

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування рухом
поїздів**

**АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розрахунково-графічної роботи**

**з дисципліни
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

Харків – 2021

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів 22 лютого 2021 р., протокол № 6.

Наведено варіанти завдань, методичні рекомендації та довідковий матеріал до розрахунково-графічної роботи «Аналіз лінійної стаціонарної системи автоматичного керування» з дисципліни «Теорія автоматичного керування».

Призначено для студентів рівня «бакалавр» денної та заочної форм навчання за спеціальностями 151 «Автоматика і автоматизація на транспорті» освітньої програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» і 273 «Залізничний транспорт» освітніх програм «Організація контролю систем керування рухом поїздів» та «Інноваційні системи комплексної автоматизації технологічних процесів».

Укладачі:

професори А. Б. Бойнік,
В. Ш. Хісматулін,
доц. О. О. Сосунов

Рецензент

доц. С. В. Кошевий

ЗМІСТ

1 Група завдань I.....	4
1.1 Варіанти завдань.....	4
1.2 Методичні рекомендації до виконання роботи.....	10
1.2.1 Перетворення схеми математичної моделі системи.....	10
1.2.2 Складання основних рівнянь системи.....	14
1.2.3 Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.....	19
1.2.4 Аналіз стійкості системи за допомогою частотного критерію Найквіста.....	29
1.2.5 Визначення запасів стійкості.....	35
1.2.6 Аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі прямим методом.....	38
1.2.7 Оцінювання показників якості функціонування САК в перехідному режимі за допомогою інженерних формул.....	44
1.2.8 Аналіз точності САК в типових режимах роботи....	47
2 Група завдань II.....	53
2.1 Варіанти завдань.....	53
2.2 Методичні рекомендації до виконання роботи.....	56
Список літератури.....	56
Додаток А. Частотні характеристики елементарних ланок.....	57
Додаток Б. Деякі функції пакета Control Toolbox програмної оболонки Matlab.....	59
Додаток В. Основні властивості перетворення Лапласа.....	63
Додаток Г. Бланк для побудови логарифмічних частотних характеристик.....	64

1 ГРУПА ЗАВДАНЬ I

Для заданого варіанта схеми математичної моделі та передаточних функцій функціональних блоків системи автоматичного керування (САК) виконати таке:

- 1) перетворити схему математичної моделі САК до найпростішого одноконтурного вигляду;
- 2) записати основні рівняння та визначити оператори передачі системи;
- 3) побудувати логарифмічні амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики розімкненої системи;
- 4) провести аналіз стійкості системи за допомогою частотного критерію Найквіста;
- 5) визначити запаси стійкості;
- 6) провести аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі прямим методом;
- 7) провести аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі непрямим частотним методом;
- 8) провести аналіз точності САК в типових режимах роботи.

1.1 Варіанти завдань

Варіанти завдань наведені в таблиці 1.1 та на рисунках 1.1–1.10. На рисунках позначено:

$g(t)$, $y(t)$ – задавальне та вихідне діяння відповідно;

$\varepsilon(t)$ – помилка системи;

$K_1(D)$ – $K_6(D)$ – оператори передачі ланок.

Номер варіанта визначається за правилом

$$N = k - 30 \cdot \text{int}(k/30),$$

де k – дві останні цифри номера залікової книжки студента;

$\text{int}(*)$ – ціла частина числа.

Наприклад, дві останні цифри шифру студента $k = 47$, тоді номер варіанта

$$N = 47 - 30 \cdot \text{int}(47/30) = 47 - 30 \cdot \text{int}(1,57) = 47 - 30 \cdot 1 = 17.$$

Таблиця 1.1 – Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи групи завдань I

Варіант	Рисунок	Оператори передачі					
		$K_1(D)$	$K_2(D)$	$K_3(D)$	$K_4(D)$	$K_5(D)$	$K_6(D)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.10	$1+2D$	$\frac{1}{(1+0,05D)D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{3}{1+0,5D}$	3
1	1.1	2	$\frac{8}{1+10D}$	0,5	$\frac{1}{D}$	$\frac{10}{D}$	1
2	1.2	0,5	9	$\frac{11}{1+5D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{2,3}{D}$
3	1.3	$\frac{5}{1+0,1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$	$\frac{4}{1+100D}$	1	3
4	1.4	$\frac{0,2}{D}$	0,1	$\frac{15D}{1+50D}$	$\frac{10}{1+0,1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$
5	1.5	$\frac{2}{1+10D}$	$0,1(1+2D)$	$\frac{1}{D}$	0,1	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$
6	1.6	$\frac{0,1(1+100D)}{D}$	$\frac{2}{D}$	$\frac{8}{D}$	$\frac{0,3}{1+0,2D}$	$\frac{0,5}{D}$	10
7	1.7	$\frac{4}{1+0,05D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{0,5}{1+10D}$	$\frac{0,1}{1+0,05D}$	50	$\frac{5}{D}$
8	1.8	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$	2	$\frac{0,1}{1+25D}$	$\frac{0,1}{D}$	6

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8
9	1.9	$\frac{0,01}{D}$	2	30	$\frac{10}{D}$	$\frac{1}{1+0,1D}$	9
10	1.10	0,3(1+2D)	$\frac{3}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{3}{1+0,5D}$	3
11	1.1	0,1	$\frac{0,9}{1+50D}$	$\frac{30}{D}$	$\frac{7}{1+0,1D}$	$\frac{1}{D}$	10
12	1.2	$\frac{50}{1+0,05D}$	$\frac{0,05}{1+10D}$	$\frac{0,5}{D}$	2	$\frac{4}{D}$	$\frac{25}{1+0,05D}$
13	1.3	0,2	$\frac{2}{D}$	$\frac{99}{1+0,5D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{0,1}{1+50D}$	0,1
14	1.4	$\frac{0,2}{D}$	0,1	0,02(1+50D)	$\frac{0,06}{(1+0,5D)D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{95}{1+0,5D}$
15	1.5	$\frac{1+2D}{1+0,2D}$	$\frac{1}{1+10D}$	$\frac{1}{D}$	0,1	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$
16	1.6	$\frac{25}{1+100D}$	2	$\frac{18}{1+100D}$	20	$\frac{5}{D}$	10
17	1.7	20	$\frac{5}{D}$	10	$\frac{25}{1+100D}$	10	$\frac{2}{D}$
18	1.8	$\frac{1}{D}$	$\frac{18}{1+2D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{7}{1+10D}$	7	0,7(1+0,2D)

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8
19	1.9	$\frac{0,01}{D}$	2	5	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$	$\frac{1}{1+0,2D}$
20	1.10	$\frac{9}{1+0,05D}$	$\frac{20}{1+100D}$	2	$\frac{8}{1+100D}$	$\frac{3}{1+0,5D}$	3
21	1.1	2	$\frac{6}{1+20D}$	$\frac{5}{1+20D}$	$\frac{3}{D}$	7	$\frac{7}{1+5D}$
22	1.2	$\frac{0,6}{1+0,05D}$	9	$\frac{11}{1+5D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{2}{D}$
23	1.3	$\frac{0,3}{1+0,5D}$	$\frac{2}{D}$	$\frac{99}{1+0,5D}$	$\frac{0,05}{D}$	$\frac{0,1}{1+50D}$	0,03
24	1.4	$\frac{0,2}{D}$	0,1	$\frac{9D}{1+50D}$	5	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$
25	1.5	0,5	$\frac{3}{D}$	$\frac{3}{1+0,1D}$	3	2	$\frac{8}{1+10D}$
26	1.6	0,1(1+100D)	$\frac{2}{D}$	$\frac{8}{D}$	$\frac{0,01}{D}$	$\frac{0,5}{D}$	10
27	1.7	2	$\frac{0,1}{D}$	2	$\frac{3}{1+0,1D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{1+0,1D}$
28	1.8	$\frac{10}{D}$	$\frac{18}{1+0,2D}$	$\frac{10}{1+0,2D}$	$\frac{0,1}{1+25D}$	$\frac{0,1}{D}$	3
29	1.9	$\frac{2}{1+2,5D}$	2	$\frac{19}{1+0,5D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{0,8}{1+0,02D}$	8(1+0,1D)

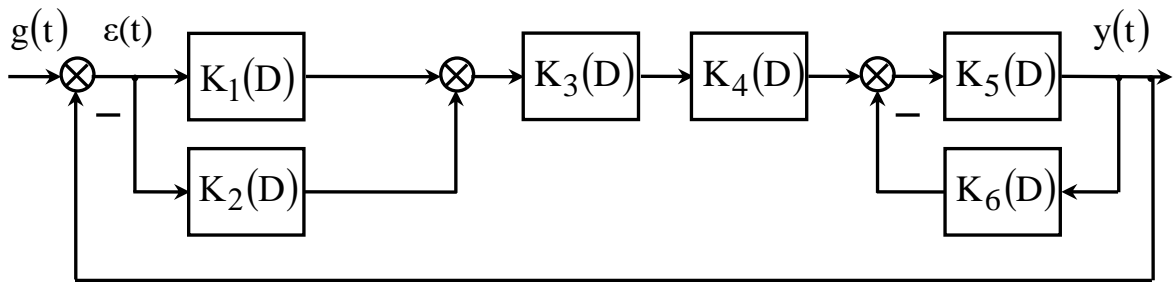


Рисунок 1.1

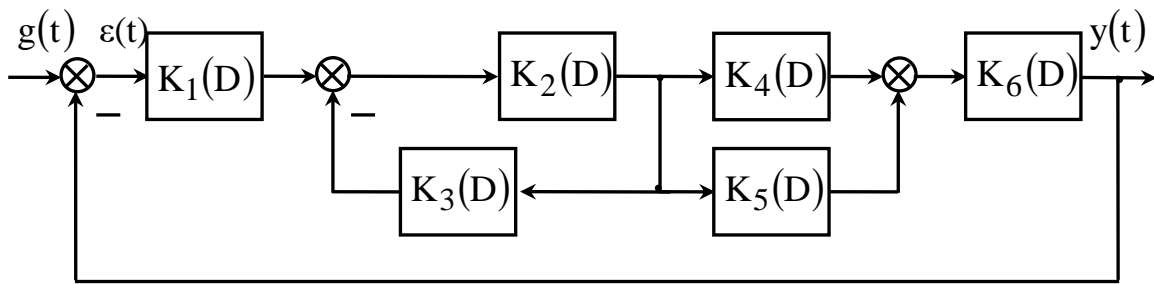


Рисунок 1.2

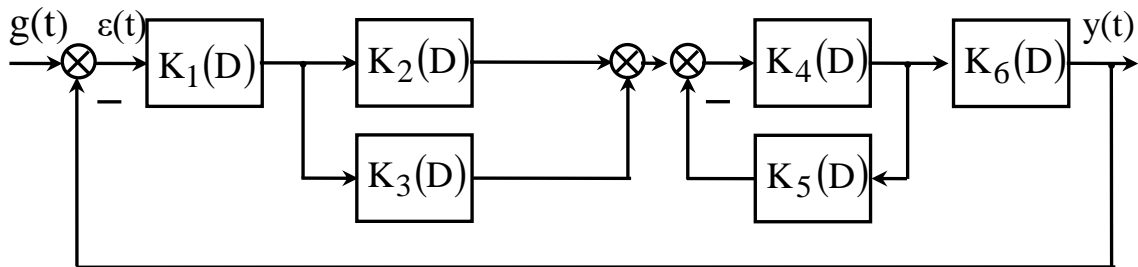


Рисунок 1.3

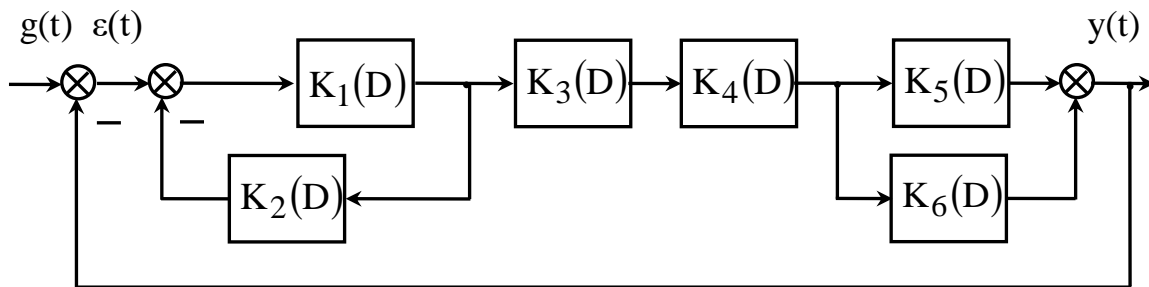


Рисунок 1.4

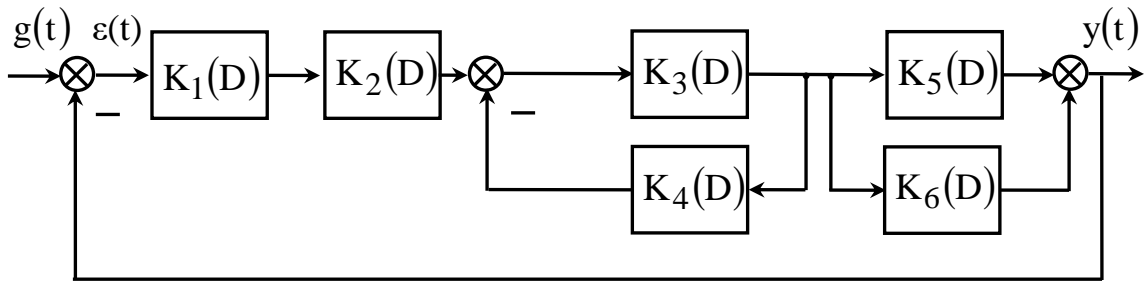


Рисунок 1.5

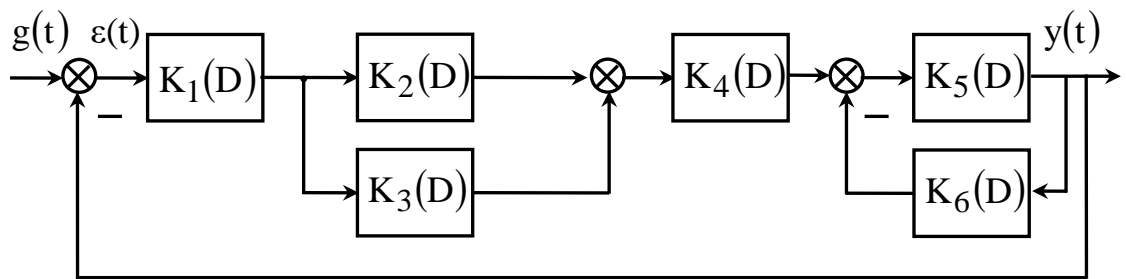


Рисунок 1.6

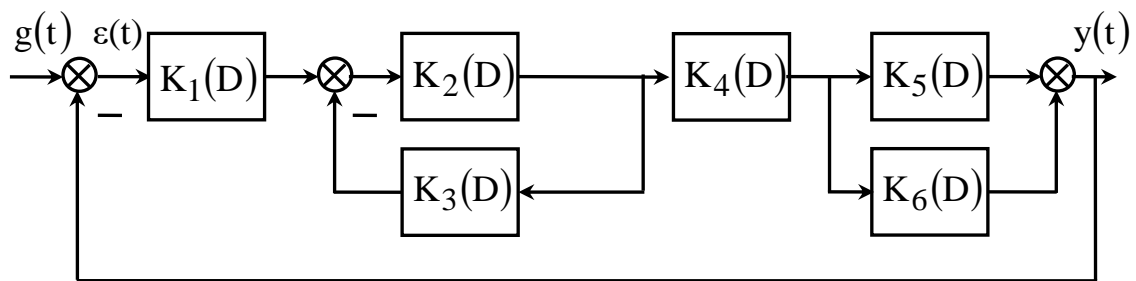


Рисунок 1.7

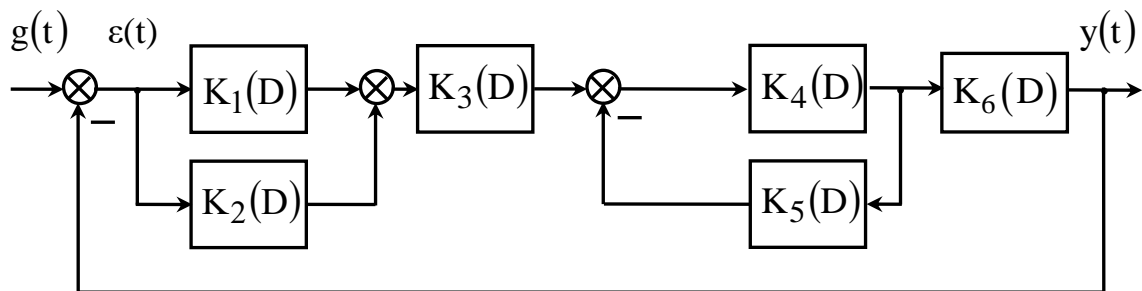


Рисунок 1.8

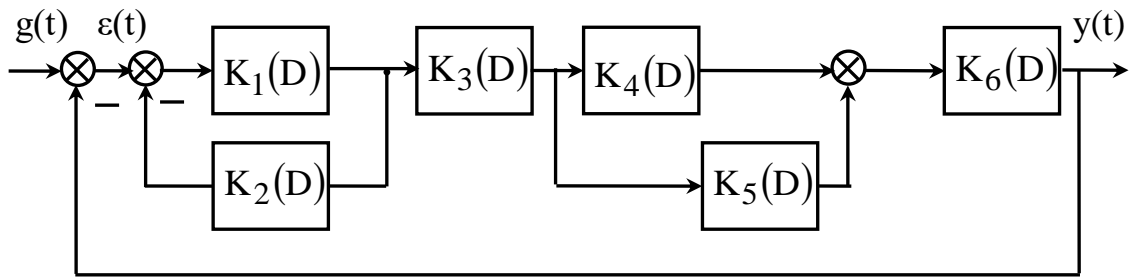


Рисунок 1.9

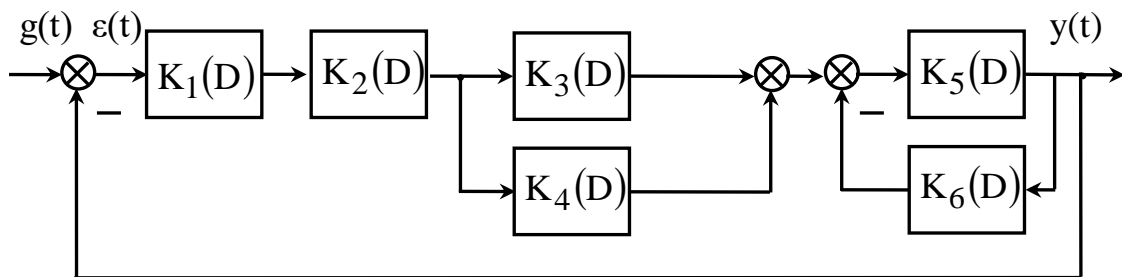


Рисунок 1.10

1.2 Методичні рекомендації до виконання роботи

1.2.1 Перетворення схеми математичної моделі системи

При наявності задавального та заважаючого вхідних діянь спрощена одноконтурна схема математичної моделі САК має вигляд, наведений на рисунку 1.11.

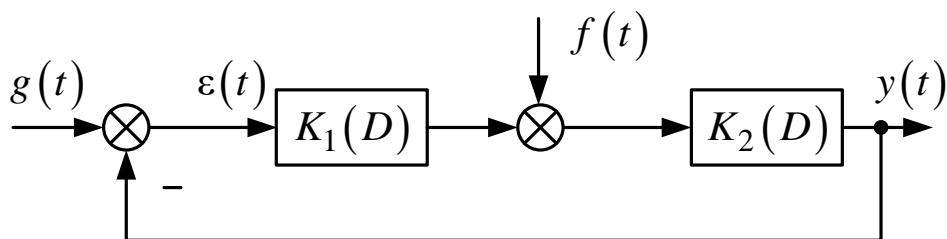


Рисунок 1.11

За відсутності заважаючого діяння ($f(t) = 0$) другий суматор відсутній, а одноконтурна схема набуває вигляду, що

наведений на рисунку 1.12, де $R(D)$ – оператор передачі розімкненої системи.

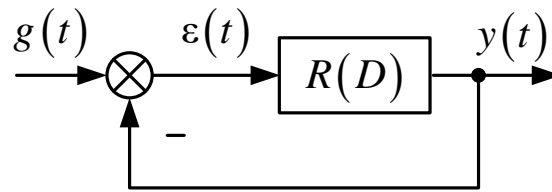


Рисунок 1.12

Для перетворення схеми математичної моделі САК до одноконтурного вигляду виконують (у тій чи іншій послідовності) такі операції:

- заміну з'єднань ланок (послідовного, паралельного й охоплення зворотним зв'язком) еквівалентними ланками;
- зміну порядку підсумовування діянь;
- переміщення суматора або точки розгалуження з виходу ланки на вхід і зворотне переміщення.

Правила зміни порядку підсумовування засновані на сполучній і переставній властивостях додавання та зводяться до такого правила: від переставляння місць сусідніх суматорів кінцева сума не змінюється. Це твердження пояснюється рисунком 1.13.

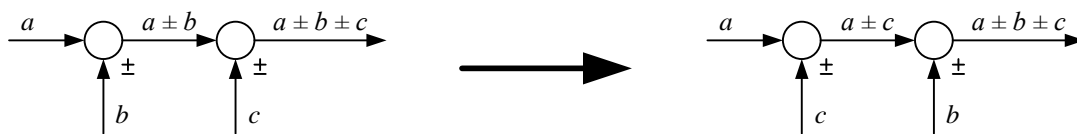
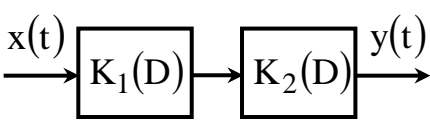
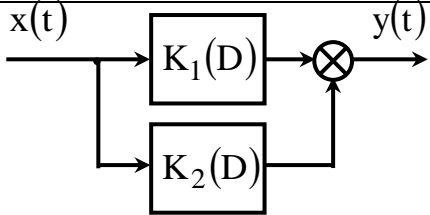
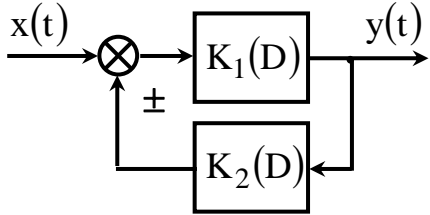


Рисунок 1.13 – Зміна порядку підсумовування

Заміна з'єднань ланок еквівалентною ланкою виконується за правилами, що наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Правила заміни з'єднань ланок

Види з'єднань	Схема моделі	Оператор передачі
Послідовне		$K(D) = K_1(D)K_2(D)$
Паралельне		$K(D) = K_1(D) + K_2(D)$
Зустрічно паралельне (охоплення зворотним зв'язком (ЗЗ))	 <p>«+» - позитивний ЗЗ «-» - негативний ЗЗ</p>	$K(D) = \frac{K_1(D)}{1 \mp K_1(D)K_2(D)}$ <p>«-» - позитивний ЗЗ «+» - негативний ЗЗ</p>

Приклад 1

Перетворити схему математичної моделі САК, зображеної на рисунку 1.14, до стандартного одноконтурного вигляду.

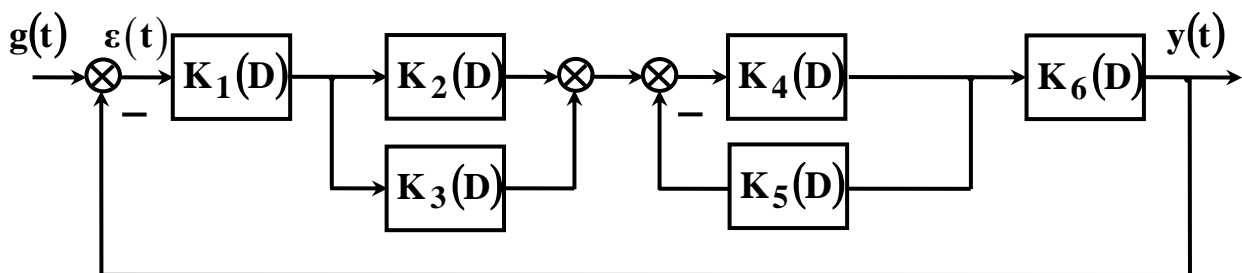


Рисунок 1.14

Розв'язання

Ланки $K_2(D)$ та $K_3(D)$ утворюють паралельне з'єднання, яке може бути замінено еквівалентною ланкою з оператором передачі, що визначається за правилом (таблиця 1.2)

$$K_{23}(D) = K_2(D) + K_3(D). \quad (1.1)$$

Ланка з оператором передачі $K_4(D)$ охоплена зворотним зв'язком через ланку $K_5(D)$. Таке з'єднання може бути замінено еквівалентною ланкою з оператором передачі, що визначається за правилом (таблиця 1.2)

$$K_{45}(D) = \frac{K_4(D)}{1 + K_4(D)K_5(D)}. \quad (1.2)$$

Після проведених перетворень схема математичної моделі САК набуває вигляду, що зображений на рисунку 1.15.

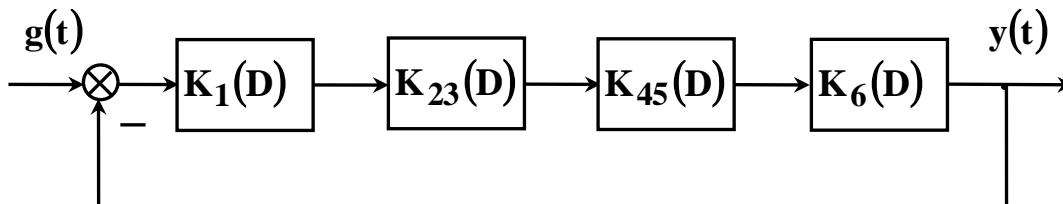


Рисунок 1.15

Для остаточного приведення отриманої схеми математичної моделі до стандартного одноконтурного вигляду необхідно замінити послідовне з'єднання ланок $K_1(D)$, $K_{23}(D)$, $K_{45}(D)$ та $K_6(D)$ еквівалентною ланкою з оператором передачі

$$R(D) = K_1(D) \cdot K_{23}(D) \cdot K_{45}(D) \cdot K_6(D). \quad (1.3)$$

Всі операції перетворення та розрахунків можна виконати із застосуванням пакета MATLAB [1, 2]. Стислі відомості з методики користування пакетом MATLAB зведено у додаток Б.

На першому кроці необхідно ввести передаточні функції окремих блоків, на другому виконати розрахунок з'єднань, після чого розрахувати передаточну функцію розімкненої системи.

Приклад 2

Розрахувати передаточні функції розімкненої системи, зображеної на рисунку 1.14. Вихідні дані:

$$K_1(D) = 5; K_2(D) = 2; K_3(D) = \frac{1}{D}; K_4(D) = \frac{5}{D};$$

$$K_5(D) = 1; K_6(D) = \frac{2}{10D + 1}.$$

Скрипт з розрахунку передаточних функцій наведено далі.

```
%Завдання 1
%Виконав ст. гр. ... ..
%Варіант ...
%1 Передаточні функції блоків
k1=5;k2=2;k3=tf([1],[1 0]);
k4=tf([5],[1 0]);k5=1;k6=tf([2],[10 1]);
% 2 Передаточні функції з'єднань
k23=k2+k3;k45=feedback(k4,k5);
% 3 Передаточна функція розімкненої системи
R=k1*k23*k45*k6
%Результат виконання

Transfer function:
      100 s + 50
-----
10 s^3 + 51 s^2 + 5 s
```

1.2.2 Складання основних рівнянь системи

У результаті виконання другого етапу РГР, виходячи з одноконтурної схеми математичної моделі, мають бути записані основні рівняння САК та визначені всі оператори передачі, що фігурують у цих рівняннях.

Складання основних рівнянь системи проводять після перетворення схеми математичної моделі системи до одноконтурного вигляду (рисунки 1.11 або 1.12).

Виділяють такі основні рівняння САК:

1) рівняння розімкненої системи, яке отримують, виходячи з одноконтурної схеми математичної моделі системи, за умови, що зв'язок від першого суматора розімкнений;

1) рівняння замкненої системи, що зв'язує вхідні діяння (задавальне $g(t)$ та заважаюче $f(t)$) з вихідною величиною системи $y(t)$;

2) рівняння помилки (похибки) системи, що зв'язує вхідні діяння (задавальне $g(t)$ та заважаюче $f(t)$) з помилкою системи $\varepsilon(t)$.

В операторній формі основні рівняння САК мають такий вигляд:

– рівняння замкненої системи

$$y(t) = W(D) \cdot g(t) + W_f(D) \cdot f(t), \quad (1.4)$$

де $W(D)$ – оператор передачі замкненої системи;

$W_f(D)$ – оператор передачі замкненої системи за заважаючим діянням;

– рівняння помилки (похибки) системи

$$\varepsilon(t) = E(D) \cdot g(t) + E_f(D) \cdot f(t), \quad (1.5)$$

де $E(D)$ – оператор передачі системи за динамічною помилкою

$$\varepsilon_g(t) = E(D) \cdot g(t),$$

тобто помилкою, що обумовлена неточністю відпрацювання задавального діяння;

$E_f(D)$ – оператор передачі системи за помилкою $\varepsilon_f(t)$, що обумовлена заважаючим діянням:

$$\varepsilon_f(t) = E_f(D) \cdot f(t).$$

Допоміжним етапом при складанні основних рівнянь САК є складання рівняння розімкненої системи, яке отримують, виходячи з одноконтурної схеми математичної моделі системи, за умови, що зв'язок від першого суматора розімкнений.

Рівняння розімкненої системи в операторній формі має вигляд

$$y(t) = R(D) \cdot \varepsilon(t) + R_f(D) \cdot f(t), \quad (1.6)$$

де $R(D)$ – оператор передачі розімкненої системи;

$R_f(D)$ – оператор передачі розімкненої системи за заважаючим діянням.

За відсутності заважаючого діяння друга складова у рівняннях (1.4) – (1.6) дорівнює нулю. Для отримання оператора передачі замкненої системи $W(D)$ необхідно перетворити схему на рисунку 1.12 за правилом заміни ланки з оператором передачі $K_1(D) = R(D)$, яка охоплена негативним одиничним зворотним зв'язком ($K_2(D) = 1$), на еквівалентну

$$W(D) = \frac{R(D)}{1 + R(D)}. \quad (1.7)$$

Для отримання оператора передачі системи за динамічною помилкою треба спочатку привести схему на рисунку 1.12 до вигляду, де вихідною величиною є динамічна помилка (рисунок 1.16).

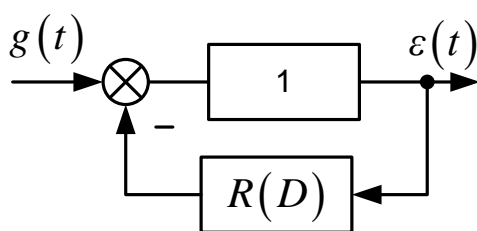


Рисунок 1.16

Користуючись правилом заміни ланки з оператором передачі $K_1(D) = 1$, яка охоплена негативним зворотним зв'язком через ланку $K_2(D) = R(D)$, на еквівалентну, отримуємо оператор передачі системи за динамічною помилкою

$$E(D) = \frac{1}{1 + R(D)}. \quad (1.8)$$

Нескладно встановити, що для основних операторів справедлива тотожність

$$W(D) + E(D) = 1. \quad (1.9)$$

Вона вказує, що сума вихідної величини та помилки дорівнює величині вхідного задавального діяння.

Для спрощення розрахунків основних операторів доцільно оператор передачі розімкненої системи привести до вигляду

$$R(D) = \frac{B(D)}{A(D)}, \quad (1.10)$$

де $A(D)$ – характеристичний оператор розімкненої системи;

$B(D)$ – характеристичний оператор задавального діяння.

Тоді нескладно отримати, що

$$W(D) = \frac{B(D)}{C(D)}, \quad E(D) = \frac{A(D)}{C(D)}, \quad (1.11)$$

де $C(D)$ – характеристичний оператор замкненої системи,

$$C(D) = A(D) + B(D). \quad (1.12)$$

Приклад

Скласти основні рівняння САК, одноконтурна схема математичної моделі якої зображена на рисунку 1.12, якщо

$$R(D) = \frac{K}{D(TD+1)}.$$

Розв'язання

Запишемо характеристичні оператори системи

$$A(D) = D(TD+1); \quad B(D) = K; \quad C(D) = K + D(TD+1).$$

Тоді відповідно до виразу (1.11) маємо

$$W(D) = \frac{K}{K + D(TD+1)}; \quad E(D) = \frac{D(TD+1)}{K + D(TD+1)}.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (1.4), (1.5), отримаємо основні рівняння в операторній формі:

– рівняння замкненої системи

$$y(t) = \frac{K}{D(TD+1) + K} g(t);$$

– рівняння помилки системи

$$\varepsilon(t) = \frac{D(TD+1)}{D(TD+1) + K} g(t).$$

Скрипт з розрахунку передаточних функцій для чисельних значень параметрів $K = 10 \text{ с}^{-1}$, $T = 0,1 \text{ с}$ наведено далі.

```

%Завдання 2
%Виконав ст. гр. ... ..
%Варіант ...
%1 Параметри
K=10;T=0.1;
%2 Передаточна функція розімкненої системи
R=tf([K],[T,1,0]);
%3 Передаточна функція замкненої системи
W=feedback(r,1)

```

%Результат виконання

Transfer function:

10

0.1 s² + s + 10

```

%4 Передаточна функція динамічної помилки
E=feedback(1,r)

```

E=feedback(1,r)

%Результат виконання

Transfer function:

0.1 s² + s

0.1 s² + s + 10

1.2.3 Побудова логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

Для аналізу САК частотним методом найбільш часто застосовують логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи: логарифмічну амплітудно-частотну характеристику (ЛАЧХ)

$$L_R(\omega) = 20 \cdot \lg R(\omega)$$

та логарифмічну фазочастотну характеристику (ЛФЧХ) $\varphi_R(\omega)$. Тут $R(\omega)$, $\varphi_R(\omega)$ – модуль та аргумент комплексної частотної характеристики розімкненої системи

$$R(j\omega) = R(\omega) \cdot \exp(\varphi_R(\omega)).$$

Як відомо, комплексна частотна характеристика розімкненої системи пов'язана з її оператором передачі та передаточною функцією виразами

$$R(j\omega) = R(D) \Big|_{D=j\omega} = R(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Побудову графіків логарифмічних частотних характеристик на бланку з логарифмічним масштабом зручно виконувати, попередньо розклавши передаточну функцію розімкненої системи на добуток передаточних функцій елементарних ланок

$$R(p) = \prod_i K_i(p), \quad (1.13)$$

де $K_i(p)$ – передаточна функція i -ї елементарної ланки.

Тоді ЛАЧХ та ФЧХ розімкненої системи визначаються з ЛАЧХ та ФЧХ елементарних ланок такими виразами:

$$\begin{aligned} L_R(\omega) &= \sum_i L_i(\omega), \\ \varphi_R(\omega) &= \sum_i \varphi_i(\omega), \end{aligned} \quad (1.14)$$

де $L_i(\omega)$, $\varphi_i(\omega)$ – ЛАЧХ та ФЧХ i -ї елементарної ланки.

На практиці зазвичай обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ розімкненої системи. Її будують на бланку з логарифмічним масштабом (додаток Г) шляхом послідовного

підсумовування асимптотичних ЛАЧХ елементарних ланок за таким алгоритмом.

1 За відомим оператором передачі $R(D)$ визначають передаточну функцію розімкненої системи

$$R(p) = R(D) \Big|_{D=p},$$

після чого записують її у вигляді добутку (1.13) передаточних функцій елементарних ланок (додаток А).

Розраховують загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи так:

$$K = \prod_i K_i,$$

де K_i – коефіцієнти підсилення окремих елементарних ланок.

Визначають вид та параметри (постійні часу, коефіцієнти демпфірування) всіх елементарних ланок.

2 Розраховують і пронумерують у порядку зростання частоти спряження $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ асимптот елементарних ланок (аперіодичних, форсуючих, коливальних) як величини, що обернені до постійних часу.

Розмічають вісь абсцис (частот) таким чином, щоб можна було побудувати ЛАЧХ лівіше найменшої ω_1 та правіше найбільшої ω_n з частот спряження асимптот:

$$\omega_{\min} < \omega_1, \omega_{\max} > \omega_n.$$

3 Загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи переводять у логарифмічні одиниці – децибелі (дБ):

$$L = 20 \cdot \lg K.$$

З урахуванням отриманого значення загального коефіцієнта підсилення системи L та частотного діапазону, в якому будується ЛАЧХ, визначають масштаб за віссю ординат (у децибелах). На

частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ відкладають величину L . Точка A_1 з координатами $(1, L)$ є початковою для побудови графіка ЛАЧХ.

4 На ділянці частот $(0, \omega_1)$ будують першу (низькочастотну) асимптоту. Її хід визначається загальним коефіцієнтом підсилення системи L , інтегруючими та диференціюючими ланками. Вона являє собою пряму, що проходить через відкладену точку A_1 з координатами $(1, L)$ та має коефіцієнт нахилу

$$b_0 = 20 \cdot \nu \text{ дБ/дек}, \quad (1.15)$$

де $\nu = \nu_{\text{диф}} - \nu_{\text{інт}}$ – різниця між кількістю диференціюючих та інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи.

Щоб отримати координати другої точки A_2 низькочастотної асимптоти, необхідно від точки A_1 з координатами $(1, L)$ перейти вліво на одну декаду ($\omega = 10 \text{ с}^{-1}$) та зсунутись по ординаті від точки L на величину $20 \cdot \nu$ дБ: $A_2 = (10, L + 20 \cdot \nu)$.

Примітка - У деяких випадках зручніше перейти до точки A_2 з протилежними координатами $(0,1; L - 20 \cdot \nu)$.

По точках A_1, A_2 будують першу (низькочастотну) асимптоту ЛАЧХ.

5 Починаючи з першої частоти спряження ω_1 , послідовно прибудовують наступні відрізки асимптот результуючої ЛАЧХ на інтервалах частот $(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), \dots, (\omega_n, \infty)$, змінюючи нахил ЛАЧХ на кожній частоті спряження на:

$\Delta b_i = -20$ дБ/дек, якщо це частота спряження інерційної (аперіодичної) ланки;

$\Delta b_i = -40$ дБ/дек, якщо це частота спряження коливальної ланки або двох інерційних ланок з однаковими постійними часу;

$\Delta b_i = 20$ дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки;

$\Delta b_i = 40$ дБ/дек, якщо це частота спряження форсуючої ланки другого порядку або двох форсуючих ланок з однаковими постійними часу.

Початкові координати точки для побудови чергового відрізка визначаються частотою спряження ω_i , з якої змінюється нахил, та величиною ординати $L(\omega_i)$ на цій частоті. Для побудови відрізка на ділянці (ω_i, ω_{i+1}) спочатку розраховують нахил результуючої асимптоти ЛАЧХ на цій ділянці шляхом додавання до попереднього нахилу b_{i-1} величини Δb_i , яка визначається типом чергової ланки:

$$b_i = b_{i-1} + \Delta b_i.$$

Далі необхідно від точки з координатами $(\omega_i, L(\omega_i))$ перейти вліво на одну декаду ($\omega'_i = 10\omega_i$) та зсунутись по ординаті від точки $L(\omega_i)$ на величину b_i дБ: $L(\omega'_i) = L(\omega_i) + b_i$. Користуючись опорними точками $(\omega_i, L(\omega_i))$ та $(\omega'_i = 10\omega_i, L(\omega'_i) = L(\omega_i) + b_i)$, проводять відрізок прямої на черговій ділянці від ω_i до ω_{i+1} .

У результаті побудови згідно з цим алгоритмом отримують асимптотичну ЛАЧХ розімкненої системи. Вона являє собою ламану лінію з відрізків прямих, злами якої відбуваються на частотах спряження асимптот. Фактична ЛАЧХ буде відрізнятися від асимптотичної лише поблизу частот спряження асимптот.

Для побудови ЛФЧХ розімкненої системи спочатку заповнюють таблицю, в якій записують розраховані значення ФЧХ окремих ланок $\varphi_i(\omega)$ та результуючої ФЧХ $\varphi_R(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$ для множини точок на осі частот. Для розрахунку звичайно обирають множину частот, значення яких дорівнюють 1, 2, 5 та менше або більше їх на цілу кількість декад. ЛФЧХ будують по точках на тому самому бланку з логарифмічним масштабом по осі частот, де побудована ЛАЧХ.

Приклад

Побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої САК з передаточною функцією

$$R(p) = \frac{100p + 1000}{2p^2 + p}.$$

Розв'язання

А Побудова ЛАЧХ

1 Спочатку подамо передаточну функцію розімкненої САК у вигляді добутку передаточних функцій елементарних ланок. Зіставляючи чисельник та знаменник передаточної функції $R(p)$ з передаточними функціями елементарних ланок (додаток А), доходимо висновку, що для цього необхідно число 1000, яке стоїть у чисельнику, а також загальну змінну p у складових знаменника, винести за дужки:

$$R(p) = \frac{1000(0,1p + 1)}{p(2p + 1)} = \frac{1000}{p}(0,1p + 1)\frac{1}{2p + 1}.$$

Отже, загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи дорівнює $K = 1000 \text{ с}^{-1}$. Розімкнена система складається з послідовно з'єднаних інтегруючої ланки $\frac{1}{p}$, інерційної ланки $\frac{1}{2p + 1}$ з постійною часу $T = 2 \text{ с}$ та форсууючої ланки $0,1p + 1$ з постійною часу $\tau = 0,1 \text{ с}$.

2 Знаходимо частоти спряження асимптот як величини, обернені до постійних часу елементарних ланок:

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Вони пронумеровані за порядком зростання.

Розмічаємо вісь абсцис таким чином, щоб можна було будувати залежність лівіше меншої і правіше більшої з частот спряження асимптот: обираємо $\omega_{\min} = 0,01 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{\max} = 1000 \text{ с}^{-1}$ та

відмічаємо частоти спряження $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ (рисунок 1.17).

3 Визначаємо загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи у децибелах. За умовами задачі,

$$L = 20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 1000 = 60 \text{ дБ.}$$

3 з урахуванням отриманого значення обираємо масштаб за віссю ординат. Відмічаємо на бланку з логарифмічним масштабом початкову точку з координатами (1, 60) (точка A_1 на рисунку 1.17).

4 Будуємо низькочастотну асимптоту. Першою точкою для її побудови є точка A_1 . Система має одну інтегруючу ланку ($\nu_{\text{інт}}=1$), тому відповідно до виразу (1.15) нахил низькочастотної асимптоти складає мінус 20 дБ/дек. Для побудови асимптоти з таким нахилом від точки A_1 з координатами (1, 60) рухаємось праворуч на одну декаду (до частоти 10 с^{-1}) та донизу на 20 дБ, де й отримуємо другу точку A_2 з координатами (10, 40).

Користуючись точками A_1 і A_2 , проводимо суцільною лінією відрізок низькочастотної асимптоти. Він починається з лівого кінця бланка і закінчується на першій частоті спряження $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$ (точка A_3).

5 Проводимо побудову ЛАЧХ після першої частоти спряження асимптот (точка A_3).

Частота спряження ω_1 відповідає інерційній ланці, тому після точки A_3 нахил ЛАЧХ змінюється на мінус 20 дБ/дек і буде дорівнювати: $-20 \text{ дБ/дек} + (-20 \text{ дБ/дек}) = -40 \text{ дБ/дек}$. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки A_3 рухаємось праворуч на одну декаду ($\omega'_1 = 5$, $\omega_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$) та донизу на 40 дБ, де й отримуємо точку A_4 , яка визначає напрямок руху ЛАЧХ на ділянці (ω_1 , ω_2). Користуючись опорними точками A_3 та A_4 , з точки A_3 проводимо другу асимптоту ЛАЧХ. Вона закінчується на другій частоті спряження $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ (точка A_5).

Після точки A_5 нахил ЛАЧХ змінюється на 20 дБ/дек, оскільки частота спряження ω_2 відповідає форсуючій ланці з

постійною часу $\tau = 0,1$ с. Таким чином, після точки A_5 нахил ЛАЧХ буде дорівнювати: -40 дБ/дек $+ 20$ дБ/дек $= -20$ дБ/дек. Для побудови асимптоти ЛАЧХ з таким нахилом від точки A_5 рухаємось праворуч на одну декаду та донизу на 20 дБ, де й отримуємо точку A_6 . З точки A_5 через точку A_6 проводимо третю асимптоту ЛАЧХ.

Оскільки при побудові ЛАЧХ враховані всі елементарні ланки, які можна виділити в передаточній функції розімкненої системи, нахил ЛАЧХ при збільшенні частоти не змінюватиметься. Тому останню асимптоту ЛАЧХ наводимо суцільною лінією до меж бланка з логарифмічним масштабом.

Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК зображена на рисунку 1.17 суцільною лінією.

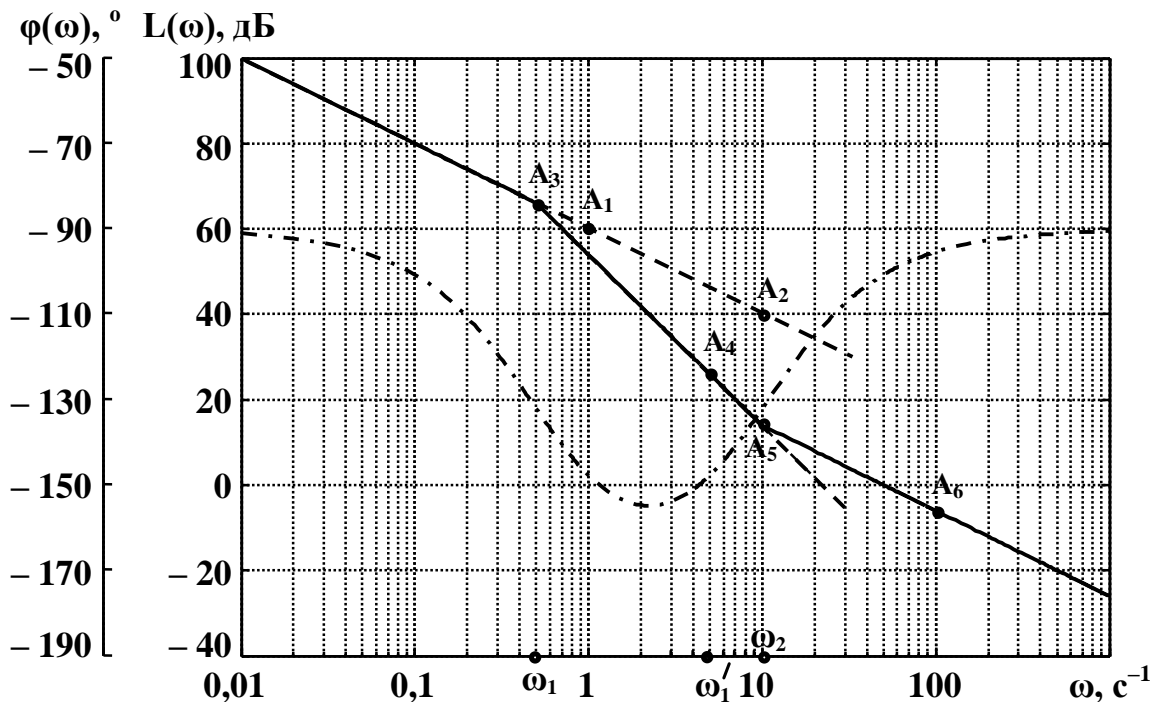


Рисунок 1.17

Б Побудова ЛФЧХ

Відповідно до виразу (1.14) і складу передаточної функції $R(p)$ ЛФЧХ розімкненої САК визначається виразом

$$\varphi_R(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega),$$

де ФЧХ окремих елементарних ланок дорівнюють (додаток А):

– ФЧХ інтегруючої ланки

$$\varphi_1(\omega) = -90^\circ;$$

– ФЧХ інерційної ланки

$$\varphi_2(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T) = -\arctg(\omega \cdot 2);$$

– ФЧХ форсууючої ланки

$$\varphi_3(\omega) = \arctg(\omega \cdot \tau) = \arctg(\omega \cdot 0,1).$$

Для побудови ЛФЧХ заповнюємо таблицю 1.3, в яку заносимо значення ФЧХ елементарних ланок $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$ та результуючої ФЧХ для різних значень частоти.

Таблиця 1.3 – Розрахунок ЛФЧХ розімкненої САК

ω, c^{-1}	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	100	200
$\varphi_1(\omega), ^\circ$	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
$\varphi_2(\omega), ^\circ$	-2	-6	-11	-22	-45	-63	-76	-84	-87	-89	-90	-90	-90
$\varphi_3(\omega), ^\circ$	0	0	0	1	3	5	11	26	45	64	79	84	87
$\varphi_R(\omega), ^\circ$	-92	-96	-101	-111	-132	-148	-155	-148	-132	-115	-101	-96	-93

ЛФЧХ розімкненої САК зображена на рисунку 1.17 штрих-пунктирною лінією.

Розглянута методика побудови є достатньо складною. Її головна перевага полягає у з'ясуванні закономірностей зв'язків між компонентним складом і виглядом результуючої ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи, що надалі веде до тих чи інших показників якості її функціонування. Наприклад, введення інерційних ланок і збільшення їх постійних часу веде до зменшення смуги пропускання системи та збільшення фазового запізнювання. Навпаки, форсууючі ланки дозволяють підняти частотні характеристики, й тому збільшити смугу пропускання і зменшити фазове запізнення.

Побудову частотних характеристик можна надзвичайно просто виконати з застосуванням пакета MATLAB (додаток Б).

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості доцільно скористатись спеціальною функцією

margin(R)

де R – ідентифікатор передаточній функції розімкненої системи.

В цьому випадку на графіках автоматично відзначаються та у верхньому рядку записуються значення запасу стійкості за підсиленням L_z у децибелах і фазою φ_z у градусах (у MATLAB вони позначаються відповідно G_m та P_m), а також частот, на яких вони виміряні.

Далі наведено приклад скрипту з розрахунку частотних характеристик і результати його виконання (рисунок 1.18).

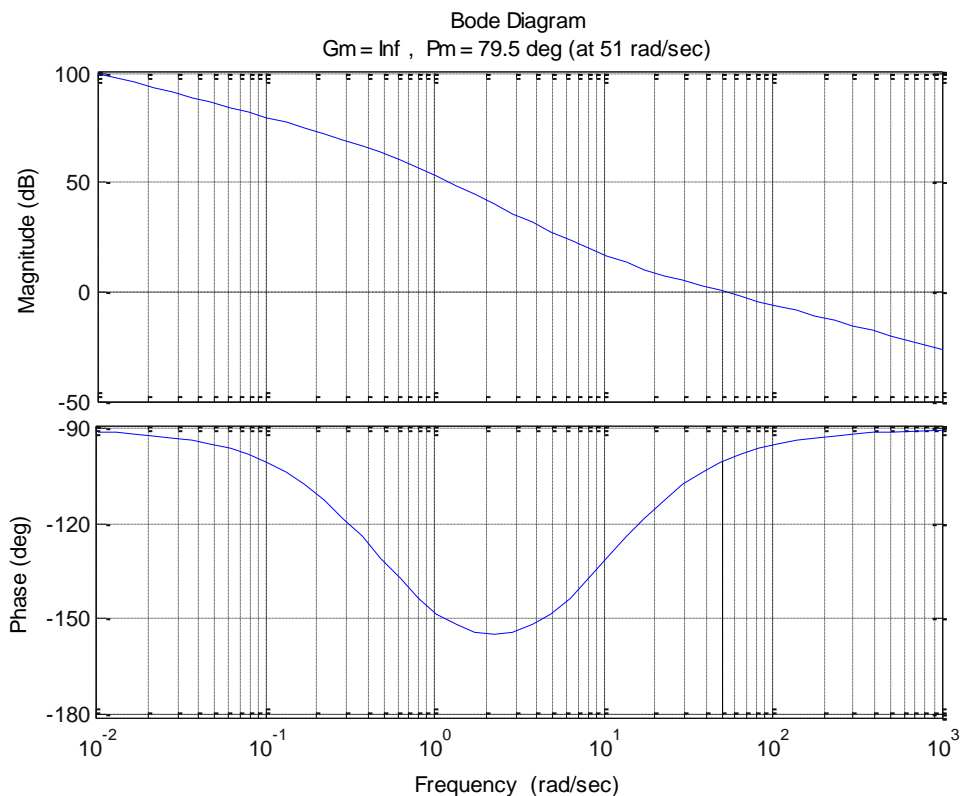


Рисунок 1.18 – Результати побудови частотних характеристик

```
%Завдання 3
%Виконав ст. гр. ... ..
%Варіант ...
```

```
%1 Передаточна функція розімкненої системи
```

```
R=tf([100,1000],[2,1,0]);
```

```
%2 Розрахунок логарифмічних частотних характеристик
```

```
margin(R);grid on
```

Відзначимо, що на відміну від асимптотичного графіка ЛАЧХ, побудованого вручну у вигляді відрізків прямих, тут графік результуючої ЛАЧХ є точним. Однак різниця між ними помітна лише поблизу частот спряження ω_1, ω_2 . Максимальна похибка залежить від типів та кількості ланок і зазвичай знаходиться у межах від 3 до 6 дБ.

1.2.4 Аналіз стійкості лінійної стаціонарної САК за допомогою частотного критерію Найквіста

В лінійних САК внаслідок справедливості принципу суперпозиції зі стійкості хоча б одного руху впливає стійкість системи в цілому, тобто стійкість лінійних САК є властивістю, яка залежить тільки від їх структури та параметрів і не залежить від зовнішніх діянь і початкового стану.

Для аналізу стійкості застосовують *критерій стійкості* – сукупність умов, виконання яких гарантує стійкість САК. Найбільше застосування знайшли алгебраїчний критерій А. Гурвіца та частотний критерій Г. Найквіста.

При використанні частотного критерію Найквіста судження про стійкість замкненої САК здійснюється на підставі аналізу частотних характеристик розімкненої САК. Внаслідок простоти побудови та отримання результатів найбільш зручно для цього користуватись логарифмічними частотними характеристиками розімкненої САК.

Надалі буде приведений логарифмічний частотний критерій стійкості для найбільш частого випадку, коли характеристичний многочлен розімкненої системи $A(p)$, який є знаменником передаточної функції розімкненої системи (дивись вираз (1.10),

$A(p) = A(D)|_{D=p}$) не має коренів у правій півплощині, але може мати нульові корені та корені на уявній осі.

Теорема. *Для того щоб замкнена система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб в усіх областях частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, кількість додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ розімкненої системи через рівні $\pm 180^\circ(2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, була однаковою.*

Отже, для проведення аналізу стійкості за допомогою критерію Найквіста необхідно виконати таке.

1 Користуючись характеристичним оператором розімкненої системи, записати характеристичне рівняння

$$A(p) = A(D)|_{D=p} = 0,$$

визначити його корені та перевірити їх на відсутність додатних дійсних частин.

2 Побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи.

Побудову частотних характеристик можна провести або вручну на бланку з логарифмічним масштабом, або у програмному середовищі MATLAB (дивись пп. 1.2.3).

3 На графіку ЛАЧХ знайти частоти, де ЛАЧХ змінює знак на протилежний.

Відзначимо, що частота, на якій ЛАЧХ розімкненої системи дорівнює нулю, називається **частотою зрізу** розімкненої системи і позначається ω_{zR} .

4 На графіку ЛФЧХ знайти **частоти переходів** ω_π , на яких вона перетинає рівень $\pm 180^\circ(2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Перехід ЛФЧХ через деякий рівень називають **додатним**, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його знизу вгору. Перехід ЛФЧХ через деякий рівень називають **від'ємним**, якщо характеристика при збільшенні частоти перетинає його згори донизу.

Примітка – У тому разі, коли в розімкненій системі є інтегруючі ланки, вважають, що при $\omega = 0$ її ФЧХ дорівнює 0° , а при $\omega > 0$ вона стрибком набуває значення $-v \cdot 90^\circ$, де v – кількість

інтегруючих ланок, і з урахуванням цього визначають наявність або відсутність першого переходу (при $\omega \rightarrow 0$) ЛФЧХ через рівень $\pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

5 Підрахувати кількість додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ на інтервалах частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, на підставі чого зробити висновок про стійкість замкненої системи за критерієм Найквіста: якщо кількість додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ на інтервалах частот, де ЛАЧХ розімкненої системи є додатною, однакова, то система стійка.

Приклад 1

Розглянемо застосування логарифмічного частотного критерію Найквіста на прикладі аналізу стійкості розімкненої системи з передаточною функцією:

$$R(p) = \frac{K_v (1 + \tau p)^2}{p (1 + T_1 p)^2 (1 + T_2 p)^2},$$

причому

$$T_1 > \tau > T_2; \frac{1}{\tau} < K_v < \frac{1}{T_2}.$$

Розв'язання

1 Характеристичний многочлен розімкненої системи визначається виразом

$$A(p) = p(1 + T_1 p)^2 (1 + T_2 p)^2.$$

Його коренями є $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -1/T_1$, $p_{4,5} = -1/T_2$. З огляду на те, що постійні часу інерційних ланок T_1, T_2 більше нуля, «правих» коренів немає.

2 Логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи, необхідні для застосування логарифмічного частотного критерію, наведено на рисунку 1.19.

3 ЛАЧХ розімкненої систем змінює знак один раз у точці ω_{3R} , причому ЛАЧХ є додатною на частотах $\omega < \omega_{3R}$ (рисунок 1.19).

4 ЛФЧХ розімкненої системи має три переходи через лінію -180° : два від'ємні переходи (точка 1 на частоті $\omega_{\pi 1}$, точка 3 на частоті $\omega_{\pi 3}$) та один додатний перехід (точка 2 на частоті $\omega_{\pi 2}$).

5 В області частот, де ЛАЧХ є додатною ($\omega < \omega_{3R}$), ЛФЧХ має один від'ємний перехід (точка 1 на частоті $\omega_{\pi 1}$) та один додатний перехід (точка 2 на частоті $\omega_{\pi 2}$). Тому на підставі критерію Найквіста замкнена система є стійкою.

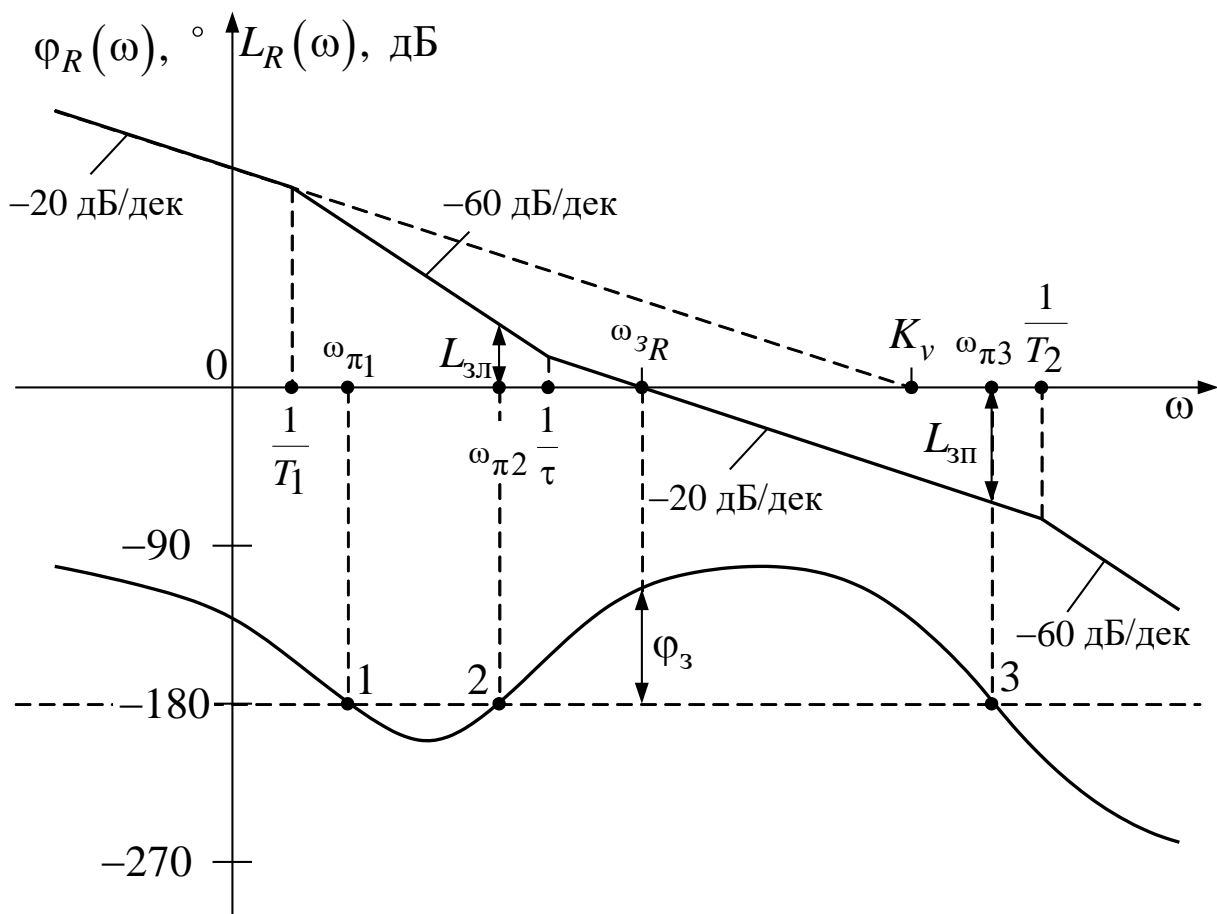


Рисунок 1.19

Приклад 2

Проведемо аналіз стійкості САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{K_a(1 + \tau p)}{p^2(1 + Tp)},$$

де $\tau > T$.

1 Характеристичний многочлен розімкненої системи

$$A(p) = p^2(1 + Tp).$$

Він має два нульові корені $p_{1,2} = 0$, обумовлені наявністю двох інтегруючих ланок ($K(p) = 1/p^2$), та один від'ємний $p_3 = -1/T$, а «праві» корені відсутні.

2 Логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи, що необхідні для застосування логарифмічного частотного критерію, наведено на рисунку 1.20.

3 ЛАЧХ розімкненої систем змінює знак один раз у точці ω_{z_R} , причому ЛАЧХ є додатною на частотах $\omega < \omega_{z_R}$ (рисунок 1.20).

4 У розімкненій системі є дві інтегруючі ланки, тому при $\omega = 0$ її ФЧХ дорівнює 0° , а при $\omega > 0$ вона стрибком набуває значення $-2 \cdot 90^\circ = -180^\circ$ (дивись примітку до пп. 1.2.3).

Для з'ясування наявності першого переходу запишемо вираз для ФЧХ розімкненої системи. ФЧХ розімкненої системи при $\omega = 0$ дорівнює нулю, а при $\omega > 0$ визначається виразом

$$\varphi_R(\omega) = -180^\circ + \arctg(\tau \cdot \omega) - \arctg(T \cdot \omega).$$

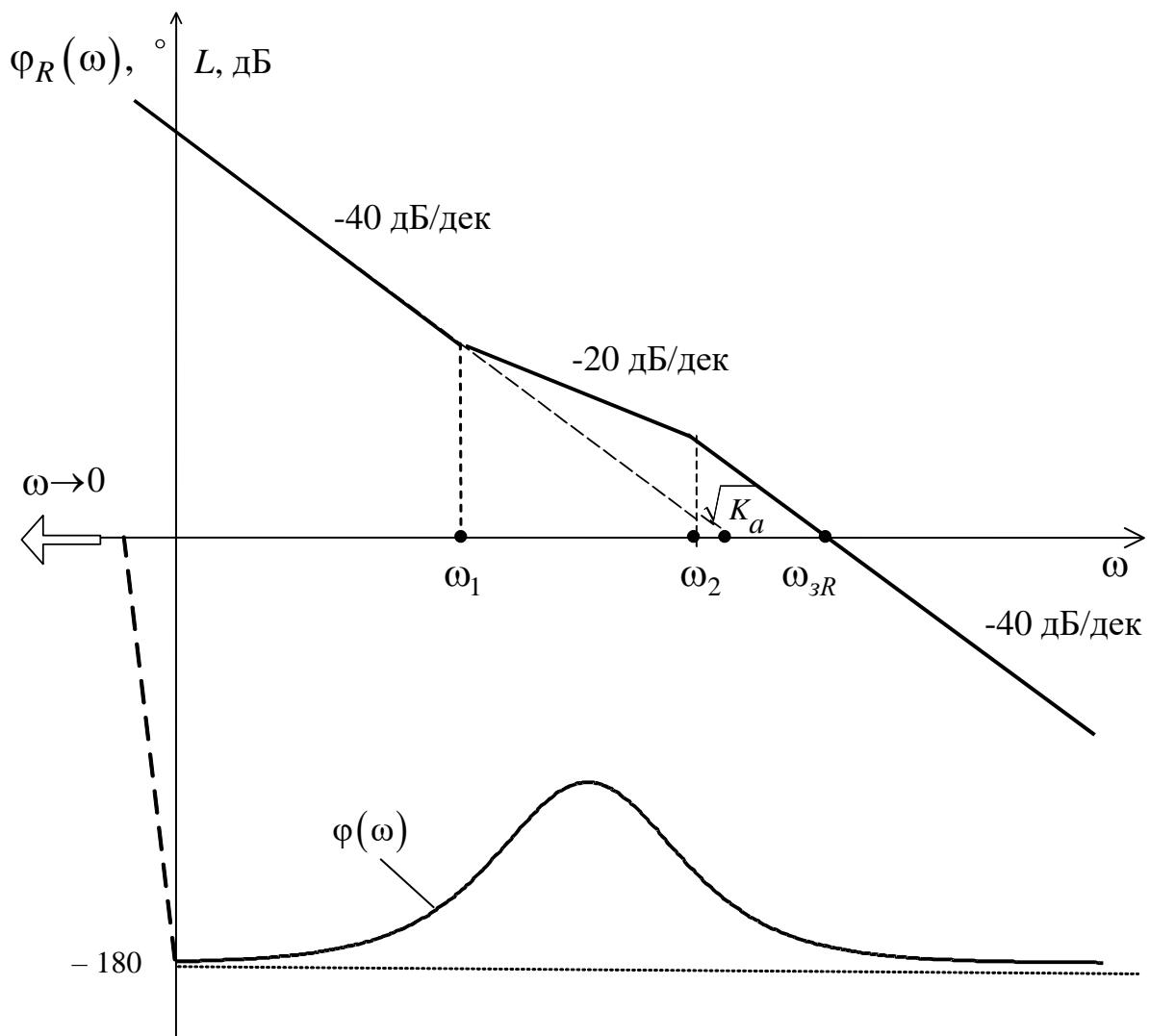


Рисунок 1.20

У нашому випадку постійна часу τ форсуючої ланки більше постійної часу T інерційної ланки, тому при $\omega \rightarrow 0, \omega > 0$ маємо

$$\delta\varphi = \operatorname{arctg}(\tau \cdot \omega) - \operatorname{arctg}(T \cdot \omega) \approx (\tau - T) \cdot \omega > 0,$$

і тому ЛФЧХ розімкненої системи на початковому інтервалі частот прямує з точки $\varphi_R(0) = 0^\circ$ до точки $-180^\circ + \delta\varphi$, яка знаходиться над рівнем -180° , внаслідок чого фіктивний від'ємний перехід через рівень -180° відсутній (навіпаки, при $T > \tau$ буде $\delta\varphi < 0$, тому існує фіктивний від'ємний перехід через рівень -180°).

Отже, ЛФЧХ розімкненої системи не має переходів через лінію -180° (рисунок 1.20).

5 З аналізу ходу ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи встановлено, що відповідно до критерію Найквіста замкнена система є стійкою.

1.2.5 Визначення запасів стійкості

Для того щоб забезпечити високу якість функціонування САК, необхідно не тільки забезпечити її стійкість, а й вибрати параметри системи таким чином, щоб при їх зміні у деяких межах система не втрачала стійкість. Для кількісної характеристики ступеня віддалення параметрів системи від припустимих граничних значень застосовуються запаси стійкості.

Запасом стійкості за підсиленням (амплітудою) називають відношення дійсного і граничного значень коефіцієнта підсилення розімкненої системи. Під граничним $K_{гр}$ мають на увазі таке значення коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при якому система опиняється на межі області стійкості (частота зрізу $\omega_{зR}$ співпадає з однією з частот ω_{π} переходів ЛФЧХ через рівні $\pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$).

За логарифмічними частотними характеристиками запаси стійкості за підсиленням (в децибелах) дорівнюють відстані від ЛАЧХ розімкненої системи до осі абсцис у точках ω_{π} , сусідніх до частоти зрізу $\omega_{зR}$:

$$L_3 = |L_R(\omega_{\pi})|. \quad (1.16)$$

Наприклад, САК, ЛАЧХ та ЛФЧХ якої зображено на рисунку 1.19, має два запаси стійкості за підсиленням: запас $L_{зл}$ визначається на частоті $\omega_{\pi 2}$ і характеризує можливе зменшення коефіцієнта підсилення розімкненої системи, а запас $L_{зп}$ визначається на частоті $\omega_{\pi 3}$ і характеризує його можливе збільшення. На частоті $\omega_{\pi 1}$ запас стійкості не визначається, тому що стійкість буде порушена раніше.

Відзначимо, що у тих випадках, коли ЛФЧХ не перетинає рівень -180° правіше або лівіше частоти зрізу, то відповідний запас стійкості за підсиленням дорівнює нескінченності.

Запасом стійкості за фазою називають різницю (відстань) між значенням ЛФЧХ на частоті зрізу розімкненої системи ω_{zR} і рівнем -180° :

$$\varphi_z = 180^\circ - \left| \varphi_R(\omega_{zR}) \right|. \quad (1.17)$$

Якщо система є стійкою, її запас стійкості за фазою є додатним (рисунок 1.19). В нестійкій системі він буде від'ємним.

З досвіду експлуатації встановлено мінімальні вимоги до запасів стійкості:

- за підсиленням $L_{z\min} \geq 6$ дБ;
- фазою $\varphi_{z\min} \geq 30^\circ$.

Найбільш зручно для визначення запасів стійкості використовувати функцію **margin** пакета Control Toolbox програмної оболонки Matlab (додаток Б).

Приклад

Розрахувати запаси стійкості за фазою і підсиленням системи з передаточною функцією розімкненої САК

$$R(p) = \frac{50(1+5p)^2}{p(1+50p)^2(1+0,01p)^2}.$$

Розв'язання

Для завдання передаточної функції, записаної у вигляді добутку передаточних функцій ланок, спочатку доцільно задати окремі компоненти, а потім їх перемножити. Розіб'ємо $R(p)$ на ланки

$$R(p) = K1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+5p)^2}{(1+50p)^2} \cdot \frac{1}{(1+0,01p)^2} =$$

$$= K1 \cdot K2(p) \cdot K3(p) \cdot K3(p) \cdot K4(p) \cdot K4(p),$$

$$\text{де } K1 = 50; K2(p) = \frac{1}{p}; K3(p) = \frac{1+5p}{1+50p}; K4(p) = \frac{1}{1+0,01p}.$$

Тоді програма набуває такого вигляду:

```
%Завдання 4, 5
%Виконав ст. гр. ... ..
%Варіант ...
% Передаточна функція розімкненої системи
k1=50;k2=tf([1],[1,0]);k3=tf([5,1],[50,1]);k4=tf([1],[0.01,1]);
R=k1*k2*k3*k3*k4*k4
```

Transfer function:

$$1250 s^2 + 500 s + 50$$

$$0.25 s^5 + 50.01 s^4 + 2502 s^3 + 100 s^2 + s$$

```
%Розрахунок лорифмічних частотних характеристик
margin(R); grid on
```

Результати розрахунку наведено на рисунку 1.21.

За результатами розрахунків на графіках (рисунок 1.21), отриманих за допомогою програми **margin** пакета MATLAB, відзначено та виведено у верхньому рядку чисельні значення запасів стійкості:

– за підсиленням при зменшенні коефіцієнта підсилення – на частоті $\omega_{\pi 2} = 0,155$ рад/с $L_{3\pi} = 18,6$ дБ (позначено як G_m , знак некоректно вказано «←»);

– фазою – на частоті зрізу $\omega_{3R} = 0,563$ рад/с $\varphi_3 = 54,3^\circ$ (позначено як P_m).

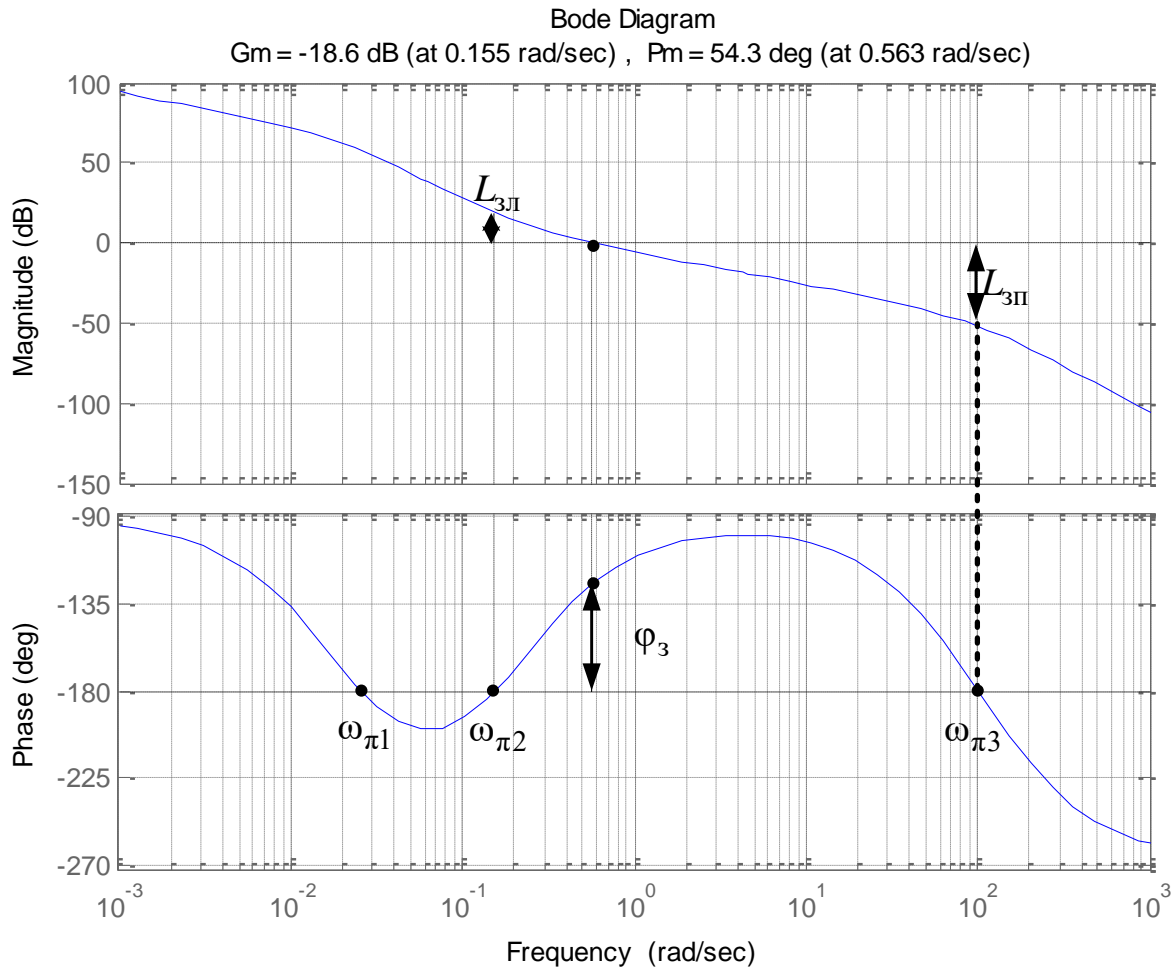


Рисунок 1.21

Однак програма не виявила ще один запас стійкості за підсиленням при збільшенні коефіцієнта підсилення – на частоті $\omega_{\pi 3} = 100$ рад/с, який дорівнює $L_{3П} = 50$ дБ.

Відмітимо, що, крім відзначених, програма **margin** має також інші недоліки. Тому необхідно ретельно перевіряти та коректувати результати розрахунків.

1.2.6 Аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі прямим методом

Перехідним називається режим, що виникає у системі безпосередньо після прикладення до неї вхідного діяння. Для аналізу якості функціонування САК в перехідному режимі застосовують *перехідну характеристику* $h(t)$, яка є реакцією системи на вхідне діяння у вигляді одиничної функції при

нульових початкових умовах. У стійких САК перехідна характеристика з часом наближається до постійного усталеного значення $h_{уст}$.

Типовий графік перехідної характеристики САК наведено на рисунку 1.22.

Основним показником якості функціонування САК в перехідному режимі є час його існування, який називається **часом регулювання** t_p . Він дорівнює інтервалу часу, після закінчення якого вихідна величина залишається близькою до усталеного значення із заданою точністю, тобто для всіх $t \geq t_p$ виконується умова

$$\left| \frac{h(t)}{h_{уст}} - 1 \right| \leq \Delta, \quad (1.18)$$

де Δ – достатньо мала величина. При подальших розрахунках будемо вважати $\Delta = 0,05$.

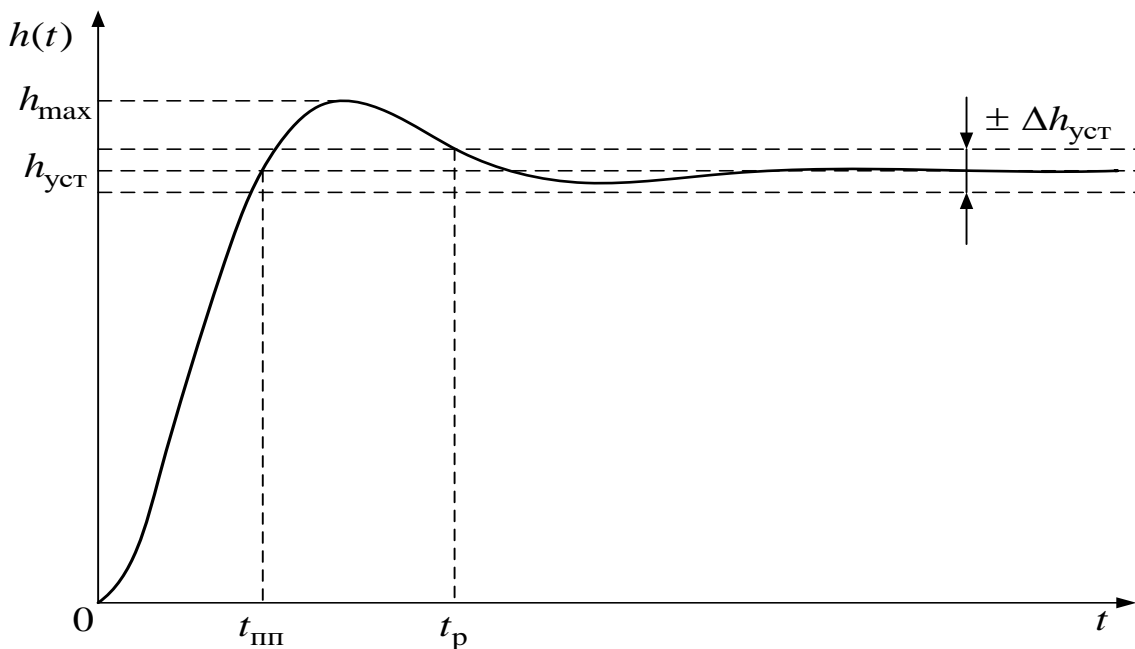


Рисунок 1.22

Якщо перехідна характеристика має коливання відносно усталеного значення, якість функціонування САК, крім часу регулювання, прийнято оцінювати за такими показниками (рисунок 1.22):

1) величина *перерегулювання* σ – максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення, яке виражають у відсотках:

$$\sigma[\%] = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100; \quad (1.19)$$

2) *час першого погодження* $t_{\text{пп}}$ – інтервал часу від моменту прикладення на вхід системи східчастого діяння у вигляді одиничної функції до моменту, коли перехідна характеристика вперше досягне свого усталеного значення;

3) *кількість коливань* N_p – кількість максимумів перехідної характеристики на інтервалі часу регулювання.

Найбільш важливими показниками якості САК в перехідному режимі є час регулювання t_p і величина перерегулювання σ . Перша величина характеризує швидкодію системи, а друга – ступінь її коливальності.

Методи, при використанні яких для відшукування показників якості функціонування САК в перехідному режимі використовується безпосередньо графік перехідної характеристики, називаються *прямими*. Дослідження прямими методами суттєво полегшується при застосуванні для розрахунків пакетів прикладних програм (ППП), які призначені для розв'язання диференціальних рівнянь або для математичного моделювання динамічних систем.

Так, у пакеті аналізу і синтезу систем керування Control System Toolbox програмної оболонки MATLAB для розрахунку перехідної характеристики застосовується оператор **step(W)**, де W – ідентифікатор передаточної функції замкненої системи $W(p)$ (додаток Б).

Приклад 1

Проаналізувати показники якості в перехідному режимі прямим методом САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{50(1+5p)^2}{p(1+50p)^2(1+0,01p)^2}.$$

Розв'язання

Для розрахунку передаточної функції замкненої системи $W(p)$ спочатку необхідно задати передаточну функцію розімкненої системи. Можливу методику її запису через добуток передаточних функцій ланок розглянуто у прикладі пп. 1.2.5. Тоді для отримання графіка перехідної характеристики необхідно скористатись такою програмою (вважається, що R задано раніше):

%Завдання 6

%Передаточна функція замкненої системи

$W = \text{feedback}(R, 1)$

Transfer function:

$$1250 s^2 + 500 s + 50$$

$$0.25 s^5 + 50.01 s^4 + 2502 s^3 + 1350 s^2 + 501 s + 50$$

%Розрахунок перехідної характеристики

$\text{step}(W); \text{grid on}$

Результати розрахунку (рисунок 1.23):

- час регулювання $t_p = 17,4$ с;
- величина перерегулювання $\sigma = 31$ %;
- час першого погодження $t_{\text{III}} = 2,65$ с;
- кількість коливань – 1.

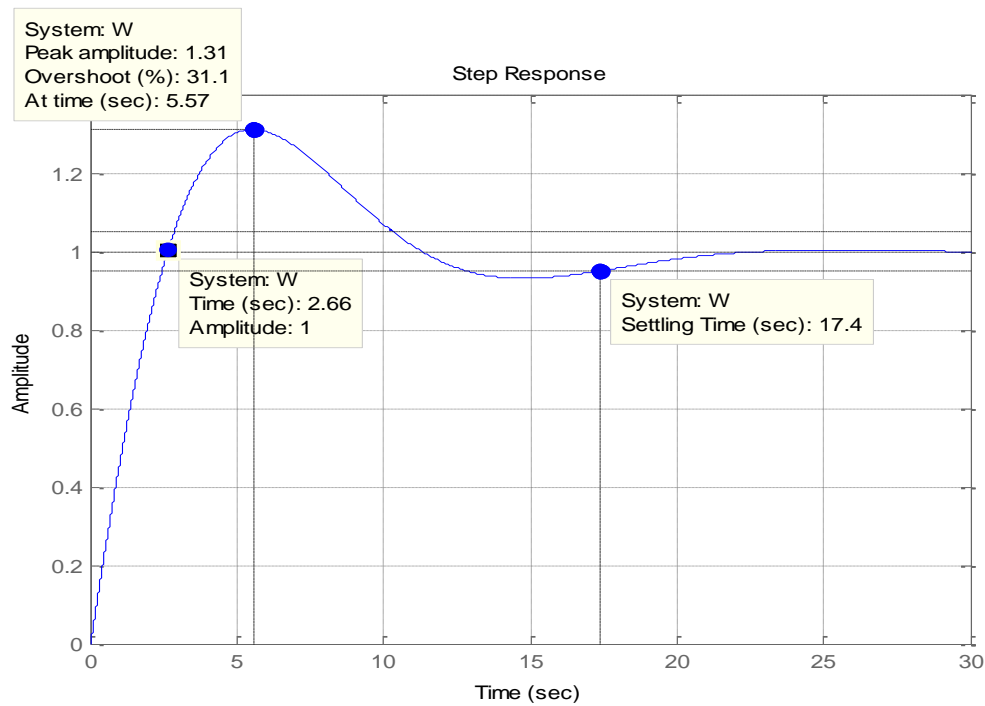


Рисунок 1.23

Приклад 2

Проаналізувати показники якості в перехідному режимі прямим методом САК з передаточною функцією розімкненої системи

$$R(p) = \frac{20(1+p)}{(1+0,1p)(1+2p+4p^2)}.$$

Розв'язання

За допомогою MATLAB виконуємо скрипт:

Завдання 6

%Виконав ст. гр.

%Варіант ...

% Передаточна функція розімкненої системи

K1=20*tf([1,1],[0.1,1]); K2= tf([1],[4,2,1]);

R=K1*K2

Transfer function:

$$20 s + 20$$

$$0.4 s^3 + 4.2 s^2 + 2.1 s + 1$$

% Передаточна функція замкненої системи

W=feedback(R,1);

Transfer function:

$$20 s + 20$$

$$0.4 s^3 + 4.2 s^2 + 22.1 s + 21$$

%Розрахунок перехідної характеристики

step(W);grid on

Результати розрахунку (рисунок 1.24):

- час регулювання $t_p = 1,28$ с;
- величина перерегулювання $\sigma = 17$ %;
- час першого погодження $t_{III} = 0,383$ с;
- кількість коливань – 1.

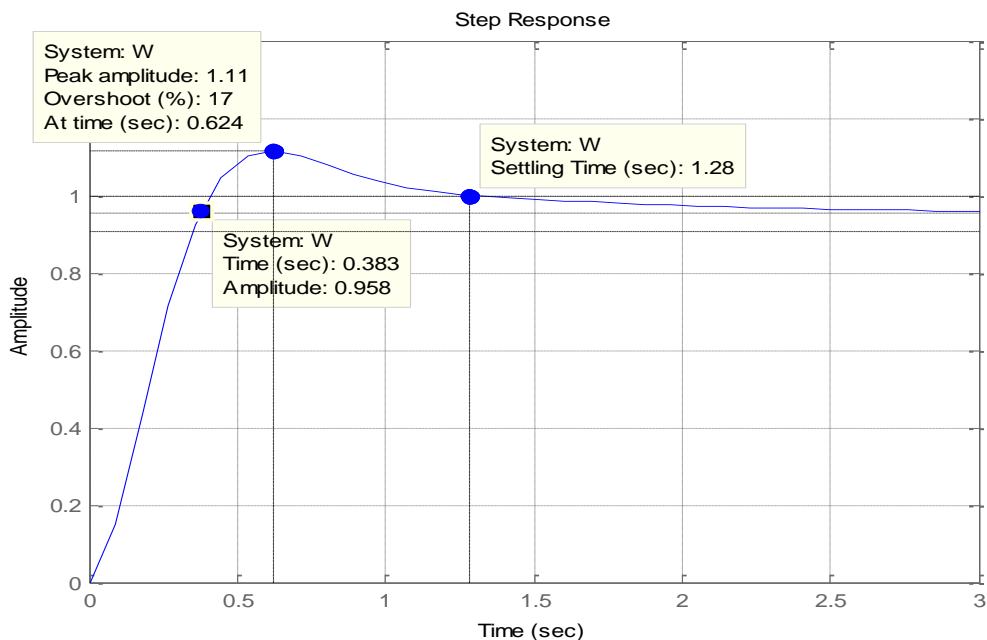


Рисунок 1.24

Відзначимо, що тут показники якості розраховані для сталого значення перехідної характеристики, яке дорівнює 0,958, а не 1.

1.2.7 Оцінювання показників якості функціонування САК в перехідному режимі за допомогою інженерних формул

Поряд з прямими застосовуються і *непрямі методи*, які дозволяють судити про якість функціонування САК в перехідному режимі без отримання графіка її перехідної характеристики.

Серед непрямих методів оцінювання показників якості САК у перехідному режимі виділимо *частотні методи*. Вони базуються на взаємно однозначному зв'язку між перехідною характеристикою та частотними характеристиками системи [1, 3].

На підставі аналізу зв'язку між перехідною і частотними характеристиками САК можна висунути загальні вимоги до ходу частотних характеристик САК, виконання яких гарантує прийнятну якість перехідного процесу [1].

Проведені дослідження показали, що *САК буде мати задовільні показники якості функціонування в перехідному режимі, якщо її логарифмічні частотні характеристики задовольняють такі вимоги:*

1) на частоті зрізу розімкненої системи ω_{zR} і в області частот, що приєднуються до неї, ЛАЧХ проходить з нахилом мінус 20 дБ/дек, причому загальна довжина відрізка ЛАЧХ з таким нахилом не менше за одну декаду;

2) значення запасів стійкості за підсиленням (амплітудою) L_3 і фазою φ_3 знаходяться у таких межах:

$$L_3 \geq 10 \text{ дБ}, \quad 45^\circ \leq \varphi_3 \leq 75^\circ.$$

Практика аналізу і синтезу САК свідчить про те, що при виконанні вказаних вимог показники якості САК в перехідному режимі можуть бути з достатньою для інженерної практики точністю розраховані за такими евристичними формулами:

$$t_p \cong \frac{385}{\omega_{zR} \cdot \varphi_3^\circ}; \quad \sigma \cong \begin{cases} (73 - \varphi_3^\circ) \%, & \text{якщо } \varphi_3 < 73^\circ; \\ 0, & \text{якщо } \varphi_3 \geq 73^\circ. \end{cases} \quad (1.20)$$

Як впливає з формул (1.20), час регулювання обернено пропорційний частоті зрізу розімкненої системи та запасу стійкості за фазою, а величина перерегулювання зростає при зменшенні запасу стійкості за фазою.

Приклад

Проаналізувати показники якості в перехідному режимі непрямым частотним методом САК з передаточною функцією розімкненої системи (приклад пп. 1.2.5 та приклад 1 пп. 1.2.6)

$$R(p) = \frac{50(1+5p)^2}{p(1+50p)^2(1+0,01p)^2}.$$

Розв'язання

Спочатку перевіримо виконання вимог до ходу ЛАЧХ та запасів стійкості, що дозволяють скористатись евристичними формулами (1.20).

Для перевірки першої вимоги встановимо, на якій ділянці та з яким нахилом ЛАЧХ розімкненої системи перетинає вісь частот. З цією метою скористаємось розбиттям передаточної функції $R(p)$, приведеним у прикладі пп. 1.2.5:

$$R(p) = K1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+5p)^2}{(1+50p)^2} \cdot \frac{1}{(1+0,01p)^2} =$$

$$= K1 \cdot K2(p) \cdot K3(p) \cdot K3(p) \cdot K4(p) \cdot K4(p),$$

$$\text{де } K1 = 50; K2(p) = \frac{1}{p}; K3(p) = \frac{1+5p}{1+50p}; K4(p) = \frac{1}{1+0,01p}.$$

ЛАЧХ розімкненої системи має такий хід:

– початковий нахил визначається однією інтегруючою ланкою $K2(p) = 1/p$ та дорівнює мінус 20 дБ/дек;

– перша частота спряження, яка відповідає подвійній інерційній ланці (знаменник $K3(p)$), дорівнює $\omega_1 = 1/50 = 0,02$ рад/с; ЛАЧХ від неї іде з нахилом мінус 60 дБ/дек;

– друга частота спряження, яка відповідає подвійній форсуючій ланці (чисельник $K3(p)$), дорівнює $\omega_2 = 1/5 = 0,2$ рад/с; ЛАЧХ від неї іде з нахилом мінус 20 дБ/дек;

– третя частота спряження, яка відповідає другій подвійній інерційній ланці ($K4(p)$), дорівнює $\omega_3 = 1/0,01 = 100$ рад/с; ЛАЧХ від неї іде з нахилом мінус 60 дБ/дек.

Частота зрізу розімкненої системи дорівнює $\omega_{3R} = 0,563$ рад/с. Вона знаходиться між частотами ω_2 та ω_3 , тому нахил ЛАЧХ на цій ділянці мінус 20 дБ/дек, а довжина ділянки дорівнює $\omega_3/\omega_2 = 100/0,2 = 500$, тобто $\lg 500 = 2,7$ дек. Таким чином, перша вимога виконується.

За результатами розрахунків відомо (дивись приклад пп. 1.2.5), що запас стійкості за підсиленням при зменшенні коефіцієнта підсилення $L_{3Л} = 18,6$ дБ, при збільшенні коефіцієнта підсилення $L_{3П} = 50$ дБ, запас стійкості за фазою $\varphi_3 = 54,3^\circ$. Таким чином, друга вимога також виконується.

Примітка – За графіками ЛАЧХ, побудованими у пакеті MATLAB, без наявності досвіду та твердих знань досить складно перевірити виконання першої вимоги. Однак з урахуванням того, що перша та друга вимоги взаємопов'язані, у багатьох випадках достатньо перевірити виконання лише другої вимоги.

Для розрахунку підставимо у евристичні формули (1.20) значення частоти зрізу розімкненої системи $\omega_{3R} = 0,563$ рад/с та запасу стійкості за фазою $\varphi_3 = 54,3^\circ$:

$$t_p \cong \frac{385}{\omega_{3R} \cdot \varphi_3^\circ} = \frac{385}{0,563 \cdot 54,3} = 12,6 \text{ с};$$

$$\sigma \cong 73 - \varphi_3^\circ = 73 - 54,3 = 18,7 \text{ \%}.$$

Результати за непрямим частотним методом помітно відрізняються (хоча за порядком величин дуже близькі) від отриманих за прямим методом: $t_p = 17,4$ с, $\sigma = 31$ %. Тому їх можна використовувати лише для орієнтовного оцінювання якості системи в перехідному режимі.

1.2.8 Аналіз точності САК в типових режимах роботи

Точність функціонування САК характеризується величиною усталеної помилки $\varepsilon_{уст}(t)$, яка дорівнює різниці між значеннями задавального діяння $g(t)$ й усталеного значення вихідної величини $y_{уст}(t)$:

$$\varepsilon_{уст}(t) = g(t) - y_{уст}(t). \quad (1.21)$$

Надалі з метою спрощення позначень опустимо підрядковий індекс у позначеннях усталеної помилки.

У загальному випадку усталена помилка має дві складові:

$$\varepsilon = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t),$$

де $\varepsilon_g(t)$ – динамічна помилка – помилка, яка викликана неточністю відпрацьовування задавального діяння $g(t)$;

$\varepsilon_f(t)$ – помилка, що обумовлена заважаючим діянням.

Якщо заважаюче діяння відсутнє, то $\varepsilon_f(t) = 0$, і проводиться аналіз лише динамічної помилки $\varepsilon_g(t)$.

Для відшукування усталених динамічних помилок скористаємось виразом [1, 3]

$$\varepsilon_g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} L\{g(t)\}, \quad (1.22)$$

де v – кількість інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи;

K – коефіцієнт підсилення розімкненої системи;
 $L\{g(t)\}$ – перетворення Лапласа задавального діяння.

Отже, *точність функціонування САК в усталеному режимі залежить від кількості інтегруючих ланок і величини коефіцієнта підсилення розімкненої системи.*

Для проведення інженерного аналізу точності застосовуються так звані *типові режими* – режими, що виникають під впливом діянь, що описуються степеневими функціями часу. Види діянь, назви відповідних їм типових режимів роботи САК й усталених помилок наведено в таблиці 1.4.

Всі САК залежно від наявності чи відсутності статичної помилки, тобто усталеної помилки при постійному вхідному діянні (в статичному режимі), поділяються на статичні або астатичні.

Статичною називається САК, у якої існує статична помилка ($\varepsilon_{ст} \neq 0$). В *астатичній* САК статична помилка відсутня ($\varepsilon_{ст} = 0$), тобто постійне вхідне діяння відпрацьовується без помилки.

Визначимо ознаки статизму та астатизму САК відносно задавального діяння.

Таблиця 1.4 – Характеристика типових режимів роботи САК

Вид діяння	Типовий режим роботи САК	Назва усталеної помилки
Постійне $g(t) = A \cdot 1(t)$	Статичний	Статична
Лінійне $g(t) = V \cdot t \cdot 1(t)$	Кінетичний	Кінетична
Квадратичне $g(t) = W \cdot t^2 \cdot 1(t) / 2$	Рівноприскорений	Інерційна

При постійному задавальному діянні $g(t) = A \cdot 1(t)$ маємо $L\{g(t)\} = \frac{A}{p}$, і тому статична помилка системи дорівнює

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{ст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v+1}}{p^v + K} \cdot \frac{A}{p} = \begin{cases} A/(1+K), & \text{якщо } v = 0; \\ 0, & \text{якщо } v > 0. \end{cases}$$

Отже, система є статичною, якщо в ній відсутні інтегруючі ланки ($v = 0$), і, навпаки, система є астатичною, якщо в ній є хоча б одна інтегруюча ланка.

Астатичні САК у свою чергу розподіляють на системи з астатизмом першого, другого і т. д. порядків. **Ознакою порядку астатизму САК є кількість v інтегруючих ланок у передаточній функції розімкненої системи.**

Для проведення аналізу точності САК в типових режимах роботи запишемо зображення за Лапласом типових вхідних діянь (дивись додаток В):

- постійного діяння $L\{A \cdot 1(t)\} = \frac{A}{p}$;
- лінійного діяння $L\{V \cdot t \cdot 1(t)\} = \frac{V}{p^2}$;
- квадратичного діяння $L\left\{W \cdot \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)\right\} = \frac{W}{p^3}$.

Приклад 1

Розрахувати помилки системи в типових режимах роботи, якщо за результатами перетворення до стандартного вигляду та розрахунків у пакеті MATLAB отримано передаточну функцію розімкненої системи у вигляді (дивись приклад 2 пп. 1.2.1)

Transfer function:

$$\frac{100 s + 50}{-----}$$

$$10 s^3 + 51 s^2 + 5 s$$

Розв'язання

Для того щоб провести розрахунки, необхідно виділити загальний коефіцієнт підсилення K і визначити кількість

інтегруючих ланок ν у складі системи. Запишемо передаточну функцію та зробимо необхідні перетворення таким чином, щоб вирази у дужках мали останні складові, що дорівнюють одиниці:

$$K(p) = \frac{100p + 50}{10p^3 + 51p^2 + 5p} = \frac{50(2p + 1)}{5p(2p^2 + 10,2p + 1)} =$$

$$= \frac{10(2p + 1)}{p(2p^2 + 10,2p + 1)}.$$

Отже, загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K = 10 \text{ с}^{-1}$, кількість інтегруючих ланок $\nu = 1$, що є ознакою наявності астатизму першого порядку.

Проводимо розрахунки.

1 Розрахунок усталеної помилки у статичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ст}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1+1}}{p + K} \cdot \frac{A}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} A \frac{p}{p + K} = 0.$$

2 Розрахунок усталеної помилки у кінетичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{к}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1+1}}{p + K} \cdot \frac{V}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} V \frac{1}{p + K} = \frac{V}{10}.$$

3 Розрахунок усталеної помилки у рівноприскореному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ін}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1+1}}{p + K} \cdot \frac{W}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + K} \cdot \frac{W}{p} \rightarrow \infty.$$

Висновок. Система має астатизм першого порядку. Вона працює без усталеної помилки при постійних вхідних діяннях і має обмежену помилку при діяннях, що змінюються з постійною швидкістю. Якщо вхідне діяння змінюється з прискореннями, помилка буде необмежено зростати.

Приклад 2

Розрахувати помилки системи в типових режимах роботи, якщо за результатами перетворення до стандартного вигляду отримано передаточну функцію розімкненої системи у вигляді (дивись приклад 2 пп. 1.2.4)

$$R(p) = \frac{K_a(\tau p + 1)}{p^2(Tp + 1)},$$

причому $K_a = 50 \text{ с}^{-2}$, $\tau = 1 \text{ с}$, $T = 0,1 \text{ с}$.

Розв'язання

З аналізу передаточної функції розімкненої системи маємо, що загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K_a = 10 \text{ с}^{-2}$, а кількість інтегруючих ланок $\nu = 2$, і тому система має астатизм другого порядку.

Проводимо розрахунки.

1 Розрахунок усталеної помилки у статичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ст}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{2+1}}{p^2 + K_a} \cdot \frac{A}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} A \frac{p^2}{p^2 + K_a} = 0.$$

2 Розрахунок усталеної помилки у кінетичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{к}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{2+1}}{p^2 + K_a} \cdot \frac{V}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} V \frac{p}{p^2 + K_a} = 0.$$

3 Розрахунок усталеної помилки у рівноприскореному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ін}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{2+1}}{p^2 + K_a} \cdot \frac{W}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W}{p^2 + K_a} = \frac{W}{10}.$$

Висновок. Система має астатизм другого порядку. Вона працює без усталеної помилки при постійних вхідних діяннях і діяннях, що змінюються з постійною швидкістю. Якщо вхідне діяння змінюється з прискоренням, система має обмежену помилку.

Приклад 3

Розрахувати помилки системи в типових режимах роботи, якщо за результатами перетворення до стандартного вигляду отримано передаточну функцію розімкненої системи у вигляді (дивись приклад 2 пп. 1.2.6)

$$R(p) = \frac{20(1+p)}{(1+0,1p)(1+2p+4p^2)}.$$

Розв'язання

З аналізу передаточної функції розімкненої системи маємо, що загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи $K = 20$, кількість інтегруючих ланок $\nu = 0$, тому система є статичною.

Проводимо розрахунки.

1 Розрахунок усталеної помилки у статичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ст}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{0+1}}{p^0 + K} \cdot \frac{A}{p} = \frac{A}{1+20}.$$

2 Розрахунок усталеної помилки у кінетичному режимі.

$$\varepsilon_{\text{к}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{0+1}}{p^0 + K} \cdot \frac{V}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1+K} \cdot \frac{V}{p} \rightarrow \infty.$$

3 Розрахунок усталеної помилки у рівноприскореному режимі.

$$\varepsilon_{\text{ін}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{0+1}}{p^0 + K} \cdot \frac{W}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1+K} \cdot \frac{W}{p^2} \rightarrow \infty.$$

Висновок. Система статична. Вона має обмежену усталену помилку при постійних вхідних діяннях. Її величина обернено пропорційна коефіцієнту підсилення розімкненої системи. Якщо вхідне діяння змінюється з постійною швидкістю або з прискоренням, помилка системи може з часом необмежено зростати. Така САК не придатна для роботи у змінних режимах.

2 ГРУПА ЗАВДАНЬ II

Для заданого варіанта одноконтурної схеми математичної моделі та передаточних функцій функціональних блоків системи автоматичного керування виконати таке:

- 1) записати основні рівняння і визначити оператори передачі системи;
- 2) побудувати логарифмічні амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики розімкненої системи;
- 3) провести аналіз стійкості системи за допомогою частотного критерію Найквіста;
- 4) визначити запаси стійкості;
- 5) провести аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі прямим методом;
- 6) провести аналіз показників якості функціонування САК в перехідному режимі непрямим частотним методом;
- 7) провести аналіз точності САК в типових режимах роботи.

2.1 Варіанти завдань

Варіанти завдань наведено в таблиці 2.1 і на рисунку 2.1. На рисунку позначено:

$g(t)$ – задавальне діяння;

$y(t)$ – вихідне діяння;

$\varepsilon(t)$ – помилка системи;

$K_1(D), K_2(D)$ – оператори передачі ланок.

Номер варіанта визначається за правилом

$$N = k - 30 \cdot \text{int}(k/30),$$

де k – дві останні цифри номера залікової книжки студента;
 $\text{int}(*)$ – ціла частина числа.

Наприклад, дві останні цифри шифру студента $k = 55$. Тоді номер варіанта

$$N = 55 - 30 \cdot \text{int}(55/30) = 55 - 30 \cdot \text{int}(1,67) = 55 - 30 \cdot 1 = 25.$$

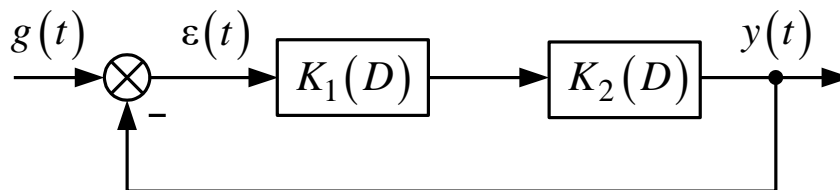


Рисунок 2.1

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань до розрахунково-графічної роботи групи завдань II

Варіант	$K_1(D)$	$K_2(D)$
1	2	3
0	$\frac{3(2D+1)}{D(0,05D+1)}$	$\frac{2}{D(0,05D+1)}$
1	$\frac{5}{D(0,1D+1)}$	$\frac{2D+1}{10D+1}$
2	$\frac{5D+1}{D}$	$\frac{1,035}{D(0,05D+1)}$
3	$\frac{120}{D(0,1D+1)}$	$\frac{D+1}{(0,1D+1)(20D+1)}$
4	$\frac{150}{(0,1D+1)(50D+1)}$	$\frac{100(D+1)}{(0,1D+1)(50D+1)}$
5	$\frac{100}{D(0,2D+1)}$	$\frac{2D+1}{10D+1}$
6	$\frac{100D+1}{D(0,2D+1)}$	$\frac{0,03}{D(0,2D+1)}$
7	$\frac{2(10D+1)}{D(0,05D+1)^2}$	$\frac{2(10D+1)}{(20D+1)^2}$

Продовження таблиці 2.1

1	2	3
8	$\frac{100(2D+1)}{(50D+1)^2}$	$\frac{120}{0,2D+1}$
9	$\frac{13,5(0,2D+1)}{D(0,1D+1)}$	$\frac{100}{50D+1}$
10	$\frac{2D+1}{D}$	$\frac{5,4}{D(0,05D+1)}$
11	$\frac{5D+1}{0,1D+1}$	$\frac{21}{D(50D+1)(0,1D+1)}$
12	$\frac{100}{(20D+1)(0,05D+1)}$	$\frac{100(0,5D+1)}{(20D+1)(0,05D+1)}$
13	$\frac{50D+1}{(100D+1)(0,5D+1)}$	$\frac{0,4(50D+1)}{D(100D+1)}$
14	$\frac{10D+1}{0,5D+1}$	$\frac{0,12}{D^2(0,5D+1)}$
15	$\frac{2D+1}{D(10D+1)(0,2D+1)}$	$\frac{100(2D+1)}{(10D+1)(0,2D+1)}$
16	$\frac{10(10D+1)}{(100D+1)(0,02D+1)}$	$\frac{100}{100D+1}$
17	$\frac{5D+1}{0,02D+1}$	$\frac{100}{D(100D+1)}$
18	$\frac{0,01(20D+1)}{D(2D+1)}$	$\frac{0,49}{D}$
19	$\frac{25}{D(50D+1)(0,2D+1)}$	$\frac{2D+1}{0,2D+1}$
20	$\frac{270}{(100D+1)(0,05D+1)}$	$\frac{2(20D+1)}{(100D+1)(0,05D+1)}$
21	$\frac{2(5D+1)}{(20D+1)(0,1D+1)}$	$\frac{8,4(5D+1)}{D(20D+1)}$
22	$\frac{0,28(5D+1)}{D(0,05D+1)}$	$\frac{3}{D(0,05D+1)}$

Продовження таблиці 2.1

1	2	3
23	$\frac{0,18(50D+1)}{D(0,5D+1)}$	$\frac{50D+1}{(100D+1)^2(0,5D+1)}$
24	$\frac{45(D+1)}{0,1D+1}$	$\frac{100}{(50D+1)^2}$
25	$\frac{2D+1}{0,01D+1}$	$\frac{4,5}{D(10D+1)}$
26	$\frac{0,01(100D+1)}{D(0,2D+1)}$	$\frac{0,1}{D}$
27	$\frac{3}{0,1D+1}$	$\frac{10(D+1)}{D(5D+1)(0,1D+1)}$
28	$\frac{30}{0,2D+1}$	$\frac{100(2D+1)}{(50D+1)^2(0,2D+1)}$
29	$\frac{3,04(0,1D+1)}{(0,5D+1)(0,02D+1)}$	$\frac{100(0,1D+1)}{D(0,5D+1)}$

2.2 Методичні рекомендації до виконання роботи

При виконанні варіантів розрахунково-графічної роботи групи завдань II слід дотримуватися методичних рекомендацій, викладених у пп. 1.2.2 – 1.2.8 для варіантів групи завдань I.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Хісматулін В. Ш., Панченко С. В. Теорія автоматичного керування. Ч. I. Теорія лінійних неперервних систем автоматичного керування : підручник для вузів. Харків : УкрДАЗТ, 2008. 239 с.

2 Моделювання систем у середовищі MATLAB / С. С. Забара, О. О. Гагарін, І. М. Кузьменко, Ю. Д. Щербашин. Київ, 2011. 137 с.

3 Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнецов Б. І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Т. 1. Теорія автоматичного керування. Харків : НТУ «ХПІ», 2002. 490 с.

ДОДАТОК А

Частотні характеристики елементарних ланок

Елементарна ланка		
Підсилювальна	Інтегруюча	Диференціююча
Передаточна функція		
$K(p) = K$	$K(p) = \frac{K}{p}$	$K(p) = Kp$
Фазочастотна характеристика		
$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & K \geq 0, \\ -\pi, & K < 0 \end{cases}$	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика		
$L(\omega) = 20 \lg K $ 	$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega$
Елементарна ланка		
Інерційна (аперіодична)	Форсууюча	
Передаточна функція		
$K(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	$K(p) = K(\tau p + 1)$	
Фазочастотна характеристика		
$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$	$\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau$	
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика		
$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ 	$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$ 	

Елементарна ланка	
Коливальна	Форсуюча другого порядку
Передаточна функція	
$K(p) = \frac{K}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}$	$K(p) = K(\tau_0^2 p^2 + 2\eta\tau_0 p + 1)$
Фазочастотна характеристика	
$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega < \frac{1}{T_0}; \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T_0}; \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - (\omega T_0)^2}, & \omega > \frac{1}{T_0}. \end{cases}$	$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega < \frac{1}{\tau_0}, \\ \frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{\tau_0}, \\ \pi + \arctg \frac{2\eta\tau_0 \omega}{1 - (\omega\tau_0)^2}, & \omega > \frac{1}{\tau_0}. \end{cases}$
Логарифмічна амплітудно - частотна характеристика	

ДОДАТОК Б

Деякі функції пакета Control Toolbox програмної оболонки Matlab

1 Задання передаточної функції динамічної ланки

Для задання передаточної функції

$$K(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k}, \quad k \geq m \quad (\text{Б.1})$$

у командному вікні (Command Window) набирають

$$\mathbf{K} = \mathbf{tf}([\mathbf{b}_m \ \mathbf{b}_{m-1} \ \dots \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_0], [\mathbf{a}_k \ \mathbf{a}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_0]) \quad (\text{Б.2})$$

де \mathbf{b}_i та \mathbf{a}_r – коефіцієнти многочленів, що стоять у чисельнику та знаменнику передаточної функції $K(p)$, які набирають через пробіл (або кому), починаючи з більших номерів.

Після введення функції $\mathbf{tf}(\cdot)$ у командному вікні з'являється набрана передаточна функція (у пакеті Matlab змінна Лапласа p відображується літерою s).

2 Завдання передаточної функції з'єднань динамічних ланок

Для задання передаточної функції з'єднань ланок необхідно спочатку задати передаточні функції окремих ланок, після чого записати вираз для з'єднань відповідно до звичайних правил:

– послідовне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} * \mathbf{K2}$$

– паралельне з'єднання ланок

$$\mathbf{K} = \mathbf{K1} \pm \mathbf{K2}$$

– зустрічно паралельне з'єднання ланок

$$K = K1/(1 \pm K1 * K2)$$

де знак «-» записується при позитивному зворотному зв'язку, а «+» - при негативному.

Крім того, при негативному зворотному зв'язку є спеціальна функція

$$K = \text{feedback}(K1, K2)$$

При складній схемі можна записувати або спочатку часткові перетворення, або одразу повне з урахуванням часткових правил заміни.

3 Побудова перехідної характеристики динамічної системи

Для побудови перехідної характеристики у командному вікні набирають

$$\text{step}(K)$$

де K – передаточна функція, яка задається за допомогою функції $\text{tf}(\cdot)$.

Після введення функції **step** з'являється вікно **Figure № 1**, у якому побудована перехідна характеристика досліджуваної системи.

Для нанесення масштабної сітки необхідно натиснути праву кнопку «миші», після чого активізувати лівою кнопкою функцію **grid** або додати у командну строку запис **grid** після запису відповідної функції (наприклад: **step(K);grid**).

Для визначення параметрів характеристики необхідно підвести курсор до необхідної точки на графіку, натиснути ліву кнопку «миші» та утримати її більше 1 с. Крім того, після натискання правої кнопки на графіку з'являється вікно, у якому можна задати виведення на графік характеристик та їх чисельних значень:

Peak Response – максимум перехідної характеристики **Peak Amplitude** та величина перерегулювання **Overshoot %**;

Setting Time – час регулювання; за умовчанням він вимірюється при межах 2 %; для встановлення меж 5 % необхідно додатково натиснути **Properties – Options**, після чого задати межі **Show setting time within 5 %**, а для часу першого погодження - **Rise time - Show rise time from 0 to 100 %**;

Steady State – усталене значення $h_{уст}$.

Для більш детального огляду фрагмента необхідно активізувати команду \oplus (**Zoom In**), після чого, натиснувши ліву кнопку «миші», виділити прямокутником досліджуваний фрагмент (увага: для визначення параметрів характеристики необхідно спочатку скасувати команду \oplus).

При необхідності огляду характеристики протягом іншого часу, ніж того, що наведений у вікні Figure № 1, у командному вікні набирають

step(K, T)

де **T** – бажана тривалість характеристики, с.

Для спостереження одночасно характеристик декількох систем їх записують через кому у відповідній функції.

4 Побудова логарифмічних частотних характеристик

Для побудови логарифмічних частотних характеристик системи у командному вікні набирають

bode(K)

де **K** – передаточна функція досліджуваної системи, яка задана за допомогою функції **tf(·)**.

Після введення функції **bode** з'являється вікно Figure № 1, у якому побудовані ЛАЧХ та ЛФЧХ системи. На графіках можна наносити масштабну сітку, виділяти фрагмент та проводити вимірювання за розглянутими раніше правилами.

Якщо необхідно спостерігати логарифмічні частотні характеристики у певному діапазоні частот, тоді набирають команду

$$\mathbf{bode}(\mathbf{K}, \{\omega_{\Pi}, \omega_{\mathbf{K}}\})$$

де $\omega_{\Pi}, \omega_{\mathbf{K}}$ – бажані частоти початку та кінця діапазону частот, рад/с.

Для побудови логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи з метою вимірювання запасів стійкості можна скористатись спеціальною функцією

$$\mathbf{margin}(\mathbf{K})$$

де \mathbf{K} – передаточна функція розімкненої системи, яка задана за допомогою функції $\mathbf{tf}(\cdot)$. В цьому випадку на графіках автоматично відзначаються та у верхньому рядку записуються значення запасу стійкості за підсиленням L_3 у децибелах та за фазою φ_3 у градусах (у Matlab вони позначаються відповідно G_m та P_m), а також частот, на яких вони виміряні.

ДОДАТОК В

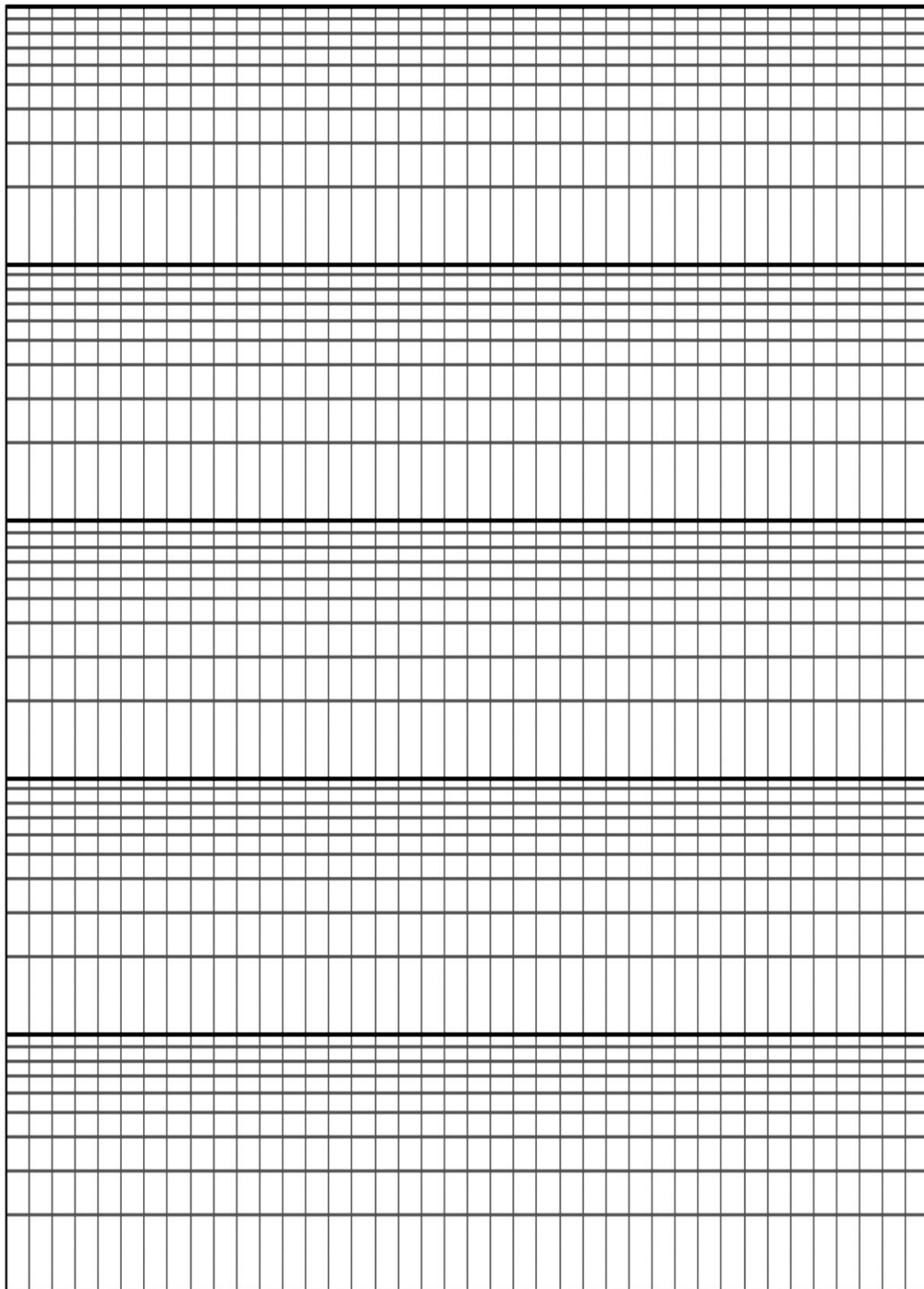
Основні властивості перетворення Лапласа

Назва	Оригінал	Зображення
Лінійність	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$	$c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$
Диференціювання оригіналу	$x'(t)$	$pX(p) - x(0)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}X(p)$
Запізнювання оригіналу	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-\tau p}X(p)$
Згортка оригіналів	$\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$	$X_1(p)X_2(p)$
Кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$
Початкове значення оригіналу	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$

Таблиця перетворень Лапласа

$x(t)$	$X(p)$	$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$	1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$t^2 / 2$	$\frac{1}{p^3}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

ДОДАТОК Г
Бланк для побудови логарифмічних частотних
характеристик



АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ
АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розрахунково-графічної роботи

з дисципліни
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

Відповідальний за випуск Сосунов О. О.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 20.04.21 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,75. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.