y]$ має в класі припустимих функцій E локальний максимум (мінімум), що реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо знайдеться такий ε - окіл функцій $\overline{y}(x)$, що для всіх функцій із цього околу виконується нерівність

$$J[y] \le J\left[\overline{y}\right] \text{ в максимумі}$$

або (2. 7)

$$J[y] \ge J\left[\overline{y}\right] \text{ в мінімумі.}$$

Необхідна умова існування екстремуму функціонала $J[y]$ має вигляд

$$\delta J\left[\overline{y}\right] = 0. \tag{2.8}$$

Ця умова подібна до умови рівності нулю похідних та диференціалів функцій (наприклад 1. 10) в стаціонарній точці.

2.5 Рівняння Ейлера

Варіацію функціонала (2. 4) можна написати у вигляді

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \delta y'(x) \right] dx. \quad (2.\ 9)$$

Вивчимо спочатку варіацію функціонала (2. 4) для випадку функцій, які на кінцях відрізку $[a,b]$ мають фіксовані значення

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \quad (2.\ 10)$$

Такі функції зображені на рисунку 2. 3. В задачі Дідони з фіксованими кінцями та в задачі про брахістохрону потрібно знайти екстремум функціонала саме з такими функціями. Внаслідок умов (2. 10) маємо

$$\delta y(a) = 0, \qquad \delta y(b) = 0. \quad (2.\ 11)$$

Розглянемо в (2. 9) другий доданок. Оскільки $\delta y'(x) = \dfrac{d}{dx}\delta y(x)$, то його можна проінтегрувати частинами:

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \left(\frac{d}{dx} \delta y(x) \right) dx = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \\ du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right) dx \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} dv = \left(\dfrac{d}{dx} \delta y(x) \right) dx \\ v = \delta y(x) \end{array} \right| = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) \delta y(x)\, dx = \left. \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right|_{x=b} \cdot \delta y(b) - \qquad (2.\ 12)$$

$$-\left. \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right|_{x=a} \cdot \delta y(a) - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) \delta y(x)\, dx \,.$$

Перші два доданки в правій частині цієї рівності дорівнюють нулю внаслідок умов (2. 11). Тоді після підстановки (2. 12) замість другого доданку в (2. 9) одержуємо

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right] \delta y(x)\, dx \,. \qquad (2.\ 13)$$

Варіація функціонала за необхідною умовою існування екстремуму (2. 8) повинна дорівнювати нулю при довільних $\delta y(x)$. Це можливе тільки у випадку рівності нулю виразу у квадратних дужках в (2. 13). Таким чином, ми одержуємо диференціальне рівняння для функції $\overline{y}(x)$ (далі позначаємо $\overline{y}(x) = \hat{y}(x)$), яка може давати екстремум функціонала $J[y]$ при фіксованих значеннях функції на кінцях відрізка $[a, b]$

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \,. \qquad (2.\ 14)$$

Це рівняння називається рівнянням Ейлера.

Теорема 2. 1. *Якщо функція* $\hat{y}(x)$ *дає екстремум функціонала* $J[y]$ *(2. 4) з фіксованими кінцями, то вона задовольняє рівняння Ейлера.*

Теорема 2. 2. *Рівняння Ейлера не зміниться, якщо до інтегранта в (2. 4) додати повну похідну за* x.

Дійсно, розглянемо $F_1\left(x, y, y'\right) = \frac{d}{dx} U\left(x, y\right)$. Тоді $\int\limits_a^b F_1\left(x, y, y'\right) dx = U\left(b, y_b\right) - U\left(a, y_a\right)$. Внаслідок умов (2. 10) варіація останнього функціонала дорівнює нулю. Для $F_1\left(x, y, y'\right)$ функція $U\left(x, y\right)$ не залежить від y', оскільки тоді F_1 повинно також залежати від y''.

Наслідок теореми 2. 2. Рівняння Ейлера не зміниться, якщо до інтегранта в функціоналі (2. 4) додати функцію $f\left(x\right) + g\left(y\right) y'$, де $f\left(x\right)$ та довільна інтегрована функція x, а $g\left(y\right)$ - довільна диференційована функція y. Відмітимо, що в даному випадку $\int\limits_a^b f\left(x\right) dx$ та $\int\limits_a^b g\left(y\right) y'dx$ є сталі. Ці сталі можуть змінити значення функціонала, але не змінюють функції, які дають стаціонарне значення функціонала. Це аналогічне тому, що в диференціальному численні функції, які відрізняються на сталу, мають одні й ті ж стаціонарні точки.

Відмітимо, що рівняння Ейлера містить повну похідну за x, тобто необхідно враховувати залежність від x також функції $y\left(x\right)$ та похідної $y'\left(x\right)$. Після обчислення похідної за x рівняння (2. 14) можна також переписати у вигляді

$$\begin{gathered}\frac{\partial F\left(x, y, y'\right)}{\partial y} - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial y \partial y'} y' - \\ - \frac{\partial^2 F\left(x, y, y'\right)}{\partial y'^2} y'' = 0.\end{gathered} \tag{2. 15}$$

Таким чином, рівняння Ейлера для функціонала (2. 4) містить другу похідну невідомої функції $y\left(x\right)$.

Оскільки залежність інтегранта $F\left(x, y, y'\right)$ задано явно згідно з (2. 4), то частинні похідні інтегранта за x, y, y' є відомі функції цих величин. З (2. 5) бачимо, що інтегрант повинен мати частинні похідні за x та другі за $x,\ y,\ y'$.

Означення 2. 8. Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями, а також стаціонарними точками задачі (2. 4) з фіксованими кінцями (2. 10).

Приклад 2. 3. Знайти екстремаль задачі

$$J[y]=\int_0^1\left(4xy+yy'+y'^2\right)dx \text{ при } y(0)=0,\quad y(1)=2.$$

☐ З функціонала ми маємо $F(x,y,y')=4xy+yy'+y'^2$. Тоді $\dfrac{\partial F}{\partial y}=4x+y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=y+2y'$. Підставляємо ці похідні в рівняння Ейлера (2. 14) або (2. 15) і одержуємо диференціальне рівняння для функції $y(x)$: $4x-2y''(x)=0$, тобто $y''(x)=2x$. Тоді $y'(x)=\int y''(x)\,dx=x^2+C_1$ і $y(x)=\int\left(x^2+C_1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. Тепер ми повинні знайти сталі C_1 та C_2. З умови $y(0)=0$ ми одержуємо: $0=0+0+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$, а з умови $y(1)=2$ маємо $2=\dfrac{1}{3}+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=\dfrac{5}{3}$. Таким чином, знаходимо екстремаль, яка задовольняє задані умови $\overline{y}(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^3+5x\right)$. Відмітимо, що розв'язок рівняння Ейлера для інтегранта $F=4xy+yy'+y'^2$ в функціоналі (2. 4) при довільних фіксованих значеннях $y(a)$ та $y(b)$ має вигляд $y=\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. Конкретним значенням $y(a)$ та $y(b)$ відповідають конкретні значення сталих C_1 та C_2.

Для цих сталих можна також написати $C_1=y'-x^2$ та $C_2=-\dfrac{2}{3}x^3+y'x$, тобто деякі комбінації y,y' та x повинні бути сталими. Таким чином, ми одержуємо два інтеграли рівняння

Ейлера для інтегранта $F = 4xy + yy' + y'^2$. З обчислень видно, що доданок yy' в функціоналі не дає внесків в рівняння Ейлера. Це не випадково, оскільки $\int\limits_a^b yy'dx = \int\limits_{y_a}^{y_b} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}\left(y^2(b) - y^2(a)\right)$ є деяке число. ■

2. 6 Деякі інтеграли рівняння Ейлера

Рівняння Ейлера (2. 14), (2. 15) є звичайне диференціальне рівняння другого порядку для функції $y(x)$. Загальний розв'язок та загальний інтеграл цього диференціального рівняння містить дві довільні сталі (це можна бачити у прикладі 2. 2.). Відомо, що в деяких випадках можна у загальному вигляді знизити порядок диференціального рівняння. Це можна зробити для так званих неповних диференціальних рівнянь, тобто для рівнянь, які не містять x або y. Виникає питання про можливість зниження порядку рівняння Ейлера, тобто про знаходження одного інтеграла рівняння Ейлера в загальному вигляді.

Розглянемо спочатку випадок, коли інтегрант F в (2. 4) не містить y, тобто випадок $F(x, y')$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ і ми маємо з рівняння Ейлера (2. 14) інтеграл цього рівняння

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = C_1, \tag{2. 16}$$

де C_1 - довільна стала. Таким чином, для інтегранта $F(x, y')$ можна знизити порядок рівняння Ейлера.

Тепер розглянемо випадок, коли інтегрант не містить аргументу x, тобто випадок $F(y, y')$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ і рівняння (2. 15) набуває вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0\ . \tag{2. 17}$$

Помножимо це рівняння на $y'(x)$. Можна побачити, що одержаний вираз є повна похідна за x від виразу $F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}$.

Дійсно, $$\frac{d}{dx}\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}y''} - \cancel{y''\frac{\partial F}{\partial y'}} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(y')^2 -$$
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'\,y'' = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right] = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0.$$

Звідси маємо інтеграл рівняння Ейлера для інтегранта $F(y, y')$

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_2, \tag{2. 18}$$

де C_2 - довільна стала. Ми можемо сказати, що для інтегранта $F(y, y')$ величина (2. 18) не залежить від x.

2. 7 Розв’язання задачі про брохістохрону

З (2. 3) випливає, що інтегрант

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2g(h - y(x))}} \tag{2. 19}$$

не залежить від x. Тому ми можемо скористатись першим інтегралом (2. 18). Оскільки $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{1}{\sqrt{2g(h-y)}}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$, то з (2. 18) маємо $F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{1}{\sqrt{2g(h-y)}}\dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_2$. Цей вираз можна переписати у вигляді $(h-y)(1+y'^2) = \dfrac{1}{2gC_2^2} = C_3^2$. Звідси можна знайти похідну: $y' = \pm\sqrt{\dfrac{C_3^2 - h + y}{h - y}}$. Зробимо заміну змінних

$h - y = \dfrac{C_3^2}{2}(1 - \cos t)$, $dy = -\dfrac{C_3^2}{2}\sin t dt$, тоді

$y' = \pm ctg\dfrac{t}{2}$, $dx = \dfrac{dy}{y'} = \mp C_3^2 \sin^2\dfrac{t}{2}dt = \mp\dfrac{C_3^2}{2}(1 - \cos t)\,dt$. Знак можна внести в t. Далі будемо розглядати $dx = \dfrac{C_3^2}{2}(1 - \cos t)\,dt$.

Тепер для x та y можна написати

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_3^2}{2}(t - \sin t) + C_4 \\ y = h - \dfrac{C_3^2}{2}(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ми одержали рівняння функції $y(x)$ в параметричній формі. Крива, яка відповідає цій функції, називається циклоїдою. Виберемо параметр t таким, що значення $t = 0$ відповідає розташуванню матеріальної точки (тіла) в точці $A(0, h)$. Тоді стала $C_4 = 0$. За постановкою задачі найменше $y = 0$. Цього значення можна досягти при $C_3^2 = h$ в точках $t_n = (2n + 1)\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Рівняння циклоїди, на якій при найбільшому y знаходиться точка $A(0, h)$ при $t_A = 0$, а при найменшому $y = 0$ точка $B(x_B, 0)$ (при $t_B = \pi$, $x_B = \pi\dfrac{h}{2}$) має вигляд

$$\begin{cases} x = \dfrac{h}{2}(t - \sin t) \\ y = \dfrac{h}{2}(1 + \cos t). \end{cases} \qquad (2.\,20)$$

Циклоїда має деякі цікаві властивості. Наприклад, для транспорту має велике значення те, що траєкторія руху точки на ободі колеса є циклоїда.

Друга важлива властивість циклоїди пов’язана із рухом матеріальної точки по циклоїді (рисунок 2. 4).

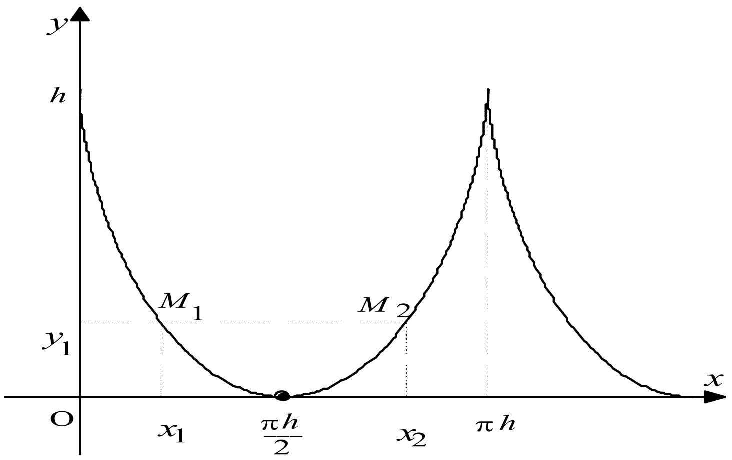

Рисунок 2. 4

Розглянемо рух матеріальної точки від точки $M_1\left(x_1, y_1\right)$ на циклоїді: ($0 < x_1 < x_0$, $x_0 = \dfrac{\pi h}{2}$ відповідає $y = 0$). Тоді під час руху під дією сили тяжіння без тертя на інтервалі $\left(x_1, x_0\right)$ швидкість матеріальної точки зростає, а при $x_0 < x < \pi h$ спадає. При цьому величина y для $x \in \left(x,\, x_0\right)$ спадає, а для $x_0 < x < \pi h$ зростає. Коли матеріальна точка досягне висоти $y = y_1$, (при $x = x_2$), то її швидкість буде дорівнювати нулю. Позначимо цю точку $M_2\left(x_2, y_1\right)$ (рисунок 2. 4). Після цього матеріальна точка буде рухатись по циклоїді від точки M_2 до точки M_1. Таким чином, матеріальна точка буде коливатись між точками M_1 та M_2. Знайдемо період цих коливань. Для періоду коливань, за аналогією з (2. 3), можна написати

$$T_{\hat{e}\hat{i}\,\ddot{e}.}=\frac{4}{\sqrt{2g}}\int\limits_{x_1}^{x_0}\frac{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}{\sqrt{y_1-y}}\,dx=\frac{4}{\sqrt{2g}}\int\limits_{t_1}^{\pi}\frac{\sqrt{1+ctg^2\frac{t}{2}}}{\sqrt{\cos t_1-\cos t}}\sqrt{\frac{h}{2}}\left(1-\cos t\right)dt=$$

$$=4\sqrt{\frac{h}{2g}}\int\limits_{t_1}^{\pi}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t_1}{2}-\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt=\left|\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=z\\ \sin\frac{t}{2}dt=-2dz\\ \cos\frac{t_1}{2}=z_1\\ z_2=\cos\frac{\pi}{2}=0\end{array}\right|=-8\sqrt{\frac{h}{2g}}\int\limits_{z_1}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z_1^2-z^2}}=$$

$$=8\sqrt{\frac{h}{2g}}\arcsin\frac{z}{z_1}\Bigg|_0^{z_1}=4\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$$

Ми бачимо, що період коливань на циклоїді не залежить від координат початкової точки M_1. Це означає, що період коливань на циклоїді не залежить від амплітуди коливань. Ця властивість циклоїди використовується в годинниках.

ЛЕКЦІЯ 3

3.1 Функціонали з вищими похідними

Розглянемо функціонал, який залежить від похідної другого порядку

$$J[y]=\int\limits_a^b F\left(x,y,y',y''\right)dx \qquad (3.\ 1)$$

з фіксованими функцією і її похідною в точках a та b.

$$y(a)=y_a,\ y'(a)=y'_a,\ y(b)=y_b,\ y\ (b)=y'_b. \qquad (3.\ 2)$$

Тому в точках a та b варіація функції і її похідної дорівнюють нулю:

$$\delta y(a)=\delta y(b)=0;\ \delta y'(a)=\delta y'(b)=0. \qquad (3.\ 3)$$

Для варіації функціонала можна написати

$$\delta J[y]=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x)+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''(x)\right]dx. \qquad (3.\ 4)$$

Інтегрування другого доданку в цьому інтегралі частинами дає, як і раніше, результат $-\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y(x)\,dx$. Тепер проінтегруємо третій доданок в (3. 4):

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''(x)dx=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\left(\frac{d^2}{dx^2}\delta y(x)\right)dx=\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=b}\delta y'(b)-$$
$$-\left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x=a}\delta y'(a)-\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\left(\frac{d}{dx}\delta y(x)\right)dx.$$

Перші два доданки в цій формулі дорівнюють нулю внаслідок фіксованості значень похідних в точках a та b (3. 3). Останній доданок знову про інтегруємо частинами:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''(x)dx=-\left.\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right|_{x=b}\delta y(b)+\left.\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right|_{x=a}\delta y(a)+$$
$$+\int_a^b\delta y(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)dx=\int_a^b\left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y(x)\,dx.$$

Знову внаслідок умов (3. 3) перші два доданки дорівнюють нулю. Підставляємо вирази для інтегралів, які містять $\delta y'(x)$ та $\delta y''(x)$, в (3. 4) і одержуємо варіацію функціонала (3. 1):

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} \right] \delta y(x)\, dx. \qquad (3.5)$$

Знову ми бачимо, що при довільних $\delta y(x)$ варіація $\delta J[y]$ дорівнює нулю тільки у випадку, коли вираз у квадратних дужках в (3. 5) дорівнює нулю. Таким чином, інтегрант в (3. 1) повинен задовольняти диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \qquad (3.6)$$

Можна розглянути функціонали із похідними функції до $n-$го порядку включно

$$J[y] = \int_a^b F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) dx. \qquad (3.7)$$

при фіксованих значеннях функції $y(x)$ та її похідних $y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)$ в точках a та b. Тоді варіація функціонала (3. 7) дорівнює нулю, якщо інтегрант $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial F}{\partial y'''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \qquad (3.8)$$

Рівняння (3. 6), (3. 8) називаються рівняннями Ейлера-Пуассона. Ми бачимо з рівнянь (3. 6), (3. 8), що інтегрант $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$ повинен мати неперервні похідні за всіма змінними до $(n+1)-$го порядку включно.

Теорема 3. 1. *Якщо функція* $y(x)$ *дає екстремум функціонала (3. 7), то вона є розв'язком диференціального рівняння Ейлера-Пуассона (3. 8).*

Означення 3. 1. Розв’язок рівняння Ейлера –Пуассона (3. 8) називається екстремаллю функціонала (3. 7).

Приклад 3. 1. Знайти екстремаль функціонала

$$J[y]=\int_a^b\left(4y^2+5(y')^2+(y'')^2-2ye^{3x}\right)dx \tag{3.9}$$

□ Ми маємо $F(x,y,y',y'')=4y^2+5(y')^2+(y'')^2-2ye^{3x}$. Знаходимо похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=8y-2e^{3x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=10y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=2y''$. Для цих похідних рівняння Ейлера-Пуассона (3. 6) має вигляд

$$y^{(4)}-5y''+4y=e^{3x}. \tag{3.10}$$

Ми одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Як відомо, загальний розв’язок $y_{çí}$ цього рівняння можна подати у вигляді суми $y_{çí}=y_{çî}+y_{÷í}$.Щоб знайти загальний розв’язок $y_{çî}$ лінійного однорідного рівняння, складаємо характеристичне рівняння: $k^4-5k^2+4=0$. Розв’язки цього рівняння $k_{1,2}=\pm1,\ \ k_{3,4}=\pm2$. Оскільки корені характеристичного рівняння різні, то $y_{çî}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$, де C_1,C_2,C_3,C_4 - довільні сталі. Права частина одержаного диференціального рівняння (3.10) $e^{3x}=P_0(x)\,e^{ax}$, де $P_0(x)=1,\ a=3$.Частинний розв’язок $y_{÷í}(x)=x^rP_0(x)\,e^{ax}$, оскільки $a=3\neq\left[\begin{array}{l}k_{1,2}=\pm1\\ k_{3,4}=\pm2\end{array}\right.$, то $r=0$ (Розв’язок неоднорідного рівняння нерезонансного типу). Тому $y_{÷í}(x)=Ae^{3x}$, де A невідома стала, яку можна знайти з диференціального рівняння яке розв’язується. Дійсно, після підстановки цього $y_{÷í}(x)$ в диференціальне рівняння маємо $\left(3^4-5\cdot3^2+4\right)Ae^{3x}=e^{3x}\ \Rightarrow\ A=\dfrac{1}{40}$. Таким чином, ми знаходимо загальний розв’язок диференціального рівняння (3.10) (тобто екстремаль функціонала (3.9)):

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} + \frac{1}{40} e^{3x}. \ \blacksquare$$

3. 2 Функціонали, які залежать від кількох функцій

Розглянемо функціонал

$$J\left[\vec{y}\right] = J\left[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\right] = \int_a^b F\left(x, \vec{y}, \vec{y}\,'\right) dx = \\ = \int_a^b F\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) dx \tag{3.11}$$

при фіксованих значеннях $\vec{y}(a)$ та $\vec{y}(b)$. Для скорочення запису ми ввели вектори $\vec{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)$ та $\vec{y}\,'(x) = \left(y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right)$. Ми маємо

$$\delta y_k(a) = 0, \quad \delta y_k(b) = 0, \tag{3. 12}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Для варіації функціонала (3.11) можна написати

$$\delta J\left[\vec{y}\right] = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k(x) + \frac{\partial F}{\partial y_k'} \delta y_k'(x)\right] dx.$$

Якщо проінтегрувати частинами доданки з $\delta y_k'(x)$ і врахувати (3. 12), то можна одержати $\delta J\left[\vec{y}\right] = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right] \delta y_k(x)\, dx$.

Внаслідок довільності $\delta y_k(x)$ ми одержуємо звідси, що

$\delta J\left[\vec{y}\right]=0$ тільки у випадку, якщо функції $y_k\left(x\right)$ є розв'язки системи диференціальних рівнянь Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k}=0. \qquad (3.\ 13)$$

Приклад 3. 2. Знайти екстремаль функціонала

$$J[y_1,y_2]=\int_a^b\left[8y_1y_2+\left(y'_1\right)^2+\left(y'_2\right)^2\right]dx. \qquad (3.14)$$

□ Ми маємо в даному випадку $F\left(x,y_1,y_2,y'_1,y'_2\right)=8y_1y_2+\left(y'_1\right)^2+\left(y'_2\right)^2$. Знаходимо похідні $\frac{\partial F}{\partial y_1}=8y_2$, $\frac{\partial F}{\partial y'_1}=2y'_1$, $\frac{\partial F}{\partial y_2}=8y_1$, $\frac{\partial F}{\partial y'_2}=2y'_2$. Підставляємо ці похідні в (11) і одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y''_1-4y_2=0 \\ y''_2-4y_1=0 \end{cases} \qquad (3.15)$$

Продиференціюємо перше рівняння двічі і підставимо y''_2 в друге рівняння. В результаті одержуємо рівняння для функції y_1: $y_1^{(4)}-16y_1=0$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $y_1\left(x\right)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. Тепер можна знайти функцію $y_2\left(x\right)$:

$y_2\left(x\right)=\frac{1}{4}y''_2\left(x\right)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-C_3\cos 2x-C_4\sin 2x$. ■

3. 3 Функціонали від функції кількох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $y\left(x_1,x_2\right)$ і функціонал від цієї функції

$$J[y]=\iint_D F\left(x_1,\, x_2,\, y,\, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 \,. \qquad (3.\ 16)$$

Будемо шукати функцію y, яка дає екстремум функціонала (3. 16). Розглянемо випадок фіксованих значень функції на межі області D, тобто на замкненому контурі Γ. Внаслідок фіксованості значень функції на контурі Γ варіація функції дорівнює нулю:

$$\delta y(x_1, x_2)\Big|_{x_1,\, x_2 \,\in\, \Gamma} = 0 . \qquad (3.\ 17)$$

З геометричної точки зору сукупність точок $M\big(x_1, x_2, y(x_1, x_2)\big)$ утворює поверхню, натягнуту на контур Γ. Таких поверхонь може бути нескінченно багато. Нам потрібно знайти такі, які дають екстремум функціонала (3. 16). Область D являє собою проекцію всіх поверхонь, обмежених контуром Γ, на площину $x_1 O x_2$.

Варіацію функціонала (12) можна подати як

$$\delta J[y]=\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right] dx_1 dx_2 \,, \qquad (3.\ 18)$$

де $p=\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$, $\quad q=\dfrac{\partial y}{\partial x_2}$. Як і для функціонала $F\big(x, y(x), y'(x)\big)$ (2. 4) другий і третій доданки в (3. 18) можна проінтегрувати частинами. Наприклад, для другого доданка маємо

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial p}\delta p\, dx_1 dx_2 = \iint_D \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\delta y\right) dx_1 dx_2 = \int_D dx_2 \left[\frac{\partial F}{\partial p}\delta y(x_1, x_2)\Big|_{x_1, x_2 \in \Gamma} - \right.$$

$$\left. -\int \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial p}\delta y\, dx_1\right].$$

Оскільки перший доданок в цій формулі дорівнює нулю внаслідок (3. 17), то

$\iint\limits_D \frac{\partial F}{\partial p}\delta p dx_1 dx_2 = -\iint\limits_D \delta y \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F(x_1, x_2, y, p, q)}{\partial p} dx_1 dx_2$. Аналогічно проінтегруємо третій доданок в (3. 14). Тоді одержимо формулу для варіації функціонала (3. 12), яка містить тільки $\delta y(x_1, x_2)$:

$\delta J[y] = \iint\limits_D \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial q}\right]\delta y dx_1 dx_2$. Знову при довільних δy необхідна умова існування екстремуму функціонала $\delta J[y] = 0$ буде виконуватись тільки у випадку, коли вираз у квадратних дужках в останній формулі дорівнює нулю. Це означає, що функція $y(x_1, x_2)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)} = 0. \tag{3. 19}$$

Це рівняння називається рівнянням Остроградського.

Можна написати узагальнення цього рівняння на випадок функції кількох змінних, тобто для $y(\vec{x}) = y(x_1, x_2, ..., x_n)$ із фіксованими значеннями функції на межі Γ області Ω у $n-$ вимірному просторі. Необхідна умова існування екстремуму функціонала $J[y] = \int\limits_{\Omega}\dots\int F(\vec{x}, y, grady)\, dx_1 ... dx_n$ приводить до такого рівняння Остроградського:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)} = 0 \tag{3. 20}$$

Приклад 3. 3. Написати рівняння Остроградського для функціонала

$$J[y]=\iiint\limits_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2uf(x,y,z,t)\right]dxdydzdt, \tag{3.21}$$

де x, y, z - просторові змінні, t - час, v - стала.

□ Можна вважати, що всі змінні задані на інтервалах $(-\infty,\infty)$ із фіксованими значеннями функцій на нескінченності. Тоді

$$F(x,y,z,t,grad\,u)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+2uf(x,y,z,t)$$

Частинні похідні дорівнюють

$$\frac{\partial F}{\partial u}=2f(x,y,z,t),\qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}=2\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=2\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}=2\frac{\partial u}{\partial z},\qquad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}=-\frac{2}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Підставляємо ці похідні в рівняння (3. 20) (для u замість y) і одержуємо рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,y,z,t). \tag{3.22}$$

Це рівняння називається хвильовим і описує рух хвилі у просторі із швидкістю v. Функція $f(x,y,z,t)$ відповідає утворенню або поглинанню хвиль. Це рівняння описує також коливальні процеси стрижня або струни (для $u(x,t)$) та мембран (для $u(x,y,t)$). ■

3. 4 Функціонали від кількох функцій кількох змінних

Розглянемо функціонал, який залежить від m функцій $y_1(\vec{x}), y_2(\vec{x}), ..., y_m(\vec{x})$ кожна з яких залежить від n змінних $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Будемо розглядати функціонал, який містить перші похідні цих функцій $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, ..., m \;;\; k = 1, 2, ..., n)$:

$$J[y] = \int \underset{\Omega}{\dots} \int F\left(\vec{x}, \vec{y}, \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) dx_1 dx_2 ... dx_n \,. \tag{3. 23}$$

Якщо значення функцій $y_1(\vec{x}), y_2(\vec{x}), ..., y_m(\vec{x})$ фіксовані на межі Γ_Ω області Ω (тобто для $\vec{x} \in \Gamma_\Omega$ $\delta J\left[\vec{y}\right] = 0$), то функції $y_i(\vec{x})$, які можуть давати екстремум функціонала (3. 23) повинні задовольняти систему рівнянь Остроградського

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)} = 0 \,. \tag{3. 24}$$

3. 5 Застосування варіаційного числення у фізиці

Дослідження фізичних явищ і процесів показує, що розвиток багатьох таких процесів у часі (а також у просторі) описується функціями, які дають екстремуми деяких інтегралів. Це означає, що велика кількість фізичних законів відповідає екстремумам функціоналів. У зв’язку із цим розглянемо застосування варіаційного числення в одному із розділів фізики – механіці, який досить добре вивчено. Потім розглянемо узагальнення механіки, які дозволяють зрозуміти і багато інших розділів фізики. Ми порівнюємо термінології, які склались у варіаційному численні, механіці та її узагальненнях.

У фізиці досить часто розглядають функціонали із першими похідними функцій (такі як (2. 4) та (3. 11)). Ці функціонали називаються дією, а підінтегральні вирази функцією Лагранжа (у функціоналах, подібних до (2. 4) та (3. 11)) та лагранжіаном (у функціоналах для функцій кількох змінних, подібних до (3.21)). В механіці досліджується залежність величин від часу. Тому досить часто змінною інтегрування від дії є час t. При цьому невідомими функціями є координати $\vec{x}(t)$. Похідна цих функцій є швидкість $\vec{x}'(t)=\vec{v}(t)$. Функціоналу $J[y]$ (3. 11) відповідає дія

$$S\left[\vec{x}\right]=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t,\vec{x},\vec{v}\right)dt. \qquad (3.\ 25)$$

Принцип, на основі якого шукають мінімум (або екстремум) дії, називається принципом найменшої дії, а також принципом Остроградського – Гамільтона. Виявляється, що знайдена схема для опису механічних процесів може бути узагальнена і на інші процеси (наприклад, електродинамічні). Для цього вводять узагальнені координати $q_k(t)$ та узагальнені швидкості $q_k'(t)$.

Для побудови функцій Лагранжа використовуються загальні принципи та міркування простоти. Перш за все слід очікувати, що функція Лагранжа повинна бути скаляром. Тому найпростіша функція Лагранжа може бути написана у вигляді

$$L=\alpha\vec{v}^2+U\left(\vec{x}\right). \qquad (3.\ 26)$$

Тепер підберемо сталу α і функцію координат $U\left(\vec{x}\right)$ таким чином, щоб рівняння Ейлера збіглося з рівнянням руху в механіці, тобто щоб одержати рівняння, яке виражає другий закон Ньютона $\vec{F}=m\vec{a}$, де $\vec{F}$ - сила яка діє на тіло маси m, $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ - прискорення цього тіла. Відповідно до рівнянь Ейлера (3. 13), записаних у формі

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k}=0, \qquad (3.\ 27)$$

знаходимо похідні функції Лагранжа (3. 26): $\frac{\partial L}{\partial x_k}=\frac{\partial U\left(\vec{x}\right)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial L}{\partial v_k}=2\alpha v_k$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k}=2\alpha a_k$. Відомо, що сила $\vec{F}=-grad\,W\left(\vec{x}\right)_{pot}$, де $W\left(\vec{x}\right)_{pot}$ - потенціальна енергія (це можна бачити, наприклад, з того, що для $W\left(z\right)_{pot}=mgz$ сила ваги тіла $P_z=-mg=-\frac{dW\left(z\right)_{pot}}{dz}$ напрямлена донизу). Тоді $\frac{\partial L}{\partial x_k}=\frac{\partial U\left(\vec{x}\right)}{\partial x_k}=-\frac{\partial W\left(\vec{x}\right)_{pot}}{\partial x_k}$ і $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k}=ma_k$. Таким чином, ми повинні покласти $\alpha=m/2$ і $U\left(\vec{x}\right)=-W\left(x\right)_{pot}$. Тобто ми можемо виразити функцію Лагранжа через кінетичну $W_{kin}=\frac{m\vec{v}^2}{2}$ та потенціальну $W\left(\vec{x}\right)_{pot}=-U\left(\vec{x}\right)$ енергії:

$$L\left(t,\vec{x},\vec{v}\right)=m\frac{\vec{v}^2}{2}-W\left(\vec{x}\right)_{pot}. \qquad (3.\ 28)$$

Дійсно, тепер легко перевірити, що ця функція Лагранжа дає екстремум дії, якщо вона задовольняє рівняння Ейлера, яке в даному випадку є рівнянням руху тіла $\vec{F}=m\vec{a}$.

Тепер розглянемо перші інтеграли рівняння Ейлера і знайдемо їх фізичний зміст. Якщо функція Лагранжа не залежить від $\vec{x}\left(t\right)$, то за аналогією з (2. 16) маємо перший інтеграл

$$\frac{\partial L\left(t,\vec{v}\right)}{\partial v_k}=\frac{\partial}{\partial v_k}\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}=mv_k=p_k, \tag{3. 29}$$

де p_k - стала. В механіці величина mv_k є імпульс (кількість руху) тіла p_k. Таким чином, ми одержали закон збереження імпульсу у випадку, коли функція Лагранжа не залежить від координат, тобто не містить потенціальної енергії. За аналогією з (2. 23) перший інтеграл (2. 16) називається також інтегралом імпульсу. В узагальненому випадку величина $\frac{\partial L}{\partial q_k{}'}=p_k$ називається узагальненим імпульсом.

Якщо функція Лагранжа не залежить від t, то, згідно з (2. 18) ,має стале значення, тобто зберігається інтеграл

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial L}{\partial v_k}-L=\sum_{k=1}^{n}v_k p_k-L=m\vec{v}^{\,2}-\\-\left(\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2}-W\left(\vec{x}\right)_{pot}\right)=\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2}+W\left(\vec{x}\right)_{pot}=E.\end{aligned} \tag{3. 30}$$

Ця величина є енергія тіла. У зв'язку з цим інтеграл $\sum_{k=1}^{n}y_k{}'\frac{\partial F}{\partial y_k{}'}-F=C$, пов'язаний з (2. 18), називається інтегралом енергії.

В узагальненому випадку енергія E називається функцією Гамільтона та гамільтоніаном H:

$$H=\sum_k q_k{}'p_k-L. \tag{3. 31}$$

Як правило, гамільтоніан H розглядається як функція узагальнених координат q_k та узагальнених імпульсів p_k, в той час як функція Лагранжа залежить від t, узагальнених координат

q_k та узагальнених швидкостей q_k'. Знайдемо похідні $\frac{\partial H}{\partial x_k}$ та $\frac{\partial H}{\partial p_k}$.

Ми знаходимо $\frac{\partial E}{\partial x_k} = \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2} + W\left(\vec{x}\right)_{pot} \right) = \frac{\partial W\left(\vec{x}\right)_{pot}}{\partial x_k} =$

$= -F_k = -ma_k = -m\frac{dv_k}{dt} = -p_k'$. В узагальненому випадку маємо

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -p_k'. \tag{3. 32}$$

Для $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial E}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + W\left(\vec{x}\right)_{pot} \right) = \frac{p_k}{m} = v_k$. В узагальненому випадку маємо

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k'. \tag{3. 33}$$

Рівняння (3. 32) і (3. 33) називаються рівняннями Гамільтона. Ці рівняння являють собою систему рівнянь першого порядку, яка відповідає рівнянню Ейлера (2. 14) (або системі (3. 13)) другого порядку.

Якщо є величина $A\left(t, p, q\right)$, то внаслідок рівнянь Гамільтона (3. 32), (3. 33) для похідної $\frac{dA}{dt}$ можна написати

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \\ &+ \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \left\{ H, A \right\}, \end{aligned} \tag{3. 34}$$

де вираз

$$\{A, B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} \right) \qquad (3.\ 35)$$

називається дужкою Пуассона. Дужка Пуассона змінює знак при перестановці A та B.

Теорема 3. 2. *Якщо гамільтоніан не залежить від часу, то він зберігається, тобто* $\frac{dH}{dt} = 0$.

Дійсно, для $H(p, q)$ маємо з (3. 34)

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0. \qquad (3.\ 36)$$

Теорема 3. 3. *Якщо величина A не залежить явно від часу і її дужка Пуассона з гамільтоніаном дорівнює нулю, то ця величина зберігається.*

В таблиці 3. 1 ми подаємо різні позначення і термінологію в математиці, механіці і узагальненнях у фізиці.

Таблиця 3. 1

Математика. Варіаційне числення	Механіка	Узагальнення
x, аргумент	t (час), аргумент	t (час), аргумент
$y_k(x)$ - функції	$x_k(t)$ - координати	$q_k(t)$ - узагальнені координати

$y_k'(x)$ - похідні функції	$x_k'(t) = v_k$ - швидкості	$q_k'(t) = q_k'(t)$ - узагальнені швидкості
$J\left[\vec{y}\right]$ - функціонал	$S\left[\vec{x}\right]$ - дія	$S\left[\vec{q}\right]$ - дія
$F\left(x, \vec{y}, \vec{y}'\right)$ - інтегрант	$L\left(t, \vec{x}, \vec{v}\right)$ - функція Лагранжа	$L\left(t, \vec{q}, \vec{q}'\right)$ - функція Лагранжа, лагранжіан
Необхідність знаходження екстремуму функціонала	Принцип найменшої дії	Принцип найменшої дії
Рівняння Ейлера $\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0$	Рівняння руху $\vec{F} = m\vec{a}$	Рівняння Ейлера $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial q_k'} = 0$
Перший інтеграл для $F\left(x, \vec{y}'\right)$ (інтеграл імпульсу) $\frac{\partial F}{\partial y_k'} = C_k$	Імпульс $\frac{\partial L}{\partial v_k} = p_k$	Узагальнений імпульс $\frac{\partial L}{\partial q_k'} = p_k$
Перший інтеграл для $F\left(\vec{y}, \vec{y}'\right)$ (інтеграл енергії) $\sum_k y_k' \frac{\partial F}{\partial y_k'} - F$	Енергія $\sum_k v_k \frac{\partial L}{\partial v_k} - L = E$	Гамільтоніан $\sum_k q_k' \frac{\partial L}{\partial q_k'} - L = H$

ЛЕКЦІЯ 4

4.1 Умовний екстремум з інтегральними зв'язками

В задачі Дідони з фіксованими кінцями потрібно знайти лінію, яка обмежує фігуру найбільшої площі при фіксованій довжині межі цієї фігури. Легко бачити, що площа фігури і довжина лінії (тобто периметр фігури) являють собою інтеграли від функції, яку потрібно знайти. Таким чином, ми повинні знайти функцію, яка дає максимальне значення одного інтеграла і для якої інший інтеграл має задане значення.

В загальному випадку подібні задачі можна сформулювати наступним чином. Потрібно знайти функцію, яка дає екстремум функціонала (2. 4):

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx, \tag{4. 1}$$

при фіксованих значеннях на кінцях відрізка інтегрування (2. 10) та при фіксованих значеннях деяких інтегралів

$$\int_a^b G_i(x, y, y')\, dx = g_i, \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{4. 2}$$

Формули (4. 2) називаються інтегральними зв'язками.

Задачі знаходження екстремумів функціоналів при інтегральних зв'язках називаються ізопериметричними. Цю назву задач можна пояснити тим, що в задачі Дідони саме периметр фігури має стале значення. Як відомо, периметр фігури (тобто довжина лінії) в загальному випадку виражається через деякий інтеграл. Ізопериметрична задача нагадує задачу знаходження екстремуму функції при наявності зв'язків. Тому для розв'язання ізопериметричної задачі також вводяться множники Лагранжа, а замість інтегранта $F(x, y, y')$ в (2. 4), (3. 9) вводять нову функцію, яка називається функцією Лагранжа L:

$$L = L\left(x, y, y', \vec{\lambda}\right) = F(x, y, y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x, y, y') \quad . \tag{4. 3}$$

При цьому множники Лагранжа λ_i є числа. Відповідно до необхідної умови існування екстремуму функціонала (4. 3) ми одержуємо рівняння Ейлера для функції L

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=0 \qquad (4.\ 4)$$

і умови (4. 2). Рівняння Ейлера являє собою диференціальне рівняння другого порядку. Тому загальний розв'язок рівняння (4. 4) містить довільні сталі C_1, C_2 та m множників Лагранжа λ_i. Ці сталі можна знайти з крайових умов та інтегральних зв'язків. Покажемо це на прикладі.

Приклад 4. 1. Задача Дідони із фіксованими кінцями.

$$S=\int_a^b y\,dx \to \max\,,\ L_{\text{ïåð}}=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx\,,\ y(a)=y(b)=0\,.$$

☐ В цій задачі периметр фігури дорівнює сумі відстані між точками A та B по берегу моря і довжині $L_{\text{ïåð}}$ на межі фігури на суші. При фіксованих точках A та B на березі моря довжина $L_{\text{ïåð}}$ є величина стала, як і периметр. Для розв'язання задачі складаємо функцію Лагранжа

$$L\left(y,y',\lambda\right)=y+\lambda\sqrt{1+\left(y'\right)^2} \qquad (4.\ 5)$$

Знаходимо частинні похідні $\dfrac{\partial L}{\partial y}=1,\quad \dfrac{\partial L}{\partial y'}=\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}$.

Підставляємо ці похідні в рівняння Ейлера (4. 4) і одержуємо

$1-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}=\dfrac{d}{dx}\left(x-\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}\right)=0$. Тепер маємо

$x-\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}=C_1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}=x-C_1$. Далі можна написати

$$\lambda^2 (y')^2 = (x - C_1)^2 \left(1 + (y')^2\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}.$$

Інтегруємо за x і знаходимо

$$y = \pm \int \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}} dx = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2 \Rightarrow$$

$$y - C_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}.$$

Одержану функцію $y(x)$ можна також переписати у вигляді рівняння кола $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$. Ми бачимо, що сталі C_1 та C_2 відіграють роль координат центра кола, а модуль множника Лагранжа $|\lambda|$ є радіус кола. Таким чином, коло є крива яка обмежує фігуру з екстремальною площею при фіксованій довжині межи фігури. У зв'язку з цим зробимо два зауваження: 1) раніше цей результат був досягнутий при використанні геометричних методів і був відомий ще древнім грекам. Але варіаційне числення дозволяє розв'язувати багато ізопериметричних задач єдиним методом; 2) при розв'язанні задачі Дідони можна також скористатися першим інтегралом, оскільки, згідно з (4. 5), функція Лагранжа не залежить від x. ■

Тепер розглянемо ізопериметричну задачу для функціонала, який залежить від вектор-функції $\vec{y}(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ при фіксованих значеннях функції на кінцях відрізка інтегрування:

$$J[\vec{y}] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n; y_1', y_2', ..., y_n') dx \to extr, \tag{4. 6, а}$$

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a, \; \vec{y}(b) = \vec{y}_b, \tag{4. 6, б}$$

$$\int_a^b G_i(x, \vec{y}, \vec{y}') dx = g_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{4. 6, в}$$

Для розв’язання цієї задачі знову складемо функцію Лагранжа

$$L\left(x,\vec{y},\vec{y}',\vec{\lambda}\right)=F\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right), \qquad m<n. \qquad (4.\ 7)$$

Теорема 4. 1. *Якщо вектор-функція* $\hat{\vec{y}}(x)$ *дає екстремум функціонала (4. 6. а) при зв’язках (4. 6. в) і крайових умовах (4. 6. б), то вона задовольняє систему з* n *диференціальних рівнянь Ейлера*

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_k'}=0, \qquad k=0,1,...,n., \qquad (4.\ 8)$$

з інтегральними зв’язками (4. 6, в) та крайовими (межовими) умовами (4. 6, б).

Загальний розв’язок для кожної функції $y_k(x)$ містить $2n+m$ довільних сталих. Ці сталі можна знайти з $2n$ крайових умов (4. 6, б) та m інтегральних зв’язків (4. 6, в).

4.2 Умовний екстремум із скінченними та диференціальними зв’язками

Розглянемо задачу знаходження екстремуму функціонала, який залежить від вектор-функції $\vec{y}(x)=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$

$$J\left[\vec{y}\right]=\int_a^b f_0\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)dx \qquad (4.\ 9)$$

при фіксованих значеннях функцій на кінцях відрізка інтегрування

$$\vec{y}(a)=\vec{y}_a,\ \vec{y}(b)=\vec{y}_b \tag{4. 10}$$

та при наявності зв'язків, які містять аргумент x і функції y_k

$$f_i\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right)=0,\qquad i=1,2,...,m_1 \tag{4. 11}$$

або зв'язків, які окрім функцій та аргументу містять також похідні функцій

$$\begin{gathered} f_i\left(x,y_1,y_2,...,y_n;y_1',y_2',...,y_n'\right)=0,\\ i=m_1+1,m_1+2,...,m;\qquad m<n. \end{gathered} \tag{4. 12}$$

Зв'язки (4. 11) називаються скінченними, а зв'язки (4. 12) – диференціальними. В механіці вживається також така термінологія: зв'язки (4. 11) називаються голономними, а зв'язки (4. 12) – неголономними.

Для дослідження функціонала (4. 9) на екстремум складаємо функцію Лагранжа

$$L\left(x,\vec{y},\vec{y}',\vec{\lambda}\right)=f_0\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(x\right)f_i\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right). \tag{4. 13}$$

Множники Лагранжа для скінчених і диференціальних зв'язків залежать від x, на відміну від інтегральних зв'язків (для яких множники Лагранжа є сталі).

Теорема 4. 2. *Якщо вектор-функція $\vec{y}(x)$ дає екстремум функціонала (4. 9) при скінченних та диференціальних зв'язках (4. 11), (4. 12), то вона задовольняє рівняння Ейлера-Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_k'}=0,\qquad k=1,2,...,n. \tag{4. 14}$$

та зв'язку (4. 11), (4. 12).

Задача знаходження умовного екстремуму функціонала при скінченних та диференціальних зв'язках називається задачею Лагранжа. Одержані функції $y_k(x)$ залежать від $2n$ довільних сталих та m множників Лагранжа. Ці сталі можна знайти з крайових умов (4. 10) та зв'язків.

Приклад 4. 2. Знайти стаціонарне значення функціонала

$$J\left[\vec{y}\right]=\int_0^1\left(\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2\right)dx \text{ при } \vec{y}(0)=(-1,0), \quad \vec{y}(1)=(-1,1) \text{ і}$$

скінченному зв'язку $y_1+y_2-2x^2+x+1=0$.

☐ Складемо функцію Лагранжа $L\left(x,\vec{y},\vec{y}'\right)=\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2+$ $+\lambda(x)\left(y_1+y_2-2x^2+x+1\right)$. Знаходимо похідні функції Лагранжа за y_1, y_1', y_2, y_2':

$$\frac{\partial L}{\partial y_1}=\lambda(x), \qquad \frac{\partial L}{\partial y_1'}=2y_1', \qquad \frac{\partial L}{\partial y_2}=\lambda(x), \qquad \frac{\partial L}{\partial y_2'}=2y_2'.$$

Підставляємо ці похідні в рівняння Ейлера - Лагранжа (4. 14) і знаходимо $\lambda(x)-2y_1''=0,\ \lambda(x)-2y_2''=0$. Виключаємо $\lambda(x)$ і одержуємо $y_1''=y_2''$. Тепер використовуємо зв'язок. Для других похідних із зв'язку маємо $y_1''+y_2''-4=0$. Виключаємо y_2'' і одержуємо рівняння для функції y_1: $y_1''=2$. Інтегруємо двічі це рівняння і знаходимо $y_1'(x)=2x+C_1 \Rightarrow y_1(x)=x^2+C_1x+C_2$. Сталі $\tilde{N}_1$ та $\tilde{N}_2$ знаходимо з крайових умов

$y_1(0)=-1=C_2 \quad \Rightarrow \quad y_1(x)=x^2+C_1x-1,$

$y_1(1)=-1=1+C_1-1 \quad \Rightarrow \quad C_1=-1.$

Таким чином, ми маємо $y_1^0(x)=x^2-x-1$. Із зв'язку знаходимо $y_2^0(x)=-y_1^0(x)+2x^2-x-1=-x^2+x+1+2x^2-x-1=x^2$. Тепер обчислимо стаціонарне значення функціонала:

$$J\left[\vec{y}\right]=\int_0^1\left(\left(\left(y_1^0\right)'\right)^2+\left(\left(y_2^0\right)'\right)^2\right)dx=\int_0^1\left[\left(\left(x^2-x-1\right)'\right)^2+\left(\left(x^2\right)'\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\left(2x-1\right)^2+4x^2\right]dx=\int_0^1\left(8x^2-4x+1\right)dx=\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{2}x^2+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{3}.$$

Розв'язання цієї задачі Лагранжа можна перевірити методом виключення однієї з функцій за допомогою зв'язку. Дійсно, $y_2'=4x-1-y_1'$.

Тоді $F\left(x,y_1,y_1'\right)=\left(y_1'\right)^2+\left(4x-1-y_1'\right)^2=2\left(y_1'\right)^2+2y_1'\left(1-4x\right)$.

При цьому ми не врахували в $F\left(x,y,y'\right)$ доданок $\left(4x-1\right)^2$, оскільки число $\int_0^1\left(4x-1\right)^2dx=\frac{7}{3}$ не впливає на екстремаль $y_1^0\left(x\right)$. Ми також маємо

$J\left[\vec{y}\right]=\int_0^1 F\left(x,y_1,y_1'\right)dx=2\int_0^1\left[\left(y_1'\right)^2+y_1'\left(1-4x\right)\right]dx$. Обчислюємо похідні $\frac{\partial F}{\partial y_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y_1'}=2\left(1-4x\right)+4y_1'$. З рівняння Ейлера маємо $\frac{d}{dx}\left[\left(1-4x\right)+2y_1'\right]=0$, тобто $y_1'=2x+C_1$. Після інтегрування цього рівняння знаходимо екстремаль $y_1\left(x\right)=x^2+C_1x+C_2$, яка збігається з одержаною раніше за методом множників Лагранжа. ■

Приклад 4. 3. Знайти екстремаль функціонала

$$J\left[\vec{y}\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2\right)dx \tag{4.15}$$

при крайових умовах $\vec{y}\left(0\right)=\left(0,0\right)$, $\vec{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2}\right)$ та диференціальному зв'язку $y_1'-y_2-\sin x=0$.

□ Складемо функцію Лагранжа:

$$L\left(x,\vec{y},\vec{y}',\lambda\right)=\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2+\lambda\left(x\right)\left(y_1'-y_2-\sin x\right).$$

Для того щоб скласти рівняння Ейлера – Лагранжа, знаходимо похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y_1'}=2y_1'+\lambda\left(x\right),\qquad \frac{\partial L}{\partial y_2}=-\lambda\left(x\right),\qquad \frac{\partial L}{\partial y_2'}=-2y_2'.$$

Оскільки $\frac{\partial L}{\partial y_1}=0$, то можна написати $2y_1'+\lambda\left(x\right)=C$ та $-\lambda\left(x\right)+2y_2''=0$. Виключаємо з цих рівнянь $\lambda\left(x\right)$. Тоді можна написати: $y_2''+y_1'=C$. Тепер використовуємо зв'язок. Це дозволяє одержати диференціальне рівняння для функції $y_2\left(x\right)$: $y_2''+y_2=C-\sin x$. Ми можемо написати $y_{2\text{çí}}=y_{2\,\text{çî}}+y_{2\div\text{í}}$. Для знаходження загального розв'язку однорідного рівняння $y_{2\,\text{çî}}$ складемо характеристичне рівняння : $k^2+1=0$. Розв'язки цього алгебраїчного рівняння $k_{1,2}=\pm i$. Тому $y_{2\,\text{çî}}$ можна подати у вигляді $y_{2\,\text{çî}}\left(x\right)=A\sin x+B\cos x$. Оскільки розв'язок однорідного диференціального рівняння містить $\sin x$ та $\cos x$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{2\div\text{í}}$ є розв'язок резонансного типу. Для цього розв'язку можна написати: $y_{2\div\text{í}}=C_1+x\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right)$. Знаходимо першу і другу похідні цього розв'язку:

$$y_{2\div\text{í}}'=C_3\cos x+C_4\sin x+x\left(-C_3\sin x+C_4\cos x\right),$$
$$y_{2\div\text{í}}''=2\left(-C_3\sin x+C_4\cos x\right)-x\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right).$$

Після підстановки $y_{2\div\text{í}}''$ та $y_{2\div\text{í}}$ в неоднорідне рівняння ми одержуємо $C=C_1,\quad C_3=\frac{1}{2},\quad C_4=0$. Таким чином,

$y_{2\text{çí}} = y_{2\,\text{çî}} + y_{2\text{÷í}} = A\sin x + B\cos x + C + \dfrac{x}{2}\cos x$. Тепер використаємо крайові умови $y_2(0) = 0,\ y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$:

$$y_{2\text{çí}}(0) = 0 = B + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -B,$$

$$y_{2\text{çí}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} = A - B \qquad \Rightarrow B = A + \frac{1}{2}.$$

Тоді $y_2(x) = A\sin x + \left(A + \dfrac{1}{2}\right)(\cos x - 1) + \dfrac{x}{2}\cos x$. Використовуємо зв'язок і знаходимо похідну функції $y_1(x)$:

$$y_1'(x) = y_2(x) + \sin x = (A+1)\sin x + \left(A + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1) + \frac{x}{2}\cos x.$$

Проінтегруємо y_1' і одержимо $y_1(x)$:

$y_1(x) = -\left(A + \dfrac{1}{2}\right)\cos x + \left(A + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - x) + \dfrac{x}{2}\sin x + C_5$. Внаслідок крайових умов маємо

$$y_1(0) = 0 = -\left(A + \frac{1}{2}\right) + C_5 \quad \Rightarrow \quad C_5 = A + \frac{1}{2},$$

$$y_1(x) = \left(A + \frac{1}{2}\right)[1 - \cos x + \sin x - x] + \frac{x}{2}\sin x,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \left(A + \frac{1}{2}\right)\left(1 + 1 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

В результаті знаходимо екстремалі

$$y_1^0(x) = \frac{x}{2}\sin x,\ y_2^0(x) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x.$$

Відмітимо, що в даній задачі множник Лагранжа $\lambda(x)$ дійсно залежить від x, оскільки $\lambda(x)=2y_2''(x)=-\sin x - x\cos x$. Можна знайти стаціонарне значення функціонала

$$J\left[\vec{y}^{\,0}\right]_{\text{ñò àö}}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin x + x\cos x\right)^2 - x^2\sin^2 x\right]dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x + x\sin 2x +\right.$$

$$\left.+x^2\cos 2x\right)dx=\frac{\pi}{16}.$$

Зауважимо, що екстремалі в даній задачі можна також знайти методом виключень. Дійсно, якщо підставити зв'язок $y_1' = y_2+\sin x$ у функціонал, то можна одержати

$$J\left[\vec{y}\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(y_2+\sin x\right)^2-\left(y_2'\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[y_2^2+2y_2\sin x-\left(y_2'\right)^2+\sin^2 x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[y_2^2+2y_2\sin x-\left(y_2'\right)^2\right]dx+$$

$$+\frac{\pi}{4}=J_1\left[y_2\right]+\frac{\pi}{4}.$$

Функціонал $J_1\left[y_2\right]$ має ту ж саму екстремаль, що і функціонал $J\left[\vec{y}\right]$, оскільки вони відрізняються на сталу. Функціонал

$J_1\left[y_2\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}F_1\left(x,y_2,y_2'\right)dx$ має стаціонарне значення для функції y_2, яка задовольняє рівняння Ейлера. Для того щоб скласти рівняння Ейлера, знаходимо похідні:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2}=2y_2+2\sin x,\qquad \frac{\partial F_1}{\partial y_2'}=-2y_2'.$$

Для функції y_2 рівняння Ейлера має вигляд $y_2'' + y_2 = -\sin x$. Розв'язки цього рівняння позначаємо як $\tilde{y}_2(x)$. Це рівняння збігається з рівнянням для y_2 , одержаним методом Лагранжа при $C = 0$. Відмітимо, що $C = A + \frac{1}{2} = 0$ в розв'язку задачі Лагранжа при заданих межових умовах. Ми можемо скористатись одержаним раніше за методом Лагранжа загальним розв'язком і написати: $\tilde{y}_{2\text{çí}}(x) = A\sin x + B\cos x + \frac{x}{2}\cos x$. З крайових умов маємо: $\tilde{y}_{2\text{çí}}(x)(0) = B = 0,$ $\tilde{y}_{2\text{çí}}(x)\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = -\frac{1}{2}.$ Тобто екстремаль функціонала $J_1[y_2]$, яка задовольняє крайові умови: $\tilde{y}_2(x)(x) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$, збігається з $y_2^0(x)$, знайденою за методом Лагранжа. Функцію $y_1^0(x)$ можна знайти із зв'язку. ■

4.3 Про достатні умови існування екстремуму функціонала

Розглянемо питання про існування екстремуму функціонала в найпростішій задачі варіаційного числення, тобто для функціонала (4. 1) при фіксованих значеннях функції в точках a та b. Екстремаль функціонала $y^0(x)$ дає нульове значення першої варіації функціонала, тобто $\delta J\left[y^0\right] = 0$. Але екстремалі функціоналів не завжди дають екстремуми цих функціоналів. Екстремалі функціоналів аналогічні стаціонарним точкам функції в диференціальному численні. В таких точках виконуються необхідні умови існування екстремумів. Наприклад, розглянемо функції однієї змінної $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = -x^4$, $y_3(x) = |x|$, $y_4(x) = x^3$. Всі ці функції мають стаціонарні точки $x_0 = 0$. В цій точці екстремуми мають диференційовані функції (тобто належать класу $C_1[\alpha, \beta]$ для $\alpha < 0$ та $\beta > 0$) $y_1(x)$ (мінімум); $y_2(x)$ (максимум) та неперервна функція $y_3(x)$ (належить класу $C[\alpha, \beta]$), яка має мінімум. Диференційована функція y_4 екстремуму не має. Серед диференційованих функцій дві функції (y_1 та y_2) з трьох мають екстремуми. На цьому прикладі ми бачимо, що при пошуках екстремумів функцій повинен бути визначений клас функцій, серед яких шукається екстремум.

Як відомо, для знаходження екстремумів функцій використовуються достатні умови. Як правило, використовуються достатні умови, виражені через перші похідні та через другі похідні (або другі диференціали). Ці умови дозволяють знайти локальні екстремуми. Якщо ми шукаємо найбільше та найменше значення функції в області, то ми обчислюємо значення функцій в стаціонарних точках (можна в точках екстремумів) та на межі області, а потім вибираємо найбільше та найменше значення. Ці значення дають глобальні (абсолютні) значення в області.

У варіаційному численні також може виникнути питання про глобальний екстремум у випадку кількох екстремалей. Якщо екстремаль, яка задовольняє крайові умови, одна, то для вирішення питання про екстремум функціонала можна застосувати наступний метод.

Розглянемо приріст функціонала

$$\Delta J\left[y^0, h\right] = J\left[y^0 + h\right] - J\left[y^0\right], \tag{4. 16}$$

де $y^0(x)$ - екстремаль функціонала (яка задовольняє крайові умови, $h(x) = \delta\, y(x)$). При цьому $h(a) = h(b) = 0$.

Якщо функціонал $J[y]$ має максимум для $y^0(x)$, то $\Delta J\left[y^0, h\right] < 0$ для будь-яких $h(x)$. У випадку мінімуму функціонала $\Delta J\left[y^0,h\right]>0$. Якщо знак $\Delta J\left[y^0,h\right]$ залежить від вибору $h(x)$ на відрізку $[a,\, b]$, то цей функціонал не має екстремуму. Розглянемо приклади.

Приклад 4. 4. Дослідити на екстремуми функціонал

$$J_1[y]=\int_0^1\left(y^2+(y')^2\right)dx,\qquad y(0)=0,\quad y(1)=A.$$

☐ Для цього функціонала $F(y,y')=y^2+(y')^2$ ми маємо похідні $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'$. Рівняння Ейлера має вигляд $y''-y=0$. Загальний розв'язок цього рівняння $y_{çî}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. З крайових умов маємо

$$y(0)=C_1+C_2=0\qquad\Rightarrow\qquad Ñ_1=-Ñ_2,$$

$$y(x)=C_1\left[e^x-e^{-x}\right],$$

$$y(1)=C_1\left(e-e^{-1}\right)=2C_1sh1=A\qquad\Rightarrow\qquad C_1=\frac{A}{2sh1}$$

Тобто екстремаль $y^0(x)=\dfrac{A}{sh1}shx$. Знаходимо приріст функціонала

$$\Delta J\left[y^0,h\right]=\int_0^1\left[\left(y^0+h\right)^2-\left(y^0\right)^2+\left(\left(\left(y^0\right)'+h'\right)^2\right)-\left(\left(y^0\right)'\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[2y^0h+h^2+2\left(y^0\right)'h'+(h')^2\right]dx=2\int_0^1\left(y^0h+\left(y^0\right)'h'\right)dx+\int_0^1\left(h^2+(h')^2\right)dx.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^1\left(y^0\right)'h'dx$ за методом інтегрування частинами:

$$\int_0^1\left(y^0\right)'h'dx=\begin{vmatrix}u=\left(y^0\right)' & du=\left(y^0\right)''dx\\ dv=h'dx & v=h\end{vmatrix}=\left(y^0\right)'h\Big|_0^1-\int_0^1\left(y^0\right)''h\,dx=$$

$$=\left|h(0)=h(1)=0\right|=-\int_0^1 y^0h(x)\,dx,$$

оскільки внаслідок рівняння Ейлера $\left(y^0\right)'' = y^0$. Після підстановки цього інтеграла в формулу для $\Delta J\left[y^0, h\right]$ ми одержуємо, що

$\Delta J\left[y^0, h\right] = \int_0^1 \left(h^2 + \left(h'\right)^2\right) dx > 0$ для будь-яких $h\left(x\right)$. Таким чином, екстремаль $y^0\left(x\right) = Ash\,x / sh1$ дає мінімум функціонала $J_1\left[y\right]$. Знайдемо мінімальне значення цього функціонала

$$J_{1\min} = J\left[y^0\right] = \left(\frac{A}{sh1}\right)^2 \int_0^1 \left(sh^2 x + ch^2 x\right) dx = \left(\frac{A}{sh1}\right)^2 \int_0^1 ch\,2x dx =$$
$$= \left(\frac{A}{sh1}\right)^2 \frac{1}{2} sh2x \Bigg|_0^1 = A^2 cth1.$$

Оскільки екстремаль одна, то вона дає глобальний мінімум функціонала. ■

Приклад 4. 5 (приклад Гільберта). Дослідити на екстремум функціонал

$$J_3\left[y\right] = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} \left(y'\right)^2 dx, \quad y\left(0\right) = 0, \quad y\left(1\right) = 1.$$

□ Для цього функціонала $F\left(x, y'\right) = x^{\frac{2}{3}} \left(y'\right)^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^{\frac{2}{3}} y'$. Оскільки інтегрант не залежить від y, то можна написати перший інтеграл рівняння Ейлера: $x^{\frac{2}{3}} y' = C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 x^{-\frac{2}{3}}$. Після інтегрування знаходимо: $y\left(x\right) = 3C_1 x^{\frac{1}{3}} + C_2$. З умови

$y(0)=0,\quad y(1)=1$ маємо $C_2=0$ та $C_1=\dfrac{1}{3}$. Таким чином знаходимо екстремаль функціонала $J_3[y]$ $y^0(x)=x^{\frac{1}{3}}$. Досліджуємо функціонал на екстремум. Для цього знаходимо приріст: $\Delta J_3\left[y^0,h\right]=\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(2\left(y^0\right)'h'+\left(h'\right)^2\right)dx$. Розглянемо інтеграл: $\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(y^0\right)'h'dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}h'dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 h'(x)\,dx=\dfrac{1}{3}h(x)=0$. Внаслідок цього приріст функціонала $\Delta J_3\left[y^0,h\right]=\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(h'\right)^2dx$ виявляється додатним для будь - якого $h(x)$. Тому екстремаль $y^0(x)=x^{\frac{1}{3}}$ дає глобальний мінімум функціонала $J_3[y]$. Знайдемо це мінімальне значення: $J_{3\min}=J_3\left[y^0\right]=\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)^2dx=$

$=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^1 x^{-\frac{2}{3}}dx=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$. Приклад цього функціонала цікавий тим, що він залежить від похідної $y'(x)$. Але похідна екстремалі $\left(y^0\right)'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ не існує на нижній межі інтегрування у функціоналі. Функціонал $J_3\left[y^0\right]$ існує як невласний інтеграл. При цьому функціонал має мінімум у класі неперервних функцій і не має екстремуму в класі диференційованих функцій. ■

За аналогією до формули Тейлора для функції можна написати для приросту функціонала

$$\Delta J[y,\delta y]=J[y+\delta y]-J[y]=$$
$$=\delta J[y]+\frac{1}{2}\delta^2J[y]+\frac{1}{3!}\delta^3J[y]+\ldots,\qquad (4.\ 17)$$

де $\delta^2 J[y]$ та $\delta^3 J[y]$ - варіації функціонала другого і третього порядку відповідно. Для екстремалі y^0 $\delta J\left[y^0\right]=0$ і ми можемо написати при малих $\|y\|$, для функцій, заданих у просторі $C_n[a,b]$:

$$\Delta J[y,\delta y]=\frac{1}{2}\delta^2 J[y]+o\left(\|\delta y(x)\|^2\right). \tag{4. 18}$$

Тепер ми можемо сформулювати достатні умови існування екстремуму функціонала в термінах другої варіації функціонала (аналогічно другим диференціалам функції однієї та кількох змінних). Якщо при будь – яких $\delta y(x)$ та $\delta y'(x)$ $\delta^2 J\left[y^0\right]\neq 0$, то екстремаль $y^0(x)$ дає локальний екстремум функціонала $J[y]$ (максимум при $\delta^2 J\left[y^0\right]<0$ або мінімум при $\delta^2 J\left[y^0\right]>0$). Якщо $\delta^2 J\left[y^0\right]$ змінює знак на відрізку $[a,\, b]$ в залежності від вибору $\delta y(x)$ або $\delta y'(x)$, то екстремаль $y^0(x)$ не дає екстремуму функціонала на цьому відрізку. Якщо $\delta^2 J\left[y^0\right]=0$ при будь – яких $\delta y(x)$ та $\delta y'(x)$, то потрібні додаткові дослідження.

Розглянемо умови існування екстремуму функціонала (4. 1) при фіксованих значеннях функцій на кінцях відрізка (виражені в термінах інтегранта $F(x,y,y')$). Припустимо, що ми знайшли екстремаль $y^0(x)$, яка дає стаціонарне значення функціонала. Тоді частинні похідні $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ для $y^0(x)$ є відомі функції. Для розв’язання питання існування екстремуму функціонала можна скласти рівняння Якобі

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)u(x)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}u'(x)\right]=0 \tag{4. 19}$$

Похідні інтегранта $F(x, y, y')$ обчислюються для $y = y^0(x)$. З рівняння (4. 19) знаходять функцію Якобі $u(x)$. Ця функція повинна задовольняти початкові умови

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1. \qquad (4.\ 20)$$

Нулі функції Якобі, відмінні від a, називаються спряженими точками.

Для того щоб припустима екстремаль $y^0(x)$ давала мінімум (максимум) функціонала $J[y]$, необхідно, щоб:

а) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0 \qquad \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0 \right)$ для $x \in [a,\ b]$;

б) на інтервалі $(a,\ b)$ не було спряжених точок функції Якобі.

Для того щоб екстремаль $y^0(x)$ давала мінімум (максимум) функціонала $J[y]$, достатньо, щоб

а) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0 \qquad \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0 \right)$ для $x \in [a,\ b]$;

б) на півінтервалі $(a,\ b]$ не було спряжених точок.

Умови $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0 \right)$ називаються умовами Лагранжа, а умови $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0 \right)$ - посиленими умовами Лагранжа.

Приклад 4. 6. Дослідити на екстремум функціонал $J[y] = \int\limits_0^l \left(4y^2 - y'^2\right) dx$ при умовах $y(0) = 0,\ y(l) = A$.

□ Ми маємо інтегрант $F\left(x,y,y'\right)=4y^{2}-y'^{2},\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=8y,\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=-2y'$. Рівняння Ейлера для цього інтегранта має вигляд

$$y''\left(x\right)+4y\left(x\right)=0.$$

Загальний розв'язок цього лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами можна подати у формі

$$y_{\text{çî}}\left(x\right)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,$$

де C_1 та C_2 - сталі. Оскільки $y\left(0\right)=0$, то $C_1=0$. Сталу C_2 знаходимо з умови $y\left(l\right)=A=C_2\sin 2l,\ C_2=A/\sin 2l$. Таким чином,

$$y^{0}\left(x\right)=A\frac{\sin 2x}{\sin 2l}.$$

Тепер складаємо рівняння Якобі (4. 16). Для цього знаходимо похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=8,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}=0,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=-2$. Підставляємо ці похідні в (4. 19) і одержуємо рівняння для функції Якобі $u\left(x\right)$:

$$u''\left(x\right)+4u\left(x\right)=0.$$

Для загального розв'язку цього рівняння маємо

$$u\left(x\right)_{\text{çî}}=D_1\cos 2x+D_2\sin 2x,$$

де D_1 та D_2 - довільні сталі. З умов (4. 20) на функцію Якобі знаходимо $D_1=0,\quad D_2=\dfrac{1}{2}$. Тому $u\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$. Нулі функції

$u(x)$ в точках $x_n = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Ми знаходимо спряжені точки функції Якобі $x_n = \frac{\pi}{2}n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Перша спряжена точка функції u є точка $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Тому при $l < \frac{\pi}{2}$ може існувати екстремум даного функціонала $J[y]$. Оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -2$, то цей екстремум є максимум. При $l > \frac{\pi}{2}$ даний функціонал екстремумів не має. Ми бачимо, що існування екстремуму функціонала залежить також і від довжини відрізка інтегрування в інтегралі функціонала при одному і тому ж інтегранті $F(x, y, y')$.■

Існують ще й інші формулювання достатніх умов існування екстремумів функціоналів. Але вони більш складні. Тому ми не будемо їх розглядати.

Список літератури

1 Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава / Под ред. Л.А. Баранова. – М., Транспорт, 1990. – 272 с.

2 Сборник задач по математике для втузов в 4 ч. Ч. III. Специальные курсы / Под общей ред. А.В. Ефимова, А.Б. Демидовича В.А. Болгова. – М. : Наука, 1984. - 608 с.

3 Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Спец. курсы – СПб : Лань, 2002. – 640 с. – ISBN 5-8114-0395-X.

4 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979. - 430 с.

5 Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчиление. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 168 с.

6 Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М. : МГУ, 1989. – 204 с.

7 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М. : Наука, 1969. - 408 с.

8 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М. : Наука, 1965. - 204 с.