

МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

М.М. Бабаєв, М.Г. Давиденко, Г.І. Загарій, Ю.В. Соболев

**ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА
ПРИСТРОЇВ АВТОМАТИКИ ТА ЗВ'ЯЗКУ**

Підручник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
підручник для студентів вищих навчальних закладів*

Харків 2007

УДК 621.37:656.25(075)

Бабасєв М.М., Давиденко М.Г., Загарій Г.І., Соболев Ю.В. Лінійні електричні кола пристроїв автоматики та зв'язку: Підручник. – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 285 с.

ISBN 978-966-7593-88-9

Викладені теоретичні основи функціонування та методи розрахунку кіл із зосередженими та розподіленими параметрами: двополіусників, чотиріполіусників, довгих ліній. Розглянуто теорію та побудову LC-, RC- та ARC-фільтрів, твердотільних резонаторних фільтрів, а також коректорів амплітудно-частотних та фазочастотних характеристик пристроїв зв'язку та автоматики.

Підручник призначений для студентів вищих навчальних закладів залізничного транспорту, які навчаються за спеціальністю «Автоматика та автоматизація на транспорті». Він також може бути корисним студентам радіотехнічних та зв'язкових спеціальностей, а також інженерно-технічним працівникам галузей автоматики та зв'язку.

Іл. 203, бібліогр.: 43 назв.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (№ 1.4/18-Г-682 від 03 травня 2007 р.)

Рецензенти:

проф. Ю.О. Коваль (Харківський національний університет радіоелектроніки),

проф. В.Б. Фінкельштейн (Харківська національна академія міського господарства)

© Українська державна академія залізничного транспорту, 2007

М.М. Бабаєв, М.Г. Давиденко, Г.І. Загарій, Ю.В. Соколев

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА
ПРИСТРОЇВ АВТОМАТИКИ ТА ЗВ'ЯЗКУ

Підручник

2-е видання, стереотипне

Відповідальний за випуск Давиденко М.Г.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 05.09.07 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 17,75. Обл.-вид.арк. 18,0.
Замовлення № 121. Тираж 160. Ціна договірна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від. 12.06.2007 р.
Друк ТОВ «Енергозберігаючі технології»
61050, Харків, Харківська набережна, 8.
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 1360 від 19.05.03 р.

Зміст

Передмова	7
1. ДВОПОЛЮСНИКИ	8
1.1. Загальні поняття та визначення	8
1.2. Одноелементні лінійні двополюсники	8
1.3. Двоелементні реактивні двополюсники	10
1.4. Еквівалентні та зворотні двополюсники	13
1.5. Триелементні реактивні двополюсники	16
1.6. Канонічні багатоелементні реактивні двополюсники	18
1.6.1. Загальні властивості	18
1.6.2. Теорема Фостера	19
1.6.3. Схеми	20
1.7. Неканонічні реактивні двополюсники	25
1.8. Завдання для самоконтролю	26
2. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ	30
2.1. Загальні поняття та визначення	30
2.2. Основні рівняння чотириполюсника	31
2.2.1. Рівняння у формі A . Каскадне (ланцюжкове) з'єднання чотириполюсників	31
2.2.2. Рівняння у формі Z . Послідовне з'єднання чотириполюсників	36
2.2.3. Рівняння у формі Y . Паралельне з'єднання чотириполюсників	39
2.2.4. Рівняння у формі H . Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників	42
2.2.5. Рівняння у формах G та B	44
2.2.6. Зв'язок між коефіцієнтами рівнянь різних форм	46
2.2.7. Регулярність з'єднання чотириполюсників	46
2.3. Схеми заміщення чотириполюсників	48
2.4. Власні (характеристичні) параметри чотириполюсників	52
2.4.1. Характеристичні опори	52
2.4.2. Власна стала передачі	54
2.4.3. Вживання власних параметрів та A -параметрів	58
2.5. Робочі параметри чотириполюсників	59
2.5.1. Навіщо потрібні робочі параметри чотириполюсників?	59
2.5.2. Вхідний опір чотириполюсника	59
2.5.3. Опір передачі. Приведений опір	60
2.5.4. Узгодження генератора та навантаження. Робочі коефіцієнти передачі та робоча стала передачі	61
2.6. Згасання (ослаблення) чотириполюсників	66
2.7. Рівні сигналів	70
2.8. Завдання для самоконтролю	71

3. ДОВГІ ЛІНІЇ	73
3.1. Коло з розподіленими параметрами. Довга лінія	73
3.2. Схема заміщення елементарного відрізка довгої лінії. Первинні параметри довгої лінії. Телеграфні рівняння	75
3.3. Падаюча та відбита хвилі	80
3.4. Вторинні параметри	85
3.5. Електрично довга та електрично коротка лінії	91
3.6. Основні рівняння довгої лінії	92
3.7. Вхідний опір ділянки довгої лінії	94
3.8. Знаходження вторинних та первинних параметрів методом короткого замикання та холостого ходу	97
3.9. Коефіцієнти відбиття	101
3.10. Довга лінія без втрат	102
3.10.1. Визначення та основні параметри	102
3.10.2. Лінія без втрат в режимі короткого замикання	103
3.10.3. Лінія без втрат в режимі холостого ходу	105
3.10.4. Лінія без втрат при довільному навантаженні	107
3.11. Довга лінія без спотворень	109
3.12. Довга лінія як чотириполіусник	112
3.13. Завдання для самоконтролю	113
4. ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ	114
4.1. Загальні поняття та визначення. Класифікація фільтрів	114
4.2. LC-фільтри	117
4.2.1. Загальні зауваження	117
4.2.2. Умови пропускання та затримування	117
4.2.3. Частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази	120
4.2.4. Частотні залежності характеристичних опорів	122
4.2.5. Фільтр нижніх частот типу K	123
4.2.6. Фільтр верхніх частот типу K	131
4.2.7. Смугово-пропускаючий фільтр типу K	138
4.2.8. Смугово-затримуючий фільтр типу K	149
4.2.9. Переваги та недоліки фільтрів типу K	150
4.2.10. Вплив втрат і неузгодженості на характеристики фільтрів типу K	152
4.2.11. Доцільність вдосконалення фільтрів типу K . Ідея, яка лежить в основі побудови фільтрів нового типу	155
4.2.12. Методика перетворення ланок фільтрів типу K у ланки фільтрів типу m	158
4.2.13. Фільтр нижніх частот типу m	166
4.2.14. Фільтр верхніх частот типу m	174
4.2.15. Смугово-пропускаючий фільтр типу m	179
4.2.16. Смугово-затримуючий фільтр типу m	184
4.2.17. Переваги та недоліки фільтрів типу m	187

4.2.18. Перетворення масштабу частот	187
4.2.19. Поняття про складні ланцюжкові фільтри	188
4.2.20. Мостові фільтри. Принцип дії, умови пропускання та затримування	190
4.2.21. Елементарні мостові фільтри нижніх частот	197
4.2.22. Елементарні мостові фільтри верхніх частот	202
4.2.23. Елементарні мостові смугово-пропускаючі фільтри	208
4.2.24. Елементарний мостовий смугово-затримуючий фільтр	213
4.2.25. Покращення характеристик мостових фільтрів	215
4.2.26. Переваги та недоліки мостових фільтрів	215
4.2.27. Додаткові відомості з LC-фільтрів	216
4.2.28. Завдання для самоконтролю	216
4.3. RC-фільтри	218
4.3.1. Доцільність застосування RC-фільтрів	218
4.3.2. Пасивний RC- фільтр нижніх частот	218
4.3.3. Пасивний RC-фільтр верхніх частот	225
4.3.4. Пасивні смугово-пропускаючі RC-фільтри	230
4.3.5. Пасивні смугово-затримуючі RC-фільтри	233
4.3.6. Попередні відомості про активні RC-фільтри	238
4.3.7. ARC-фільтри з однопетельним негативним зворотним зв'язком	241
4.3.8. ARC-фільтри з однопетельним позитивним зворотним зв'язком	245
4.3.9. ARC-фільтри з багатопетельним зворотним зв'язком	247
4.3.10. Завдання для самоконтролю	253
4.4. Механічні резонатори та фільтри на їх базі	253
4.4.1. Загальні відомості	253
4.4.2. П'єзоелектричні фільтри	254
4.4.3. Магнітострикційні фільтри	257
4.4.4. Електромеханічні фільтри	262
4.4.5. Завдання для самоконтролю	265
4.5. Коректувальні кола	266
4.5.1. Коректори амплітудно-частотних характеристик	266
4.5.2. Коректори опорів (подовжувачі)	274
4.5.3. Коректори фазо-частотних характеристик	275
4.5.4. Завдання для самоконтролю	282
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	283

ПЕРЕДМОВА

Книга, що її читач бачить перед собою, є продовженням навчального посібника тих самих авторів “Теорія електричних і магнітних кіл” [1], присвяченого висвітленню основних **понять, ідей та методів**, які складають базу для розуміння, аналізу та (частково) синтезу електричних і магнітних кіл. Крім того, у згаданому навчальному посібнику вельми детально розглянуто фізичні **явища**, які виникають у окремих елементах цих кіл та їх простих сполученнях: розподіли напруг, струмів та магнітних потоків, резонанси, індуктивний зв’язок, перехідні процеси і т. ін. Взагалі, розгляд майже всіх кіл в посібнику [1] було проведено на рівні фізичних процесів у окремих елементах, що, на думку авторів, сприяло наочності викладення матеріалу. Це, так би мовити, наочність нижчого рівня. Але її далеко не завжди вистачає, коли йдеться про розгляд кіл доволі складності та спеціальних кіл: продуктивні теоретичні побудови в цій галузі можливі за умови, що введені в процесі вивчення кіл такі поняття та характеристики, як комплексний опір, комплексна амплітуда, резонанс, спектральна щільність і т. ін. вже самі стають базовими, елементарними “цеглинками” при побудові подальшої теорії. А саме така, більш абстрактна теорія потрібна для описання роботи та створення інженерних методів розрахунку та контролю ліній зв’язку, рейкових кіл, електричних фільтрів, кіл корекції сигналів. Автори сподіваються, що у викладенні включених до даної книги тем “Двополюсники”, “Чотириполюсники”, “Електричні фільтри та кола корекції”, “Довгі лінії” їм вдалося дотриматися декларованої вище спадкоємності теоретичних побудов, а відтак, забезпечити зручність засвоєння навчального матеріалу.

1. ДВОПОЛЮСНИКИ

1.1. Загальні поняття та визначення

Будь-яке електричне коло, яке розглядають відносно двох його затискачів, називають **двополюсником**. Якщо схема двополюсника невідома або не є цікавою, то двополюсник зображують на схемі у вигляді комплексного опору (рис. 1.1).

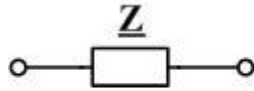


Рис. 1.1

Двополюсник є **лінійним**, якщо він не містить жодного нелінійного елемента (щодо нелінійних елементів див. [1, підрозд. 3.1 та 9.1]). В протилежному випадку двополюсник є **нелінійним**.

Двополюсник, який складено тільки з ідеальних індуктивностей та ємностей, називають **реактивним двополюсником** (щодо ідеальних індуктивностей та ємностей див. [1, підрозд. 5.3]).

Двополюсник, який містить активні опори, більші від нуля, називають **двополюсником із втратами** або **дисипативним двополюсником**.

Двополюсник називають **пасивним**, якщо він не містить джерел енергії. Якщо двополюсник є лінійним, то він буде пасивним і у випадку, коли він містить джерела енергії, але ці джерела компенсують одне одного так, що напруга на розімкнених затискачах двополюсника дорівнює нулю. **Активний двополюсник** є таким, що містить взаємно некомпенсовані джерела енергії.

За кількістю елементів, що складають схему, двополюсники поділяють на одноелементні, двоелементні, триелементні і т.д.

1.2. Одноелементні лінійні двополюсники

Існує три одноелементних лінійних двополюсники. Це ідеальний лінійний резистор (рис. 1.2,а), ідеальна індуктивність (рис. 1.2,б) та ідеальна ємність (рис. 1.2,в).

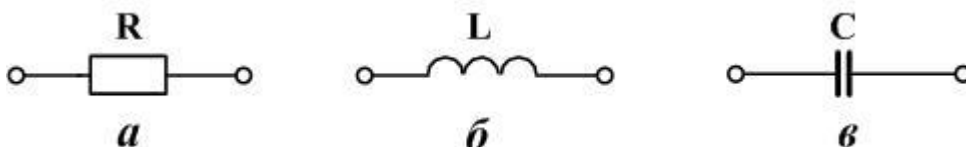


Рис. 1.2

Ідеальний лінійний резистор має активний опір R , який не залежить від частоти. Ідеальна індуктивність має опір, числове значення якого є суто уявним і залежить від кутової частоти ω синусоїдного струму як

$$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L,$$

де \underline{Z}_L – комплексний опір індуктивного елемента;

$X_L = \omega L$ – реактивний опір індуктивного елемента;

$j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Графік $\underline{Z}_L(\omega)$ є прямою лінією (рис. 1.3).

Ідеальна ємність має опір, числове значення якого є суто уявним і залежить від кутової частоти синусоїдного струму як

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = -jX_C,$$

де \underline{Z}_C – комплексний опір ємнісного елемента;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір ємнісного елемента.

Графік $\underline{Z}_C(\omega)$ є гіперболою (рис. 1.3).

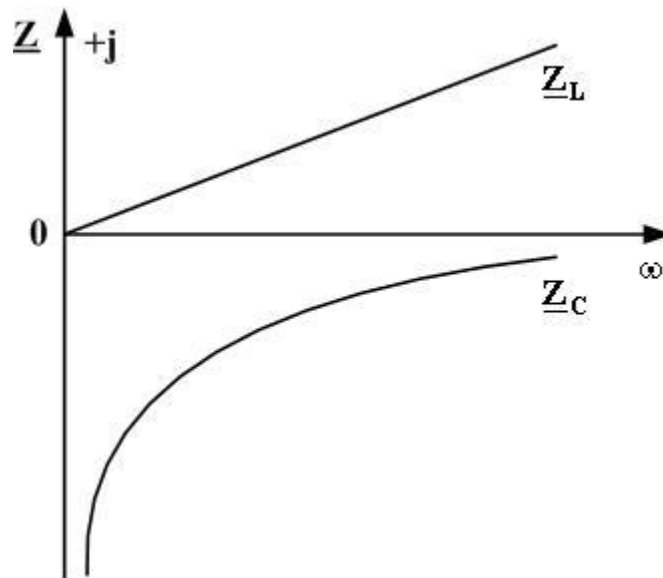


Рис. 1.3

Двополюсник, який складено *тільки* з ідеальних резисторів, *тільки* з ідеальних індуктивностей або *тільки* з ідеальних ємностей, незалежно від

їх кількості є одноелементним двополюсником, оскільки такі кола зводяться до одного елемента як це, наприклад, показано на рис. 1.4.

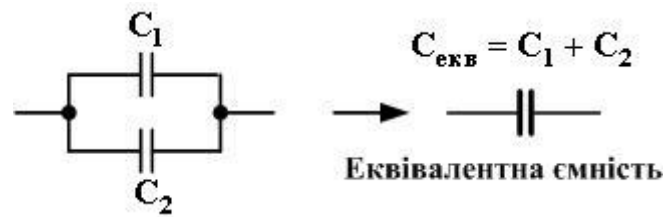


Рис. 1.4

1.3. Двоелементні реактивні двополюсники

Існує тільки два таких двополюсники. Це ідеальні послідовний та паралельний коливальні контури.

Ідеальний послідовний коливальний контур (резонансний контур) утворений як послідовне з'єднання ідеальної індуктивності та ідеальної ємності (рис. 1.5). Він є окремим випадком реального послідовного коливального контуру (див. [1, підрозд. 5.5]). Його опір складає

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = j\omega L_1 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_1} \right).$$

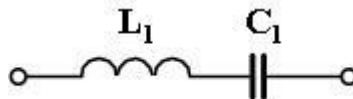


Рис. 1.5

Введемо частоту резонансу $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$. Тоді

$$\underline{Z}_P = j\omega L_1 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2}, \quad (1.1)$$

звідки наочно випливає, що на частоті резонансу маємо $\underline{Z}_P = \mathbf{0}$. Нагадаємо, що резонанс, який відбувається в послідовному коливальному контурі, є резонансом напруг (див. [1, п.5.5.2]). Для більш складних LC - кіл поняття “резонанс” теж зберігає чинність, позначаючи такий режим, в якому $\underline{Z} = \mathbf{0}$.

Графічне зображення залежності $\underline{Z}_P(\omega)$ просто одержати, додавши графіки $\underline{Z}_L(\omega)$ та $\underline{Z}_C(\omega)$, як це показано на рис. 1.6. Очевидно, що на тій частоті, на якій величини \underline{Z}_L та \underline{Z}_C однакові за абсолютним значенням, але протилежні за знаком, отримаємо $\underline{Z}_P = 0$. З виразу (1.1) випливає, що це буде частота ω_1 .

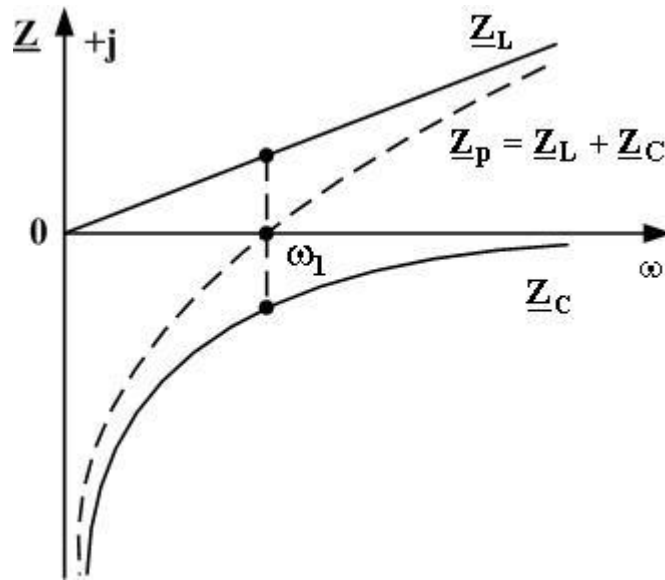


Рис. 1.6

При $\omega < \omega_1$ опір \underline{Z}_P – уявний та від’ємний, тобто має ємнісний характер, а при $\omega > \omega_1$ цей опір уявний та додатний, тобто має індуктивний характер.

Ідеальний паралельний коливальний контур (антирезонансний контур) утворений як паралельне з’єднання ідеальної індуктивності та ідеальної ємності (рис. 1.7). Він є окремим випадком кола з паралельним

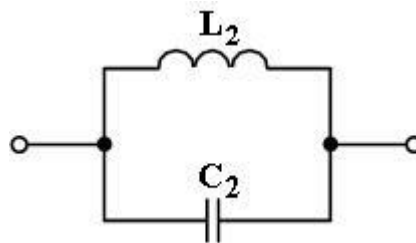


Рис. 1.7

з’єднанням \mathbf{R} , \mathbf{L} та \mathbf{C} (див. [1, підрозд. 5.6]). Його опір \underline{Z}_A є величиною, оберненою до його провідності. Провідність же, за умови паралельного

з'єднання елементів, є сумою провідностей ємності та індуктивності. Тому маємо

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\underline{Y}_A} = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} = \frac{1}{j\omega C_2 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)}.$$

Введемо частоту антирезонансу $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Тоді

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{j\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2}, \quad (1.2)$$

звідки наочно впливає, що на частоті антирезонансу маємо $\underline{Z}_A = \infty$. Власне, антирезонанс у даному випадку є резонансом, який відбувається в паралельному коливальному контурі, тобто є резонансом струмів (див. [1, п.5.6.2]). Введення ж поняття “антирезонанс» обумовлене тим, що його, на відміну від поняття “резонанс струмів”, застосовують не тільки до паралельного LC - кола (рис. 1.7), а й до LC - кіл будь-якої складності, в яких резонанси струмів “у чистому вигляді” не виникають, а виникають більш складні явища, які теж призводять до нескінченних величин опорів цих кіл.

Графік залежності $\underline{Z}_A(\omega)$, визначеної виразом (1.2), наведено на рис. 1.8. При $\omega < \omega_2$ опір \underline{Z}_A – уявний та додатний, тобто має індуктивний характер, а при $\omega > \omega_2$ цей опір уявний та від'ємний, тобто має ємнісний характер.

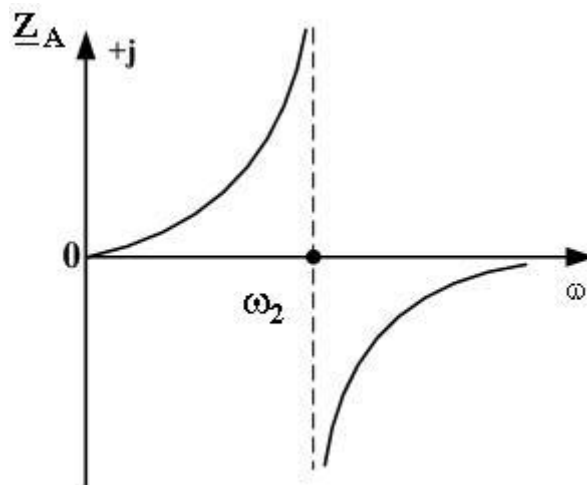


Рис. 1.8

1.4. Еквівалентні та зворотні двополюсники

Перш ніж розпочати розгляд триелементних та більш складних реактивних двополюсників, звернемо увагу на дві властивості, які проявляються лише при попарному порівнянні двополюсників. Це – еквівалентність та зворотність.

Два двополюсники називають **еквівалентними**, якщо їх комплексні опори дорівнюють один одному на всіх частотах.

Два двополюсники називають **потенційно-еквівалентними**, якщо можна, не змінюючи їхніх схем, так підібрати величини індуктивностей, ємностей та активних опорів цих двополюсників, що вони стануть еквівалентними.

Для ілюстрування цих визначень розглянемо два приклади.

Приклад 1.1

Розглянемо два кола, схеми яких наведені на рис. 1.9.

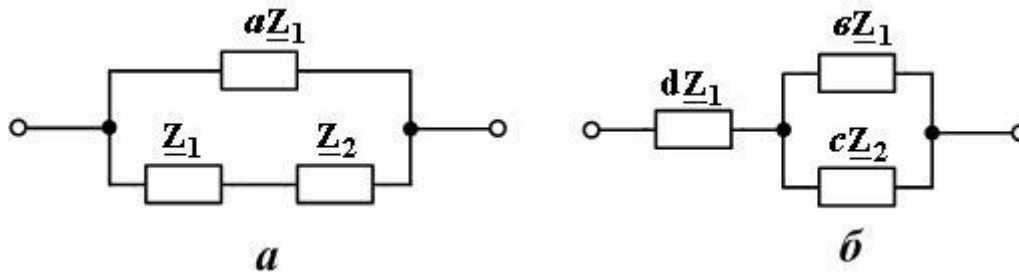


Рис. 1.9

Доведемо, що ці кола потенційно-еквівалентні. Для цього спочатку знайдемо їх опори:

$$\underline{Z}_a = \frac{a\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{a\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{a\underline{Z}_1^2 + a\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{(a+1)\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2};$$

$$\underline{Z}_b = d\underline{Z}_1 + \frac{ec\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{e\underline{Z}_1 + c\underline{Z}_2} = \frac{\frac{ed}{c}\underline{Z}_1^2 + (e+d)\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\frac{e}{c}\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

З порівняння крайніх правих частин виразів для \underline{Z}_a та \underline{Z}_b випливає, що рівність $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b$ можна забезпечити за таких умов:

$$a = \frac{ed}{c}, \quad a = e + d, \quad a + 1 = \frac{e}{c}.$$

Звідси

$$v = \frac{a^2}{a+1}, \quad c = \left(\frac{a}{a+1}\right)^2, \quad d = \frac{a}{a+1}.$$

Якщо ж отримані співвідношення між коефіцієнтами a , v , c та d не виконуються, то двополюсники a та b є потенційно-еквівалентними.

Приклад 1.2

Розглянемо два кола, схеми яких наведено на рис.1.10

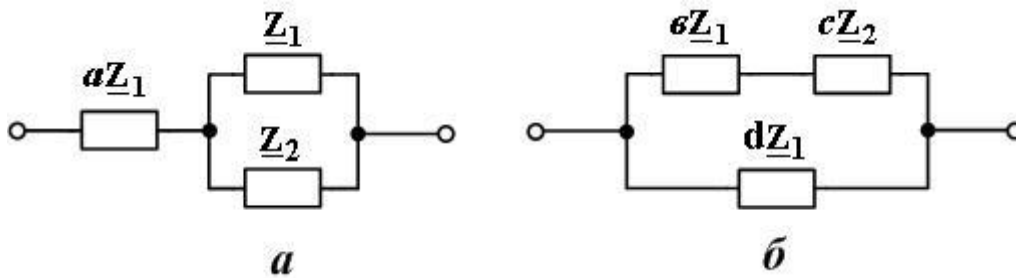


Рис. 1.10

Діючи аналогічно тому, як було зроблено в прикладі 1.1, можна довести, що кола a та b будуть еквівалентними за таких умов:

$$v = a(1+a), \quad c = (1+a)^2, \quad d = 1+a.$$

В інших випадках двополюсники a та b є потенційно-еквівалентними. Читачу, зацікавленому в більш детальній інформації щодо еквівалентності двополюсників, рекомендуємо звернутись до класичного підручника Г.І. Атабекова [2].

Два двополюсники називають **зворотними**, якщо добуток їх опорів дорівнює постійній величині, яка не залежить від частоти:

$$\underline{Z}_a \cdot \underline{Z}_b = R^2 = \text{const.} \quad (1.3)$$

Тут постійна величина R має розмірність опору.

Два двополюсники називають **потенційно-зворотними**, якщо можна, не змінюючи їхніх схем, так підібрати величини індуктивностей, ємностей та активних опорів цих двополюсників, що вони стануть зворотними.

Приклад пари потенційно-зворотних двополюсників – резонансний та антирезонансний контури. Й справді, перемноживши їх опори (1.1) та (1.2), отримаємо

$$\underline{Z}_P \cdot \underline{Z}_A = \frac{L_1}{C_2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2}.$$

За умови, що $\omega_1 = \omega_2$ (тобто $L_1 C_1 = L_2 C_2$), маємо $\underline{Z}_P \cdot \underline{Z}_A = \frac{L_1}{C_2} = \text{const}$, що відповідає визначенню (1.3) зворотних двополюсників.

Якщо вихідний двополюсник утворений лише з послідовно та паралельно з'єднаних елементів та віток, то **правило отримання** з нього **зворотного двополюсника** є таким: елементи (а також вітки) вихідного двополюсника, з'єднані послідовно, у зворотному двополюснику повинні бути з'єднані паралельно (і навпаки, елементи та вітки, з'єднані у вихідному двополюснику паралельно, у зворотному повинні бути з'єднані послідовно), після чого кожен опір \underline{Z} треба замінити на опір R^2 / \underline{Z} .

Неважко довести, що остання дія залишить резистори резисторами, але замінить індуктивності ємностями, а ємності – індуктивностями.

Приклад 1.3

На рис. 1.11,а наведено схему вихідного двополюсника. Вважатимемо також заданим коефіцієнт R^2 з формули (1.3). Тоді схема зворотного двополюсника, побудована за вищенаведеним правилом, набуває вигляду, поданого на рис. 1.11,б (Рекомендуємо починати перетворення з вітки, розташованої найглибше усього всередині вихідної схеми, – в даному прикладі з вітки $\underline{Z}_3 \underline{Z}_4$).

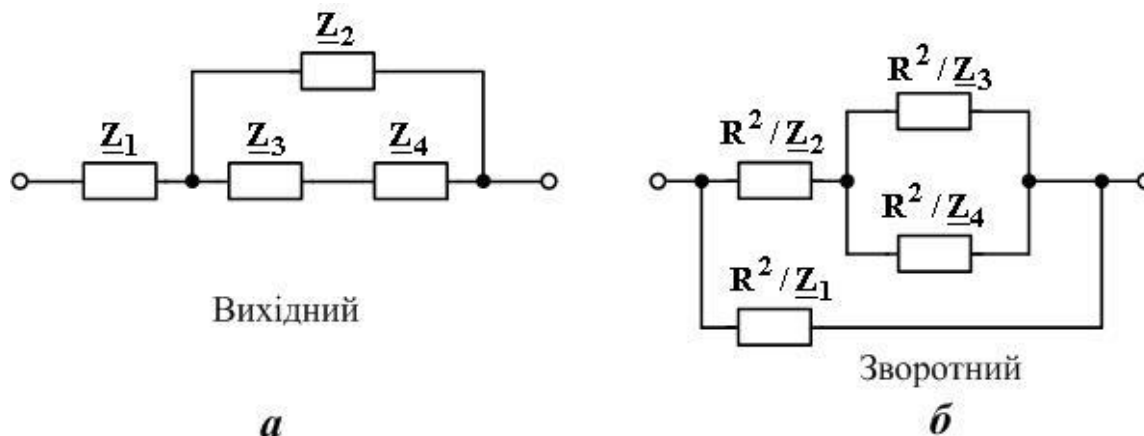


Рис. 1.11

Якщо до складу вихідного двополюсника входять ділянки, які не являють собою паралельне чи послідовне з'єднання елементів, то для утворення зворотного двополюсника є два шляхи:

1) використавши перетворення зірки у трикутник (або навпаки) звести вихідну схему до послідовно-паралельної, після чого діяти вищевказаним способом;

2) утворювати зворотну схему безпосередньо з вихідної, користуючись прийомами утворення дуальних кіл, висвітленими в підручниках [2,3] (бо зворотні двополюсники є окремим випадком дуальних кіл).

1.5. Триелементні реактивні двополюсники

Існують чотири схеми, за якими можуть бути складені триелементні реактивні двополюсники; усі ці схеми наведені на рис.1.12. З огляду на

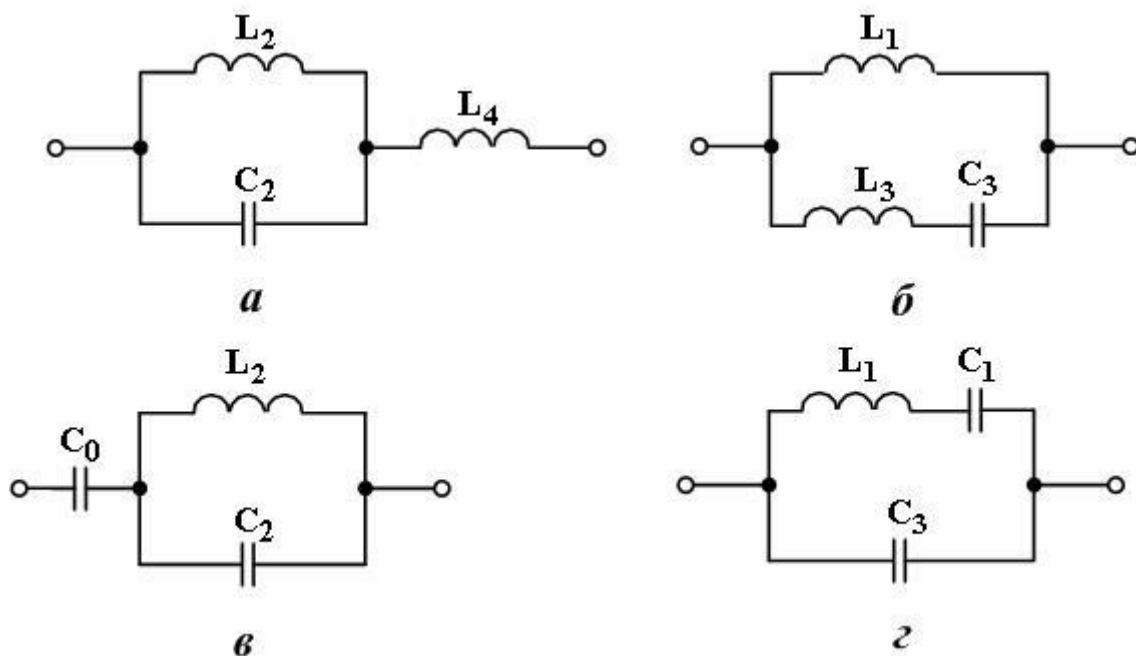


Рис. 1.12

прикладі 1.1 та 1.2 одразу можна зробити висновок, що коло **a** є потенційно-еквівалентним колу **б**, а коло **в** – потенційно-еквівалентним колу **з**. А користуючись правилом утворення зворотних двополюсників (див.п.1.4), отримуємо, що коло **з** є потенційно-зворотним колу **a** і що коло **в** є потенційно-зворотним колу **б**. Отже, узагальнюючи, доходимо висновку, що будь-яке з кіл пари **a-б** є потенційно-зворотним будь-якому з кіл пари **в-з**.

Знайдемо для прикладу вираз для частотної залежності кола **б**:

$$\underline{Z}_6(\omega) = \frac{j\omega L_1 \left(j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3} \right)}{j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_3}} = \frac{j\omega L_1 L_3 \left(\omega - \frac{1}{\omega L_3 C_3} \right)}{(L_1 + L_3) \left[\omega - \frac{1}{\omega(L_1 + L_3)C_3} \right]}.$$

Введемо позначення $\omega_2 = 1/\sqrt{(L_1 + L_3)C_3}$ та $\omega_3 = 1/\sqrt{L_3 C_3}$. З їх урахуванням можна записати, що

$$\underline{Z}_6(\omega) = j\omega \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_3^2}{\omega^2 - \omega_2^2}. \quad (1.4)$$

Звідси бачимо, що величина $\underline{Z}_6(\omega)$ перетворюється на нуль на частотах $\omega = \omega_1 = 0$ та $\omega = \omega_3$ і стає нескінченною на частоті $\omega = \omega_2$. Фізичне пояснення полягає ось у чому. По-перше, коло δ пропускає постійний струм крізь індуктивність L_1 і тому $\underline{Z}_6(0) = 0$. На частоті ω_3 резонує послідовний коливальний контур $L_3 C_3$, тому $\underline{Z}_6(\omega_3)$ теж дорівнює нулю.

При $0 < \omega < \omega_3$ опір контуру $L_3 C_3$ має ємнісний характер (див. п. 1.3), тому логічно, що на деякій частоті $\omega_2 < \omega_3$ має місце антирезонанс цієї еквівалентної ємності та індуктивності L_1 , а отже, $\underline{Z}_6(\omega_2) = \infty$.

Графіки частотних залежностей комплексних опорів кіл a та b подано на рис. 1.13,а, а комплексних опорів кіл v та z – на рис. 1.13,б. Частоти, на яких опір $\underline{Z}(\omega)$ дорівнює нулю, називають **нулями функції $\underline{Z}(\omega)$** ; вони позначені непарними індексами. Частоти, на яких опір $\underline{Z}(\omega)$ дорівнює нескінченності, називають **полюсами функції $\underline{Z}(\omega)$** ; вони позначені парними індексами (включаючи нуль). Зазначте, що частота $\omega = 0$ може бути, в залежності від схеми кола, нулем або полюсом, але вона ніколи не є частотою резонансу або антирезонансу! Те ж саме стосується частоти $\omega = \infty$.

Оскільки величина $\underline{Z}(\omega)$ монотонно зростає із збільшенням величини ω (за виключенням від'ємних стрибків на частотах антирезонансів), то поведінку опору можна компактно описати, просто розставивши нулі та полюси на частотній осі, як це зроблено в нижній частині рис.1.13. В результаті отримаємо так звані нуль-полюсні діаграми, на яких прийнято позначати нулі жирними крапками, а полюси – хрестиками. Зазначимо, що у кіл, схеми яких зображено на рис.1.12, нулі та полюси (а також частоти резонансу та антирезонансу) чергуються.

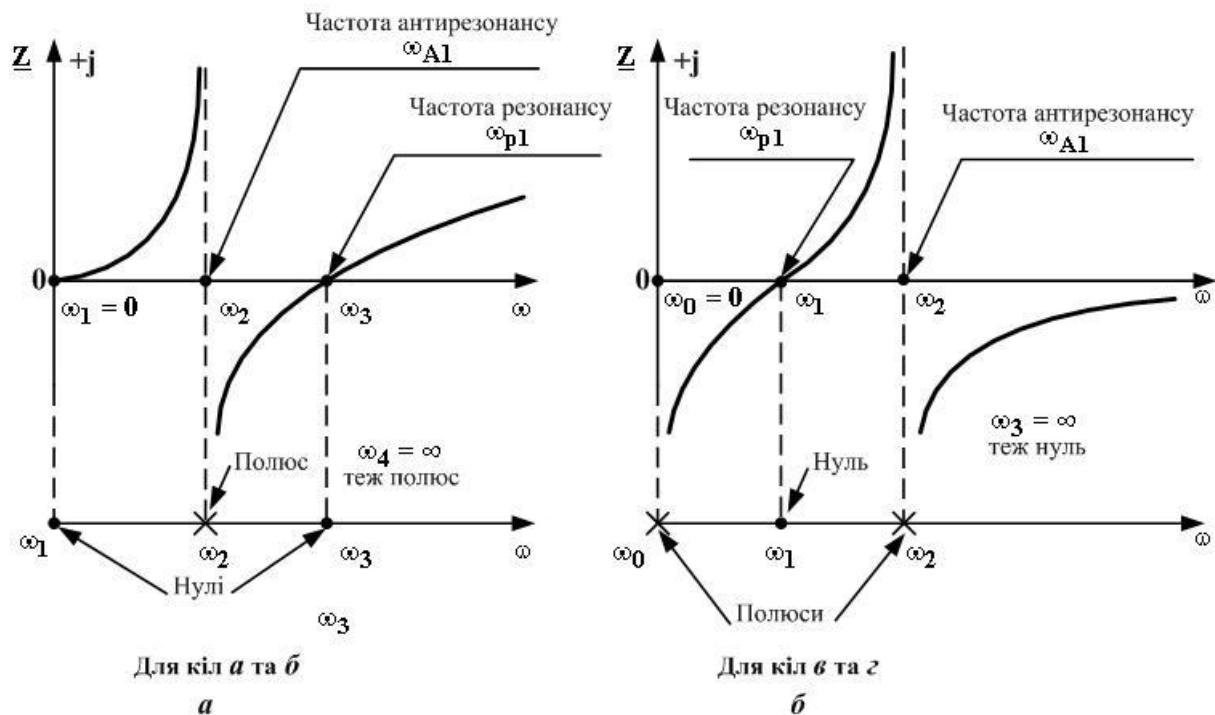


Рис. 1.13

1.6. Канонічні багатоелементні реактивні двополюсники

1.6.1. Загальні властивості

Використовуючи як “цеглинки” одно- та двоелементні реактивні двополюсники, можна утворювати реактивні двополюсники будь-якої складності. При цьому слід зважити на дві обставини:

1) немає сенсу з’єднувати послідовно або паралельно реактивності одного типу, бо їх завжди можна звести до одної такої реактивності (індуктивності або ємності);

2) застосування еквівалентних перетворень, розглянутих у прикладах 1.1 та 1.2, іноді дозволяє спростити схему.

Двополюсники, кількість елементів яких вже не може бути далі зменшеною, називають **канонічними** або **приведеними**; схеми їх також називають канонічними або приведеними. Реактивні двополюсники, складені за канонічними схемами, мають низку загальних властивостей:

1) сумарна кількість частот резонансів та антирезонансів є на одиницю меншою від кількості елементів двополюсника;

2) сумарна кількість нулів та полюсів функції $Z(\omega)$ є на одиницю більшою від кількості елементів двополюсника;

3) частоти резонансів чергуються з частотами антирезонансів, полюси чергуються з нулями;

4) якщо двополюсник пропускає постійний струм (тобто $\underline{Z}(0) = 0$), то першою від початку координат буде частота антирезонансу, якщо ж двополюсник не пропускає постійний струм (тобто $\underline{Z}(0) = \infty$), то першою від початку координат буде частота резонансу;

5) комплексний опір двополюсника монотонно зростає із зростанням частоти, за виключенням від'ємних стрибків на частотах антирезонансів.

Використання цих властивостей дозволяє здійснювати ескізну (без обчислення характерних частот) побудову графіка залежності $\underline{Z}(\omega)$ для будь-якого канонічного реактивного двополюсника, маючи у своєму розпорядженні тільки його схему.

1.6.2. Теорема Фостера

Згідно з теоремою Фостера, комплексний опір будь-якого реактивного двополюсника (не обов'язково канонічного) може бути записаний у такому компактному вигляді:

$$\underline{Z}(\omega) = (j\omega H)^{\pm 1} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_{p1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{p2}^2) \cdot \dots \cdot (\omega^2 - \omega_{pm}^2)}{(\omega^2 - \omega_{A1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{A2}^2) \cdot \dots \cdot (\omega^2 - \omega_{An}^2)} \cdot [\omega^2 \uparrow \downarrow]. \quad (1.5)$$

Тут $(j\omega H)^{\pm 1} = \underline{Z}_{\infty}(\omega)$ є частотною залежністю опору двополюсника, коли $\omega \rightarrow \infty$. Якщо цей опір індуктивний, то H має сенс еквівалентної індуктивності $L_{екв}$, і береться знак “+” перед показником степеня. Якщо цей опір ємнісний, то H має сенс еквівалентної ємності $C_{екв}$, і береться знак “-” перед показником степеня.

Також у формулі (1.5) як $\omega_{p1}, \dots, \omega_{pm}$ позначені частоти резонансів, а як $\omega_{A1}, \dots, \omega_{An}$ – частоти антирезонансів. Кількості резонансів і антирезонансів можуть або бути рівними, або відрізнитися на одиницю. Множник $[\omega^2 \uparrow \downarrow]$ означає, що при $m < n$ треба домножити на ω^2 чисельник формули (1.5), а при $m > n$ домножити на ω^2 знаменник цієї формули. Якщо ж $m = n$, то $[\omega^2 \uparrow \downarrow] = 1$.

З формули (1.5) можна зробити такі висновки:

1) для розрахунку частотної залежності $\underline{Z}(\omega)$ опору реактивного двополюсника достатньо знати всі його частоти резонансів і антирезонансів та величину і сенс множника H . Останній можна визначити або із схеми (за відомими величинами її індуктивностей та ємностей), або,

знаючи опір $\underline{Z}(\omega_x)$, якщо цей опір відомий одночасно із частотами резонансів і антирезонансів і частота ω_x не співпадає ні з одною з них;

2) два реактивних двополюсники, які мають однакові набори частот резонансів і антирезонансів, можуть відрізнятися тільки постійним множником \mathbf{H} .

Зацікавлений читач знайде доведення теореми Фостера в підручниках [2, 4]. Детальний розгляд частотних властивостей опорів реактивних двополюсників включно по чотириелементні схеми наведено в підручнику [5].

1.6.3. Схеми

Безпосередньо формулі (1.5) відповідають дві групи канонічних реактивних двополюсників у вигляді першої та другої форм Фостера. В залежності від комбінації значень величини опору постійному струму $\underline{Z}(0)$ та струму нескінченно високої частоти $\underline{Z}(\infty)$ можна виділити чотири пари схем. Розглянемо їх нижче.

1. $\underline{Z}(0) = 0$, $\underline{Z}(\infty) = 0$ (рис.1.14).

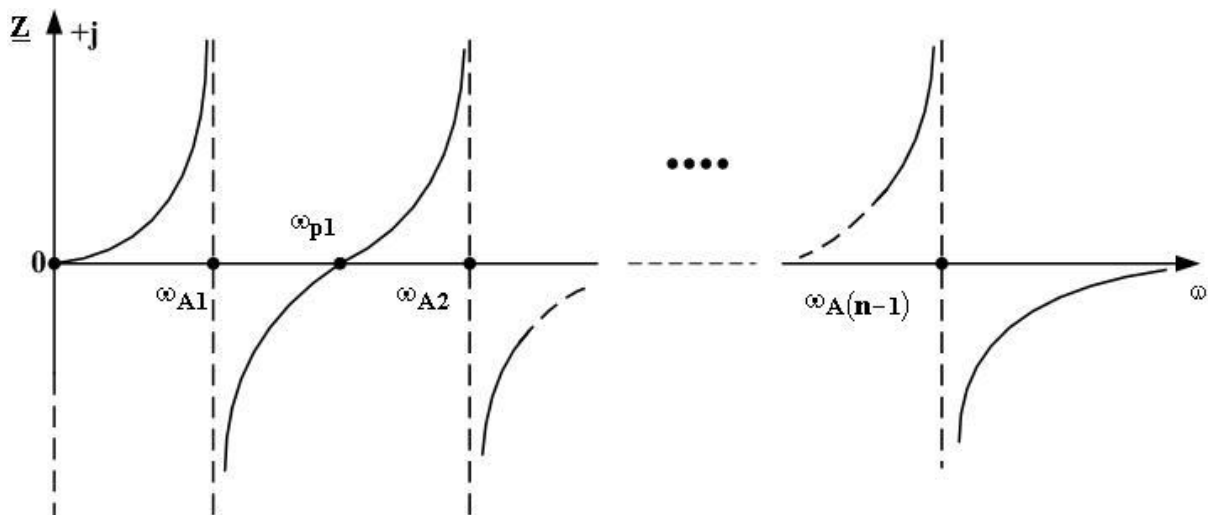


Рис. 1.14

Такий опір може бути реалізований, якщо скласти двополюсник за будь-якою з канонічних схем, наведених на рис.1.15 (поруч із коливальними контурами вказані частоти резонансів (або антирезонансів), які виникають у цих контурах). Пояснимо, як визначено величини \mathbf{H} для обох схем.

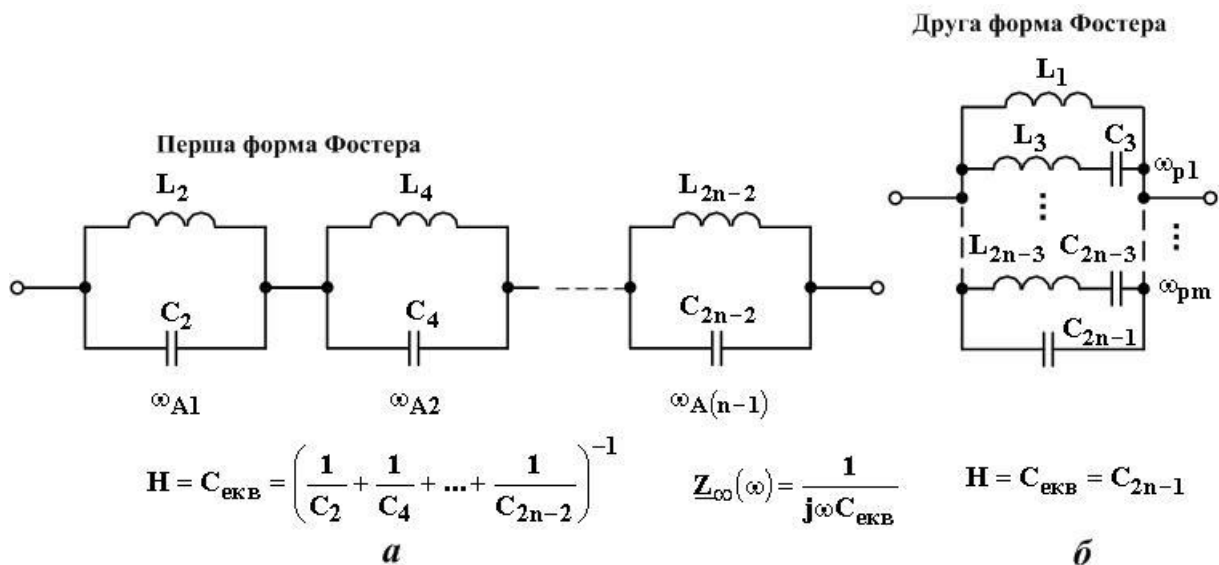


Рис. 1.15

В першому колі (рис. 1.15,а) при прямуванні ω до нескінченності опори котушок ($\underline{Z}_L = j\omega L$) також прямують до нескінченності, а опори конденсаторів ($\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$) прямують до нуля. Отже, при $\omega \rightarrow \infty$ струм тектиме шляхом найменшого опору, тобто ланцюжком $C_2 - C_4 - \dots - C_{2n-2}$ і коло вестиме себе як ємність, величина якої дорівнює еквівалентній ємності $C_{\text{екв}}$ послідовного ланцюжка конденсаторів. В другому колі (рис.1.15,б) при $\omega \rightarrow \infty$ струм з тих же причин майже цілком тектиме крізь конденсатор C_{2n-1} , ємності якого й дорівнює величина $C_{\text{екв}}$.

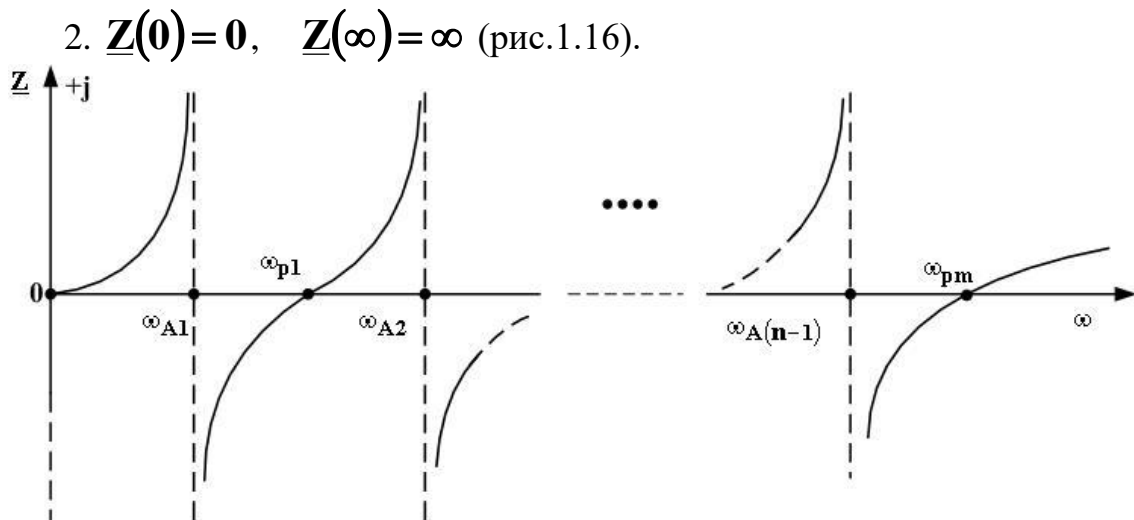


Рис. 1.16

Такий опір може бути реалізований, якщо скласти двополісник за будь-якою з канонічних схем, наведених на рис.1.17. Пояснимо, як визначено величини \mathbf{H} для обох схем. В першому колі (рис. 1.17,а) при $\omega \rightarrow \infty$ конденсатори замикають котушки, що з'єднані з ними паралельно, і опір струмові чинить єдина незамкнена котушка \mathbf{L}_{2n} . В другому колі (рис.1.17,б) при $\omega \rightarrow \infty$ конденсатори грають роль перемичок, завдяки чому всі котушки виявляються з'єднаними паралельно, утворюючи еквівалентну індуктивність величиною $\mathbf{L}_{\text{екв}}$.

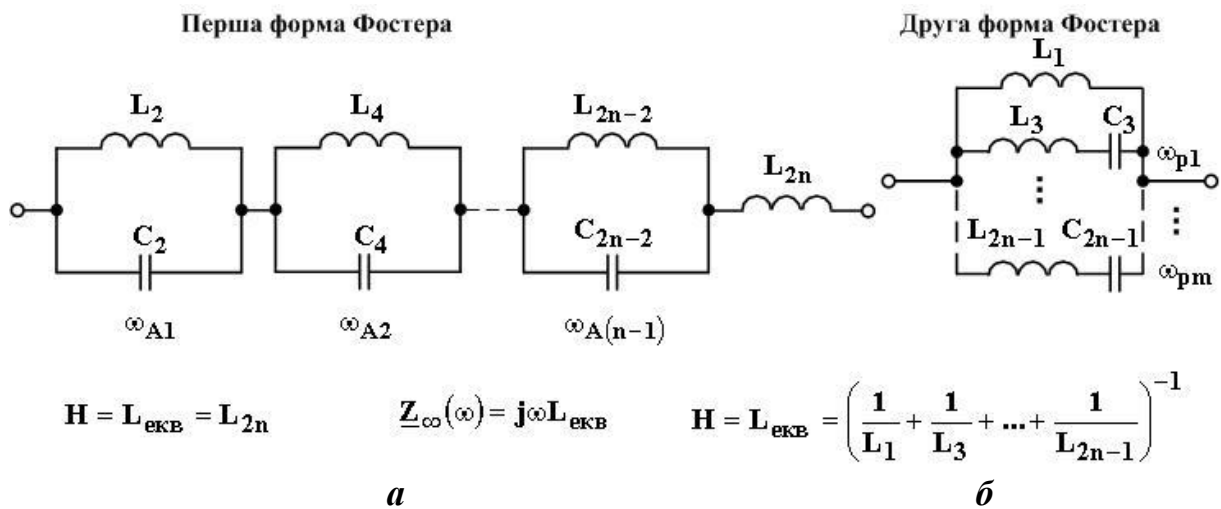


Рис. 1.17

3. $\underline{Z}(0) = -\infty$, $\underline{Z}(\infty) = \mathbf{0}$ (рис.1.18).

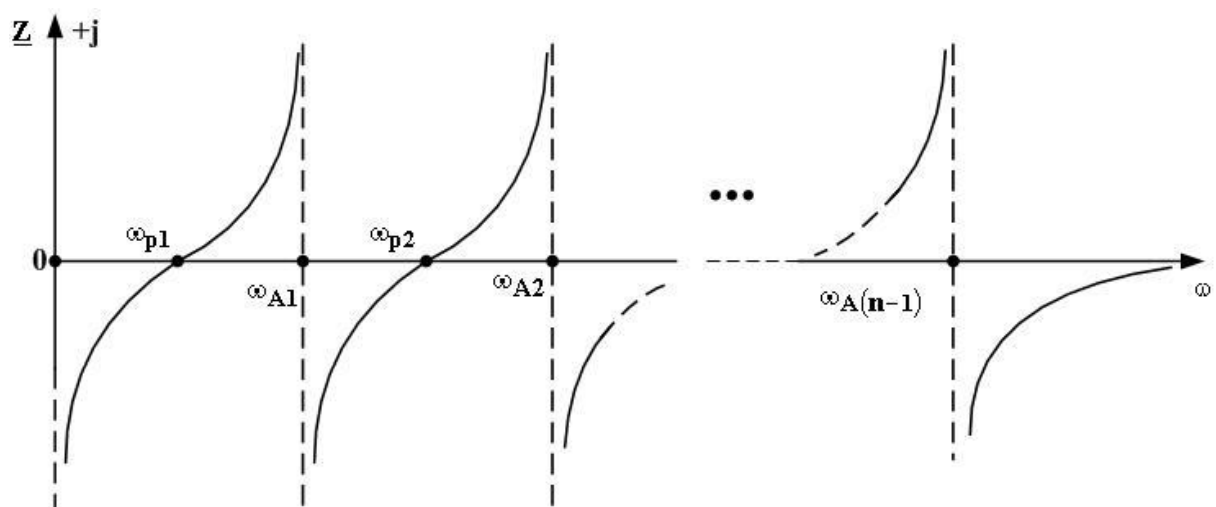


Рис. 1.18

Такий опір може бути реалізований, якщо скласти двополіусник за будь-якою з канонічних схем, наведених на рис.1.19. Визначення величини \mathbf{H} здійснюється аналогічно попереднім випадкам.

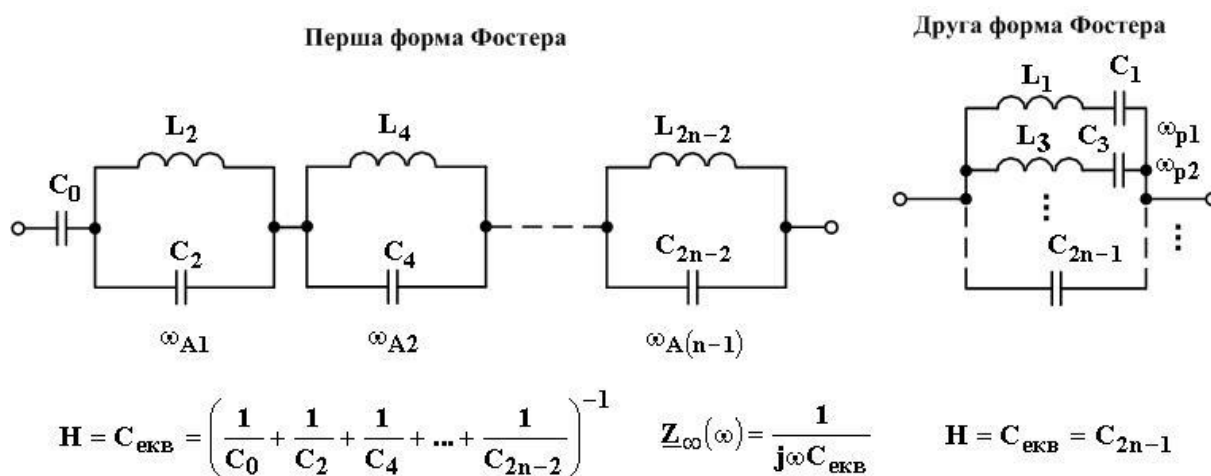


Рис. 1.19

4. $\underline{Z}(0) = -\infty$, $\underline{Z}(\infty) = \infty$ (рис.1.20).

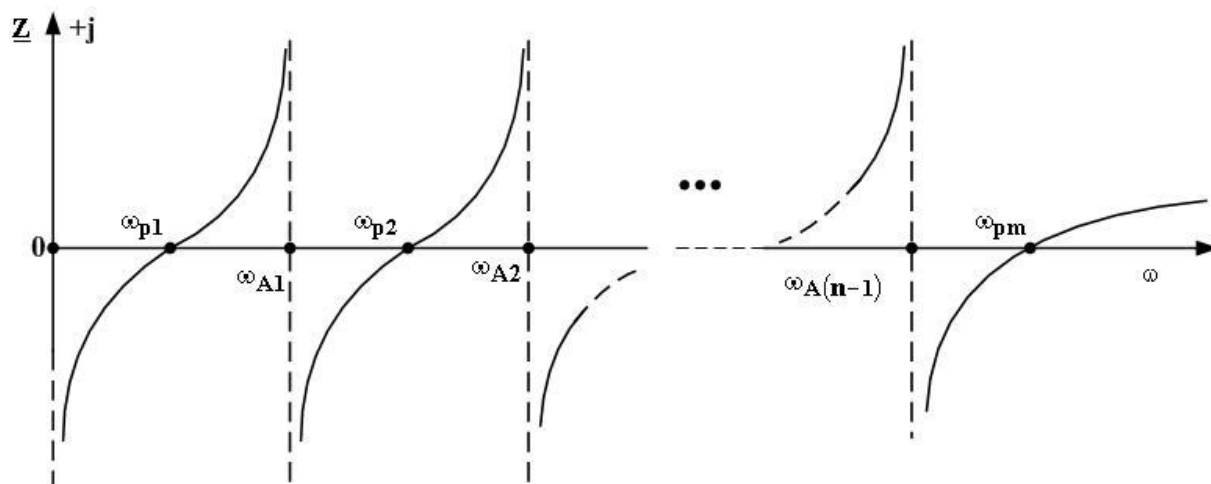


Рис. 1.20

Такий опір може бути реалізований, якщо скласти двополіусник за будь-якою з канонічних схем, наведених на рис.1.21. Визначення величини \mathbf{H} здійснюється аналогічно попереднім випадкам.

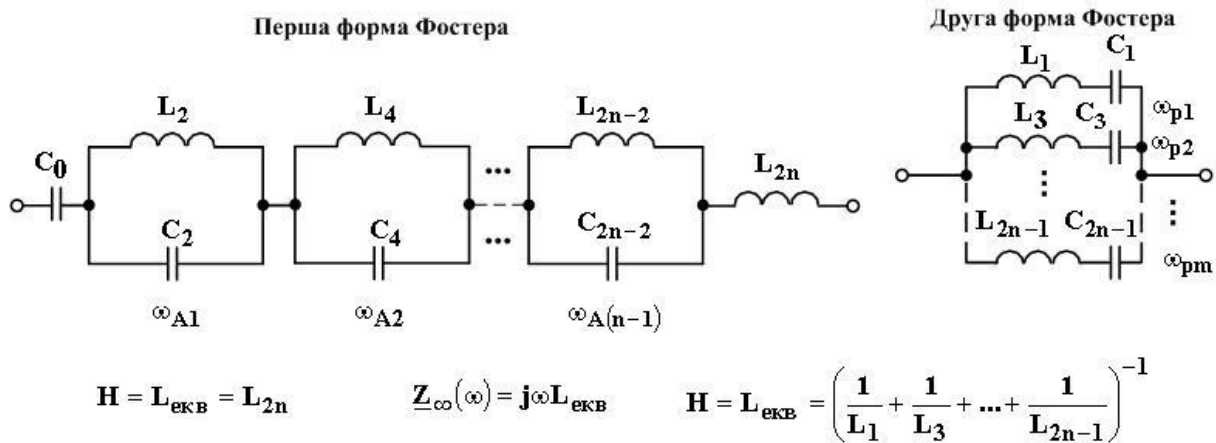


Рис. 1.21

Існують також канонічні ланцюгові (вони ж східчасті) схеми реактивних двополюсників. Це так звані канонічні форми Кауера. Узагальнену ланцюгову схему наведено на рис. 1.22, а приклад пари потенційно-еквівалентних кауерівських реактивних двополюсників – на рис. 1.23.

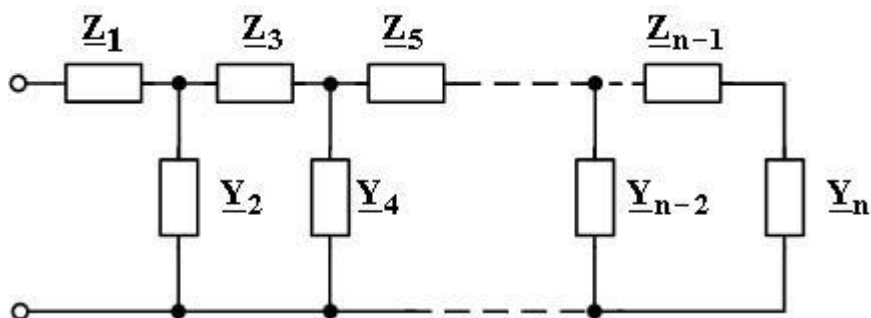


Рис. 1.22

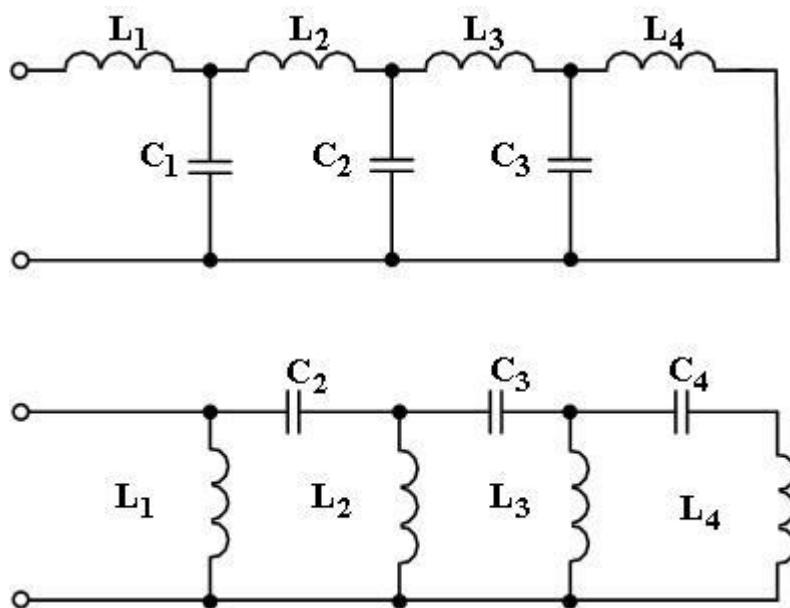


Рис. 1.23

У разі виникнення потреби в поглибленні знань з багатоелементних реактивних двополюсників рекомендуємо звернути увагу на додаткову літературу [2, 6, 7].

1.7. Неканонічні реактивні двополюсники

Реактивний двополюсник, схему якого можна спростити, не змінивши при цьому залежності $\underline{Z}(\omega)$ його опору, названо **неканонічним (неприведеним)**. Можна також визначити неканонічний реактивний двополюсник як такий двополюсник, схема якого не є ані формою Фостера, ані формою Кауера. Для цих двополюсників не є справедливими загальні властивості 1 та 2, наведені в п. 1.6.1, тобто зв'язок кількості елементів схеми з сумарною кількістю частот резонансу та антирезонансу не має того наочного вигляду, який притаманний канонічним реактивним двополюсникам. При аналізі кіл це призводить до певних незручностей. Щоб їх уникнути, слід звести неканонічну схему до канонічної, користуючись еквівалентними перетвореннями електричних кіл (об'єднанням кількох однотипних елементів, з'єднаних послідовно або паралельно, в один; перетворенням зірки на трикутник або навпаки; перетвореннями, розглянутими в прикладах 1.1. та 1.2 даного підручника). В деяких випадках, коли вихідне коло містить ділянки, які не є утвореними паралельним чи послідовним з'єднанням елементів, виявляється доцільним використання більш складних методів побудови канонічних схем (див., наприклад, п.4.6 класичної монографії [8]).

Приклад 1.4

Треба перетворити на канонічну схему кола, зображену на рис. 1.24.

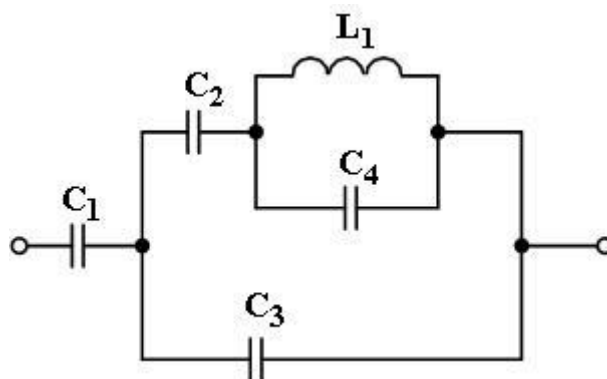


Рис. 1.24

Перш за все перетворимо ділянку $C_2C_4L_1$ на еквівалентну схему на підставі результатів, наведених у прикладі 1.2 (переобчислювати номінали елементів не будемо, оскільки це не є суттєвим для розв'язання даної задачі). Отримаємо схему, зображену на рис. 1.25,а. Помітивши, що

конденсатори C_3 та C'_4 з'єднані паралельно, замінюємо їх на конденсатор C'_3 і отримуємо схему *б*. Знов скориставшись прикладом 1.2, перейдемо від схеми *б* до схеми *в* (як опір Z_1 розглядаємо опір конденсатора C'_3 , а як опір Z_2 – опір ланцюжка $C'_2L'_1$). Нарешті, звівши послідовно з'єднані конденсатори C''_1 та C''_2 в конденсатор $C''_{\text{екв}}$, отримаємо схему *г*, яка є канонічною.

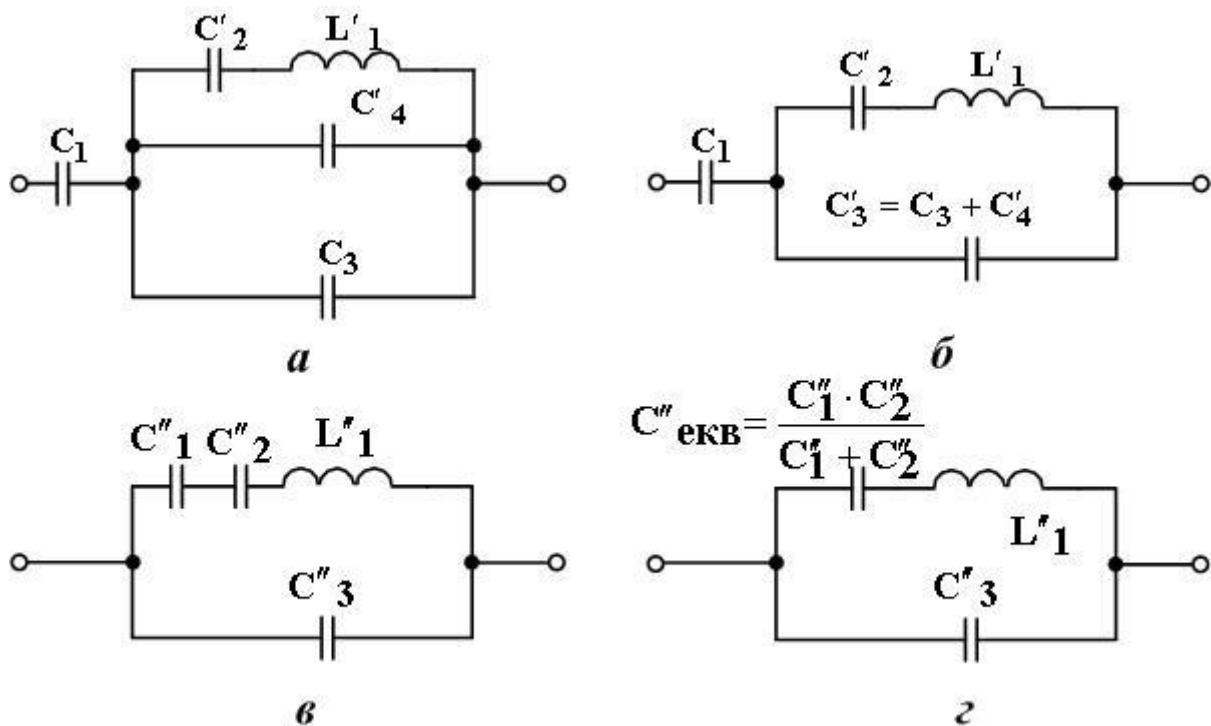


Рис. 1.25

1.8. Завдання для самоконтролю

1. В колі, схему якого зображено на рис. 1.26,*а*, параметри елементів є такими: $L_1=1,5$ Гн, $L_2=0,5$ Гн, $C_1=4$ мкФ. Обчислити параметри еквівалентного кола (рис. 1.26,*б*).

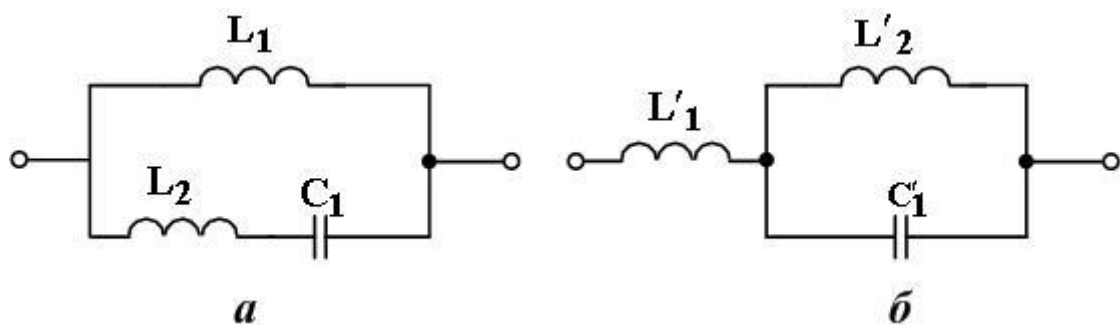


Рис. 1.26

Відповідь: : $L'_1=1,125$ Гн, $L'_2=3,375$ Гн, $C'_1 \approx 7,111$ мкФ.

2. Побудувати схему двополюсника, зворотного до зображеного на рис. 1.27, та обчислити параметри його елементів. Параметри елементів вихідного двополюсника $L_1=0,1$ Гн, $C_1=100$ мкФ, $C_2=400$ мкФ, $R_1=10$ Ом. Величина R (див. (1.3)) дорівнює 20 Ом.

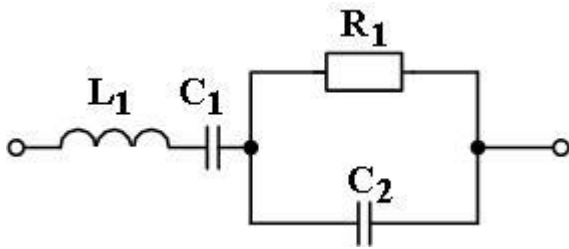


Рис. 1.27

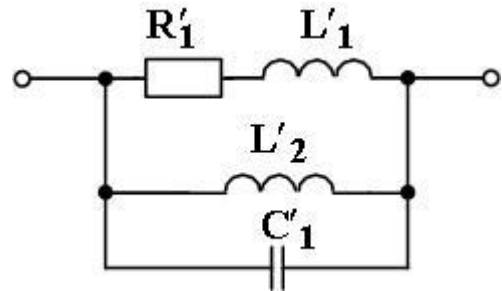


Рис. 1.28

Відповідь: див. рис. 1.28; $R'_1= 40$ Ом, $L'_1=0,16$ Гн, $L'_2=0,04$ Гн, $C'_1=250$ мкФ.

3. Зобразити графік частотної залежності комплексного опору реактивного двополюсника, схему якого зображено на рис. 1.29

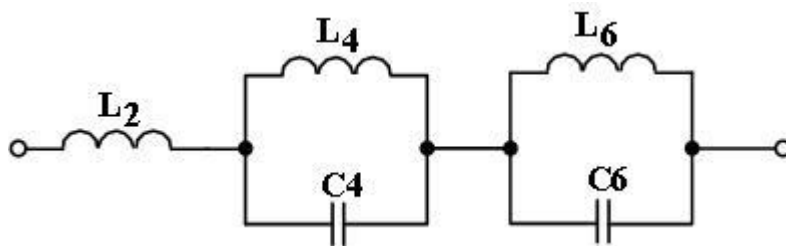


Рис. 1.29

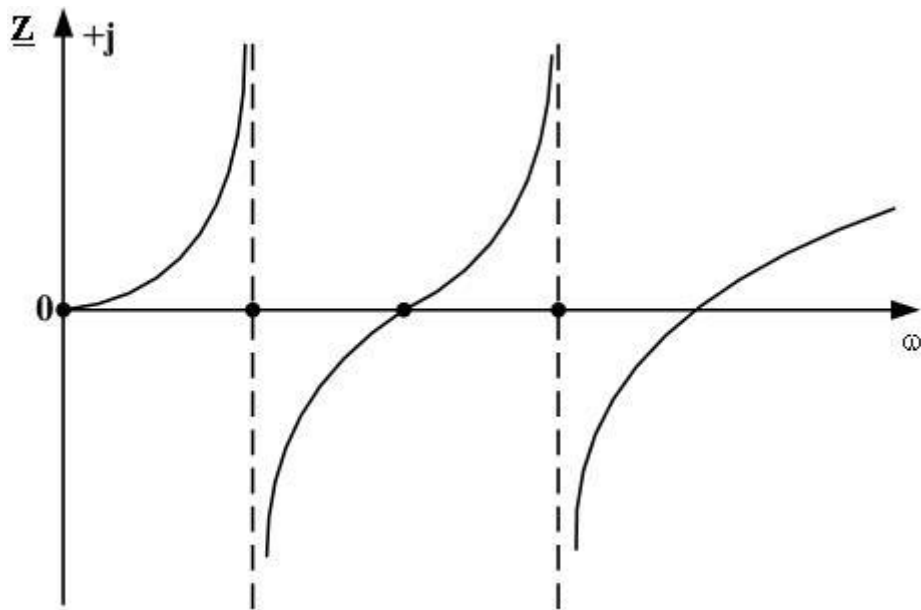


Рис. 1.30

Відповідь: див. рис. 1.30

4. Зобразити графік частотної залежності комплексного опору реактивного двополюсника, схему якого зображено на рис. 1.31.

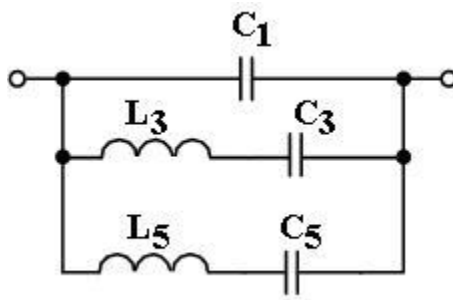


Рис. 1.31

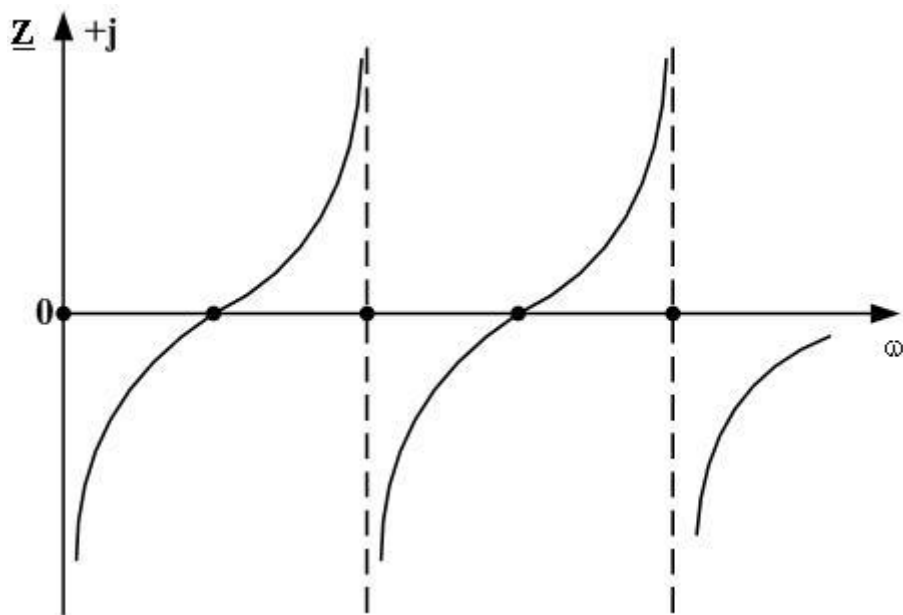


Рис. 1.32

Відповідь: див. рис. 1.32

5. Зобразити графік частотної залежності комплексного опору реактивного двополюсника, схему якого зображено на рис. 1.33

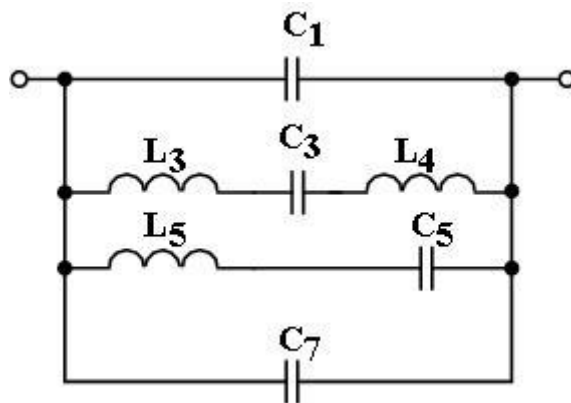


Рис. 1.33

Примітка. Доцільно спочатку з'ясувати, чи є цей двополюсник канонічним.

Відповідь: співпадає із відповіддю до завдання 4.

6. Чи є двополюсники, схеми яких зображено на рис.1.29 та 1.31, потенційно-еквівалентними або потенційно-зворотними?

Відповідь: вони є потенційно-зворотними.

2. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

2.1. Загальні поняття та визначення

Будь-яке електричне коло, яке розглядають відносно двох пар його затискачів, називають **чотириполюсником**. Якщо схема чотириполюсника невідома або не є цікавою, його графічно зображують як прямокутник з двома парами відводів, кожен з яких закінчується затискачем; при необхідності вказують обрані позитивні напрямки струмів та напруг (рис. 2.1).

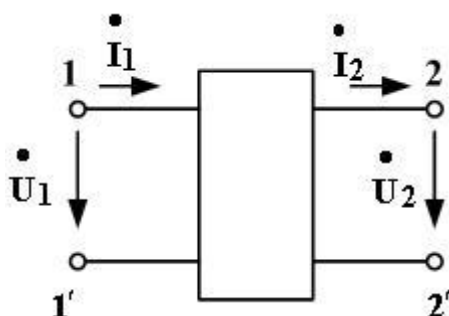


Рис. 2.1

Пару затискачів, до яких під'єднують зовнішнє джерело електричної енергії, звичайно позначають номерами 1-1', а пару затискачів, до яких під'єднують споживача електричної енергії (тобто навантаження), звичайно позначають номерами 2-2'.

Чотириполюсник є **лінійним**, якщо він не містить жодного нелінійного елемента. В протилежному випадку чотириполюсник є **нелінійним**. Чотириполюсник називають **пасивним**, якщо він не містить у собі джерел електричної енергії. Лінійний чотириполюсник є пасивним також у випадку, коли він містить ці джерела, але вони взаємно компенсують одне одного так, що при розімкнених затискачах 1-1' та 2-2'

(рис. 2.1) напруги \dot{U}_1 та \dot{U}_2 дорівнюють нулю.

Чотириполюсник називають **активним**, якщо він містить у собі джерела електричної енергії і ці джерела не компенсують одне одного, тобто при розімкнених затискачах 1-1' та 2-2' хоча б одна з напруг \dot{U}_1 та \dot{U}_2 не дорівнює нулю.¹

¹ Під терміном “джерела електричної енергії” ми маємо на увазі незалежні джерела, тобто такі, в яких електрична енергія утворюється з неелектричної за рахунок внутрішніх процесів у самому джерелі, як, наприклад, у звичайному електрохімічному елементі живлення.

Іноді при аналізі кіл з активними чотириполюсниками доводиться враховувати їх автономність або неавтономність; розгляд цього питання зацікавлений читач може знайти у [2, с.348; 3, с.156; 9, с.371].

Чотириполюсник називають **симетричним**, якщо переміна місцями його вхідної пари затискачів 1-1' та вихідної пари затискачів 2-2' не призведе до зміни струмів та напруг у зовнішньому колі, в яке ввімкнений цей чотириполюсник. У протилежному випадку чотириполюсник називають **несиметричним**.

Чотириполюсник називають **оборотним**, якщо для нього виконується умова *оборотності (взаємності)*: відношення вхідної ЕРС до вихідного струму не залежить від того, яка з пар затискачів (1-1' чи 2-2' на рис.2.1) є вхідною, а яка – вихідною. В протилежному випадку чотириполюсник є **необоротним**. Власне кажучи, умова оборотності (взаємності) полягає в дотриманні принципу взаємності, розглянутого в [1, с.44-45; 10, с.108-110; 4, с.91-92].

Пасивні лінійні чотириполюсники завжди є оборотними, також оборотними є симетричні активні чотириполюсники. Несиметричні активні чотириполюсники – необоротні.

Зміст теорії чотириполюсників полягає в побудові таких математичних зв'язків між вхідними та вихідними струмами і напругами чотириполюсника, що *форма* їх (зв'язків) запису залишається незмінною незалежно від електричної схеми конкретного чотириполюсника. Відтак стає можливим знаходити узагальнені властивості як окремих чотириполюсників, так і кіл, побудованих з певної кількості чотириполюсників. Зауважимо також, що теорія чотириполюсників є окремим випадком загальної теорії багатополюсників [9].

В даному розділі ми розглянемо пасивні лінійні чотириполюсники.

2.2. Основні рівняння чотириполюсника

2.2.1. Рівняння у формі А. Каскадне (ланцюжкове) з'єднання чотириполюсників

Уявимо собі декотрий пристрій, який розташований між джерелом електричної енергії та навантаженням, і підімкнений до них так, як показано на рис. 2.2. Отже, цей пристрій є типовим чотириполюсником. Вважатимемо його лінійним і пасивним.

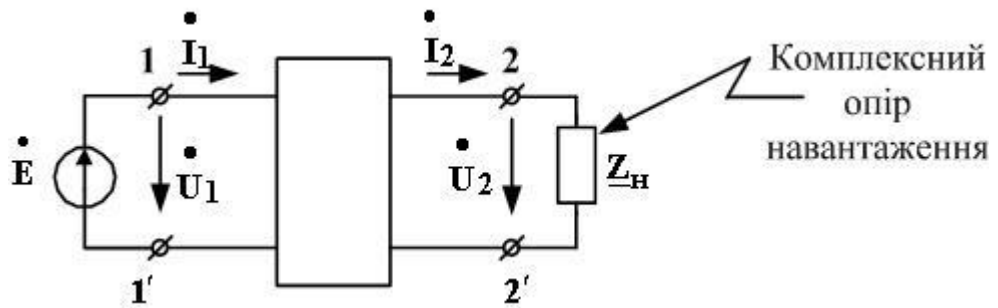


Рис. 2.2

Завдяки цьому вхідна напруга \dot{U}_1 лінійно залежить від вихідної напруги \dot{U}_2 та вихідного струму \dot{I}_2 , те ж саме можна сказати й про вхідний струм \dot{I}_1 . Відтак маємо таку пару рівнянь:

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2, \quad (2.1)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2. \quad (2.2)$$

Забігаючи вперед, скажемо, що при розрахунках кіл із чотирьох полюсами в багатьох випадках зручно оперувати з їх рівняннями в матричній формі запису. Зокрема система рівнянь (2.1) та (2.2) в цій формі виглядає як

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Постійні комплексні коефіцієнти \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} називають **A-параметрами** чотирьох полюсника, а систему рівнянь (2.1), (2.2) та її матричну форму (2.3) називають **основними рівняннями чотирьох полюсника у формі A**. Матрицю $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$ називають матрицею A- параметрів чотирьох полюсника.

З'ясуємо фізичний сенс A-параметрів. Для цього спочатку розімкнемо затискачі 2-2' кола з рис.2.2, тобто утворимо для чотирьох полюсника *режим холостого ходу*. Оскільки затискачі 2-2'

розімкнuto (тобто \underline{Z}_H видалено), то $\dot{\underline{I}}_2 = \mathbf{0}$ і з рівності (2.1) маємо, що при цьому $\dot{\underline{U}}_1 = \underline{A} \dot{\underline{U}}_2$, звідки

$$\underline{A} = \left. \frac{\dot{\underline{U}}_1}{\dot{\underline{U}}_2} \right|_{\dot{\underline{I}}_2 = \mathbf{0}} \quad (2.4)$$

Аналогічно при $\dot{\underline{I}}_2 = \mathbf{0}$ з рівності (2.2) маємо

$$\underline{C} = \left. \frac{\dot{\underline{I}}_1}{\dot{\underline{U}}_2} \right|_{\dot{\underline{I}}_2 = \mathbf{0}} \quad (2.5)$$

Зі співвідношення (2.4) випливає, що \underline{A} – параметр, який не має розмірності і числово дорівнює величині, зворотній коефіцієнту передачі за напругою (див. [1, с.252-253]) в режимі холостого ходу.

Зі співвідношення (2.5) випливає, що \underline{C} – параметр, що має розмірність провідності.

Тепер замкнемо накоротко затискачі 2-2' кола з рис. 2.2, встановивши $\underline{Z}_H = 0$, тобто утворимо для чотириполюсника *режим*

короткого замикання. Оскільки $\underline{Z}_H = 0$, то $\dot{\underline{U}}_2 = \dot{\underline{I}}_2 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ і з рівності (2.1)

маємо $\dot{\underline{U}}_1 = \underline{B} \dot{\underline{I}}_2$, звідки

$$\underline{B} = \left. \frac{\dot{\underline{U}}_1}{\dot{\underline{I}}_2} \right|_{\dot{\underline{U}}_2 = \mathbf{0}} \quad (2.6)$$

Аналогічно при $\dot{\underline{U}}_2 = \mathbf{0}$ з рівності (2.2) маємо

$$\underline{D} = \left. \frac{\dot{\underline{I}}_1}{\dot{\underline{I}}_2} \right|_{\dot{\underline{U}}_2 = \mathbf{0}} \quad (2.7)$$

Зі співвідношення (2.6) випливає, що \underline{B} – параметр, який має розмірність опору, його величина є так званим опором передачі (див.[5, с.201]) в режимі замикання.

Зі співвідношення (2.7) випливає, що \underline{D} – параметр, який не має розмірності і числово дорівнює величині, зворотній коефіцієнту передачі за струмом в режимі короткого замикання.

Всі чотири \underline{A} -параметри пов'язані між собою важливим співвідношенням

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1, \quad (2.8)$$

доведення справедливості якого можна знайти, наприклад, в підручниках [2, 4-6] та, в дещо спрощеному вигляді, в підручнику [11]. Це співвідношення задовольняють усі оборотні чотириполюсники. З нього випливає, що для знаходження четвірки \underline{A} -параметрів досить знайти будь-які три з них, а четвертий після цього можна знайти із співвідношення (2.8). Якщо чотириполюсник ще й *симетричний*, то для нього

$$\underline{A} = \underline{D} \quad (2.9)$$

і співвідношення (2.8) набуває вигляду

$$\underline{A}^2 - \underline{B} \underline{C} = 1. \quad (2.10)$$

Отже, лінійний пасивний симетричний чотириполюсник вичерпно описується лише двома \underline{A} -параметрами, а третій автоматично визначається з (2.10).

Розглянемо два чотириполюсники, з'єднані так, як це показано на рис. 2.3, тобто затискач 2 двополюсника “а” з'єднаний із затискачем 1 чотириполюсника “б”, а затискач 2' чотириполюсника “а” з'єднаний із затискачем 1' чотириполюсника “б”.

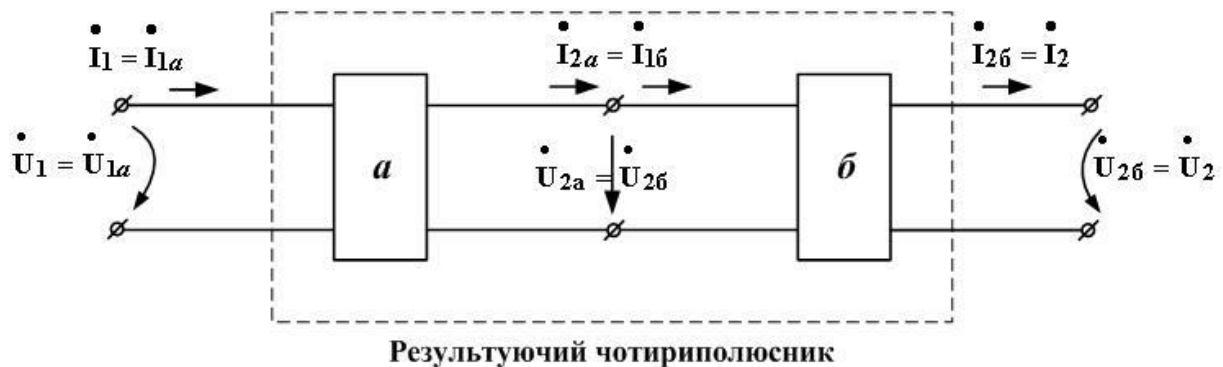


Рис. 2.3 – Каскадне з'єднання двох чотириполюсників

Позначимо матриці А-параметрів чотириполіусників “а” та “б” відповідно як $[A]_a$ та $[A]_b$, а струми та напруги цих чотириполіусників так, як це зроблено на рис. 2.3. Запишемо окремо для чотириполіусника “а” та чотириполіусника “б” рівняння у формі А:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = [A]_a \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = [A]_b \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

З рис. 2.3 очевидно, що $\dot{U}_{1b} = \dot{U}_{1a}$ та що $\dot{I}_{2b} = \dot{I}_{2a}$. Тому замість вектора $\begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}$ у вираз (2.11) можна підставити вектор $\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix}$, а відтак, підставити праву частину виразу (2.12). Отримаємо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = [A]_a [A]_b \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Назвемо чотириполіусник, який утворився внаслідок з'єднання чотириполіусників “а” та “б”, результуючим чотириполіусником. З рис. 2.3 видно, що його напруги та струми пов'язані з напругами та струмами чотириполіусників “а” та “б” таким чином: $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a}$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a}$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2b}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2b}$. З урахуванням цього вираз (2.13) набуває остаточного вигляду

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [A]_a [A]_b \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [A]_{\text{рез}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix},$$

де $[A]_{\text{рез}} = [A]_a [A]_b$ – матриця А-параметрів результуючого чотириполіусника.

Рис. 2.3 ілюструє так зване **каскадне з'єднання** двох чотириполіусників, яке інколи називають ланцюжковим з'єднанням. У загальному випадку каскадно може бути з'єднано довільну кількість N

чотириполусників (рис. 2.4). Можна довести, що матриця А-параметрів утвореного результуючого чотириполусника обчислюється як

$$[A]_{\text{рез}} = [A]_1 \cdot [A]_2 \cdot \dots \cdot [A]_{N-1} \cdot [A]_N. \quad (2.14)$$

Обов'язково зверніть увагу на те, що перемножувані матриці записуються саме в тому порядку, в якому в схемі (рис. 2.4) розташовані відповідні їм чотириполусники.

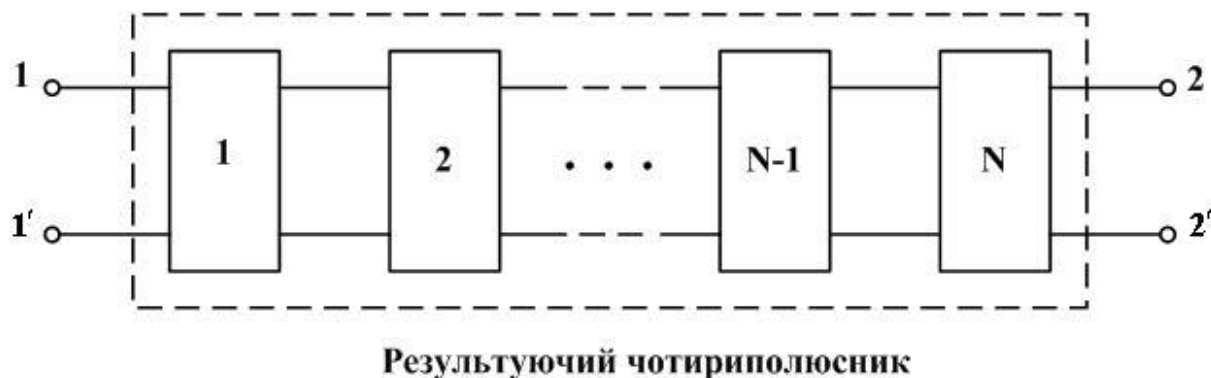


Рис. 2.4

2.2.2. Рівняння у формі Z. Послідовне з'єднання чотириполусників

Повернемося до рис. 2.2 й трохи перетворимо його, змінивши напрям струму \dot{I}_2 на протилежний.¹ Цей “новий” струм позначимо як \dot{I}_2' (рис. 2.5).

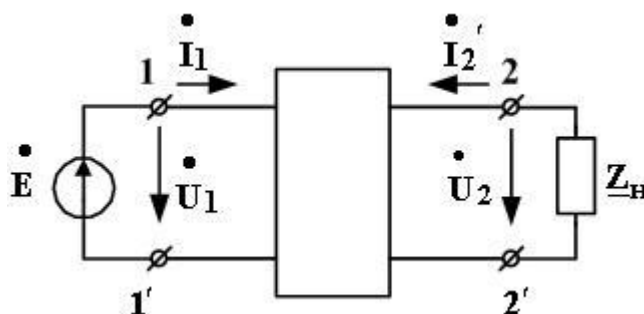


Рис. 2.5

¹ Відмінність напрямку вихідного струму в цьому та в наступних підрозділах від напрямку, встановленого при описанні А-параметрів у п.2.2.1, зумовлена історичними причинами [3, с 136].

Поставимо таку задачу: виразити обидві напруги через вхідний та вихідний струми. Оскільки чотириполосник та навантаження є лінійними, то шуканий зв'язок матиме вигляд лінійних рівнянь:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2', \quad (2.15)$$

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2'. \quad (2.16)$$

У матричній формі ця система рівнянь виглядає як

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Постійні коефіцієнти \underline{Z}_{11} , \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{21} , \underline{Z}_{22} називають **Z-параметрами** чотириполосника, а систему рівнянь (2.15), (2.16) та її матричну форму (2.17) називають **основними рівняннями чотириполосника у формі Z**.

Матрицю

$$[Z] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

називають матрицею **Z-параметрів** чотириполосника.

Очевидно, що **Z-параметри**, як коефіцієнти при струмах у правих частинах рівнянь (2.15) та (2.16), мають розмірність опору, бо у лівих частинах цих рівнянь стоять напруги.

Розглянемо два чотириполосники, з'єднані так, як це показано на рис.2.6. Записавши для кожного з них матричне рівняння у формі **Z**, врахувавши, що $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b}$, $\dot{I}_2' = \dot{I}_{2a}' = \dot{I}_{2b}'$, а також що $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}$ та $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}$, додамо ці рівняння й отримаємо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \{ [Z]_a + [Z]_b \} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

де $[Z]_a$ та $[Z]_b$ – матриці **Z-параметрів** відповідно чотириполосника “а” та “б”.

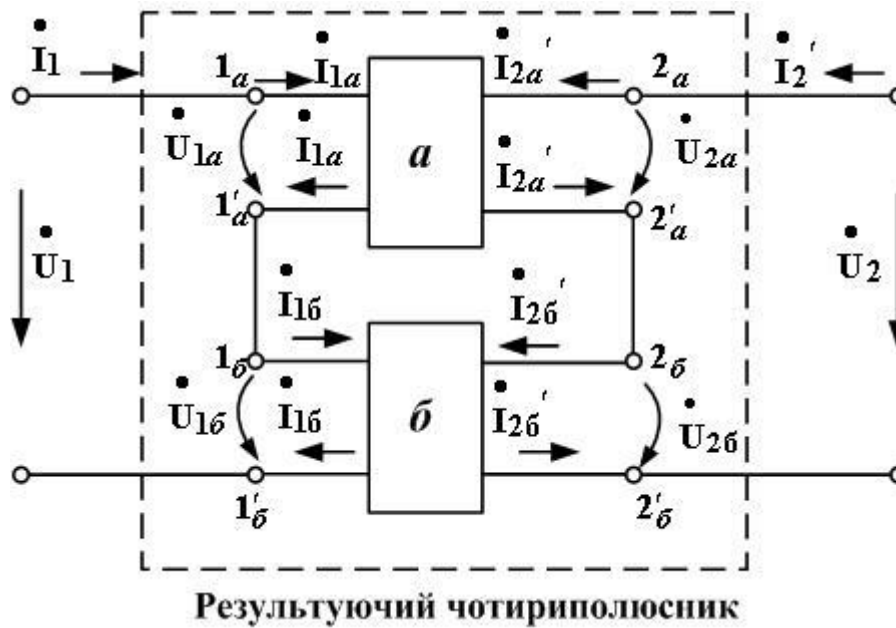


Рис. 2.6

Позначивши $[Z]_{\text{рез}} = [Z]_a + [Z]_b$, вираз (2.18) можна переписати так:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [Z]_{\text{рез}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Оскільки зліва стоїть вектор напруг результуючого чотириполосника, а справа – вектор струмів цього ж чотириполосника, то матриця $[Z]_{\text{рез}}$ має сенс матриці Z -параметрів результуючого чотириполосника. З'єднання, зображене на рис.2.6, називають **послідовним з'єднанням двох чотириполосників**. Ми довели, що при такому з'єднанні матриця Z -параметрів результуючого чотириполосника дорівнює сумі матриць Z -параметрів чотириполосників, що з'єднані. В загальному випадку послідовного з'єднання довільної кількості N чотириполосників (рис.2.7) ця закономірність зберігається:

$$[Z]_{\text{рез}} = [Z]_1 + [Z]_2 + \dots + [Z]_{N-1} + [Z]_N, \quad (2.20)$$

де $[Z]_1, \dots, [Z]_N$ – матриці Z -параметрів окремих чотириполосників.

Оскільки операція додавання матриць є комутативною, то доданки у виразі (2.20) можуть бути розташовані в довільному порядку.

2.2.3. Рівняння у формі Y . Паралельне з'єднання чотириполіусників

Нехай напрямки напруг та струмів є тими ж, що показані на рис. 2.5. Поставимо задачу: виразити обидва струми через вхідну та вихідну напруги. Оскільки чотириполіусник та навантаження є лінійними, то шуканий зв'язок матиме вигляд такої пари рівнянь:

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2, \quad (2.21)$$

$$\dot{I}_2' = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2. \quad (2.22)$$

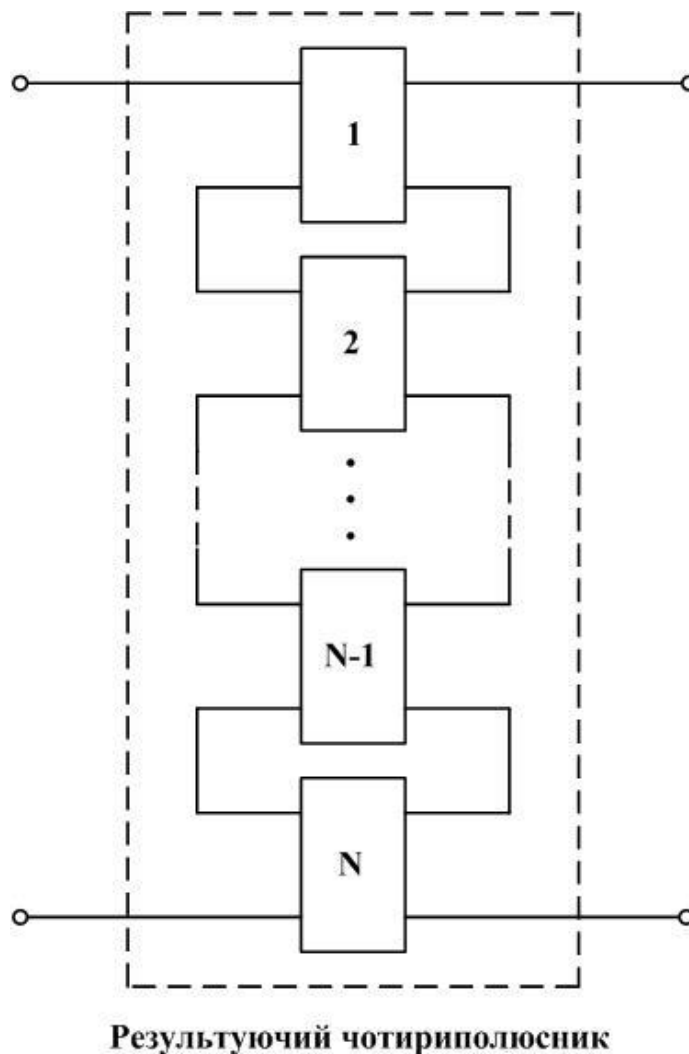


Рис. 2.7 Послідовне з'єднання чотириполіусників

У матричній формі ця система рівнянь виглядає як

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{11} & \underline{\mathbf{Y}}_{12} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{21} & \underline{\mathbf{Y}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Постійні коефіцієнти $\underline{\mathbf{Y}}_{11}$, $\underline{\mathbf{Y}}_{12}$, $\underline{\mathbf{Y}}_{21}$, $\underline{\mathbf{Y}}_{22}$ називають **Y-параметрами** чотириполюсника, а систему рівнянь (2.21), (2.22) та її матричну форму (2.23) називають **основними рівняннями чотириполюсника у формі Y**. Матрицю

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{11} & \underline{\mathbf{Y}}_{12} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{21} & \underline{\mathbf{Y}}_{22} \end{bmatrix}$$

називають матрицею Y-параметрів чотириполюсника.

Очевидно, що Y-параметри, як коефіцієнти при напругах у правих частинах рівнянь (2.21) та (2.22), мають розмірність провідності, бо в лівих частинах цих рівнянь стоять струми.

Розглянемо показане на рис. 2.8 з'єднання двох чотириполюсників, яке дістало назву **паралельного**. Запишемо для чотириполюсника "а" та чотириполюсника "б" рівняння у формі Y і додамо їх, врахувавши, що згідно зі схемою, наведеною на рис.2.8, маємо $\dot{\mathbf{U}}_{1a} = \dot{\mathbf{U}}_{1b} = \dot{\mathbf{U}}_1$ та $\dot{\mathbf{U}}_{2a} = \dot{\mathbf{U}}_{2b} = \dot{\mathbf{U}}_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{1a} + \dot{\mathbf{I}}_{1b} \\ \dot{\mathbf{I}}_{2a} + \dot{\mathbf{I}}_{2b} \end{bmatrix} = \{ [\mathbf{Y}]_a + [\mathbf{Y}]_b \} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

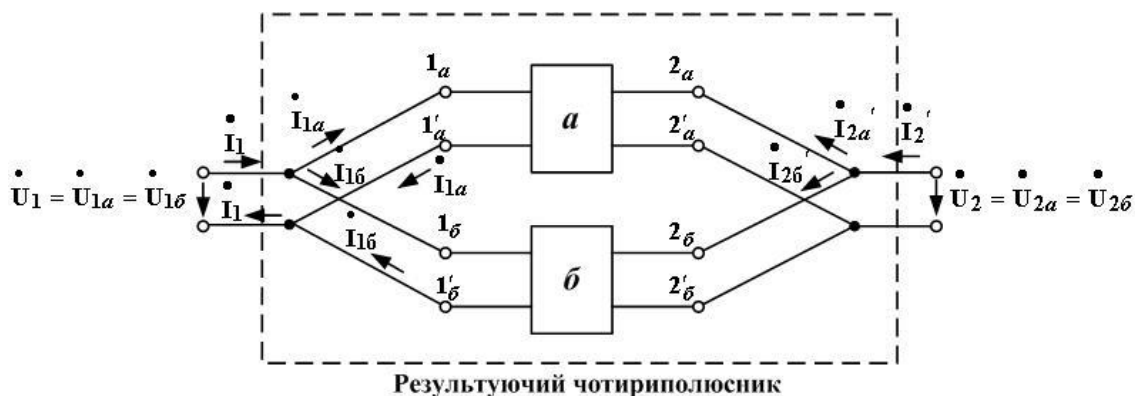


Рис. 2.8 Паралельне з'єднання двох чотириполюсників

Згідно з першим законом Кірхгофа $\dot{I}_{1a} + \dot{I}_{16} = \dot{I}_1$, $\dot{I}_{2a} + \dot{I}_{26} = \dot{I}_2$. Введемо також позначення $[Y]_{рез} = [Y]_a + [Y]_6$. Тоді вираз (2.24) можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [Y]_{рез} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Оскільки зліва стоїть вектор струмів результуючого чотириполосника, а справа – вектор напруг цього ж чотириполосника, то матриця $[Y]$ має сенс матриці Y -параметрів результуючого чотириполосника. Отже, ми довели, що при *паралельному з'єднанні* двох чотириполосників *матриця Y -параметрів результуючого чотириполосника дорівнює сумі матриць Y -параметрів чотириполосників, що з'єднані.*

У загальному випадку паралельного з'єднання довільної кількості N чотириполосників (рис.2.9) ця закономірність зберігається:

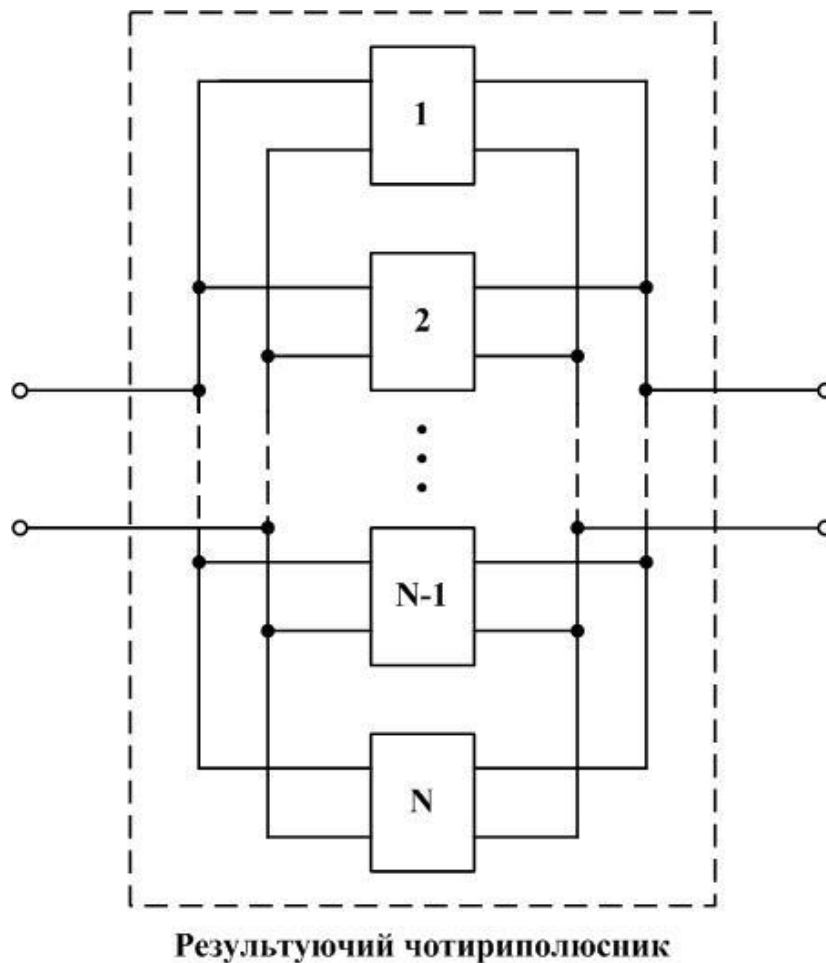


Рис. 2.9 Паралельне з'єднання чотириполосників

$$[\mathbf{Y}]_{\text{рез}} = [\mathbf{Y}]_1 + [\mathbf{Y}]_2 + \dots + [\mathbf{Y}]_{N-1} + [\mathbf{Y}]_N. \quad (2.26)$$

Тут $[\mathbf{Y}]_1, \dots, [\mathbf{Y}]_N$ – матриці \mathbf{Y} -параметрів окремих чотириполюсників. Оскільки операція додавання матриць є комутативною, то доданки у виразі (2.26) можуть бути розташовані в довільному порядку.

Помножимо матричне рівняння (2.25) на матрицю $[\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1}$, обернену до матриці $[\mathbf{Y}]_{\text{рез}}$. Отримаємо

$$[\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}]_{\text{рез}} \cdot [\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Оскільки добуток $[\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1} \cdot [\mathbf{Y}]_{\text{рез}}$ є одиничною матрицею, то рівність (2.27) набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Порівнявши цей вираз з виразом (2.19), бачимо, що $[\mathbf{Y}]_{\text{рез}}^{-1} = [\mathbf{Z}]_{\text{рез}}$, тобто що матриця \mathbf{Z} -параметрів чотириполюсника є оберненою матрицею \mathbf{Y} -параметрів цього чотириполюсника. Звідси випливає також, що й $[\mathbf{Z}]_{\text{рез}}^{-1} = [\mathbf{Y}]_{\text{рез}}$.

2.2.4. Рівняння у формі \mathbf{H} . Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників

Вважатимемо напрямки напруг та струмів тими ж, що показані на рис. 2.5. Оскільки чотириполюсник та навантаження є лінійними, то струми та напруги чотириполюсника можна пов'язати й такою парою рівнянь:

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \underline{\mathbf{H}}_{11} \dot{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{H}}_{12} \dot{\mathbf{U}}_2, \quad (2.29)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_2' = \underline{\mathbf{H}}_{21} \dot{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{H}}_{22} \dot{\mathbf{U}}_2. \quad (2.30)$$

У матричній формі ця система рівнянь виглядає як

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Постійні коефіцієнти \underline{H}_{11} \underline{H}_{12} \underline{H}_{21} \underline{H}_{22} називають **Н-параметрами** чотириполюсника, а систему рівнянь (2.29), (2.30) та її матричну форму (2.31) називають **основними рівняннями чотириполюсника у формі Н**. Матрицю

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$$

називають матрицею **Н-параметрів** чотириполюсника.

Ліва частина рівняння(2.29) має розмірність напруги. Щоб і права частина мала таку ж розмірність, коефіцієнт \underline{H}_{11} повинен мати розмірність опору, а коефіцієнт \underline{H}_{12} повинен бути величиною без розмірності. З аналогічного аналізу рівняння (2.30) випливає, що \underline{H}_{21} не має розмірності, а \underline{H}_{22} має розмірність провідності.

Якщо вхідні затискачі двох чотириполюсників з'єднати послідовно (як на рис.2.6), а вихідні – паралельно (як на рис.2.8), то отримуємо так зване послідовно-паралельне з'єднання двох чотириполюсників (рис.2.10).

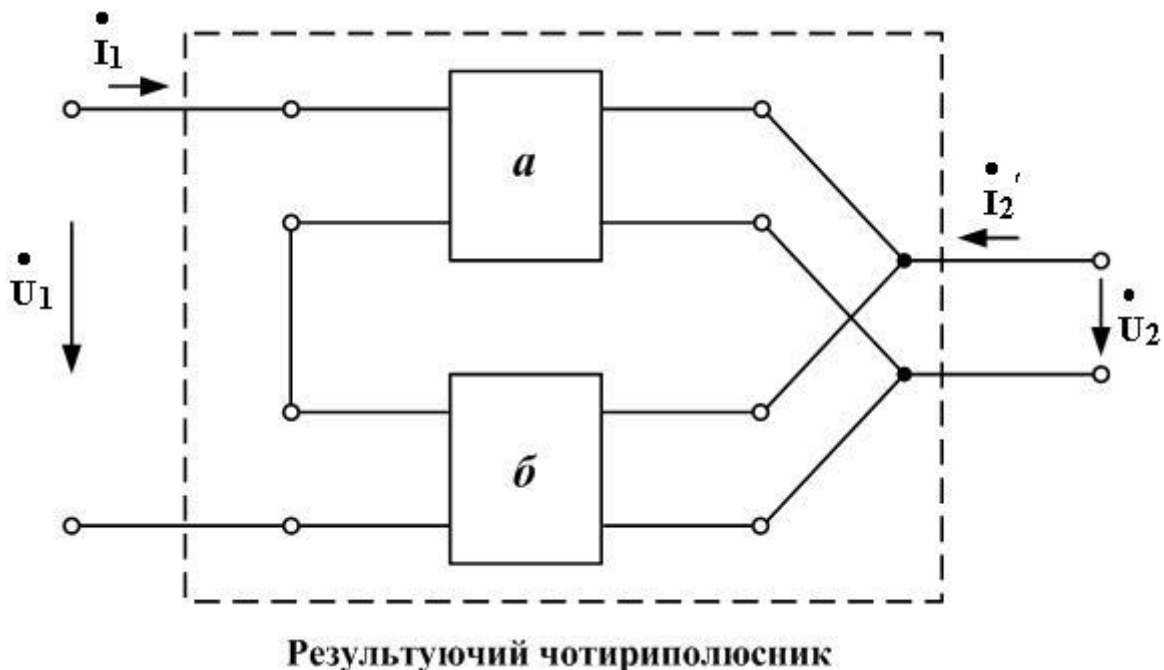


Рис. 2.10

Позначимо матрицю **H**-параметрів чотириполюсника “а” як $[\mathbf{H}]_a$, а чотириполюсника “б” як $[\mathbf{H}]_б$. Незаважко довести (див., наприклад, підручник [12, с.369]), що при послідовно-паралельному з’єднанні матриця **H**-параметрів результуючого чотириполюсника $[\mathbf{H}]_{рез}$ дорівнює сумі $[\mathbf{H}]_a$ та $[\mathbf{H}]_б$:

$$[\mathbf{H}]_{рез} = [\mathbf{H}]_a + [\mathbf{H}]_б. \quad (2.32)$$

Систему **H**-параметрів досить широко використовують при розрахунках кіл з транзисторами.

2.2.5. Рівняння у формах **G** та **B**

При напругах і струмах, напрямки яких задані на рис. 2.5, можна записати й такі зв’язки між цими величинами:

$$\dot{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{G}}_{11} \dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{G}}_{12} \dot{\mathbf{I}}_2', \quad (2.33)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{G}}_{21} \dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{G}}_{22} \dot{\mathbf{I}}_2'. \quad (2.34)$$

Це система основних рівнянь чотириполюсника у формі **G**.

У матричній формі запису ця система рівнянь виглядає як

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{11} & \underline{\mathbf{G}}_{12} \\ \underline{\mathbf{G}}_{21} & \underline{\mathbf{G}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2' \end{bmatrix} = [\mathbf{G}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2' \end{bmatrix},$$

де $[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{11} & \underline{\mathbf{G}}_{12} \\ \underline{\mathbf{G}}_{21} & \underline{\mathbf{G}}_{22} \end{bmatrix}$ – матриця **G**-параметрів чотириполюсника.¹

¹ Звертаємо увагу читача на те, що термін “**G**-параметри” використовують виключно у випадку, коли напруги та струми спрямовані так, як це показано на рис. 2.5 [2, 3, 9]. В деяких підручниках використовують напруги та струми, спрямовані згідно з рис. 2.2 (тобто замість $\dot{\mathbf{I}}_2'$ використовують $\dot{\mathbf{I}}_2$). В цьому випадку зв’язок між парою $(\dot{\mathbf{I}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2)$ та парою $(\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{I}}_2)$ задають системою параметрів, які позначають як **F**-параметри [6, 12, 13].

Неважко довести, що матриці $[G]$ та $[H]$ є взаємно оберненими, тобто $[G] = [H]^{-1}$, $[H] = [G]^{-1}$.

При так званому паралельно-послідовному з'єднанні чотириполіусників (рис.2.11) має місце така рівність:

$$[G]_{\text{рез}} = [G]_a + [G]_b, \quad (2.35)$$

де $[G]_a$ та $[G]_b$ – матриці G -параметрів відповідно чотириполіусників “а” та “б”;

$[G]_{\text{рез}}$ – матриця G -параметрів результуючого чотириполіусника.

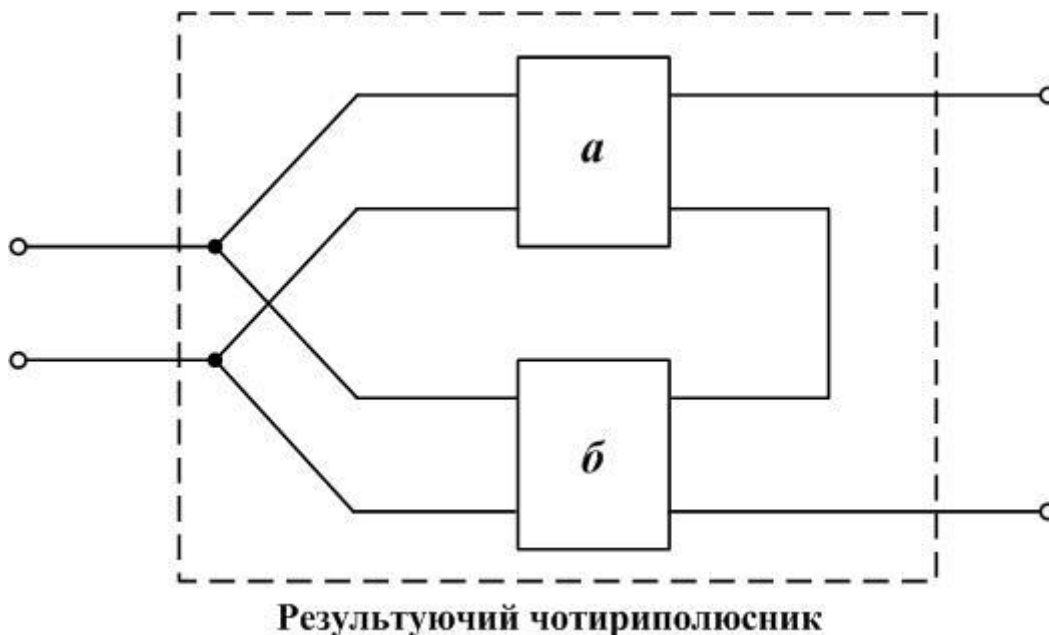


Рис. 2.11

Систему G -параметрів чотириполіусника використовують при розрахунках кіл з електронними лампами.

Існує ще одна форма запису основних рівнянь чотириполіусника форми В. Щоб її продемонструвати, змінимо на рис. 2.5 напрям струму \dot{I}_1 на протилежний і позначимо такий струм \dot{I}'_1 . Інший струм та напруги не зачіпатимемо. Система двох рівнянь

$$\dot{U}_2 = \underline{B}_{11} \dot{U}_1 + \underline{B}_{12} \dot{I}'_1, \quad (2.36)$$

$$\dot{I}'_2 = \underline{B}_{21} \dot{U}_1 + \underline{B}_{22} \dot{I}'_1. \quad (2.37)$$

дістала назву системи рівнянь у формі \mathbf{B} [2, 3]. Величини \mathbf{B} -параметрів просто пов'язані з величинами \mathbf{A} -параметрів: $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{D}$, $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{C}$, $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{A}$.

2.2.6. Зв'язок між коефіцієнтами рівнянь різних форм

Знаючи коефіцієнти основних рівнянь чотириполюсника в одній з форм, можна обчислити коефіцієнти основних рівнянь чотириполюсника в будь-якій іншій формі. За доведенням цього ствердження рекомендуємо звернутися до класичних підручників [2, 3, 9], там же містяться таблиці формул перерахунку параметрів одного типу в параметри будь-якого іншого типу (у [2, 9] ці таблиці розташовані в додатках наприкінці книг). Відмітимо також **важливий факт**: коефіцієнти основних рівнянь чотириполюсника в будь-якій формі (тобто \mathbf{A} -, \mathbf{Z} -, \mathbf{Y} -параметри та інші) залежать лише від схеми та опорів чотириполюсника і не залежать від характеристик генератора та навантаження.

2.2.7. Регулярність з'єднання чотириполюсників

Для того, щоб характеристики складного чотириполюсника, утвореного шляхом з'єднання кількох окремих чотириполюсників, співпали з очікуваними, це з'єднання повинне відповідати певній умові – **умові регулярності**. Її формулювання в найбільш загальному вигляді таке: після виконання з'єднання струм через затискач $1'$ кожного окремого чотириполюсника повинен дорівнювати струмові через затискач 1 цього ж чотириполюсника (як, наприклад, струм \mathbf{I}_{1a} через затискачі $1a$ та $1'a$ на рис. 2.6), це ж повинно відбуватися й для пари затискачів $2-2'$ кожного окремого чотириполюсника (струм \mathbf{I}'_{2a} через затискачі $2a$ та $2'a$ на рис. 2.6).

Регулярним чи нерегулярним буде з'єднання – залежить від схем конкретних з'єднаних чотириполюсників та від виду з'єднання. Нерегулярним може виявитися будь-яке з'єднання, окрім каскадного [3], при цьому відповідне співвідношення (2.20), (2.26), (2.32) та (2.35) стане невірним. Вельми детальний розгляд питання регулярності з'єднання чотириполюсників містять роботи [8, 9], ми ж звернемо увагу на наведені в підручнику [14] правила перевірки регулярності двох поширених видів з'єднань – паралельного та послідовного.

Перевірка *регулярності паралельного з'єднання* двох чотириполюсників. Спочатку з'єднати паралельно вхідні затискачі обох чотириполюсників і замкнути накоротко вихідні затискачі кожного з них (рис.2.12,а).

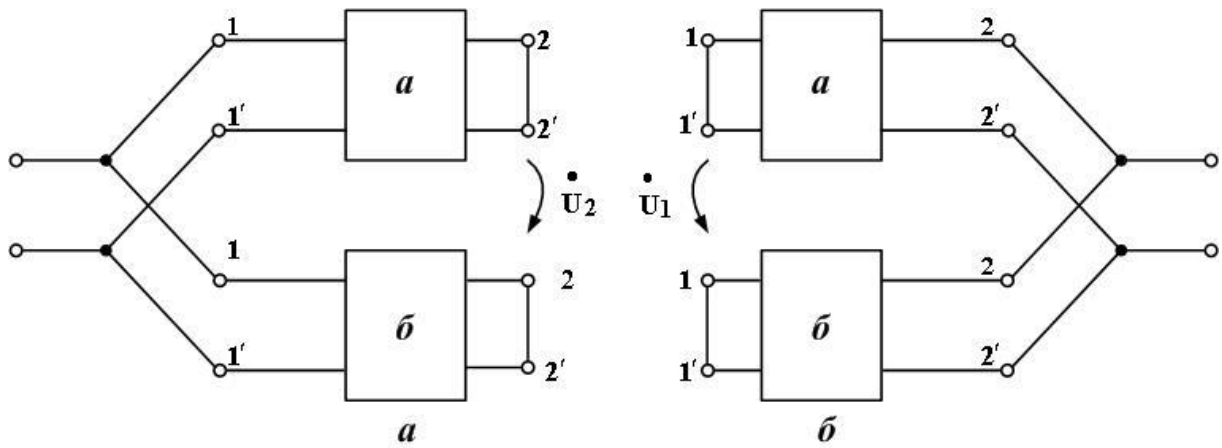


Рис. 2.12

Знайти напругу \dot{U}_2 . Якщо вона дорівнює нулю, то виконати наступний крок: з'єднати паралельно вихідні затискачі обох чотириполюсників і замкнути накоротко вхідні затискачі кожного з них (рис.2.12,б). Знайти напругу \dot{U}_1 . Якщо вона теж (як і \dot{U}_2) дорівнює нулю, то паралельне з'єднання чотириполюсників "а" та "б" буде регулярним.

Перевірка *регулярності послідовного з'єднання* двох чотириполюсників. Спочатку з'єднати послідовно вхідні затискачі обох чотириполюсників і розімкнути вихідні затискачі кожного з них (рис. 2.13,а).

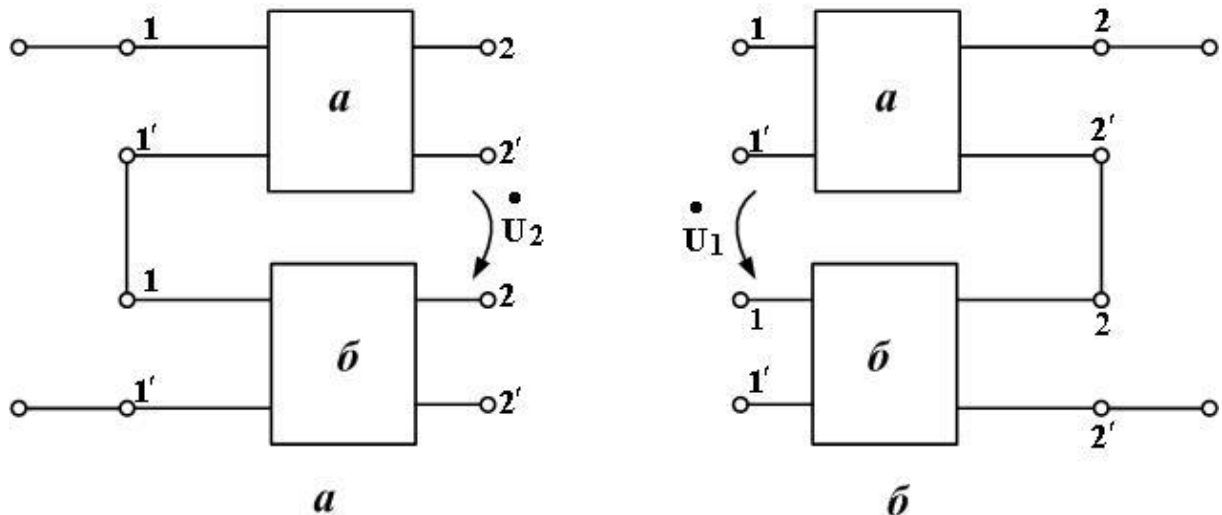


Рис. 2.13

Знайти напругу \dot{U}_2 . Якщо вона дорівнює нулю, то виконати наступний крок: з'єднати послідовно вихідні затискачі обох

чотириполюсників і розімкнуті вхідні затискачі кожного з них (рис. 2.13,б). Знайти напругу \dot{U}_1 . Якщо вона теж (як і \dot{U}_2) дорівнює нулю, то послідовне з'єднання чотириполюсників "а" та "б" буде регулярним.

2.3. Схеми заміщення чотириполюсників

Отже, зв'язки між напругами та струмами лінійного пасивного чотириполюсника однозначно встановлюються будь-якою з четвірок параметрів, розглянутих у підрозд. 2.2. На прикладі А-параметрів ми побачили, що в такій четвірці лише три параметри є незалежними, а четвертий однозначно обчислюється через них. Оскільки зв'язки між напругами та струмами визначаються опорами кола, то, щоб забезпечити задані величини трьох параметрів (наприклад, **A**, **B** та **C**) первісного чотириполюсника, достатньо замінити його деяким новим чотириполюсником з трьох належним чином підібраних опорів. При встановленні такого чотириполюсника з трьох опорів замість первісного чотириполюсника напруги та струми *зовнішнього кола* залишаться тими ж самими. А відтак, для зовнішнього кола обидва чотириполюсники є **еквівалентними**. Можна висловитись і так: два чотириполюсники є еквівалентними, якщо А-параметри одного з них дорівнюють відповідним А-параметрам другого. Це ж стосується і рівності параметрів будь-якого іншого типу.

Схему чотириполюсника, еквівалентного первісному чотириполюснику, називають **схемою заміщення**. Широке застосування знайшли Т-подібна схема заміщення, яка базується на з'єднанні опорів зіркою (рис.2.14), та П-подібна схема заміщення, яка базується на з'єднанні опорів трикутником (рис. 2.15).

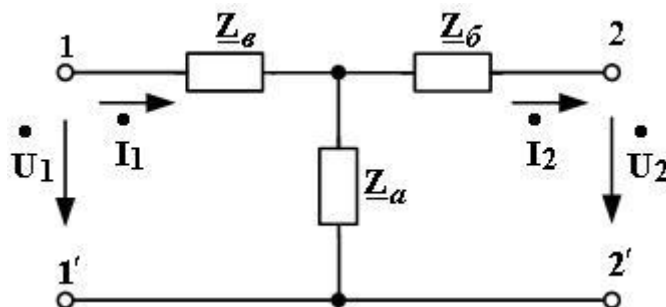


Рис. 2.14

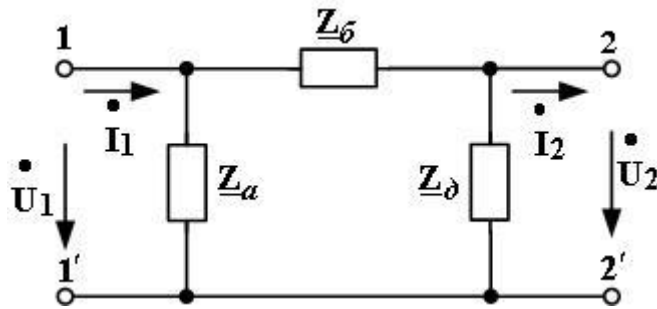


Рис. 2.15

За заданими \underline{A} -параметрами первісного чотирьополіусника опори Т-подібної схеми заміщення, згідно з [3], обчислюють як

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_a &= \underline{1} / \underline{C}, \\ \underline{Z}_6 &= (\underline{D} - \underline{1}) / \underline{C}, \\ \underline{Z}_e &= (\underline{A} - \underline{1}) / \underline{C}, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

а опори П-подібної схеми заміщення – як

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_a &= \underline{B} / (\underline{D} - \underline{1}), \\ \underline{Z}_6 &= \underline{B}, \\ \underline{Z}_e &= \underline{B} / (\underline{A} - \underline{1}). \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.38) відносно \underline{A} -параметрів і врахувавши вже відоме співвідношення $\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1$, отримаємо для Т-подібної схеми:

$$\underline{A} = \underline{1} + \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_a}, \quad (2.40)$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_6 + \underline{Z}_e + \frac{\underline{Z}_e \underline{Z}_6}{\underline{Z}_a}, \quad (2.41)$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{1}}{\underline{Z}_a}, \quad (2.42)$$

$$\underline{D} = \underline{1} + \frac{\underline{Z}_6}{\underline{Z}_a}. \quad (2.43)$$

Аналогічним чином із системи рівнянь (2.39) отримаємо для П-подібної схеми:

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{1} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_6}{\underline{\mathbf{Z}}_d}, \quad (2.44)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{Z}}_6, \quad (2.45)$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{1}}{\underline{\mathbf{Z}}_a} + \frac{\mathbf{1}}{\underline{\mathbf{Z}}_d} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_6}{\underline{\mathbf{Z}}_a \underline{\mathbf{Z}}_d}, \quad (2.46)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{1} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_6}{\underline{\mathbf{Z}}_a}. \quad (2.47)$$

Співвідношення (2.40) – (2.47) можна й досить наочно отримати з простого аналізу рис. 2.14 та 2.15. Нехай Т-подібне коло (рис. 2.14) працює в режимі холостого ходу, тобто затискачі 2-2' розімкнені і струм $\dot{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{0}$. Як відомо (див. п.2.2.1), для будь-якого чотириполюсника маємо

$$\underline{\mathbf{A}} = \left. \begin{array}{c} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{array} \right|_{\dot{\mathbf{I}}_2=0}. \quad (2.48)$$

Вважаючи відомою напругу $\dot{\mathbf{U}}_1$, обчислимо напругу $\dot{\mathbf{U}}_2$. В режимі холостого ходу вона дорівнює напрузі на опорі $\underline{\mathbf{Z}}_a$ (рис. 2.14), а ця напруга у свою чергу утворюється внаслідок протікання струму $\dot{\mathbf{I}}_1$ шляхом “затискач 1 – $\underline{\mathbf{Z}}_6 - \underline{\mathbf{Z}}_a$ – затискач 1’”. Звідси $\dot{\mathbf{I}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_1 / (\underline{\mathbf{Z}}_6 + \underline{\mathbf{Z}}_a)$, $\dot{\mathbf{U}}_2 = \dot{\mathbf{I}}_1 \cdot \underline{\mathbf{Z}}_a = \dot{\mathbf{U}}_1 \cdot \frac{\underline{\mathbf{Z}}_a}{\underline{\mathbf{Z}}_6 + \underline{\mathbf{Z}}_a}$. Підставивши цей вираз у (2.48), отримаємо

$$\underline{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{U}}_1 / \left[\dot{\mathbf{U}}_1 \cdot \frac{\underline{\mathbf{Z}}_a}{\underline{\mathbf{Z}}_6 + \underline{\mathbf{Z}}_a} \right] = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_6 + \underline{\mathbf{Z}}_a}{\underline{\mathbf{Z}}_a} = \mathbf{1} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_6}{\underline{\mathbf{Z}}_a},$$

що співпадає зі співвідношенням (2.40).

Аналогічно з аналізу режиму холостого ходу, користуючись вже відомим виразом (2.5), знаходимо, що для Т-подібної схеми $\underline{\mathbf{C}} = \mathbf{1} / \underline{\mathbf{Z}}_a$. Вирази для $\underline{\mathbf{B}}$ та $\underline{\mathbf{D}}$ знаходимо з аналізу режиму короткого замикання затискачів 2 – 2', при якому $\dot{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{0}$.

Такі ж розрахунки можна зробити й для П-подібної схеми заміщення чотириполюсника.

У симетричного Т-подібного чотириполюсника $\underline{Z}_\delta = \underline{Z}_\epsilon$, а у симетричного П-подібного чотириполюсника $\underline{Z}_a = \underline{Z}_d$.

Звичайно, що Т-подібна та П-подібна схеми не є виключно абстрактними схемами заміщення реальних чотириполюсників: нерідко самі реальні чотириполюсники складені безпосередньо за цими схемами.

Окремими випадками Т- та П-подібних чотириполюсників є **Г-подібний чотириполюсник**, який утворюється з Т-подібного при $\underline{Z}_\epsilon = 0$ (рис.2.16,а), або з П-подібного при $\underline{Z}_a = \infty$ (рис.2.16,б). Подальшим спрощенням чотириполюсника є **неповні чотириполюсники**, схеми яких зображені на рис.2.17.

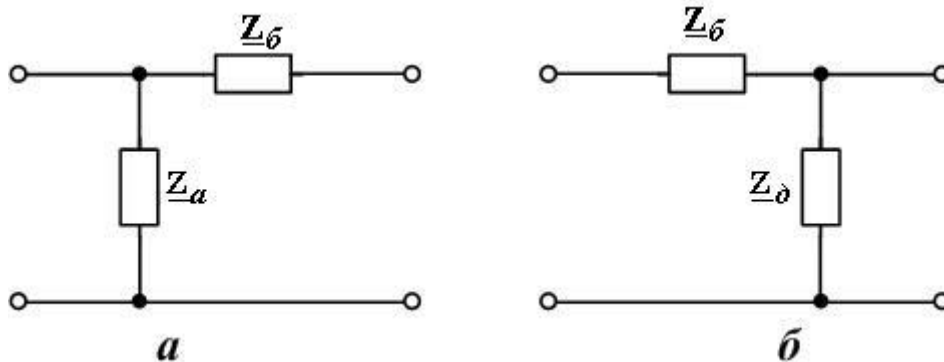


Рис. 2.16

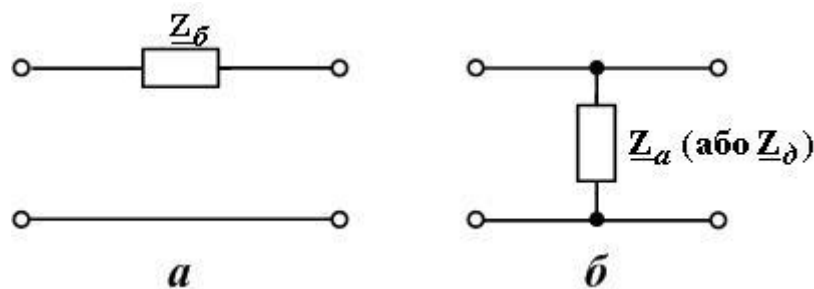


Рис. 2.17

Ці чотириполюсники очевидним чином утворюються з Г-подібних чотириполюсників.

Розрахункові співвідношення для Г-подібного та неповних чотириполюсників також очевидним чином впливають із загальних співвідношень (2.40) – (2.47) при заміні відповідних відсутніх на рис.2.17 опорів нулем або нескінченністю.

2.4. Власні (характеристичні) параметри чотириполіусників

2.4.1. Характеристичні опори

Крім коефіцієнтів основних рівнянь чотириполіусника, на практиці широко використовують ще один вид параметрів, які вичерпно описують чотириполіусник, взятий окремо від генератора та навантаження. Це трійка власних (їх ще називають характеристичними) параметрів чотириполіусника: два характеристичних опори та власна стала передачі.

Характеристичним опором \underline{Z}_{x1} чотириполіусника з боку входу та характеристичним опором \underline{Z}_{x2} чотириполіусника з боку виходу називають пару опорів, які відповідають таким умовам: якщо до затискачів 2 – 2' під'єднаний опір \underline{Z}_{x2} , то з боку розімкнених затискачів 1 – 1' вхідний опір чотириполіусника дорівнює \underline{Z}_{x1} (рис. 2.18,а), і навпаки, якщо до затискачів 1 – 1' під'єднаний опір \underline{Z}_{x1} , то з боку розімкнених затискачів 2 – 2' вхідний опір дорівнює \underline{Z}_{x2} (рис.2.18,б).

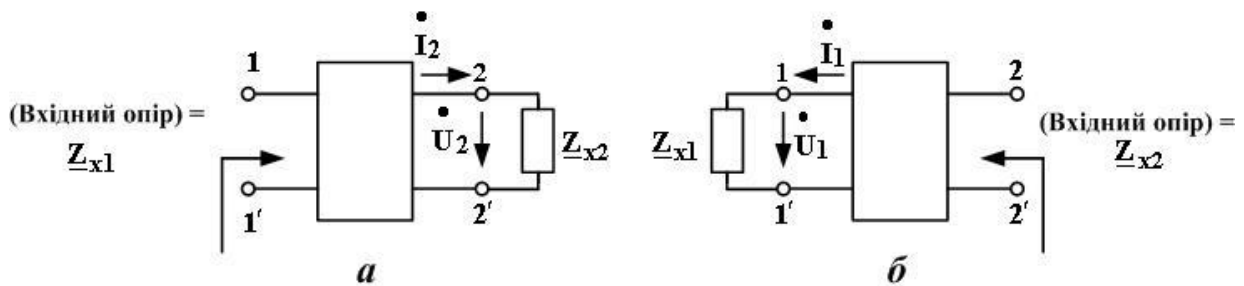


Рис. 2.18

Характеристичні опори досить просто обчислюються через А-параметри. Згадаємо вже відомі нам рівняння

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2, \quad (2.49)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2. \quad (2.50)$$

Якщо подати на затискачі 1 – 1' кола (рис.2.18,а) деяку напругу \dot{U}_1 , то матимемо за визначенням характеристичних опорів

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_{x1} = \frac{\underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2}{\underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2}. \quad (2.51)$$

Поділивши чисельник і знаменник на $\dot{\mathbf{I}}_2$ та врахувавши, що в даному випадку $\dot{\mathbf{U}}_2 / \dot{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{Z}}_{x2}$, отримаємо

$$\underline{\mathbf{Z}}_{x1} = \frac{\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Z}}_{x2} + \underline{\mathbf{B}}}{\underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{Z}}_{x2} + \underline{\mathbf{D}}}. \quad (2.52)$$

Аналогічним чином для кола з рис. 2.18,б при такому напрямку струму $\dot{\mathbf{I}}_1'$ слід використати **B**-параметри чотириполюсника (див.(2.36), (2.37)).

Отримаємо

$$\underline{\mathbf{Z}}_{x2} = \frac{\underline{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{I}}_1'}{\underline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{I}}_1'} = \frac{\underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{Z}}_{x1} + \underline{\mathbf{B}}}{\underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{Z}}_{x1} + \underline{\mathbf{A}}}. \quad (2.53)$$

Розв'язання системи рівнянь (2.52), (2.53) відносно $\underline{\mathbf{Z}}_{x1}$ та $\underline{\mathbf{Z}}_{x2}$ дає

$$\underline{\mathbf{Z}}_{x1} = \sqrt{\frac{\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}}{\underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{D}}}}, \quad (2.54)$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{x2} = \sqrt{\frac{\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}}}{\underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{A}}}}. \quad (2.55)$$

Ця пара виразів відкриває можливість для знаходження величин характеристичних опорів експериментальним шляхом. Нехай чотириполюсник введений в режим короткого замикання затискачів 2 – 2'.

При цьому $\dot{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{0}$ і, поділивши (2.49) на (2.50), маємо *вхідний опір короткого замикання*

$$\underline{\mathbf{Z}}_{1кз} = \left. \frac{\dot{\mathbf{U}}_1}{\dot{\mathbf{I}}_1} \right|_{\dot{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{0}} = \frac{\underline{\mathbf{B}}}{\underline{\mathbf{D}}}. \quad (2.56)$$

Тепер введемо чотириполіусник в режим холостого ходу, розімкнувши затискачі 2 – 2'. При цьому $\dot{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{0}$ і, поділивши (2.49) на (2.50), маємо *вхідний опір холостого ходу*

$$\underline{Z}_{1xx} = \left. \frac{\dot{\mathbf{U}}_1}{\dot{\mathbf{I}}_1} \right|_{\dot{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{0}} = \frac{\underline{\mathbf{A}}}{\underline{\mathbf{C}}}. \quad (2.57)$$

Порівнявши вираз (2.54) з виразами (2.56) та (2.57), отримуємо

$$\underline{Z}_{x1} = \sqrt{\underline{Z}_{1k3} \cdot \underline{Z}_{1xx}}. \quad (2.58)$$

Аналогічно, вводячи чотириполіусник в режим короткого замикання та холостого ходу відносно затискачів 1 – 1' і вимірюючи вхідні опори \underline{Z}_{2k3} та \underline{Z}_{2xx} з боку затискачів 2 – 2', можна знайти опір

$$\underline{Z}_{x2} = \sqrt{\underline{Z}_{2k3} \cdot \underline{Z}_{2xx}}. \quad (2.59)$$

Вхідні опори короткого замикання та холостого ходу доступні для вимірювання (звичайно, треба створити умови, щоб чотириполіусник не вийшов із ладу).

Кожен з характеристичних опорів фактично являє собою специфічний опір навантаження, величина якого залежить лише від схеми та опорів чотириполіусника. Таке навантаження, опір якого дорівнює характеристичному опоріві, дістало назву **узгодженого навантаження**.

У симетричного чотириполіусника $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{D}}$, тому для нього

$$\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2} = \underline{Z}_x = \sqrt{\underline{\mathbf{B}}/\underline{\mathbf{C}}}. \quad (2.60)$$

Інколи в теорії чотириполіусників використовують так званий **повторний опір**. Це такий опір при підімкненні якого до затискачів 2 – 2' вхідний опір з боку затискачів 1 – 1' дорівнюватиме йому ж. Для симетричного чотириполіусника величини повторного та характеристичного опорів співпадають.

2.4.2. Власна стала передачі

Якщо живити чотириполіусник з боку затискачів 2 – 2', маючи при цьому узгоджене навантаження (тобто $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x2}$), то вказана нижче величина являє собою **власну сталу передачі**:

$$\underline{g}_c = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2} \quad (2.61)$$

(тут струми та напруги є тими, що показані на рис. 2.2).

Розпишемо комплекси діючих значень струмів і напруг через їх діючі значення та початкові фази:

$$\begin{aligned} \underline{g}_c &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{U_1 \cdot e^{j\varphi_{U1}} \cdot I_1 \cdot e^{j\varphi_{I1}}}{U_2 \cdot e^{j\varphi_{U2}} \cdot I_2 \cdot e^{j\varphi_{I2}}} \right\} = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} e^{j[(\varphi_{U1} - \varphi_{U2}) + (\varphi_{I1} - \varphi_{I2})]} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} + j \cdot \frac{1}{2} [(\varphi_{U1} - \varphi_{U2}) + (\varphi_{I1} - \varphi_{I2})]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

З іншого боку, будь-яке комплексне число можна записати у вигляді суми дійсної та уявної частин, тому

$$\underline{g}_c = a_c + j b_c. \quad (2.63)$$

Порівнявши вирази (2.62) та (2.63), отримаємо, що дійсною частиною власної сталої передачі є

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}. \quad (2.64)$$

Ця величина дістала назву **власного згасання чотиріполюсника**. Оскільки добуток діючих значень напруги та струму дорівнює повній потужності [1, с.126-127], то величину власного згасання чотиріполюсника можна визначити як

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} \Big|_{\underline{Z}_n = \underline{Z}_{x2}}, \quad (2.65)$$

тобто як половину натурального логарифма відношення повної вхідної потужності чотиріполюсника до повної потужності навантаження за умови, що опір навантаження дорівнює характеристичному опоріві. Одиницею вимірювання власного згасання, визначеного формулою (2.65), є *непер* (скорочено Нп).

З порівняння виразів (2.62) та (2.63) також отримуємо, що уявною частиною власної сталої передачі є

$$g_c = \frac{1}{2} [(\varphi_{U1} - \varphi_{U2}) + (\varphi_{I1} - \varphi_{I2})]. \quad (2.66)$$

Ця величина дістала назву **власного коефіцієнта фази чотириполюсника**. Одиницею її вимірювання є одиниця вимірювання кута.

Для *симетричного чотириполюсника* вирази (2.64) та (2.66) дещо спрощуються. Для отримання таких спрощених виразів спочатку згадаємо, що згідно із визначенням характеристичного опору \underline{Z}_{x1} при навантаженні $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x2}$ маємо вхідний опір $\underline{Z}_{Bx1} = \underline{Z}_{x1}$ з боку затискачів 1 – 1'. Отже, при напрузі на навантаженні

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_H = \dot{I}_2 \underline{Z}_{x2}$$

маємо вхідну напругу

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{Bx1} = \dot{I}_1 \underline{Z}_{x1}.$$

У симетричного чотириполюсника $\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2} = \underline{Z}_x$, тому для нього

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1 \underline{Z}_x}{\dot{I}_2 \underline{Z}_x} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Тому для симетричного чотириполюсника вираз для власної сталої передачі має вигляд (див. (2.61))

$$\begin{aligned} g_c &= \frac{1}{2} \ell_n \frac{\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2} = \frac{1}{2} \ell_n \frac{\dot{U}_1 \cdot \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{x1}}}{\dot{U}_2 \cdot \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{x2}}} \Bigg|_{\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2}} = \frac{1}{2} \ell_n \frac{\dot{U}_1^2}{\dot{U}_2^2} = \ell_n \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \\ &= \ell_n \frac{U_1}{U_2} + j(\varphi_{U1} - \varphi_{U2}). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Звідси

$$a_c = \ln(U_1 / U_2), \quad (2.68)$$

$$b_c = \Phi_{U1} - \Phi_{U2}. \quad (2.69)$$

Аналогічно можна довести, що для симетричного чотириполюсника справедливі й такі співвідношення:

$$a_c = \ln(I_1 / I_2), \quad (2.70)$$

$$b_c = \Phi_{I1} - \Phi_{I2}. \quad (2.71)$$

Тепер повернемося до розгляду загального випадку несиметричного чотириполюсника. Доведено (див. [6, 7]), що власна стала передачі цього чотириполюсника пов'язана з його А-параметрами співвідношенням

$$\underline{g}_c = \ln(\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}), \quad (2.72)$$

а з вхідними опорами короткого замикання і холостого ходу (вирази (2.56) та (2.57)) співвідношенням

$$\operatorname{th} \underline{g}_c = \sqrt{\underline{Z}_{1k3} / \underline{Z}_{1xx}}. \quad (2.73)$$

Підставивши сюди вирази (2.56) та (2.57), одержимо ще одне співвідношення, яке пов'язує \underline{g}_c з А-параметрами:

$$\operatorname{th} \underline{g}_c = \sqrt{\frac{\underline{BC}}{\underline{AD}}}. \quad (2.74)$$

Цікавим та важливим є те, що навіть для несиметричного чотириполюсника величина власної сталої передачі не залежить від того, яка пара затискачів (1 – 1' чи 2 – 2') є вхідною, а яка – вихідною.

Розглянемо важливий для практики випадок **каскадного узгодженого з'єднання чотириполюсників** на прикладі двох чотириполюсників (рис.2.19). Почнемо розглядати схему з кінця. За визначенням узгодженого з'єднання, чотириполюсник “б” навантажений опором \underline{Z}_H , який дорівнює характеристичному опоріві \underline{Z}_{x26} цього чотириполюсника.

¹ $\operatorname{th} \underline{x}$ – гіперболічний тангенс комплексного аргументу \underline{x} . Цю функцію, зокрема,

можна обчислити як
$$\operatorname{th} \underline{x} = \frac{e^{\underline{x}} - e^{-\underline{x}}}{e^{\underline{x}} + e^{-\underline{x}}}.$$

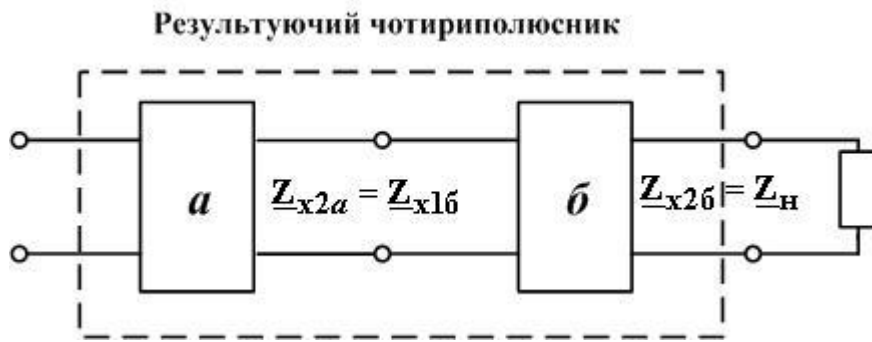


Рис. 2.19. Каскадне узгоджене з'єднання двох чотириполюсників

Тому його вхідний опір, за визначенням характеристичних опорів, дорівнює вхідному характеристичному опоріві Z_{x1b} цього ж чотириполюсника “б”. Але ж цей опір є опором навантаження чотириполюсника “а”. Щоб чотириполюсник “а” теж був навантажений узгоджено, треба, щоб його вихідний характеристичний опір Z_{x2a} дорівнював цьому навантаженню, тобто Z_{x1b} . Оскільки ми говоримо про *узгоджене з'єднання* чотириполюсників, то вважаємо, що цю умову виконано. Так ось, якщо чотириполюсники “а” та “б” з'єднані узгоджено, а їхні власні сталі передачі дорівнюють відповідно g_{ca} та g_{cb} , то виявляється, що власна стала передачі результуючого чотириполюсника (рис.2.19) є їхньою сумою:

$$g_c = g_{ca} + g_{cb}. \quad (2.75)$$

У загальному випадку *каскадного узгодженого з'єднання довільної кількості* чотириполюсників власна стала передачі результуючого чотириполюсника (рис.2.4) теж дорівнює сумі власних сталих передачі всіх з'єднаних чотириполюсників.

2.4.3. Вживання власних параметрів та А-параметрів

Рівності (2.54), (2.55) та (2.72) однозначно пов'язують власні параметри чотириполюсника з його А-параметрами.¹ Тому при теоретичному описанні чотириполюсників можна користуватися або тими, або іншими параметрами, виходячи з того, як зручніше в конкретній ситуації. А з огляду на те, що А-параметри також однозначно пов'язані з іншими типами параметрів чотириполюсників (див.п.2.2.6), усі ці способи описання чотириполюсника є рівноцінними. Тож можна зробити висновок,

¹ Формули, які виражають А-параметри безпосередньо через власні параметри, можна знайти, наприклад, у [2, с.357; 13, с.318] та багатьох інших підручниках та монографіях.

що два чотириполіусники є **еквівалентними**, якщо вони мають однакові сукупності **A**-параметрів (**Z**-параметрів, **Y**-параметрів і т.п.) або однакові сукупності власних параметрів.

2.5. Робочі параметри чотириполіусників

2.5.1. Навіщо потрібні робочі параметри чотириполіусників?

Як ми вже відмічали, власні параметри чотириполіусника, а також коефіцієнти основних рівнянь чотириполіусника, взяті самі по собі, описують лише цей чотириполіусник і не несуть ніякої інформації про джерело сигналу (генератор) та про навантаження чотириполіусника. Власні параметри дозволяють точно описати розподіл напруг та струмів тільки для ситуації, коли опори навантаження та генератора в точності дорівнюють відповідним характеристичним опорам чотириполіусника. На практиці ця рівність виконується дуже зрідка. Тому, щоб описати електричні процеси в колі, утвореному довільними чотириполіусником, генератором і навантаженням, знання власних параметрів недостатньо, і треба вводити нову сукупність параметрів – **робочі параметри**, які враховують як параметри ізольованого чотириполіусника, так і опори генератора та навантаження.

2.5.2. Вхідний опір чотириполіусника

Ще раз запишемо систему рівнянь чотириполіусника у формі А:

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2, \quad (2.76)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2. \quad (2.77)$$

Вхідний опір чотириполіусника з боку затискачів 1–1 (рис.2.1) дорівнює $\underline{Z}_{\text{вх1}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$. Підставивши замість \dot{U}_1 та \dot{I}_1 відповідно вирази (2.76) та (2.77), матимемо

$$\underline{Z}_{\text{вх1}} = \frac{\underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2}{\underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на \dot{I}_2 та врахувавши, що \dot{U}_2/\dot{I}_2 дорівнює опоріві навантаження \underline{Z}_H , отримаємо

$$\underline{Z}_{\text{вх1}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{D}}. \quad (2.78)$$

В окремому випадку, якщо \underline{Z}_H таке, що $\underline{Z}_{\text{вх1}} = \underline{Z}_H$, такий опір навантаження, як ми вже відмічали (див. п.2.4.1), називають *повторним*.

Якщо підімкнути навантаження \underline{Z}_H до затискачів 1–1, то вхідний опір з боку затискачів 2 – 2' дорівнюватиме (див. підручник [2])

$$\underline{Z}_{\text{вх2}} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{A}}. \quad (2.79)$$

2.5.3. Опір передачі. Приведений опір

Опір передачі чотириполіюсника визначають як

$$\underline{Z}_{\text{пер}} = \dot{U}_1/\dot{I}_2, \quad (2.80)$$

тобто як відношення вхідної напруги до струму навантаження. Підставимо замість \dot{U}_1 праву частину рівності (2.76):

$$\underline{Z}_{\text{пер}} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = \underline{A} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}. \quad (2.81)$$

Перш ніж дати визначення приведенного опору чотириполіюсника, зобразимо принципову електричну схему ввімкнення чотириполіюсника

між навантаженням \underline{Z}_H та генератором з ЕРС $\dot{E}_Г$ і внутрішнім опором $\underline{Z}_Г$. Цю схему подано на рис.2.20. **Приведений опір чотириполіюсника** визначають як

$$\underline{Z}_{\text{прив}} = \dot{E}_Г/\dot{I}_2. \quad (2.82)$$

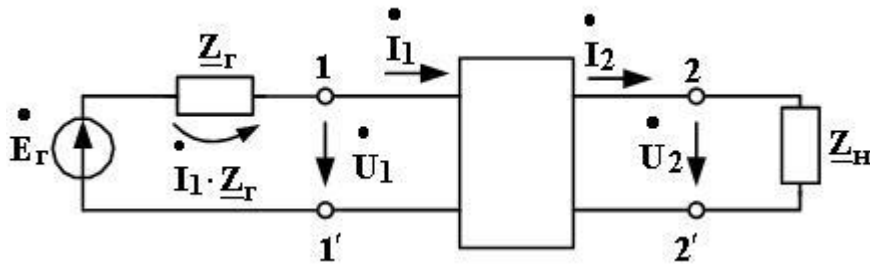


Рис. 2.20

Згідно з другим законом Кірхгофа для контуру $\dot{E}_G - z_G - 1 - 1'$ є справедливою рівність $\dot{E}_G = \dot{I}_1 \underline{Z}_G + \dot{U}_1$. Підставивши її у (2.82) і замінивши \dot{I}_1 на праву частину рівності (2.77), отримаємо

$$\underline{Z}_{\text{прив}} = \frac{\left(\underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2 \right) \cdot \underline{Z}_G + \dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \left(\underline{C} \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + \underline{D} \right) \cdot \underline{Z}_G + \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}.$$

Оскільки $\dot{U}_2 / \dot{I}_2 = \underline{Z}_H$, а $\dot{U}_1 / \dot{I}_2 = \underline{Z}_{\text{пер}}$, то

$$\underline{Z}_{\text{прив}} = (\underline{C} \underline{Z}_H + \underline{D}) \cdot \underline{Z}_G + \underline{Z}_{\text{пер}}.$$

Зауважимо також, що скориставшись приміткою до п.2.4.3, можна побудувати співвідношення, в яких $\underline{Z}_{\text{пер}}$ та $\underline{Z}_{\text{прив}}$ виражаються не через А-параметри, а через власні параметри чотириполюсника.

2.5.4. Узгодження генератора та навантаження. Робочі коефіцієнти передачі та робоча стала передачі

Розглянемо коло, утворене послідовно з'єднаними генератором (з ЕРС E_G і внутрішнім опором \underline{Z}_G) та навантаженням з опором \underline{Z}_H (рис.2.21).

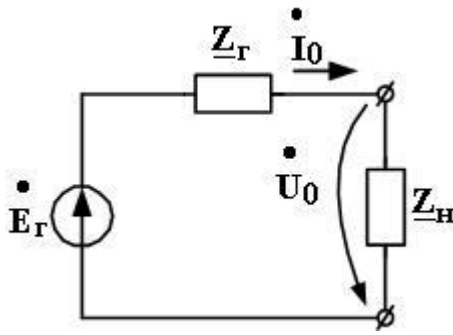


Рис. 2.21

Ми вже з'ясували, за якої умови в такому колі буде забезпечено максимум *активної потужності* в навантаженні (див. [1, п.5.10]). Тепер дамо відповідь на питання “За яких умов у цьому колі (рис.2.21) буде *максимальною повна потужність* у навантаженні?”. Спочатку виразимо цю потужність через ЕРС генератора та опори кола:

$$\begin{aligned}
 S &= I_0^2 \cdot |Z_n| = \frac{E_r^2}{|Z_r + Z_n|^2} \cdot |Z_n| = \frac{E_r^2 \cdot |Z_n|}{\left| |Z_r| e^{j\varphi_r} + |Z_n| e^{j\varphi_n} \right|^2} = \\
 &= \frac{E_r^2 \cdot |Z_n|}{|Z_r|^2 \cdot \left| 1 + \frac{|Z_n|}{|Z_r|} \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_r)} \right|^2}. \tag{2.83}
 \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$\begin{aligned}
 \left| 1 + a \cdot e^{j\alpha} \right|^2 &= \left| 1 + a \cdot \cos\alpha + ja \cdot \sin\alpha \right|^2 = (1 + a \cdot \cos\alpha)^2 + a^2 \cdot \sin^2 \alpha = \\
 &= 1 + 2a \cdot \cos\alpha + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha = 1 + 2a \cos\alpha + a^2.
 \end{aligned}$$

Застосуємо цей результат до знаменника виразу (2.83):

$$S = \frac{E_r^2}{|Z_r|^2} \cdot \frac{|Z_n|}{1 + 2 \cdot \frac{|Z_n|}{|Z_r|} \cos(\varphi_n - \varphi_r) + \frac{|Z_n|^2}{|Z_r|^2}}.$$

При постійній величині φ_{H} максимум функції $S(|\underline{Z}_{\text{H}}|)$ буде досягнуто при величині $|\underline{Z}_{\text{H}}|$, яка задовольняє умову

$$\frac{dS}{d(|\underline{Z}_{\text{H}}|)} = 0.$$

Тож беремо першу похідну від виразу для S та прирівнюємо чисельник результату до нуля:

$$1 + 2 \frac{|\underline{Z}_{\text{H}}|}{|\underline{Z}_{\text{Г}}|} \cos(\varphi_{\text{H}} - \varphi_{\text{Г}}) + \frac{|\underline{Z}_{\text{H}}|^2}{|\underline{Z}_{\text{Г}}|^2} - 2 \frac{|\underline{Z}_{\text{H}}|}{|\underline{Z}_{\text{Г}}|} \cos(\varphi_{\text{H}} - \varphi_{\text{Г}}) - 2 \cdot \frac{|\underline{Z}_{\text{H}}|^2}{|\underline{Z}_{\text{Г}}|^2} = 0.$$

Звідси маємо

$$1 = \frac{|\underline{Z}_{\text{H}}|^2}{|\underline{Z}_{\text{Г}}|^2},$$

тобто

$$|\underline{Z}_{\text{H}}| = |\underline{Z}_{\text{Г}}|. \quad (2.84)$$

Підставивши цей результат у (2.83), отримаємо вираз для максимальної величини повної потужності:

$$S_{\text{max}} = \frac{E_{\text{Г}}^2}{2 \cdot |\underline{Z}_{\text{Г}}| \cdot [1 + \cos(\varphi_{\text{H}} - \varphi_{\text{Г}})]}. \quad (2.85)$$

Отже, максимум повної потужності в навантаженні у нашому колі (рис.2.21) досягається за умови рівності модулів опорів навантаження та генератора. В техніці зв'язку прийнято при виборі \underline{Z}_{H} забезпечувати ще й рівність $\varphi_{\text{H}} = \varphi_{\text{Г}}$, тобто, в підсумку, вибирати $\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{Г}}$, оскільки при цьому досягається дещо корисне в поведінці напруги \dot{U}_0 на навантаженні:

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_0 |\underline{Z}_{\text{H}}|_{\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{Г}}} = \frac{\dot{E}_{\text{Г}}}{\underline{Z}_{\text{H}} + \underline{Z}_{\text{Г}}} \cdot |\underline{Z}_{\text{H}}|_{\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{Г}}} = \frac{\dot{E}_{\text{Г}}}{2 \underline{Z}_{\text{Г}}} \cdot \underline{Z}_{\text{Г}} = \frac{\dot{E}_{\text{Г}}}{2}. \quad (2.86)$$

Тобто при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_G$ в цьому колі напруга на навантаженні дорівнює половині ЕРС генератора на будь-якій частоті, що означає відсутність частотних спотворень сигналу в навантаженні. Повну потужність для такого випадку прийнято позначати як S_0 :

$$S_0 = \frac{U_0^2}{|\underline{Z}_H|} = \frac{E_G^2}{4 \cdot |\underline{Z}_G|}. \quad (2.87)$$

Кажуть, що при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_G$ навантаження **узгоджене** з генератором. Звернемо увагу на те, що величина S_0 є максимальною величиною повної потужності, яку генератор із заданими E_G та \underline{Z}_G може віддати в принципі. Тому її можна прийняти за певний еталон потужності для порівняння з ним інших потужностей, пов'язаних з досліджуваним чотириполосником.

Також можна прийняти за еталони струму і напруги величини \dot{I}_0 та \dot{U}_0 , які діють в колі (рис.2.21) за умови, що $\underline{Z}_H = \underline{Z}_G$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \dot{E}_G / (2\underline{Z}_G), \\ \dot{U}_0 &= \dot{E}_G / 2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

(останній вираз – це вже відоме нам співвідношення (2.86)).

Перш ніж перейти до аносованих у заголовку робочих коефіцієнтів передачі чотириполосника, ще раз звернемося до схеми, зображеної на рис.2.20. Для неї, згідно з (2.82), маємо

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_G / \underline{Z}_{\text{прив}}, \quad (2.89)$$

а також

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_H = \dot{E}_G \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_{\text{прив}}} \quad (2.90)$$

та повну потужність навантаження

$$S_2 = \frac{U_2^2}{|\underline{Z}_H|} = E_G^2 \cdot \frac{|\underline{Z}_H|}{|\underline{Z}_{\text{прив}}|^2}. \quad (2.91)$$

Тоді, користуючись виразами (2.86) – (2.91), можна ввести такі робочі коефіцієнти (зверніть увагу на те, що деякі з них є комплексними величинами):

1) робочий коефіцієнт передачі напруги

$$\underline{k}_{pU} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{2} \cdot \frac{\underline{Z}_{\text{прив}}}{\dot{E}_\Gamma \cdot \underline{Z}_H} = \frac{\underline{Z}_{\text{прив}}}{2\underline{Z}_H}; \quad (2.92)$$

2) робочий коефіцієнт передачі струму

$$\underline{k}_{pI} = \frac{\dot{I}_0}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{2\underline{Z}_\Gamma} \cdot \frac{\underline{Z}_{\text{прив}}}{\dot{E}_\Gamma} = \frac{\underline{Z}_{\text{прив}}}{2\underline{Z}_\Gamma}; \quad (2.93)$$

3) робочий коефіцієнт передачі потужності

$$\underline{K}_{pS} = \frac{S_0}{S_2} = \frac{E_\Gamma^2}{4|\underline{Z}_\Gamma|} \cdot \frac{|\underline{Z}_{\text{прив}}|^2}{E_\Gamma^2 \cdot |\underline{Z}_H|} = \frac{|\underline{Z}_{\text{прив}}|^2}{4 \cdot |\underline{Z}_\Gamma| \cdot |\underline{Z}_H|}. \quad (2.94)$$

Використовують також **робочу сталу передачі**

$$\underline{g}_p = \frac{1}{2} \ell_n \frac{\dot{U}_0 \dot{I}_0}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \quad (2.95)$$

(порівняйте цю формулу з формулою (2.61), за якою визначають власну сталу передачі). Підстановка у вираз (2.95) співвідношень (2.86), (2.88) – (2.90) приводить до співвідношення

$$\underline{g}_p = \ell_n \frac{\underline{Z}_{\text{прив}}}{2\sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_\Gamma}}. \quad (2.96)$$

Сукупність робочих параметрів (включаючи два вхідні опори) повністю описує роботу чотириполосника, який ввімкнено між генератором з внутрішнім опором \underline{Z}_Γ та навантаженням з опором \underline{Z}_H .¹

¹ Зверніть увагу на те, що робочі параметри *не залежать* від ЕРС генератора.

2.6. Згасання (ослаблення) чотириполюсників

Згасання – це виражене в логарифмічному масштабі відношення двох повних потужностей, що виділяються у двох різних частинах кола.²

Якщо використовується натуральний логарифм, то згасання обчислюють за формулою

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{S_i}{S_j}, \quad (2.97)$$

де індекси i та j при повних потужностях вказують, в якому місці кола виміряно ці потужності (наприклад, S_1 – потужність на вході, S_2 – потужність на виході).

Згасання, обчислене за формулою (2.97), вимірюють у **неперах** (скорочено Нп).

Якщо використовується десятковий логарифм, то згасання обчислюють за формулою $\alpha = \lg(S_i / S_j)$ і результат вимірюють у белах (скорочено – Б). Однак для практичних потреб бел є надто великою одиницею, тому звичайно користуються формулою, яка забезпечує результат, що вимірюється у десятих частинах бела – **децибелах** (скорочено – дБ):

$$a = 10 \lg \frac{S_i}{S_j}. \quad (2.98)$$

Користуючись відомим із шкільного курсу математики зв'язком між натуральними та десятковими логарифмами можна одержати співвідношення між згасанням $\alpha_{\text{Нп}}$, виміряним у неперах, та згасанням $\alpha_{\text{дБ}}$, виміряним у децибелах:

$$a_{\text{Нп}} \approx 0,115 \alpha_{\text{дБ}},$$

$$a_{\text{дБ}} \approx 8,686 \alpha_{\text{Нп}}.$$

Перш ніж перейти до розгляду конкретних видів згасання, зауважимо, що потужностями S_i та S_j , використаними у формулах (2.97) та (2.98), найбільш часто є такі:

² Згідно з ГОСТ 1494-77 для чотириполюсників введений російський термін “ослабление” (ослаблення) замість терміна “затухание” (згасання). Однак останній термін й досі широко використовується в підручниках.

1) S_0 – вже визначена вище співвідношенням (2.87);

2) S_H – повна потужність, яку в колі, складеному за рис.2.21, генератор віддає навантаженню з опором Z_H , який є конкретним досліджуваним опором навантаження (тобто він не обов'язково дорівнює Z_T);

3) S_1 – вхідна повна потужність чотириполосника, ввімкненого за схемою, поданою на рис.2.20:

$$S_1 = \left| \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^* \right| = \frac{U_1^2}{|Z_{вх1}|} = I_1^2 \cdot |Z_{вх1}|; \quad (2.99)$$

4) S_2 – повна потужність, яку споживає навантаження чотириполосника (рис.2.20); при цьому опір Z_H навантаження є конкретним досліджуваним опором (тобто він не обов'язково дорівнює Z_T);

5) $S_{отр}$ – повна потужність, відбита від входу чотириполосника в колі, схему якого зображено на рис.2.20. Її обчислюють як

$$S_{отр} = \left| \dot{U}_0 \dot{I}_0^* - \dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right|, \quad (2.100)$$

де \dot{U}_0 та \dot{I}_0 визначаються для кола з рис.2.21 співвідношеннями (2.86) та (2.88).

Найбільш вживаними в теорії та на практиці видами згасання є такі:

1) власне згасання (вже відоме з п.2.4.2 цього підручника)

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} \Big|_{Z_H = Z_{x2}};$$

$$a_c = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} \Big|_{Z_H = Z_{x2}};$$

2) згасання передачі – визначається за тими ж формулами, що й a_c , але для опору Z_H , який конкретно досліджується;

3) робоче згасання. Це дійсна частина робочої сталої передачі (див.п.2.5.3):

$$a_p = R_e \left\{ g_p \right\} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2}, \quad (2.101)$$

$$a_p = 10 \lg \frac{S_0}{S_2};$$

4) внесене згасання ¹

$$a_{BH} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_H}{S_2},$$

$$a_{BH} = 10 \lg \frac{S_H}{S_2};$$

5) згасання входу

$$a_{BX} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_1},$$

$$a_{BX} = 10 \lg \frac{S_0}{S_1};$$

6) згасання відбиття (воно ж згасання луни або згасання неузгодженості)

$$a_{отр} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_{отр}},$$

$$a_{отр} = 10 \lg \frac{S_0}{S_{отр}}.$$

Формули з натуральним логарифмом забезпечують результат в неперах, а з десятковим – у децибелах.

Варто звернути увагу на такі, подеколи корисні, співвідношення:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \\ &= a_{BX} + a_{пер}; \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$a_{BH} = a_p - \ln \left| \frac{Z_\Gamma + Z_H}{2\sqrt{Z_\Gamma \cdot Z_H}} \right|, \quad (2.103)$$

¹ Російською мовою це згасання називають “вносимое затухание”; отже, більш точним (але менш зручним) перекладом є “згасання, що вноситься”.

$$a_{\text{BX}} = \ln \left| \frac{\underline{Z}_{\Gamma} + \underline{Z}_{\text{BX1}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\Gamma} \cdot \underline{Z}_{\text{BX1}}}} \right|, \quad (2.104)$$

де $\underline{Z}_{\text{BX1}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ – вхідний опір чотириполюсника (рис.2.20).

Приділимо дещо більшу увагу робочому згасанню, яке є дуже важливим у теорії та практиці зв'язку. Якщо розвинути співвідношення (2.101) таким, наприклад, чином, як це зроблено в [2], то отримаємо дуже корисну формулу:

$$a_{\text{p}} = a_{\text{c}} + \ln \left| \frac{\underline{Z}_{\Gamma} + \underline{Z}_{\text{x1}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\Gamma} \cdot \underline{Z}_{\text{x1}}}} \right| + \ln \left| \frac{\underline{Z}_{\text{H}} + \underline{Z}_{\text{x2}}}{2\sqrt{\underline{Z}_{\text{H}} \cdot \underline{Z}_{\text{x2}}}} \right| + \ln \left| 1 - \underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 \cdot e^{-2\underline{g}_{\text{c}}} \right|, \quad (2.105)$$

де a_{c} – власне згасання чотириполюсника;

\underline{g}_{c} – власна стала передачі чотириполюсника;

$\underline{Z}_{\text{x1}}, \underline{Z}_{\text{x2}}$ – характеристичні опори чотириполюсника;

\underline{Z}_{Γ} – внутрішній опір генератора;

\underline{Z}_{H} – опір навантаження;

$$\underline{p}_1 = \frac{\underline{Z}_{\Gamma} - \underline{Z}_{\text{x1}}}{\underline{Z}_{\Gamma} + \underline{Z}_{\text{x1}}} \text{ – коефіцієнт відбиття на вході;} \quad (2.106)$$

$$\underline{p}_2 = \frac{\underline{Z}_{\text{H}} - \underline{Z}_{\text{x2}}}{\underline{Z}_{\text{H}} + \underline{Z}_{\text{x2}}} \text{ – коефіцієнт відбиття на виході.} \quad (2.107)$$

Позначивши доданки формули (2.105), які йдуть після a_{c} , відповідно як $\Delta a_1, \Delta a_2$ та Δa_{12} , відмітимо, що робоче згасання перевищує власне згасання на величину суми $\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_{12}$.

Доданок Δa_1 – це додаткове згасання через неузгодженість на вході, він дорівнює нулю при $\underline{Z}_{\Gamma} = \underline{Z}_{\text{x1}}$.

Доданок Δa_2 – це додаткове згасання через неузгодженість на виході, він дорівнює нулю при $\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{x2}}$.

Доданок Δa_{12} – це додаткове згасання через одночасну неузгодженість на вході та виході, він дорівнює нулю, якщо або $\underline{Z}_{\Gamma} = \underline{Z}_{\text{x1}}$ або $\underline{Z}_{\text{H}} = \underline{Z}_{\text{x2}}$, або виконуються обидві ці умови.

Якщо треба знайти робоче згасання результуючого чотириполюсника, утвореного каскадним з'єднанням кількох чотириполюсників, то при відомих А-параметрах кожного окремого чотириполюсника можна за формулою (2.14) знайти А-параметри результуючого чотириполюсника, потім – за формулами (2.54), (2.55) та

(2.72) знайти власні параметри результуючого чотириполюсника, після чого вже можна скористатися підсумковою формулою (2.105) для робочого згасання.

Корисну інформацію щодо розрахунку робочого згасання тракту, утвореного каскадним з'єднанням чотириполюсників, коли від цього тракту зроблено відведення або в ньому є зосереджена неоднорідність, міститься в [5, с.186-188].

2.7. Рівні сигналів

Використання логарифмічного масштабу подання фізичних величин дозволяє спростити обчислення, оскільки в цьому випадку множення та ділення чисел замінюють відповідно додаванням та відніманням їх логарифмів.

Величину $p_{U12} = \ln \frac{U_1}{U_2}$ називають **відносним рівнем напруги** U_1

щодо напруги U_2 , величину $p_{I12} = \ln \frac{I_1}{I_2}$ називають **відносним рівнем**

струму I_1 щодо струму I_2 (зверніть увагу, що в цих формулах фігурують діючі значення або амплітудні значення напруг та струмів). Обчислені за наведеними формулами рівні вимірюють у вже відомих вам одиницях – неперах.

В практиці вимірювань широко використовують так звані **абсолютні рівні** сигналів. Ці рівні відносно деяких *стандартних* величин:

– абсолютний рівень напруги

$$p_U = \ln \frac{U}{U_{ст}} ; \quad (2.108)$$

– абсолютний рівень струму

$$p_I = \ln \frac{I}{I_{ст}} ; \quad (2.109)$$

– абсолютний рівень потужності

$$p_S = \frac{1}{2} \ln \frac{S}{S_{ст}} . \quad (2.110)$$

Для визначення згаданих *стандартних* величин задаються певною повною потужністю $S_{ст} = 1\text{мВ} \cdot \text{А}$. Вважають, що ця потужність

виділяється в стандартному опорі $R_{CT} = 600 \text{ Ом}$ (іноді користуються й іншими величинами цього опору). З відомих формул для потужності $S_{CT} = I_{CT}^2 R_{CT} = U_{CT}^2 / R_{CT}$ маємо стандартні струм і напругу $I_{CT} = \sqrt{S_{CT} / R_{CT}}$ та $U_{CT} = \sqrt{S_{CT} / R_{CT}}$. При прийнятих вище S_{CT} та R_{CT} маємо $U_{CT} \approx 0,775 \text{ В}$ та $I_{CT} \approx 1,29 \text{ мА}$. На практиці найбільш зручно безпосередньо вимірювати абсолютний рівень напруги p_U , користуючись спеціальним приладом – вимірювачем рівня; величини p_I та p_S розраховують за виміряним p_U та опором навантаження. Більш детальну інформацію з цього питання можна знайти в підручнику [15].

2.8. Завдання для самоконтролю

1. Виразіть \underline{A} -параметри Γ -подібного чотириполосника (рис. 2.16,а) через опори \underline{Z}_a та \underline{Z}_b .

Відповідь: $\underline{A} = 1$; $\underline{B} = \underline{Z}_b$; $\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_a}$; $\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a}$.

2. Два чотириполосники з'єднані каскадно. Параметри першого з них такі: $\underline{A}_1 = \underline{D}_1 = 2$; $\underline{B}_1 = 1 \text{ Ом}$; $\underline{C}_1 = 3 \text{ См}$; параметри другого з них такі: $\underline{A}_2 = 3$; $\underline{B}_2 = 2 \text{ Ом}$; $\underline{C}_2 = 1 \text{ См}$; $\underline{D}_2 = 1$. Обчисліть \underline{A} -параметри результуючого чотириполосника.

Відповідь: $\underline{A} = 7$; $\underline{B} = 5 \text{ Ом}$; $\underline{C} = 11 \text{ См}$; $\underline{D} = 8$.

3. Чотириполосник, складений за так званою подвійною Γ -подібною схемою (рис.2.22), можна уявити як паралельне з'єднання двох Γ -подібних чотириполосників. Доведіть це. Чи є таке з'єднання регулярним? Доведіть свій висновок.

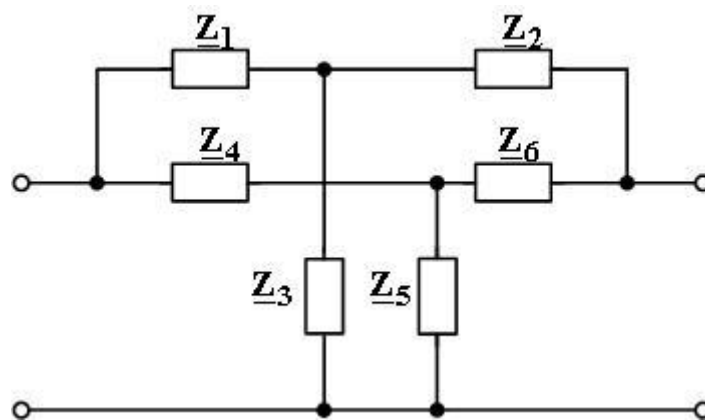


Рис. 2.22

Відповідь: так, з'єднання регулярне.

4. Чотириполіусник, схему якого зображено на рис. 2.16,б, має опори $\underline{Z}_\delta=200 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_\delta=600 \text{ Ом}$. Знайдіть величину характеристичного опору $\underline{Z}_{Х1}$.

Відповідь: 400 Ом.

5. Чотириполіусник, схему якого зображено на рис. 2.15, складено з чисто активних опорів, при цьому $\underline{Z}_a= \underline{Z}_\delta=80 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_\delta=20 \text{ Ом}$. Обчисліть власне згасання та власний коефіцієнт фази цього чотириполіусника.

Відповідь: $a_c \approx 0,6932 \text{ Нп}$, $\nu_c=0$.

6. Чотириполіусник ввімкнено так, як показано на рис. 2.20, при цьому $E_\Gamma=3\text{В}$, $\underline{Z}_\Gamma=R_\Gamma=600 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_H=R_H=400 \text{ Ом}$, $U_2=0,1 \text{ В}$. Обчисліть робоче згасання цього чотириполіусника.

Відповідь: $a_p \approx 2,5 \text{ Нп}$.

7. Генератор синусоїдних коливань під'єднано до навантаження так, як показано на рис. 2.23. Показчик рівня ПР має нескінченний вхідний опір; амперметр вимірює дійсне значення струму. ПР показує 1 Нп при $|\underline{Z}_H|=200\text{Ом}$. Яке показання амперметра?

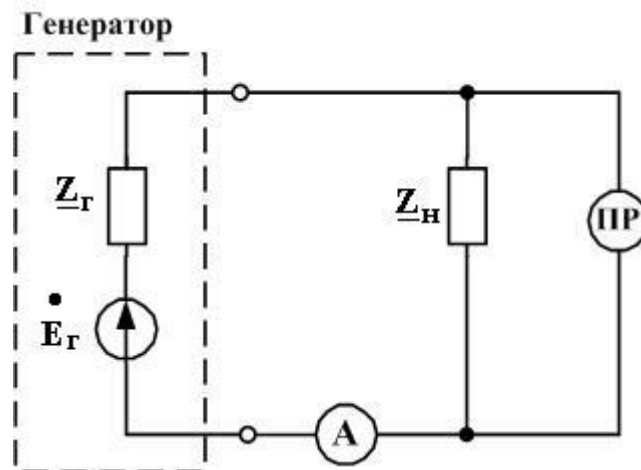


Рис. 2.23

Відповідь: $I \approx 0,0105 \text{ А}$.

3. ДОВГІ ЛІНІЇ

3.1. Коло з розподіленими параметрами. Довга лінія

Розглянемо два паралельних проводи, що з'єднують генератор та навантаження (рис. 3.1). Такою моделлю описуються, наприклад, провідна або кабельна лінії зв'язку, рейкове коло, пара провідників на друкованій платі та ін. Вважатимемо нашу конструкцію *відокремленою*, тобто такою, що не пронизується електромагнітними полями, утвореними зовнішніми джерелами.

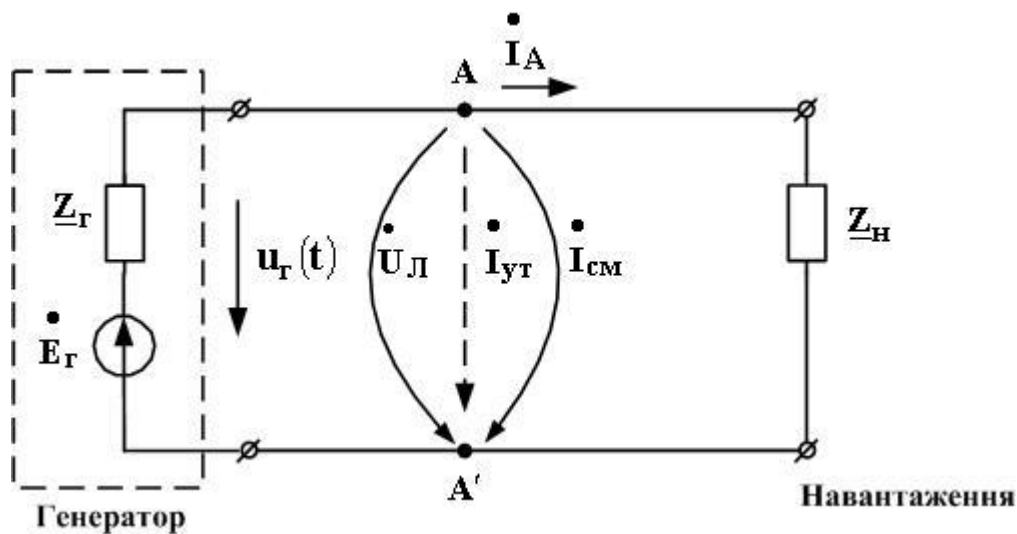


Рис. 3.1

Тепер зазначимо такі факти:

- 1) активний опір реального проводу не дорівнює нулю;
- 2) міжпровідна ізоляція не є ідеальною, тобто міжпровідна напруга

\dot{U}_L , що діє між будь-якими точками А та А' (рис.3.1), викликає в ізоляції

струм витоку \dot{I}_{UT} ;

3) кожні два маленькі відрізки проводу утворюють немовби пару пластин конденсатора. Як відомо з курсу фізики, під дією змінної напруги

(в нашому випадку це \dot{U}_L) між пластинами протікає струм зміщення

(струм \dot{I}_{CM} на рис. 3.1);

4) струм \dot{I}_L , що протікає проводом, створює навкруги нього магнітне поле, яке має певну енергію. Але ж накопичення енергії магнітного поля – це риса, притаманна індуктивному елементу електричного кола (див., наприклад, підручник [1, с.92-93]). Тому кожному відрізку проводу можна

приписати деяку власну індуктивність. Оскільки ж магнітне поле одного проводу охоплює й сусідній провід, то між проводами є ще й взаємна індуктивність.

Оскільки опори та індуктивності проводів, провідність витoku ізоляції, ємнісний та індуктивний зв'язки неперервно розподілені вздовж кола, зображеного на рис. 3.1, то його прийнято називати **КОЛОМ з розподіленими параметрами**.

Однак виявляється, що в просторі розподілені не тільки параметри кола, але й електричні (точніше – електромагнітні) процеси. Як відомо, струми та напруги в колі викликані електромагнітним полем, яке поширюється в цьому колі як у скеровуючій конструкції. Швидкість v цього поширення є нескінченною. Позначимо довжину лінії, що з'єднує генератор та навантаження на рис.3.2, як ℓ , а миттєве значення напруги на затискачах генератора як $u_r(t) = U_m \cdot \cos \omega t$.

В момент часу $t_1 = 0$ маємо $u_r(t_1) = U_m$. Це миттєве значення дійде до навантаження тільки в момент часу $t_2 = t_1 + \frac{\ell}{v} = \frac{\ell}{v}$. Але в цей момент на

затискачах генератора напруга вже дорівнюватиме $u_r(t_2) = U_m \cdot \cos\left(\omega \frac{\ell}{v}\right)$,

що не співпадає з $u_r(t_1)$. Тобто в один і той самий момент часу t_2 напруги га генераторі та навантаженні є *різними* навіть якщо вважати опори проводів такими, що дорівнюють нулю (раніше ми вважали б, що в такому випадку для кола з рис.3.1 напруга на навантаженні співпадає з $u_r(t)$).

Очевидно, що цей висновок справедливий не тільки для місця розташування затискачів навантаження, але й для будь-якого іншого перерізу¹ лінії, який не співпадає із затискачами генератора. Отже, з *причини скінченності швидкості v* напруга (а звідси й струм) є функцією не тільки часу, але й функцією просторового розташування перерізу лінії, в якому цю напругу вимірюють.

Як ми побачили, затримка сигналу в лінії складає $\Delta t = t_2 - t_1 = \ell / v$. Швидкість поширення будь-якої хвилі пов'язана з її довжиною $\lambda_{\text{л}}$ та частотою f сигналу відомим з курсу фізики співвідношенням $v = \lambda_{\text{л}} \cdot f$. Звідси маємо $\Delta t = \ell / (f \cdot \lambda_{\text{л}})$. Якщо частота f є незмінною, то величина Δt затримки прямуватиме до нуля (буде нехтовно малою) за умови, що $\frac{\ell}{\lambda_{\text{л}}} \rightarrow 0$, тобто $\ell \ll \lambda_{\text{л}}$. Якщо ж ℓ ненабагато відрізняється від величини $\lambda_{\text{л}}$ (кажуть “ ℓ та $\lambda_{\text{л}}$ є величинами *одного порядку*”) або є більшою від величини $\lambda_{\text{л}}$, то затримкою знехтувати не можна.

¹ **Переріз лінії** – це пара точок уявного поперечного розрізу лінії.

Електричні кола з розподіленими параметрами, довжина яких більша або того ж порядку, що й довжина електромагнітної хвилі в них, називають **довгими лініями** (іноді електричними лініями).

Більш загальним випадком, ніж довга лінія, є так звана хвильова система [16]. Для вирішення питання, чи є дане коло хвильовою системою, необхідно способом, аналогічним наведеному вище, порівняти з робочою довжиною хвилі не тільки довжину конструкції, але й кожний важливий для роботи цієї конструкції її розмір (наприклад, відстань між проводами на рис. 3.1).

Зауважимо, що межу між колом, яке слід вважати довгою лінією, та колом, яке не є нею, в загальному випадку чітко визначити не можна; все залежить від конкретної практичної ситуації. Якщо знехтування розподілом параметрів та затримкою сигналу при розрахунку та виготовленні певної частини електричного пристрою (системи) не призводить до виходу її експлуатаційних параметрів за допустимі межі, то ця частина пристрою (системи) в даному випадку не є довгою лінією. Якщо ж вищевказане знехтування веде до занадто неточного функціонування приладу (системи) або взагалі унеможливорює його роботу, то дана частина є довгою лінією.

До довгої лінії як до цілого не є застосовними закони Кірхгофа, бо вони сформульовані без урахування вищевказаної затримки сигналу та без урахування розподіленості вздовж лінії (або й по інших її вимірах) опорів, ємностей та індуктивностей її провідників.

3.2. Схема заміщення елементарного відрізка довгої лінії. Первинні параметри довгої лінії. Телеграфні рівняння

Розіб'ємо в уяві довгу лінію на відрізки довжиною Δx кожний і розглянемо один з таких відрізків, правий кінець якого розташований на відстані x від навантаження (рис.3.2). Вважатимемо, що величина Δx набагато менша від довжини $\lambda_{\text{л}}$ хвилі в лінії (такий відрізок називають елементарним). Тоді, за умови $\Delta x \ll \lambda_{\text{л}}$, для цього відрізка закони Кірхгофа можна вважати вірними з високим ступенем точності. Щоб скористатися цим фактом, побудуємо схему деякого кола, що має ті ж електричні властивості, що й елементарний відрізок. Цю схему називають схемою заміщення елементарного відрізка. Вона повинна враховувати розглянуті в п.3.1 активний опір проводу довжиною Δx , провідність ізоляції на ділянці довжиною Δx , власну та взаємну індуктивність двох проводів, які складають цю ділянку, а також ємність між цими проводами. Якщо віднести активний опір та індуктивність до одного проводу, то щойно вказаним вимогам відповідає схема, наведена на рис.3.3.

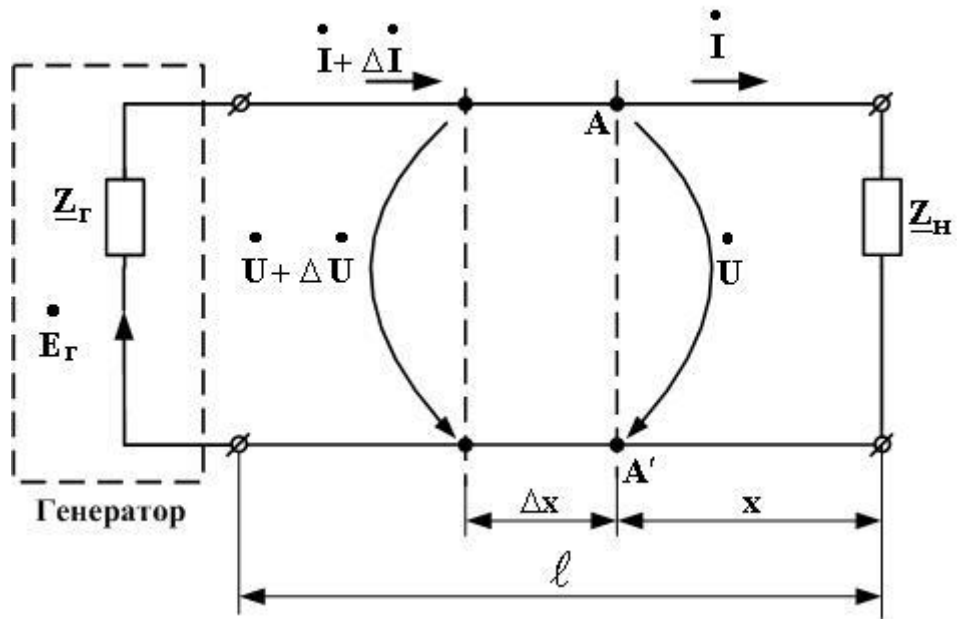


Рис. 3.2

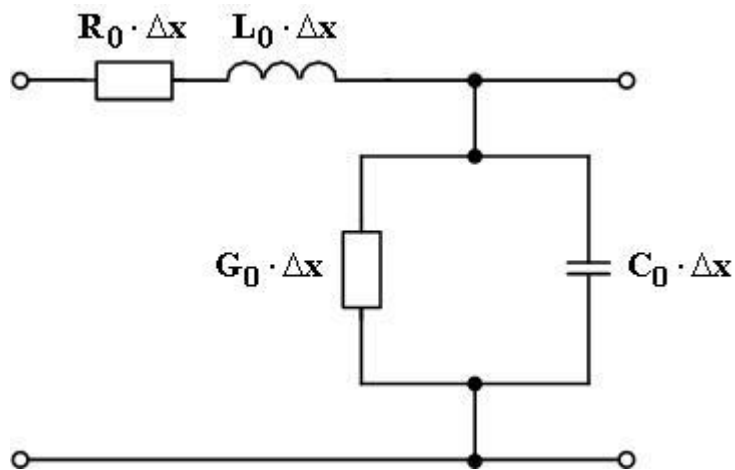


Рис. 3.3

Величини R_0, L_0, G_0, C_0 , вказані на цій схемі, дістали назву **первинних параметрів довгої лінії**. Їх фізичний сенс такий:

- 1) R_0 – опір відрізка проводу одиничної довжини (звичайно це 1 км або 1 м). Величину R_0 вимірюють в омах на кілометр $\frac{\text{Ом}}{\text{км}}$ або омах на метр $\frac{\text{Ом}}{\text{м}}$;

2) G_0 – провідність міжпровідної ізоляції на відрізку одиничної довжини (1 км або 1 м). Величину G_0 вимірюють в сименсах на кілометр $\left(\frac{См}{км}\right)$ або сименсах на метр $\left(\frac{См}{м}\right)$;

3) L_0 – індуктивність (вона враховує й взаємну індуктивність) відрізка одиничної довжини (1 км або 1 м). Величину L_0 вимірюють в генрі на кілометр $\left(\frac{Гн}{км}\right)$ або генрі на метр $\left(\frac{Гн}{м}\right)$;

4) C_0 – ємність відрізка одиничної довжини (1 км або 1 м). Величину C_0 вимірюють у фарадах на кілометр $\left(\frac{Ф}{км}\right)$ або фарадах на метр $\left(\frac{Ф}{м}\right)$ (на практиці це тисячні або менші частки фарада на кілометр).

Довга лінія, яку ми розглядаємо, складається з двох проводів (є *двопровідною*). Якщо матеріал проводів та матеріал ізоляції мають постійні властивості вздовж усієї лінії, і відстань між проводами, їх форма та діаметр теж постійні вздовж усієї лінії, то таку лінію називають **однорідною** двопровідною довгою лінією. Її первинні параметри також постійні вздовж усієї лінії.

Вважатимемо, що лінія знаходиться в усталеному режимі синусоїдних коливань з частотою ω . Введемо позначення

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0, \quad (3.1)$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 \quad (3.2)$$

і, використавши їх, перейдемо від схеми заміщення, зображеної на рис.3.3, до більш компактної схеми (рис.3.4).

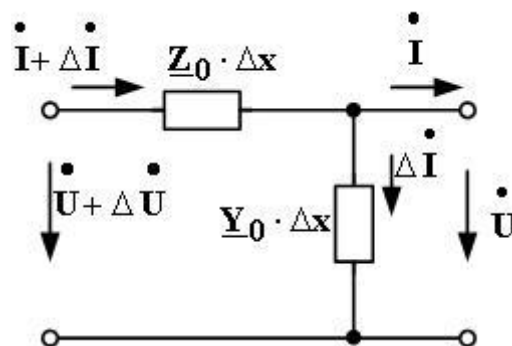


Рис. 3.4

Тимчасово повернувшись до рис.3.2, зазначимо, що енергія розповсюджується вздовж лінії зліва (там розташовано генератор) направо

(там розташовано навантаження). Тому на рис.3.3 показано, що напруга \dot{U} на виході елементарного відрізка є меншою від напруги $\dot{U} + \Delta \dot{U}$ на його вході з причини падіння напруги на опорі $\underline{Z}_0 \cdot \Delta x$. Також на рис.3.4 показано, що струм \dot{I} на виході елементарного відрізка є меншим від струму $\dot{I} + \Delta \dot{I}$ на його вході з причини відтікання частини струму крізь провідність $\underline{Y}_0 \cdot \Delta x$.

Знайдемо співвідношення, які пов'язують комплекси діючих значень напруги \dot{U} та струму \dot{I} в будь-якому перерізі лінії з відстанню x , на якій цей переріз знаходиться від навантаження (наприклад, переріз А-А' на рис.3.2).

Для початку зауважимо, що згідно з другим законом Кірхгофа для кола з рис. 3.4 є справедливою рівність

$$\dot{U} + \Delta \dot{U} = \left(\dot{I} + \Delta \dot{I} \right) \cdot \underline{Z}_0 \cdot \Delta x + \dot{U},$$

звідки випливає

$$\Delta \dot{U} = \dot{I} \underline{Z}_0 \cdot \Delta x + \underline{Z}_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta \dot{I}.$$

Спрямуємо Δx до нуля. При цьому всі прирости замінюються диференціалами:

$$d \dot{U} = \dot{I} \underline{Z}_0 \cdot dx + \underline{Z}_0 dx d \dot{I}.$$

Нехтуючи добутком диференціалів як величиною вищого порядку малості, отримуємо з останнього виразу

$$\frac{d \dot{U}}{dx} = \dot{I} \cdot \underline{Z}_0. \quad (3.3)$$

Тепер зауважимо, що згідно з першим законом Кірхгофа для кола з рис. 3.4 є справедливою рівність

$$\dot{I} + \Delta \dot{I} = \dot{I} + \dot{U} \cdot \underline{Y}_0 \cdot \Delta x,$$

звідки випливає

$$\Delta \dot{I} = \dot{U} \cdot \underline{Y}_0 \cdot \Delta x.$$

Спрямувавши Δx до нуля і замінивши при цьому всі прирости на диференціали, отримаємо з останнього виразу

$$\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{U} \cdot \underline{Y}_0. \quad (3.4)$$

Лінійні диференціальні рівняння (3.3) та (3.4) якраз і є тими співвідношеннями, які встановлюють зв'язок між напругою, струмом та відстанню від навантаження, на якій ці напругу та струм вимірюють. Ці рівняння в силу історичних причин дістали назву **телеграфних рівнянь**.

Тепер введемо співвідношення, які, на відміну від (3.3) та (3.4), пов'язують із координатою x *тільки напругу* (або *тільки струм*). Для цього ще раз продиференціюємо рівняння (3.3) по x :

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \frac{d\dot{I}}{dx}.$$

Підставимо сюди замість похідної від струму праву частину рівняння (3.4):

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 \cdot \dot{U}. \quad (3.5)$$

Введемо новий параметр

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}. \quad (3.6)$$

З його урахуванням рівняння (3.5) набуде остаточного вигляду

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \cdot \dot{U}. \quad (3.7)$$

Аналогічним чином, почавши з повторного диференціювання рівняння (3.4), дістанемось рівняння, яке пов'язує з координатою x тільки величину \dot{I} комплексу діючого значення струму:

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \cdot \dot{I}. \quad (3.8)$$

Рівняння (3.7) та (3.8) називають рівняннями Гельмгольца [16]. Вони описують ustalений режим синусоїдних електричних коливань у довгій лінії.

3.3. Падаюча та відбита хвилі

Згідно з теорією диференціальних рівнянь, розв'язок рівняння (3.7) має вигляд

$$\dot{U}(x) = \dot{V}_{\Pi} \cdot e^{\underline{\gamma}x} + \dot{V}_0 \cdot e^{-\underline{\gamma}x}, \quad (3.9)$$

де \dot{V}_{Π} та \dot{V}_0 – сталі інтегрування, які підлягають подальшому обчисленню на базі граничних умов.

Щоб знайти залежність $\dot{I}(x)$, виразимо струм із співвідношення (3.3) та підставимо в результат вираз (3.9) для $\dot{U}(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \underline{\gamma} \dot{V}_{\Pi} e^{\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{\gamma} \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x} = \\ &= \frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} \dot{V}_{\Pi} e^{\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_0} \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x} = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} \cdot \dot{V}_{\Pi} e^{\underline{\gamma}x} - \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} \cdot \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x} = \\ &= \frac{1}{\underline{Z}_B} \left(\dot{V}_{\Pi} e^{\underline{\gamma}x} - \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

де $\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$ – так званий хвильовий опір лінії (обґрунтування цієї назви буде дано нижче).

Ще раз звернемо увагу на те, що координата x відраховується від перерізу лінії, в якому розташоване **навантаження** (цей переріз дістав назву кінця лінії). Отже, вирази (3.9) та (3.10) – це розв’язання рівнянь Гельмгольца при відрахунку від кінця лінії. На практиці трапляються як випадки, коли зручнішим є цей відрахунок, так і випадки, коли зручніше вести відрахунок від перерізу лінії, в якому розташовані затискачі генератора (цей переріз дістав назву початку лінії). Щоб записати розв’язання рівнянь Гельмгольца при відрахунку від початку лінії, розглянемо спершу спрощене схематичне зображення довгої лінії, яке ілюструє просторове розташування деякого довільного перерізу А–А', в котрому ми шукаємо напругу та струм (рис.3.5). Очевидно, що відстань x від кінця лінії знаходиться через її довжину ℓ та відстань y від початку лінії як $x = \ell - y$. Підставимо $\ell - y$ замість x у рівність (3.9):

$$\dot{U}(y) = \dot{V}_\Pi e^{\gamma \ell} \cdot e^{-\gamma y} + \dot{V}_0 \cdot e^{-\gamma \ell} \cdot e^{\gamma y}.$$

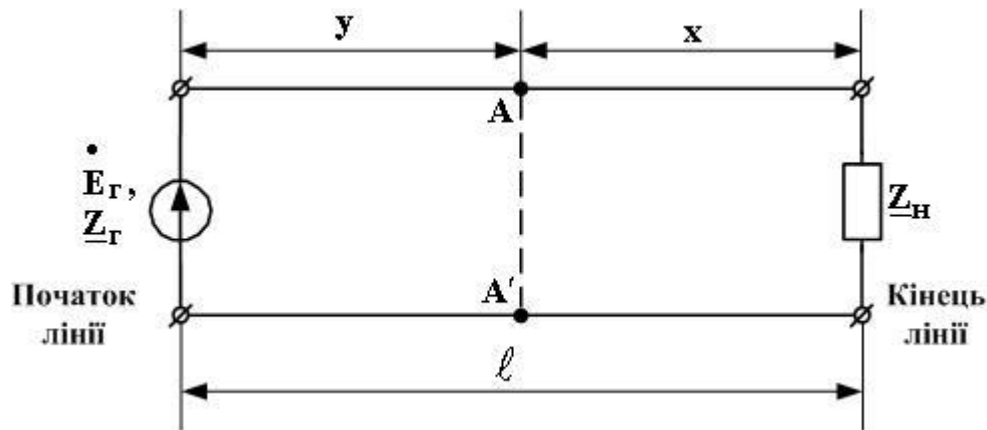


Рис. 3.5

Після введення позначень $\dot{W}_\Pi = \dot{V}_\Pi e^{\gamma \ell}$ та $\dot{W}_0 = \dot{V}_0 e^{-\gamma \ell}$ останній вираз набуває вигляду

$$\dot{U}(y) = \dot{W}_\Pi \cdot e^{-\gamma y} + \dot{W}_0 \cdot e^{\gamma y}. \quad (3.11)$$

Аналогічним чином рівність (3.10) для струму приводиться до вигляду

$$\dot{\mathbf{I}}(y) = \frac{1}{\underline{Z}_B} \cdot (\dot{\mathbf{W}}_{II} \cdot e^{-\underline{\gamma}y} - \dot{\mathbf{W}}_0 \cdot e^{\underline{\gamma}y}). \quad (3.12)$$

Останні два вирази встановлюють залежності комплексів діючих значень (3.12) напруги та струму, вимірних в довільному перерізі лінії А – А', від відстані між початком лінії та цим перерізом.

Ще раз згадаємо, що ми розглядаємо довгу лінію, яка працює в усталеному режимі синусоїдних струмів та напруг. Щоб перейти від комплексів їх діючих значень до їхніх миттєвих значень, треба помножити обидві частини кожної з рівностей (3.11) та (3.12) на $\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$, а потім розглянути або дійсні, або уявні частини одержаних виразів (див. [1, с.87-88]). Зробимо це з рівністю (3.11):

$$\sqrt{2} \dot{\mathbf{U}}(y) \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{\mathbf{W}}_{II} \cdot e^{-\underline{\gamma}y + j\omega t} + \sqrt{2} \dot{\mathbf{W}}_0 \cdot e^{\underline{\gamma}y + j\omega t}. \quad (3.13)$$

Параметр $\underline{\gamma}$, визначений співвідношенням (3.6), є комплексним числом, тож його можна подати у вигляді

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (3.14)$$

та підставити праву частину в (3.13):

$$\sqrt{2} \dot{\mathbf{U}}(y) \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{\mathbf{W}}_{II} \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{j(\omega t - \beta y)} + \sqrt{2} \dot{\mathbf{W}}_0 \cdot e^{\alpha y} \cdot e^{j(\omega t + \beta y)}.$$

Сталі інтегрування як комплексні числа можна подати в експоненціальній формі $\dot{\mathbf{W}}_{II} = w_{II} e^{j\psi_{II}}$, $\dot{\mathbf{W}}_0 = w_0 e^{j\psi_0}$, завдяки чому матимемо

$$\sqrt{2} \dot{\mathbf{U}}(y) \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} w_{II} \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{j(\omega t - \beta y + \psi_{II})} + \sqrt{2} w_0 \cdot e^{\alpha y} \cdot e^{j(\omega t + \beta y + \psi_0)}. \quad (3.15)$$

Розглянемо дійсну частину першого доданка. Вона є функцією двох змінних – часу t та відстані y :

$$\mathbf{u}_{II}(t, y) = \sqrt{2} w_{II} \cdot e^{-\alpha y} \cdot \cos(\omega t - \beta y + \psi_{II}) = \quad (3.16)$$

$$= \sqrt{2} w_{II} \cdot e^{-\alpha y} \cdot \cos[\Theta(t, y)], \quad (3.17)$$

де $\Theta(t, y) = \omega t - \beta y + \psi_{\Pi}$ – повна фаза коливання $u_{\Pi}(t, y)$.

Як поводить себе коливання $u_{\Pi}(t, y)$ в просторі з плином часу? Для відповіді на це питання знайдемо зв'язок між часом та просторовою координатою y для так званої **точки постійної фази**, тобто такої точки, в якій за будь-якої комбінації значень t та y величина Θ залишається однією й тією ж самою: $\Theta = \Theta_c$. Отже, в деякий момент часу t_1 маємо

$$\Theta_c = \omega t_1 - \beta y_1 + \psi_{\Pi},$$

звідки

$$y_1 = \frac{\omega t_1 + \psi_{\Pi} - \Theta_c}{\beta}. \quad (3.18)$$

А в деякий наступний момент часу $t_2 > t_1$ маємо

$$\Theta_c = \omega t_2 - \beta y_2 + \psi_{\Pi},$$

звідки

$$y_2 = \frac{\omega t_2 + \psi_{\Pi} - \Theta_c}{\beta}. \quad (3.19)$$

Оскільки в рівностях (3.18) та (3.19) $t_2 > t_1$, а всі інші величини є постійними, то робимо висновок, що $y_2 > y_1$. Оскільки відстань y відраховують від генератора, то це означає, що з плином часу точка постійної фази коливання $u_{\Pi}(t, y)$ рухається від генератора до навантаження. Щоб уявити це наочно, зобразимо графіки зміни функції двох змінних $u_{\Pi}(t, y)$ в просторі (тобто за змінною y) для трьох значень t_1, t_2, t_3 другої змінної – часу t , причому $t_1 < t_2 < t_3$. Результат подано на рис. 3.6. Бачимо, що коливання $u_{\Pi}(t, y)$ являє собою хвилю напруги, яка *падає* від генератора до навантаження (висловлюються ще й так: “Хвиля *біжить* від генератора до навантаження”). В процесі цього падіння хвиля згасає, що у формулі (3.16) відображується множником $e^{-\alpha y}$.

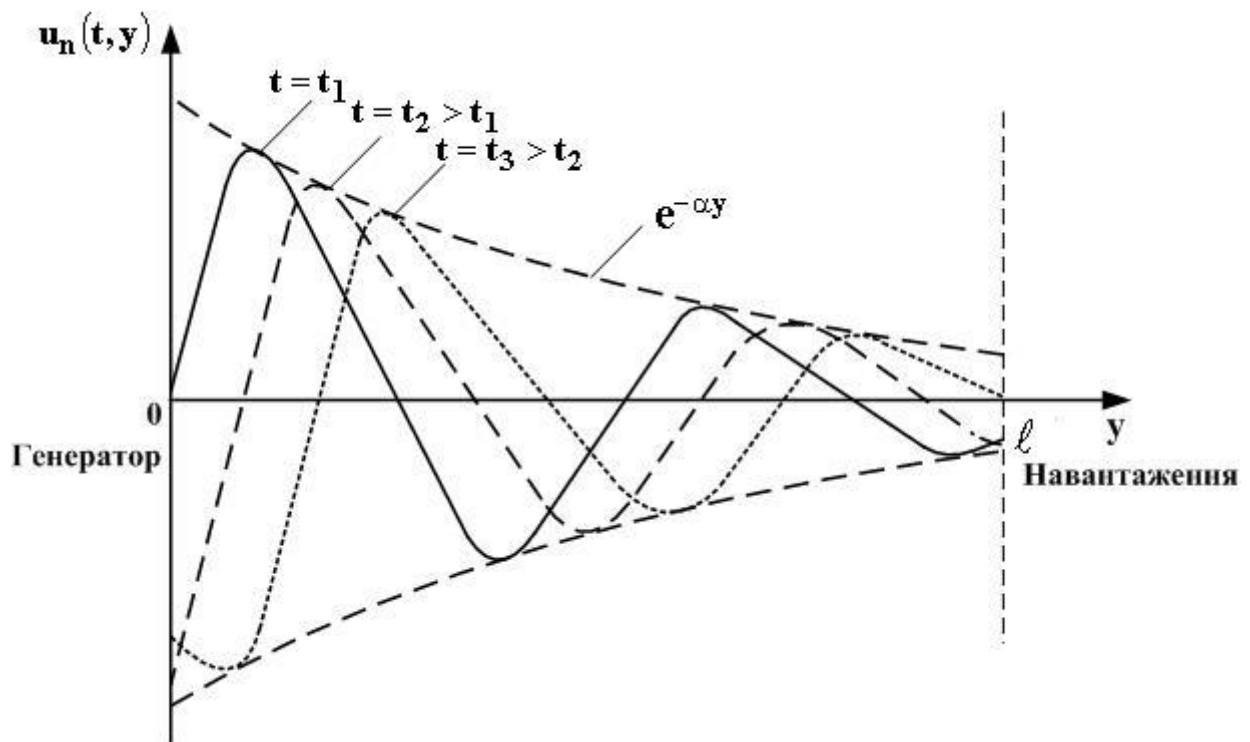


Рис. 3.6

Комплексною формою описання хвилі, що біжить (падає) від генератора до навантаження, є перший доданок виразу (3.15).

Якщо тепер проаналізувати другий доданок виразу (3.15) аналогічно тому, як ми це зробили з першим доданком (починаючи з (3.16)), то можна переконатися, що цей доданок описує хвилю напруги, яка *біжить* від навантаження до генератора (рис.3.7). Фізичною причиною існування цієї хвилі є те, що не вся енергія падаючої хвилі поглинається навантаженням, і непоглинена її частина повертається до генератора (немовби відбивається навантаженням). Тому другий доданок виразу (3.15) є математичним описанням *відбитої хвилі*. Ця хвиля згасає, як і падаюча, з причини витрати енергії в активних опорах проводів та ізоляції.

Отже, в будь-якому перерізі довгої лінії миттєве значення напруги являє собою суму падаючої та відбитої хвиль.

Почавши аналіз з виразу (3.12), можна довести, що й струм у лінії являє собою суму двох біжучих хвиль, одна з яких падаюча, а друга – відбита.

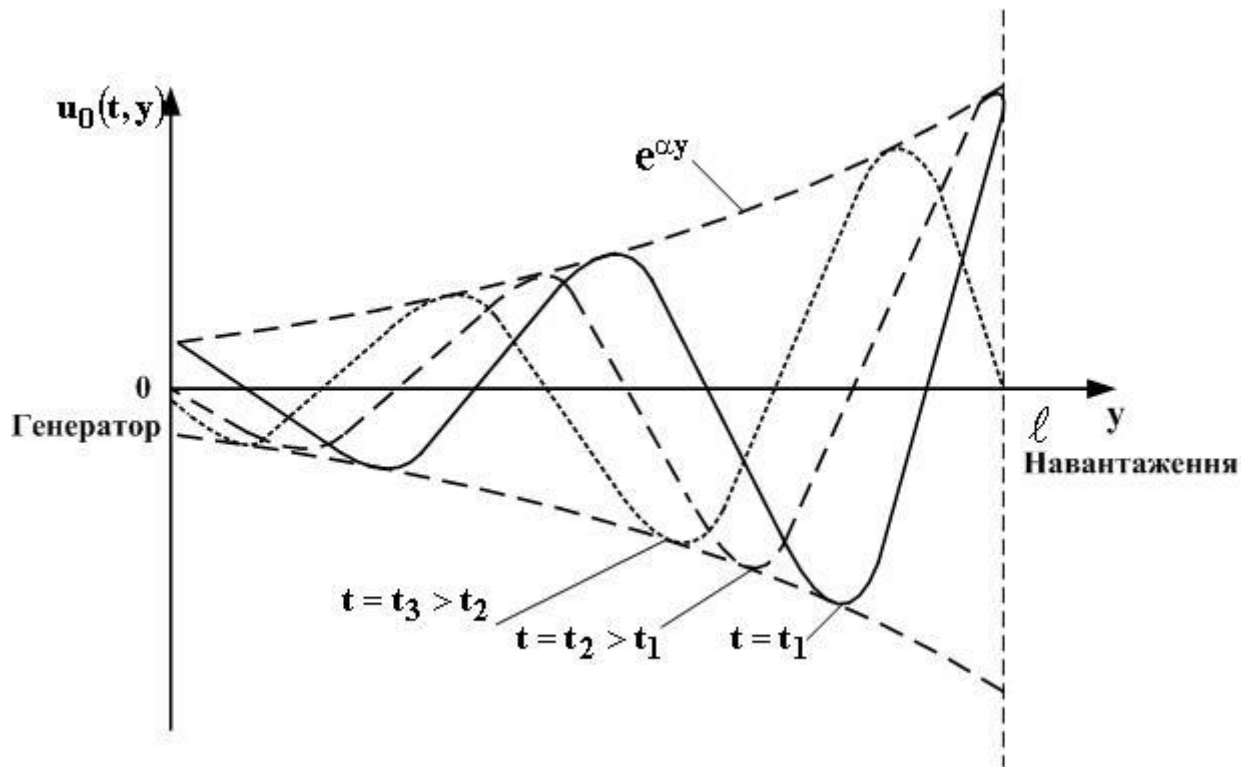


Рис. 3.7

3.4. Вторинні параметри

Сукупність вторинних параметрів складають введений співвідношенням (3.6) параметр γ та введений в п.3.3 хвильовий опір Z_B . З'ясуємо фізичний сенс цих параметрів.

Нехай падаюча хвиля напруги поширюється від деякого перерізу лінії 1–1' до перерізу 2–2'. Її амплітуда в перерізі 1–1' до перерізу 2–2'. Її амплітуда в перерізі 1–1', згідно з (3.16), дорівнює $U_{n1} = \sqrt{2} w_n e^{-\alpha y_1}$ (де y_1 – відстань від генератора до перерізу 1–1'), а її амплітуда в перерізі 2–2' дорівнює $U_{n2} = \sqrt{2} w_n e^{-\alpha y_2}$ (де y_2 – відстань від генератора до перерізу 2–2'). Знайдемо відношення цих амплітуд:

$$\frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{\sqrt{2} w_n e^{-\alpha y_1}}{\sqrt{2} w_n e^{-\alpha y_2}} = e^{\alpha(y_2 - y_1)}.$$

Після логарифмування цієї рівності отримуємо

$$\alpha = \frac{1}{y_2 - y_1} \ln \frac{U_{n1}}{U_{n2}}.$$

Якщо прийняти, що $y_2 - y_1 = 1$ км, то

$$\alpha = \ell_n \frac{U_{п1}}{U_{п2}}. \quad (3.20)$$

Порівняємо цей вираз із виразом (2.68) для власного згасання симетричного чотириполосника. Бачимо, що їх праві частини співпадають. А відтак, сенс параметра α є згасанням, що зазнає падаюча хвиля напруги на відрізку лінії, який має довжину один кілометр. Параметр α називають **кілометричним** (або погонним) **згасанням лінії** і вимірюють у неперах, поділених на кілометр (Нп/км).¹ Користуючись наведеними в п.2.6 коефіцієнтами перерахунку, можна знайти й величину α у децибелах на кілометр (дБ/км).

Тепер визначимо фізичний сенс параметра β . Для цього спочатку ще раз запишемо вираз для введеної в п.3.3 повної фази падаючої хвилі:

$$\Theta(t, y) = \omega t - \beta y + \psi_{п}.$$

“Заморозимо” хвилю в тому її стані, в якому вона є в довільний момент часу t_0 (якщо б ми її могли при цьому побачити, то вона мала б вигляд, аналогічний одній з кривих, зображених на рис. 3.6). Знайдемо швидкість, з якою повна фаза такої “замороженої” хвилі змінюється вздовж лінії зліва направо. Ця швидкість дорівнює відношенню приросту фази, досягнутого на відрізку між точками y_2 та y_1 , до довжини цього відрізка:

$$\frac{\Theta(t_0, y_2) - \Theta(t_0, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\omega t_0 - \beta y_2 + \psi_{п} - \omega t_0 + \beta y_1 - \psi_{п}}{y_2 - y_1} = -\beta. \quad (3.21)$$

Знак “мінус” вказує на зменшення величини Θ при зростанні величини y . Якщо прийняти, що $y_2 - y_1 = 1$ км, то параметр β має сенс кута зсуву фаз між значеннями падаючої хвилі у фіксований момент часу в перерізах лінії, рознесених на 1 км. Тому параметр β називають **кілометричним коефіцієнтом фази**, інколи його також називають хвильовим числом. Одиницею вимірювання цього параметра є радіан, поділених на кілометр (рад/км), або радіан, поділених на метр (рад/м).

¹ Кілометрові масштаби характерні для ліній провідного зв'язку. У внутріапаратурних з'єднаннях характерною довжиною кабелів є один метр, тому для відповідних кабелів у довідниках наводять величину α у неперах на метр $\frac{\text{Нп}}{\text{м}}$

або децибелах на метр $\frac{\text{дБ}}{\text{м}}$.

Отже, параметри α та β характеризують процес поширення хвилі в лінії, тому параметр

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (3.22)$$

називають **коефіцієнтом поширення**.

Перейдемо до з'ясування фізичного сенсу хвильового опору. Ще раз розглядаючи вираз (3.11) з урахуванням набутих знань про хвильовий характер напруги в лінії, ми можемо записати:

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_{\Pi}(y) + \dot{U}_0(y),$$

де

$$\dot{U}_{\Pi}(y) = \dot{W}_{\Pi} \cdot e^{-\underline{\gamma}y} \quad (3.23)$$

– комплекс діючого значення *падаючої* хвилі напруги на відстані y від генератора;

$$\dot{U}_0(y) = \dot{W}_0 \cdot e^{-\underline{\gamma}y} \quad (3.24)$$

– такий самий комплекс для *відбитої* хвилі.

Аналогічним чином вираз (3.12) для струму набуває вигляду

$$\dot{I}(y) = \dot{I}_{\Pi}(y) - \dot{I}_0(y),$$

де

$$\dot{I}_{\Pi}(y) = \frac{\dot{W}_{\Pi}}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma}y} \quad (3.25)$$

– комплекс діючого значення *падаючої* хвилі струму на відстані y від генератора;

$$\dot{I}_0(y) = \frac{\dot{W}_0}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma}y} \quad (3.26)$$

– такий самий комплекс для *відбитої* хвилі струму.

Поділивши попарно (3.23) на (3.25) та (3.24) на (3.26), отримаємо

$$\frac{\dot{U}_{\Pi}}{\dot{I}_{\Pi}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \underline{Z}_B.$$

А відтак, хвильовий опір слід розуміти як опір, що чинить лінія падаючій або відбитій хвилі, тобто як опір, що чинить лінія біжучій хвилі взагалі.

З'ясувавши фізичний сенс хвильових параметрів, знайдемо закони їх залежності від частоти. Почнемо з коефіцієнта поширення $\underline{\gamma}$. Ми ввели його, встановивши співвідношення (3.6). Підставивши в нього \underline{Z}_0 з (3.1) та \underline{Y}_0 з (3.2), отримаємо

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(\underline{R}_0 + j\omega L_0) \cdot (\underline{G}_0 + j\omega C_0)}. \quad (3.27)$$

З іншого боку, згідно з (3.14) та (3.22), величина $\underline{\gamma}$ залежить від кілометричного згасання α та кілометричного коефіцієнта фази β як

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta. \quad (3.28)$$

При постійному струмі ($\omega=0$) з (3.27) маємо

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{R}_0 \underline{G}_0}.$$

Порівняння цього виразу з (3.28) дає, що при $\omega=0$

$$\alpha = \sqrt{\underline{R}_0 \underline{G}_0}, \quad (3.29)$$

$$\beta=0.$$

Тепер знайдемо вирази для α та β при великих значеннях ω . Для цього у виразі (3.27) винесемо з перших дужок множник $j\omega L_0$, а з других дужок – множник $j\omega C_0$. Тоді (3.27) можна переписати в такому вигляді:

$$\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{R}_0}{j\omega L_0}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{G}_0}{j\omega C_0}}. \quad (3.30)$$

При великих значеннях кутової частоти ω маємо $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ та $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$.

Оскільки $\sqrt{1+z} \approx 1 + \frac{1}{2}z$ при $|z| \ll 1$, то

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &\approx j\omega\sqrt{L_0C_0} \cdot \left(1 + \frac{R_0}{j2\omega L_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{G_0}{j2\omega C_0}\right) = \\ &= j\omega\sqrt{L_0C_0} \cdot \left(1 + \frac{G_0}{j2\omega C_0} + \frac{R_0}{j2\omega L_0} - \frac{R_0G_0}{4\omega^2 L_0C_0}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

При великих ω^2 останнім доданком (з ω^2 у знаменнику) можна знехтувати. Після цього, здійснивши в (3.31) множення, одержимо

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_0C_0} + \frac{G_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + \frac{R_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}. \quad (3.32)$$

Порівнявши цей вираз з (3.28), знайдемо, що кілометричне згасання та кілометричний коефіцієнт фази в області високих частот визначаються наближеними співвідношеннями

$$\alpha = \frac{G_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + \frac{R_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}, \quad (3.33)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}. \quad (3.34)$$

Фактично (3.33) та (3.34) задають асимптоти, до яких прямують реальні α та β із зростанням частоти. В цілому ж графічні зображення залежностей $\alpha(\omega)$ та $\beta(\omega)$ є такими, які показані на рис. 3.8. Такі графіки є характерними для ліній зв'язку.

Тепер розглянемо частотну залежність хвильового опору \underline{Z}_B . В п.3.3 його величину було введено формулою $\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$. Підставивши сюди \underline{Z}_0 з (3.1) та \underline{Y}_0 з (3.2), отримаємо

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \quad (3.35)$$

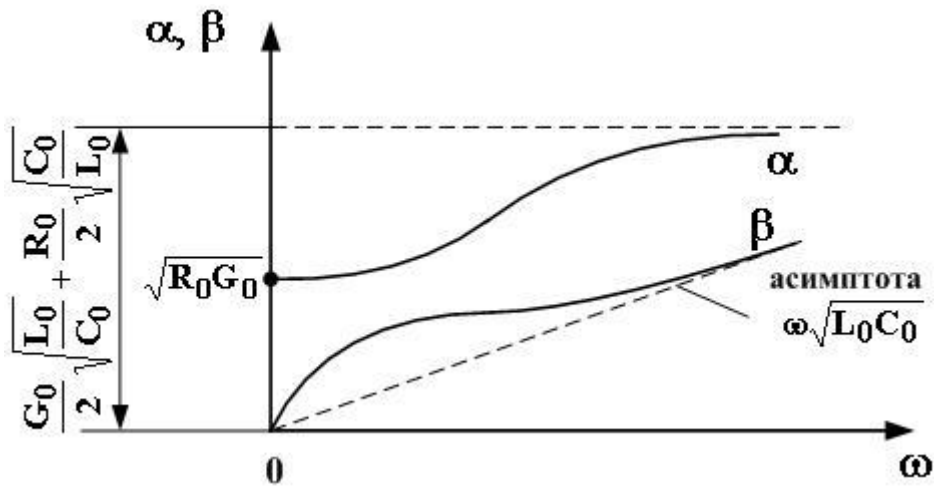


Рис. 3.8

Оскільки хвильовий опір, як впливає з (3.35), це комплексне число, то його можна подати в експоненціальній формі як

$$\underline{Z}_B = |\underline{Z}_B| \cdot e^{j\varphi_B}, \quad (3.36)$$

де $|\underline{Z}_B|$ – модуль хвильового опору;

φ_B – аргумент хвильового опору.

При $\omega=0$ (постійний струм) з формули (3.35) випливає, що $\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$.

При $\omega = \infty$ з неї ж випливає, що $\underline{Z}_B = \sqrt{L_0/C_0}$. В повітряних та кабельних лініях зв'язку ізоляція дуже добра ($G_0 \approx 10^{-6}$ См/км), тому для них $R_0/G_0 > L_0 C_0$. В рейкових колах ізоляція погана (G_0 фактично є провідністю ґрунту і має величину близько 1См/км), тому для них $R_0/G_0 < L_0 C_0$. Тому графічні залежності \underline{Z}_B від частоти мають різку відмінність у ліній зв'язку та рейкових кіл (рис. 3.9).

За характерної для повітряних і кабельних ліній зв'язку умови $R_0/G_0 > L_0 C_0$ аргумент φ_B хвильового опору є від'ємним (рис.3.10). Для рейкових кіл кілометричною ємністю можна знехтувати, тому для них

$$\underline{Z}_B \approx \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0}},$$

звідки випливає, що $\varphi_B > 0$ (рис.3.10).

Більш детальну інформацію з частотних властивостей вторинних параметрів повітряних і кабельних ліній зв'язку можна знайти в підручниках [2, 5] та довідниках з ліній зв'язку та з кабельної продукції,

щодо розрахунку вторинних параметрів з'єднувальних ліній (переважно внутріапаратних) – в монографіях [17, 18], щодо вторинних параметрів рейкових кіл – у підручниках [5, 19].

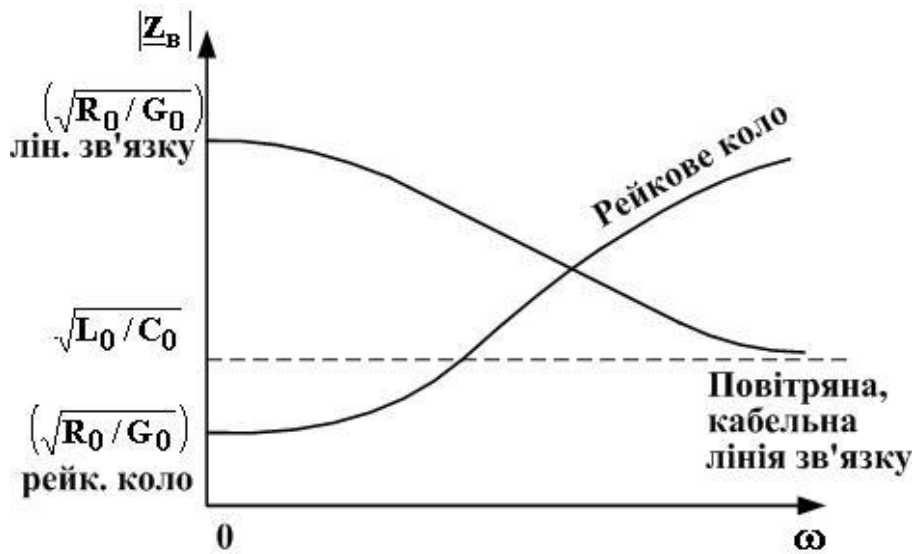


Рис. 3.9

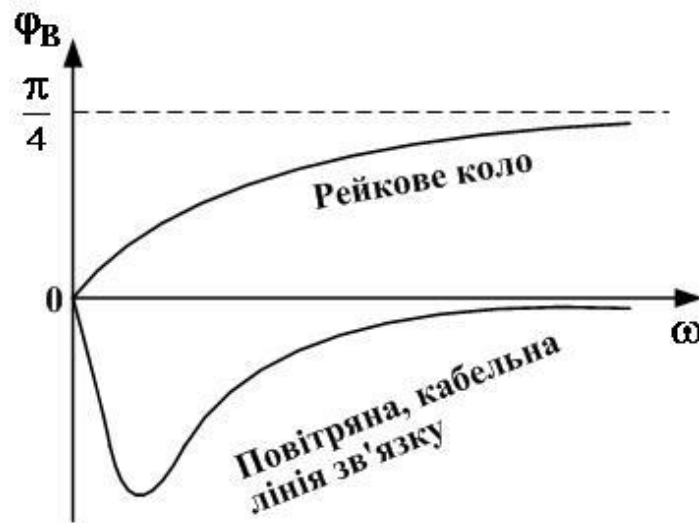


Рис. 3.10

3.5. Електрично довга та електрично коротка лінії

Якщо на початку лінії (тобто на затискачах генератора) відношення діючого значення U_0 (або амплітуди U_{m0}) відбитої хвилі напруги до діючого значення U_{π} (або амплітуди $U_{m\pi}$) падаючої хвилі напруги є меншим за 0,01 (тобто $U_0/U_{\pi} < 0,01$), то таку лінію називають **електрично довгою**.

(Увага! Не плутайте це визначення із визначенням довгої лінії як такої!). Електрично довга лінія, кажучи образно, – це така довга лінія, в якій відбита хвиля на своєму зворотному шляху від навантаження до генератора згасає настільки, що становиться “майже непомітною” на фоні падаючої хвилі.

Кількісним визначенням того факту, що дана довга лінія довжиною ℓ є електрично довгою, служить також виконання для неї співвідношення $|\underline{\gamma}\ell| \geq 2,3$.

Електрично короткою є довга лінія із малим згасанням та фазовим зсувом. Кількісним визначенням випадку, коли лінія є електрично короткою, служить виконання для неї співвідношення $|\underline{\gamma}\ell|^2 \ll 6$.

Більш детальний розгляд властивостей електрично довгих та електрично коротких ліній зацікавлений читач знайде, наприклад, у підручнику [5].

3.6. Основні рівняння довгої лінії

Згадаємо розв’язання рівнянь Гельмгольца (3.9) та (3.10), що описують напругу та струм як функції відстані x від навантаження (тобто від кінця лінії):

$$\dot{U}(x) = \dot{V}_\Pi e^{\underline{\gamma}x} + \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x}, \quad (3.37)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{V}_\Pi e^{\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{V}_0 e^{-\underline{\gamma}x}. \quad (3.38)$$

Для визначення сталих інтегрування \dot{V}_Π та \dot{V}_0 встановимо такі граничні умови: в кінці лінії (тобто на навантаженні, при $x=0$) комплекси діючих значень напруги та струму дорівнюють певним величинам, як то $\dot{U}(0) = \dot{U}_2$, $\dot{I}(0) = \dot{I}_2$. Підставивши їх, а також $x=0$ у рівності (3.37) та (3.38), отримаємо

$$\dot{U}_2 = \dot{V}_\Pi + \dot{V}_0, \quad (3.39)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{V}_\Pi - \frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{V}_0. \quad (3.40)$$

З рівності (3.40) маємо $\dot{I}_2 \underline{Z}_B = \dot{V}_\Pi - \dot{V}_0$. Додавши цю рівність та рівність (3.39), отримаємо

$$\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B = 2\dot{V}_\Pi,$$

звідки

$$\dot{V}_\Pi = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{2}.$$

Маючи цей вираз, з (3.39) знайдемо величину \dot{V}_0 :

$$\dot{V}_0 = \dot{U}_2 - \dot{V}_\Pi = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{2}.$$

Підставимо знайдені величини \dot{V}_Π та \dot{V}_0 у рівність (3.37):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \\ &= \dot{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Цю рівність можна більш компактно записати, використовуючи гіперболічні функції – косинус

$$\text{ch} \gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$

та синус

$$\text{sh} \gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Тож рівність (3.41) набуде вигляду

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x. \quad (3.42)$$

Аналогічним чином рівність (3.38) для струму можна привести до вигляду

$$\dot{I}(x) = \dot{U}_2 \cdot \frac{\text{sh}\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B} + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x. \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.42) та (3.43) називають **основними рівняннями довгої лінії**. Вони пов'язують комплекси діючих значень напруги $\dot{U}(x)$ та струму $\dot{I}(x)$ в довільному перерізі лінії, розташованому на відстані x від навантаження, з напругою \dot{U}_2 на навантаженні та струмом \dot{I}_2 у ньому.

3.7. Вхідний опір ділянки довгої лінії

Нехай на кінці лінії підімкнене деяке довільне навантаження з опором \underline{Z}_H . Поставимо таку задачу: замінити кінцеву ділянку лінії разом із опором навантаження на еквівалентний опір \underline{Z}_{BX} , тобто замінити так, щоб не змінити струми та напруги в тій частині лінії, яку ми не зачіпали. Дану задачу ілюструє рис.3.11. Такий еквівалентний опір називають **вхідним опором ділянки довгої лінії**.

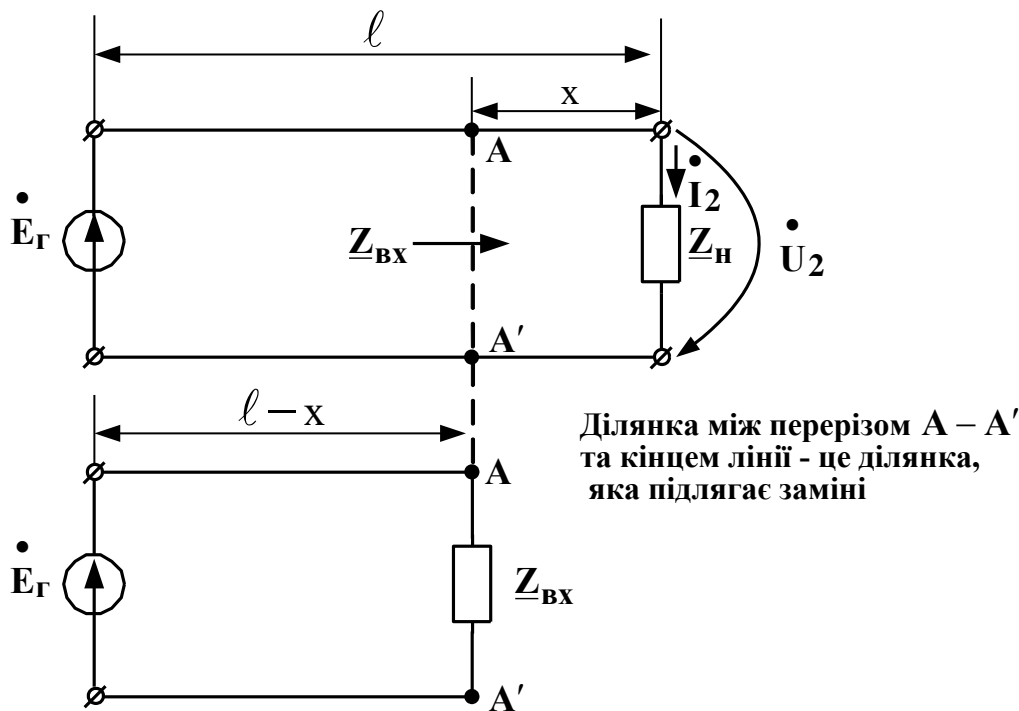


Рис. 3.11

З рис. 3.11 видно, що $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ – це вхідний опір навантаженої ділянки довжиною x з боку точок $A - A'$. Для знаходження цього опору використаємо закон Ома, знайшовши попередньо напругу $\dot{U}(x)$ між точками $A - A'$ та струм $\dot{I}(x)$ у перерізі $A - A'$. Ми вже маємо співвідношення, які за заданими напругою \dot{U}_2 на навантаженні та струмом \dot{I}_2 у ньому дозволяють обчислити $\dot{U}(x)$ та $\dot{I}(x)$. Це співвідношення (3.42) та (3.43). Отже,

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_2 \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x + \dot{I}_2 \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x}{\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{\text{В}}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x + \dot{I}_2 \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x}.$$

Поділивши чисельник та знаменник на \dot{I}_2 та врахувавши, що $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = \underline{Z}_{\text{Н}}$ (див.рис.3.11), отримуємо

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ВХ}} &= \frac{\underline{Z}_{\text{Н}} \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x + \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x}{\frac{\underline{Z}_{\text{Н}}}{\underline{Z}_{\text{В}}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x + \text{ch}\underline{\gamma}x} = \\ &= \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \frac{\underline{Z}_{\text{Н}} \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x + \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_{\text{Н}} \cdot \text{sh}\underline{\gamma}x + \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Якщо поділити чисельник та знаменник останнього виразу на $\underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{ch}\underline{\gamma}x$ та врахувати після цього, що $\frac{\text{sh}\underline{\gamma}x}{\text{ch}\underline{\gamma}x} = \text{th}\underline{\gamma}x$, то вираз (3.44) набуде такого вигляду:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \frac{\underline{Z}_{\text{Н}} + \text{th}\underline{\gamma}x}{\frac{\underline{Z}_{\text{Н}}}{\underline{Z}_{\text{В}}} \cdot \text{th}\underline{\gamma}x + 1}. \quad (3.45)$$

При встановленні $\underline{Z}_{\text{Н}} = 0$ лінія знаходитиметься в режимі короткого замикання, при цьому вхідний опір, отриманий з (3.45),

залежатиме від довжини x ділянки та від вторинних параметрів \underline{Z}_B та $\underline{\gamma}$ лінії як

$$\underline{Z}_{\text{ВХ КЗ}} = \underline{Z}_B \cdot \text{th}\underline{\gamma}x. \quad (3.46)$$

Цей опір називають **вхідним опором короткого замикання**.

Якщо від'єднати навантаження від кінця лінії (ця дія еквівалентна встановленню $\underline{Z}_H = \infty$), то лінія знаходитиметься в **режимі холостого ходу**. При цьому режимі вхідний опір носить назву **вхідного опору холостого ходу**. Знайдемо його з (3.45) як границю правої частини виразу при $\underline{Z}_H = \infty$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ВХ ХХ}} &= \underline{Z}_B \cdot \lim_{\underline{Z}_H \rightarrow \infty} \frac{\frac{\underline{Z}_H + \text{th}\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B} \cdot \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_H \text{th}\underline{\gamma}x + 1}}{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} + 1} = \underline{Z}_B \cdot \lim_{\underline{Z}_H \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\text{th}\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_H}}{\frac{\text{th}\underline{\gamma}x}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_H}} = \\ &= \frac{\underline{Z}_B}{\text{th}\underline{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Вхідні опори короткого замикання та холостого ходу досить просто виміряти. Як буде показано нижче, знання цих опорів дозволяє експериментальним шляхом знайти вторинні, а потім і первинні параметри довгої лінії.

Як видно зі співвідношень (3.44) та (3.45), величина $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ залежить від \underline{Z}_B , \underline{Z}_H та $\underline{\gamma}$. Оскільки всі ці величини залежать від частоти, то $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ також від неї залежить.

Тепер розглянемо залежність вхідного опору ділянки довгої лінії від довжини x цієї ділянки *при постійній частоті* ω . Оскільки $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ також залежить від \underline{Z}_H , а ця остання величина на практиці буває дуже різною, то обмежимося лише наведенням залежностей для крайніх випадків: $|\underline{Z}_{\text{ВХ КЗ}}(x)|$ та $|\underline{Z}_{\text{ВХ ХХ}}(x)|$ (рис.3.12).

Бачимо, що із зростанням довжини x ділянки лінії як один, так і другий опори прямують до величини $|\underline{Z}_B|$. Це, власне, впливає із загальної формули (3.45): оскільки за своїми властивостями функція $\text{th}\underline{\gamma}x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, то маємо $\underline{Z}_{\text{ВХ}} \rightarrow \underline{Z}_B$. При $\alpha x > 2\text{Нп}$ величина $|\underline{Z}_{\text{ВХ}}|$ відрізняється від величини $|\underline{Z}_B|$ не більше ніж на 10% *при будь-якому навантаженні* \underline{Z}_H . Тобто в цьому випадку $|\underline{Z}_{\text{ВХ}}| \approx \text{const}$ і вхідний опір практично не залежить від навантаження. А якщо підставити в загальні формули (3.44) та (3.45) $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$, то отримаємо точну рівність $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_B$

при будь-якій довжині ділянки лінії. Кажуть, що при $Z_H = Z_B$ лінія працює в узгодженому режимі.

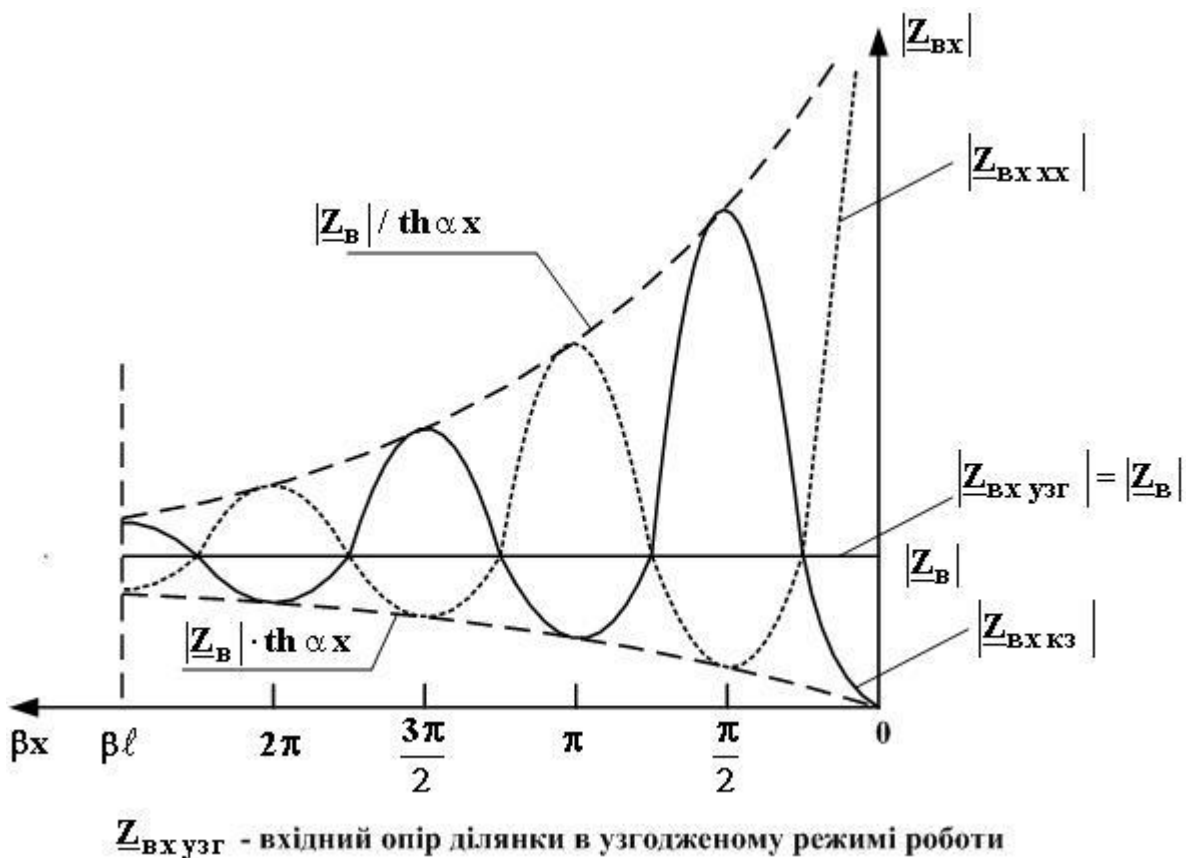


Рис. 3.12

3.8. Знаходження вторинних та первинних параметрів методом короткого замикання та холостого ходу

Перш ніж приступити до розв'язання анонсованої в заголовку задачі, введемо ще один параметр довгої лінії – **фазову швидкість**. Це швидкість поширення вздовж лінії точки постійної фази синусоїдного коливання (див. п.3.3). Запишемо вже відомий вираз для повної фази падаючої хвилі $\Theta(t, y) = \omega t - \beta y + \psi_{\Pi}$ і вважатимемо, що $\Theta(t, y) = \text{const}$. Взавши похідну за часом, отримаємо

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d(\text{const})}{dt} = 0 = \omega - \beta \frac{dy}{dt}.$$

Величина $\frac{dy}{dt}$ якраз й є шуканою фазовою швидкістю v_{ϕ} . Тому з останньої рівності маємо

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.48)$$

Для повітряної лінії зв'язку фазова швидкість практично дорівнює (все ж таки трохи менша) швидкості світла у вільному просторі: $v_{\phi} \approx 3 \cdot 10^5$ км/с. Для кабельної лінії величина фазової швидкості дорівнює $(1,5 \dots 2) \cdot 10^5$ км/с, а для рейкового кола вона набагато менша і дорівнює $(500 \dots 6500)$ км/с.

Тепер переходимо безпосередньо до задачі, поставленої в заголовку. Маємо: $Z_{\text{ВХ КЗ}}$, $Z_{\text{ВХ ХХ}}$, v_{ϕ} , довжину лінії x та частоту сигналу f .

Знайти: $Z_{\text{В}}, \gamma, R_0, L_0, G_0, C_0$.

Формулу для обчислення $Z_{\text{В}}$ знаходимо одразу ж, перемноживши вирази (3.46) та (3.47) та добувши квадратний корінь:

$$\sqrt{Z_{\text{ВХ КЗ}} \cdot Z_{\text{ВХ ХХ}}} = Z_{\text{В}}. \quad (3.49)$$

А поділивши рівність (3.46) на рівність (3.47) та добувши квадратний корінь, знайдемо

$$\text{th} \gamma x = \sqrt{Z_{\text{ВХ КЗ}} / Z_{\text{ВХ ХХ}}}. \quad (3.50)$$

За визначенням функції гіперболічного тангенса маємо

$$\text{th} \gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $e^{\gamma x}$, отримаємо

$$e^{2\gamma x} = \frac{1 + \text{th} \gamma x}{1 - \text{th} \gamma x}.$$

Оскільки $\gamma = \alpha + j\beta$, то остання рівність набирає вигляду

$$e^{2\alpha x} \cdot e^{j2\beta x} = \frac{1 + \underline{\text{th}}\gamma x}{1 - \underline{\text{th}}\gamma x}. \quad (3.51)$$

Відомо, що для будь-яких чисел a та b справедлива рівність $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Крім того, відомо, що $|e^{j\varphi}| = 1$. З урахуванням цієї інформації знаходимо модуль виразу (3.51):

$$e^{2\alpha x} = \left| \frac{1 + \underline{\text{th}}\gamma x}{1 - \underline{\text{th}}\gamma x} \right|.$$

Після логарифмування цієї рівності знаходимо

$$\alpha = \frac{1}{2x} \cdot \ln \left| \frac{1 + \underline{\text{th}}\gamma x}{1 - \underline{\text{th}}\gamma x} \right|. \quad (3.52)$$

Величину ж $\underline{\text{th}}\gamma x$ ми вже виразили через результати вимірювань – це формула (3.50), відтак **вираз (3.52) дає нам величину α** .

Обчислення величини β , на перший погляд, теж не викликає принципів складнощів: виконуємо ділення в правій частині виразу (3.51), результат ділення записуємо в експоненціальній формі $A \cdot e^{j\varphi}$ та порівнюємо з лівою частиною виразу (3.51), одразу ж маючи $2\beta x = \varphi$. Насправді ж такий шлях дій в загальному випадку є хибним. Причина полягає в тому, що, діючи вказаним чином, ми обмежили можливі значення кута φ діапазоном $[0, 2\pi]$. Але ж функція $e^{j\varphi}$ є періодичною з періодом 2π , тому вірним результатом ділення в правій частині виразу (3.51) є $A \cdot e^{j(\varphi + 2k\pi)}$, де k – довільне ціле число. Звідси $2\beta x = \varphi + 2k\pi$. Оскільки β та x є цілком конкретною парою чисел, то фізичний сенс має одне-єдине значення k^* коефіцієнта k . Але яке? Ось тут стає в нагоді знання фазової швидкості (причому в багатьох випадках досить знати тільки її орієнтовну величину). Діємо таким чином. З формули (3.48) маємо $\beta = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi f}{v_\varphi}$. Тоді орієтовна (з огляду на орієтовність знання

величини v_φ) величина добутку $(2\beta x)_{\text{орієнт}} = 2 \cdot \frac{2\pi f}{v_\varphi} x = \frac{4\pi f x}{v_\varphi}$. На практиці ця

величина може набагато перевищувати 2π (наприклад, при великому значенні довжини x). Скільки разів у числі $(2\beta x)_{\text{орієнт}}$ міститься по 2π ? Дістаємо відповідь, поділивши $(2\beta x)_{\text{орієнт}}$ на 2π та взявши цілу частину

результату – це й є шукане конкретне значення k^* коефіцієнта k . Коротко це записують як

$$k^* = \text{Int} \left\{ \frac{(2\beta x)_{\text{орієнт}}}{2\pi} \right\}, \quad (3.53)$$

де $\text{Int}\{\dots\}$ – оператор узяття цілої частини.

Наприклад, якщо $(2\beta x)_{\text{орієнт}} = 2,6\pi$, то формула (3.53) дасть $k^*=1$, а якщо $(2\beta x)_{\text{орієнт}} = 1,8\pi$, то матимемо $k^*=0$.

Отже, вірний порядок дій в розрахунку кілометричного коефіцієнта фази β є таким:

- 1) знаходимо аргумент φ комплексного числа, яке є результатом ділення в правій частині співвідношення (3.51), причому $0 \leq \varphi < 2\pi$;
- 2) знаходимо коефіцієнт k^* ;
- 3) знаходимо справжню величину добутку $2\beta x = \varphi + 2k^* \pi$, звідки маємо справжнє значення кілометричного коефіцієнта фази

$$\beta = \frac{\varphi + 2k^* \pi}{2x}. \quad (3.54)$$

Тепер ми вже знаємо величини \underline{Z}_B та $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$. Оскільки $\underline{Z}_B = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)/(G_0 + j\omega C_0)}$, а $\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)}$, то $\underline{Z}_B \cdot \underline{\gamma} = R_0 + j\omega L_0$ і також $\underline{\gamma} / \underline{Z}_B = G_0 + j\omega C_0$. З двох останніх виразів знаходимо шукані первинні параметри довгої лінії:

$$R_0 = \text{Re}\{\underline{Z}_B \cdot \underline{\gamma}\}, \quad L_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Im}\{\underline{Z}_B \cdot \underline{\gamma}\},$$

$$G_0 = \text{Re}\{\underline{\gamma} / \underline{Z}_B\}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Im}\{\underline{\gamma} / \underline{Z}_B\},$$

де $\text{Re}\{\dots\}$ – оператор взяття дійсної частини комплексного числа;

$\text{Im}\{\dots\}$ – оператор взяття уявної частини комплексного числа.

Отже, ми розв'язали задачу розрахунку вторинних і первинних параметрів довгої лінії за результатами вимірювань її вхідних опорів короткого замикання та холостого ходу – так званим методом короткого замикання та холостого ходу.

3.9. Коефіцієнти відбиття

Знов звернемося до розв'язань рівнянь Гельмгольца (3.9) та (3.10) при відрахунку відстані x від кінця лінії (тобто від навантаження). Доданок $\dot{V}_{\Pi} e^{\gamma x}$ описує падаючу хвилю напруги, а доданок $\dot{V}_0 e^{-\gamma x}$ описує відбиту хвилю напруги. Введемо новий параметр – **коефіцієнт відбиття за напругою**, – який визначимо як відношення напруги відбитої хвилі на навантаженні (при $x=0$) до напруги падаючої хвилі, вимірної там же:

$$\underline{p}_U = \dot{V}_0 / \dot{V}_{\Pi}.$$

Підставивши в цю форму вирази для \dot{V}_{Π} та \dot{V}_0 , знайдені в п.3.6, отримуємо

$$\begin{aligned} \underline{p}_U &= \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B} = \frac{\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} - \underline{Z}_B}{\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + \underline{Z}_B} = \\ &= \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

де враховано, що \dot{U}_2 – це напруга на навантаженні, а \dot{I}_2 – струм у ньому.

Якщо аналогічним чином знайти відношення відбитої та падаючої хвиль струму в навантаженні, то отримуємо **коефіцієнт відбиття за струмом** \underline{p}_I , причому виявиться, що $\underline{p}_I = -\underline{p}_U$.

Зі співвідношення (3.55) випливають три важливі окремі випадки, частково вже заторкнуті вище, а саме:

1) $\underline{p}_U = 1$, що має місце при $\underline{Z}_H = \infty$, тобто в режимі холостого ходу. Рівність величини \underline{p}_U одиниці означає, що в цьому режимі відбита хвиля напруги рушає у зворотний шлях до генератора, маючи такі ж амплітуду та початкову фазу, як і падаюча хвиля напруги на навантаженні;

2) $\underline{p}_U = -1$, що має місце при $\underline{Z}_H = 0$, тобто в режимі короткого замикання. Мінус одиниця означає, що в цьому режимі відбита хвиля напруги рушає у зворотний шлях до генератора, маючи таку ж амплітуду,

як і падаюча хвиля напруги на навантаженні, але будучи в протифазі до падаючої хвилі;

3) $\underline{p}_U = 0$, що має місце при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$, тобто в узгодженому режимі роботи лінії. В цьому режимі **відбитої хвилі нема**, тобто вся енергія падаючої хвилі поглинається навантаженням.

Вплив навантаження на режим роботи лінії найбільш відчутний в так званій лінії без втрат, розгляду якої присвячено наступний розділ.

3.10. Довга лінія без втрат

3.10.1. Визначення та основні параметри

Довгою лінією без втрат називають таку довгу лінію, при живленні якої не витрачається активна потужність. В рамках використовуваної нами моделі елементарного відрізка довгої лінії (рис.3.3) це означає, що в лінії без втрат $\mathbf{R}_0 = 0$ та $\mathbf{G}_0 = 0$. Для такої лінії хвильовий опір є чисто активним, бо

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\mathbf{R}_0 + j\omega\mathbf{L}_0}{\mathbf{G}_0 + j\omega\mathbf{C}_0}} \Big|_{\substack{\mathbf{R}_0=0 \\ \mathbf{G}_0=0}} = \sqrt{\frac{\mathbf{L}_0}{\mathbf{C}_0}}. \quad (3.56)$$

Крім того, в цій лінії кілометричне згасання α дорівнює нулю, бо

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(\mathbf{R}_0 + j\omega\mathbf{L}_0) \cdot (\mathbf{G}_0 + j\omega\mathbf{C}_0)} \Big|_{\substack{\mathbf{R}_0=0 \\ \mathbf{G}_0=0}} = j\omega\sqrt{\mathbf{L}_0\mathbf{C}_0}. \quad (3.57)$$

Порівнявши цей вираз з рівністю $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, отримаємо, що для лінії без втрат $\alpha=0$, $\beta = \omega\sqrt{\mathbf{L}_0\mathbf{C}_0}$, тобто для неї $\underline{\gamma} = j\beta$.

При цьому фазова швидкість, згідно з (3.48), визначається виразом

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mathbf{L}_0\mathbf{C}_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{L}_0\mathbf{C}_0}}$$

і не залежить від частоти. В електродинаміці доведено, що в довгій лінії без втрат величина $1/\sqrt{\mathbf{L}_0\mathbf{C}_0}$ дорівнює швидкості поширення електромагнітних хвиль у матеріалі, який заповнює міжпровідний простір лінії:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (3.58)$$

де c – швидкість світла у вакуумі;

ϵ – відносна діелектрична проникність заповнюючого матеріалу;

μ – відносна магнітна проникність заповнюючого матеріалу.

З урахуванням цього одержаний вище вираз для кілометричного коефіцієнта фази довгої лінії без втрат можна перетворити:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi f \cdot \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\lambda},$$

де λ – довжина хвилі сигналу, виміряна у вакуумі.

Величина $\lambda_{\text{л}} = \lambda / \sqrt{\epsilon \mu}$ є довжиною хвилі сигналу в нашій лінії, вона враховує властивості матеріалу, що заповнює простір між проводами. Тому можна записати, що

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{л}}}, \quad (3.59)$$

звідки стає ясным, чому параметр β інколи називають хвильовим числом.

3.10.2. Лінія без втрат в режимі короткого замикання

Режим короткого замикання має місце при $Z_{\text{н}} = 0$. При цьому

напряга \dot{U}_2 на навантаженні теж дорівнює нулю, і основні рівняння лінії (3.42) та (3.43) набувають вигляду

$$\dot{U}(x) = \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x, \quad (3.60)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x. \quad (3.61)$$

Але ж в нас лінія без втрат, для якої $\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta$. З урахуванням цього, а також властивостей гіперболічних функцій маємо $\text{sh}(j\beta x) = j \cdot \sin \beta x$, $\text{ch}(j\beta x) = \cos \beta x$. Тому вирази (3.60) та (3.61) набувають вигляду

Стояча хвиля є результатом інтерференції падаючої та відбитої хвиль за умови рівності амплітуд обох цих хвиль. Мінімуми стоячої хвилі називають вузлами, максимумами – пучностями. Зсув між стоячими хвилями струму та напруги складає $\pi/2$ по координаті βx (порівняйте (3.64) і (3.65)). Щоб знайти величину Δx цього зсуву в одиницях довжини, запишемо рівність $\frac{\pi}{2} = \beta \cdot \Delta x$. Підставивши сюди β з (3.59), маємо $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Л}}} \cdot \Delta x$, звідки

$\Delta x = \frac{\lambda_{\text{Л}}}{4}$. Отже, стоячі хвилі напруги та струму в короткозамкненій довгій лінії без втрат зсунені одна відносно одної на чверть довжини хвилі.

Вхідний опір короткозамкненої довгої лінії без втрат, яка має довжину x , знаходимо за законом Ома, користуючись виразами (3.62) та (3.63) для напруги та струму:

$$\underline{Z}_{\text{ВХКЗ}} = \frac{j \dot{I}_2 \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \sin \beta x}{\dot{I}_2 \cdot \cos \beta x} = j \underline{Z}_{\text{В}} \cdot \text{tg} \beta x. \quad (3.66)$$

Оскільки з (3.56) $\underline{Z}_{\text{В}} = \sqrt{L_0 / C_0}$ – число активне, то бачимо, що вхідний опір є числом реактивним. Його характер (індуктивний або ємнісний) залежить від знака тангенса, тобто від величини добутку βx .

3.10.3. Лінія без втрат в режимі холостого ходу

Режим холостого ходу має місце при $\underline{Z}_{\text{Н}} = \infty$. При цьому лінію розімкнено на кінці, струм навантаження \dot{I}_2 дорівнює нулю. Зробивши ті ж перетворення, що й для режиму короткого замикання, одержимо такі вирази для комплексів діючих значень напруги та струму в перерізі, який знаходиться на відстані x від навантаження:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \cos \beta x = \dot{U}_2 \cdot \sin \left(\beta x + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.67)$$

$$\dot{I}(x) = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{\text{В}}} \cdot \sin \beta x. \quad (3.68)$$

Перейшовши до миттєвих значень, отримаємо

$$u(t, x) = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \omega t, \quad (3.69)$$

$$i(t, x) = \sqrt{2} \frac{U_2}{|Z_B|} \cdot \sin \beta x \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.70)$$

З тієї ж самої причини, що й для короткозамкненої лінії, струм і напруга в розімкненій лінії існують у вигляді стоячих хвиль (рис.3.14), але тепер на кінці лінії мають місце пучність напруги та вузол струму. Зсув між стоячими хвилями напруги та струму в лінії без втрат, розімкненій на кінці, теж складає чверть довжини хвилі.

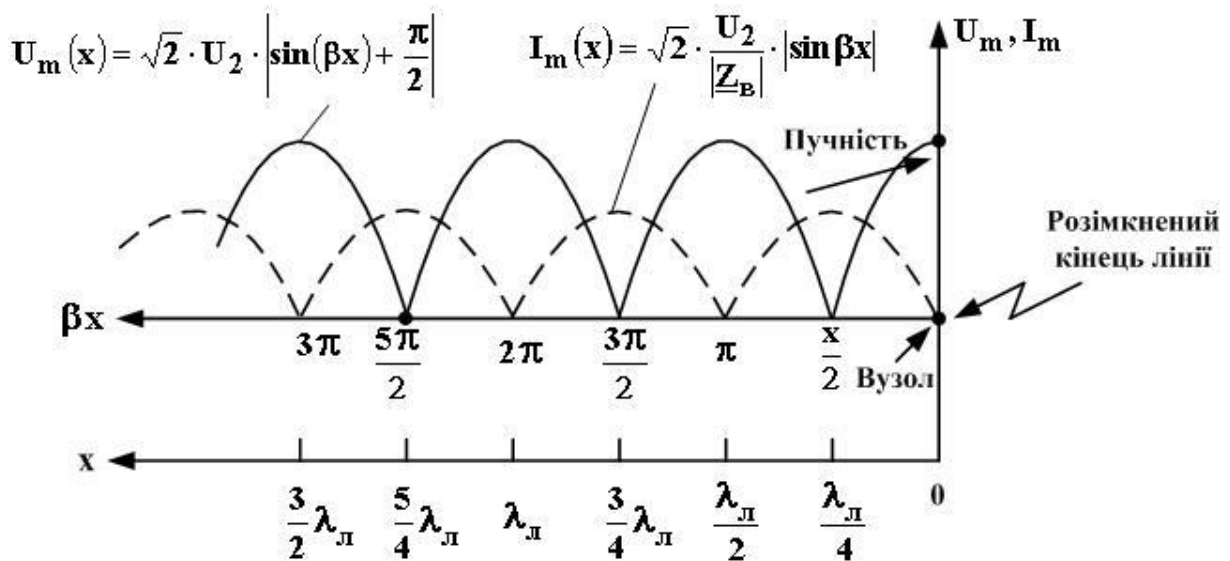


Рис. 3.14

Вхідний опір такої лінії знаходимо, користуючись (3.67) і (368):

$$\underline{Z}_{ВХХХ} = -j\underline{Z}_B / \operatorname{tg} \beta x. \quad (3.71)$$

Оскільки з (3.56) випливає, що $\underline{Z}_B = \sqrt{L_0 / C_0}$ є чисто активним, то величина $\underline{Z}_{ВХХХ}$ розімкненої на кінці лінії без втрат є чисто реактивною. Характер цього опору (індуктивний чи ємнісний) залежить від величини добутку βx .

3.10.4. Лінія без втрат при довільному навантаженні

Як ми встановили в п.3.10.1, для лінії без втрат $\underline{\gamma} = j\beta$. Використаємо це співвідношення для перетворення першого з основних рівнянь лінії (3.42). Врахуємо також, що $\text{sh}(j\beta x) = j \cdot \sin \beta x$, $\text{ch}(j\beta x) = \cos \beta x$. Одержимо

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \cos \beta x + j \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \sin \beta x = \dot{I}_2 \underline{Z}_H \cdot \cos \beta x + j \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \sin \beta x.$$

Додамо та віднімемо вираз $j \dot{I}_2 \underline{Z}_H \cdot \sin \beta x$ та згрупуємо доданки:

$$\dot{U}(x) = \dot{I}_2 \underline{Z}_H \cdot (\cos \beta x + j \sin \beta x) + j \dot{I}_2 (\underline{Z}_B - \underline{Z}_H) \cdot \sin \beta x.$$

Оскільки за формулою Ейлера $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$, то

$$\dot{U}(x) = \dot{I}_2 \underline{Z}_H \cdot e^{j\beta x} + j \dot{I}_2 (\underline{Z}_B - \underline{Z}_H) \cdot \sin \beta x.$$

Перейдемо від комплексу діючого значення напруги в перерізі x до комплексу миттєвого значення напруги (див. [1, п.5.2.3]):

$$\dot{u}(t, x) = \dot{U}(x) \cdot e^{j\omega t} = \dot{I}_2 \underline{Z}_H \cdot e^{j(\omega t + \beta x)} + j \dot{I}_2 (\underline{Z}_B - \underline{Z}_H) \cdot e^{j\omega t} \cdot \sin \beta x. \quad (3.72)$$

Множник $e^{j(\omega t + \beta x)}$ у *першому доданку*, аналогічно множнику $\cos(\omega t - \beta y + \psi_H)$ у виразі (3.16), *описує біжучу хвилю*, що падає від генератора до навантаження (тільки тепер ми вимірюємо відстань за координатою x , яку ми визначили в п.3.3 рівністю $x = \ell - y$, де ℓ – довжина всієї лінії). *Другий доданок* – вже знайома нам *стояча хвиля*, тільки в комплексній формі запису. А відтак, при довільному навантаженні в лінії без втрат існують як біжуча, так і стояча хвилі. Зауважимо, що при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ другий доданок дорівнює нулю, тобто при узгодженому навантаженні стояча хвиля не виникає; в лінії існує лише біжуча хвиля. Такий режим роботи ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$) називають узгодженим, його також називають **режимом біжучих хвиль**. Аналогічні міркування справедливі й для струму в лінії. Режим, в якому в лінії одночасно існують біжуча та стояча хвилі, називають **режимом мішаних хвиль**.

Розподіл амплітуди напруги вздовж лінії без втрат графічно показаний на рис.3.15. Він ілюструє той факт, що в узгодженому режимі

амплітуда напруги постійна в будь-якому перерізі лінії і дорівнює $\sqrt{2} \cdot |\dot{I}_2 \underline{Z}_B|$.

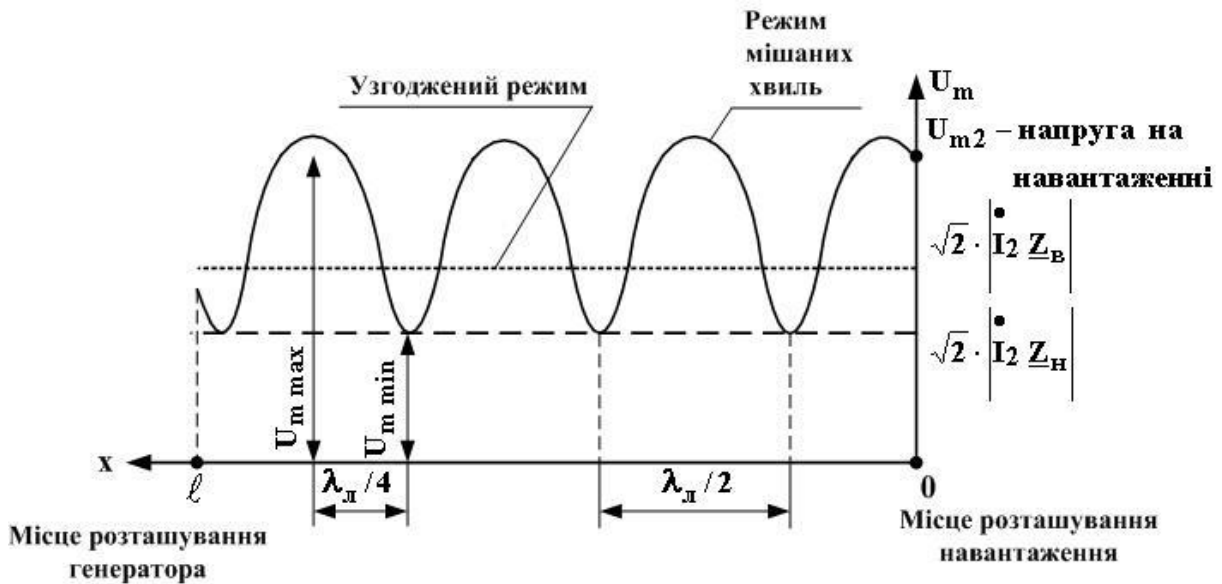


Рис. 3.15

За відсутності узгодження (при $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$) амплітуда напруги може в два рази перевищувати величину $\sqrt{2} \cdot |\dot{I}_2 \underline{Z}_B|$, що небезпечно для генератора, навантаження та міжпроводного діелектрика. Для кількісного опису стоячої хвилі ввели **коефіцієнт стоячої хвилі**, який визначають як відношення максимальної амплітуди напруги в лінії до мінімальної амплітуди цієї напруги (див. рис.3.15):

$$\text{КСВ} = \frac{U_{m \max}}{U_{m \min}}$$

Це дійсне число, причому $1 \leq \text{КСВ} < \infty$. Коефіцієнт стоячої хвилі пов'язаний із введеним в п.3.9 коефіцієнтом відбиття за напругою \underline{p}_U співвідношенням

$$\text{КСВ} = \frac{1 + |\underline{p}_U|}{1 - |\underline{p}_U|}$$

Подеколи на практиці використовують коефіцієнт біжучої хвилі КБВ:

$$\text{КБВ} = 1/\text{КСВ}.$$

Вхідний опір лінії без втрат при довільному навантаженні обчислюється за формулою (3.44) або (3.45). В узгодженому режимі (тобто при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$) з цих формул випливає, що вхідний опір дорівнюватиме \underline{Z}_B за будь-якої довжини лінії.

Зауважимо, що хвильова картина, аналогічна зображеній на рис.3.15 для напруг, в лінії без втрат з довільним навантаженням має місце й для струму.

Оскільки стояча хвиля – це результат інтерференції двох біжучих хвиль (падаючої на навантаження та відбитої від навантаження), то її наявність є ознакою того, що не вся енергія сигналу, що його створює генератор, поглинулася в навантаженні. Якщо й генератор не узгоджений з лінією (тобто $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$), то відбита від навантаження хвиля, повернувшись до генератора, частково ним поглинається, а частково знов повертається в лінію. Такі перевідбиття створюють ефект багатократної луни. Вони дуже помітні не в усталеному режимі, який ми розглядаємо в цьому підручнику, а при підімкненні генератора до лінії (або його відімкненні від неї) і можуть суттєво впливати на роботу імпульсних пристроїв [17, 18].

3.11. Довга лінія без спотворень

Як відомо, несинусоїдні (в тому числі неперіодичні) сигнали являють собою суму гармонічних коливань (див., наприклад, розд. 8 та підрозд. 11.4 підручника [1] та підрозділ з несинусоїдних коливань з підручників [2-4, 13]). Кожне з цих коливань має власну амплітуду та початкову фазу. Спотворенням несинусоїдного коливання вважають такий вплив електричного кола, при якому закон зміни в часі, тобто форма вихідного сигналу не співпадає з формою вхідного сигналу (відмінність амплітуд за спотворення не вважають). Щоб лінія не вносила спотворень, необхідне таке:

1) всі гармонічні складові сигналу повинні однаково згасати в процесі їх поширення в лінії;

2) одночасно увійшовши до лінії, гармонічні складові сигналу повинні й одночасно з неї вийти (надійти на навантаження), тобто фазова швидкість поширення повинна бути однаковою для всіх гармонічних складових.

Інакше кажучи, в лінії, яка не вносить спотворень, величини кілометричного згасання α та фазові швидкості v_ϕ не повинні залежати від частоти. Чи не будуть виконані ці умови, якщо лінія спричиняє однаковий опір біжучим хвилям будь-якої частоти? Цим опором є

хвильовий опір \underline{Z}_B . Перевіримо наше припущення. Запишемо вираз (3.35) для \underline{Z}_B і винесемо окремим множником у чисельнику L_0 , а в знаменнику C_0 :

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}}.$$

Другий корінь не залежатиме від частоти і дорівнюватиме одиниці, якщо виконується співвідношення

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}, \quad (3.73)$$

при цьому отримаємо

$$\underline{Z}_B = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (3.74)$$

Знайдемо, яким буде коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ за умови виконання рівності (3.73):

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \\ &= (G_0 + j\omega C_0) \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}} = \\ &= G_0 \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\omega C_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

З рівності (3.73) випливає, що

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}. \quad (3.76)$$

Тому, замінивши $\sqrt{L_0/C_0}$ в першому доданку виразу (3.75) на $\sqrt{R_0/G_0}$, отримаємо

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= G_0 \cdot \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \\ &= \sqrt{R_0 G_0} + j\omega\sqrt{L_0 C_0}.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Порівнявши з типовим записом $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, отримаємо

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \quad (3.78)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (3.79)$$

Фазову швидкість знаходимо згідно з (3.48):

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (3.80)$$

Отже, за умови виконання рівності (3.73) або еквівалентної рівності (3.76) величини α та v_Φ не залежать від частоти, що й вимагалось. Таким чином, лінія, первинні параметри якої пов'язані згідно з (3.73) або (3.76), є довгою лінією без спотворень. Рівність (3.73) та еквівалентну їй рівність (3.76) називають **умовою Хевісайда**. Як показано в [5, с.162 – 163], ця умова водночас є *умовою мінімуму теплових втрат* у лінії.

В лініях зв'язку багатьох типів умова Хевісайда не виконується: через дуже малу провідність G_0 первинні параметри пов'язані нерівністю $R_0 / G_0 > L_0 / C_0$. Щоб запобігти спотворенням, треба штучно збільшити L_0 . Цього можна досягнути, якщо розбити лінію на проміжки рівної довжини і ввімкнути послідовно між кожними двома проміжками додаткову котушку (цей спосіб дістав назву “пупінізація”). Можна також тим чи іншим шляхом нанести на жили кабелю феромагнітне покриття – це теж підвищить L_0 .

В рейкових колах, що працюють на досить високих частотах (близько одиниць кілогерців) спостерігається протилежне, порівняно з лініями зв'язку, відхилення від умови Хевісайда – в них $R_0 / G_0 < L_0 / C_0$. Треба штучно збільшити величину C_0 . Для цього між провідниками рейкового кола вмикають компенсуючі ємності на рівних відстанях одна від одної.

Проводячи штучне збільшення величини L_0 або величини C_0 слід, однак, слідкувати за тим, щоб втримати в допустимих межах хвильовий опір (3.74) та не зменшити надмірно фазову швидкість (3.80).

3.12. Довга лінія як чотириполюсник

Довга лінія має два вхідних затискачі та два вихідних затискачі, тож, незважаючи на всю її специфіку, цю лінію можна розглядати як чотириполюсник. Розглянемо відрізок лінії, який має довжину ℓ . Напряга \dot{U}_1 та струм \dot{I}_1 на його вході пов'язані з вихідними напругою \dot{U}_2 та струмом \dot{I}_2 згідно з основними рівняннями лінії (3.42) та (3.43):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cdot \underline{\text{ch}}\gamma\ell + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \cdot \underline{\text{sh}}\gamma\ell,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \cdot \frac{\underline{\text{sh}}\gamma\ell}{\underline{Z}_B} + \dot{I}_2 \cdot \underline{\text{ch}}\gamma\ell.$$

Порівняємо цю пару співвідношень з основними рівняннями чотириполюсника у формі А:

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2.$$

Отримаємо, що відрізок лінії як чотириполюсник має такі А-параметри:

$$\underline{A} = \underline{D} = \underline{\text{ch}}\gamma\ell, \quad \underline{B} = \underline{Z}_B \cdot \underline{\text{ch}}\gamma\ell, \quad \underline{C} = \frac{\underline{\text{sh}}\gamma\ell}{\underline{Z}_B}.$$

Оскільки $\underline{A} = \underline{D}$, то цей відрізок є симетричним чотириполюсником. Його характеристичними опорами, згідно з (2.60), є

$$\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2} = \underline{Z}_B.$$

Яка величина є сталою передачі відрізка довгої лінії? Підставимо його А-параметри у формулу (2.74):

$$\underline{\text{th}}_{\underline{g}_c} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_B \cdot \underline{\text{sh}}\gamma\ell \cdot \frac{\underline{\text{sh}}\gamma\ell}{\underline{Z}_B}}{\underline{\text{ch}}\gamma\ell \cdot \underline{\text{ch}}\gamma\ell}} = \sqrt{\frac{\underline{\text{sh}}^2\gamma\ell}{\underline{\text{ch}}^2\gamma\ell}} = \frac{\underline{\text{sh}}\gamma\ell}{\underline{\text{ch}}\gamma\ell} = \underline{\text{th}}\gamma\ell.$$

Звідси $\underline{g}_c = \underline{\gamma} \ell$. Оскільки $\underline{g}_c = \underline{a} + \underline{jv}$, а $\underline{\gamma} = \alpha + \underline{j}\beta$, то власним згасанням відрізка лінії довжиною ℓ є $\underline{a}_c = \alpha \ell$, а його власним коефіцієнтом фази є $\underline{v}_c = \beta \ell$.

Користуючись отриманими співвідношеннями, можна робити будь-які розрахунки кіл, в які відрізок довгої лінії входить як чотириполіусник. У низці практичних задач постає необхідність замінити відрізок лінії на еквівалентний чотириполіусник, складений за Т- або П-подібною схемою заміщення (такий чотириполіусник називають штучною лінією). Методику та розрахункові формули для виконання такої заміни зацікавлений читач знайде в підручниках [4] та (в дещо спрощеному вигляді) [5].

3.13. Завдання для самоконтролю

1. Ділянка кабелю має довжину 10 м; швидкість поширення електромагнітних хвиль в ньому дорівнює 150000 км/с. Чи є ця ділянка довгою лінією для електричних коливань, частоти яких лежать в діапазоні (100...200) МГц?

Відповідь: так.

2. Перелічіть первинні та вторинні параметри довгої лінії. Розкрийте їх фізичний сенс.

3. Нарисуйте графіки частотних залежностей кілометричного згасання та кілометричного коефіцієнта фази, а також модуля та аргумента хвильового опору.

4. В чому полягає різниця між довгою лінією та електрично довгою лінією?

5. Дайте визначення узгодженого режиму роботи довгої лінії, а також режимів її короткого замикання та холостого ходу.

6. Що таке довга лінія без втрат?

7. Маємо довгу лінію без втрат. Її первинні параметри такі: $C_0 = 10^{-10} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, $L_0 = 6,25 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, її довжина 1 м. Обчисліть вхідний опір ділянки цієї лінії на частоті 100 МГц, якщо ця ділянка замкнена на кінці.

Відповідь: цей опір є нескінченно великим.

8. Що таке біжуча хвиля, стояча хвиля? Що таке режими біжучих хвиль та мішаних хвиль?

9. Які умови відсутності спотворень у довгій лінії?

4. ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

4.1. Загальні поняття та визначення. Класифікація фільтрів

Для забезпечення роботи багатьох пристроїв радіоелектроніки та автоматики необхідно відокремлювати одне від одного електричні коливання, що відрізняються за частотою. Цю функцію виконують спеціальні кола, які мають заздалегідь розраховані властивості щодо частотної виборності, – електричні фільтри.

Електричний фільтр (в подальшому – просто фільтр) – чотириполюсник, який пропускає¹ без суттєвих спотворень синусоїдні коливання одних частот і заглушує синусоїдні коливання інших частот.

Широко розповсюджені два підходи до побудування схем фільтрів і розрахунку параметрів їх елементів. Перший підхід базується на аналізі власних параметрів чотириполюсників, складених за Т-, П- або Г-подібними схемами. Теорію фільтрів, що складені з індуктивних і ємнісних елементів (LC-фільтрів), значною мірою побудовано в рамках цього підходу [2 – 7]. Другий підхід базується на методах побудови (синтезу) електричних кіл за бажаними частотними залежностями їх робочого згасання. В рамках даного підходу розроблено теорію синтезу фільтрів у різних елементних базисах: LC-фільтрів, RC-фільтрів, фільтрів на базі підсилювальних елементів із зворотними зв'язками та інших (див., наприклад, підручники [10, 13] та монографію [20]). Викладення теорії фільтрів у нашому підручнику переважно базується на першому підході.

З теорії чотириполюсників відомо, що будь-який лінійний пасивний чотириполюсник, узятий окремо від генератора та навантаження, може бути вичерпно описаний трьома власними параметрами – характеристичними опорами \underline{Z}_{x1} та \underline{Z}_{x2} і власною сталою передачі $\underline{g}_c = a_c + j\mathbf{v}_c$, де a_c – власне згасання чотириполюсника, \mathbf{v}_c – його власний коефіцієнт фази.

Діапазон частот, в якому $a_c = 0$, називають **смугою пропускання** (СП) фільтра. Діапазон частот, в якому $a_c > 0$, називають **смугою затримання** (СЗ) фільтра. Частоту, яка лежить на межі СП та СЗ, називають **частотою зрізу** і позначають як ω_{cp} .

В залежності від взаємного розташування смуг і від їхньої кількості фільтри поділяють на такі основні види:

¹ Під терміном “пропускає” розуміється те, що струм певної частоти, поданий на вхід чотириполюсника, сягне навантаження цього чотириполюсника.

1) **фільтр нижніх частот (ФНЧ)**. Це фільтр, який пропускає синусоїдні коливання з частотами від нуля (постійний струм) до ω_{cp} і заглушує синусоїдні коливання з $\omega > \omega_{cp}$. В ідеальному випадку це заглушення має бути повним, тому графік частотної залежності власного згасання ідеального ФНЧ має вигляд, поданий на рис.4.1;

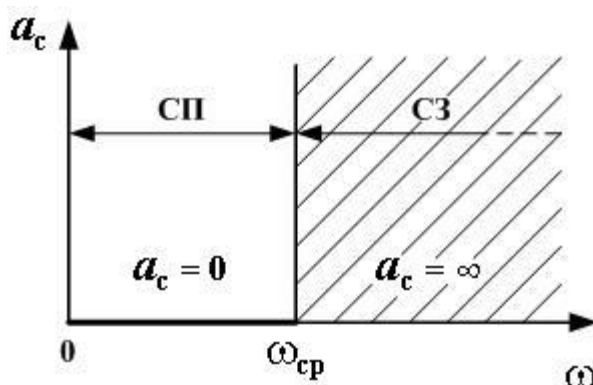


Рис. 4.1. Частотна залежність власного згасання ідеального ФНЧ

2) **фільтр верхніх частот (ФВЧ)**. Це фільтр, який пропускає синусоїдні коливання з частотами, які дорівнюють ω_{cp} або більші від неї, і заглушує синусоїдні коливання з $0 \leq \omega < \omega_{cp}$. Графік залежності $a_c(\omega)$ для ідеального ФВЧ наведений на рис. 4.2;

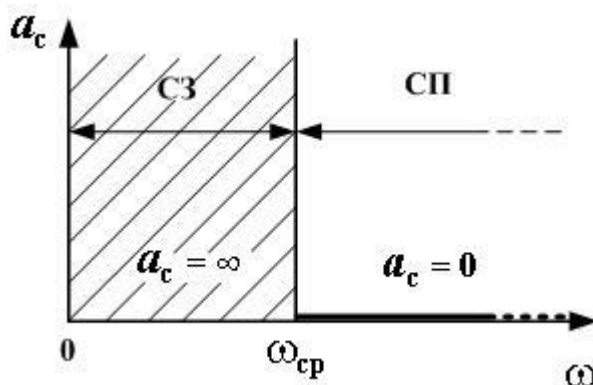


Рис. 4.2. Частотна залежність власного згасання ідеального ФВЧ

3) **смугово-пропускаючий фільтр (СПФ)**, який ще називають смуговим фільтром. Це фільтр, який пропускає синусоїдні коливання з частотами, що лежать в діапазоні $\omega_{cp1} \leq \omega \leq \omega_{cp2}$, і заглушує коливання всіх інших частот. Графік залежності $a_c(\omega)$ для ідеального СПФ наведений на рис.4.3;

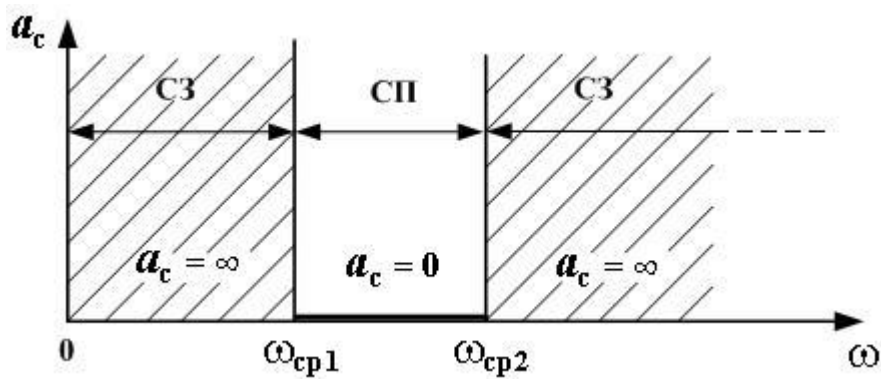


Рис. 4.3. Частотна залежність власного згасання ідеального СПФ

4) **смугово-затримуючий фільтр (СЗФ)**, який ще називають режекторним фільтром або фільтром-пробкою. Цей фільтр діє протилежно попередньому: він заглушує синусоїдні коливання, частоти яких лежать в діапазоні $\omega_{cp1} < \omega < \omega_{cp2}$, і пропускає коливання всіх інших частот. Графік залежності $a_c(\omega)$ для ідеального СЗФ наведений на рис.4.4.

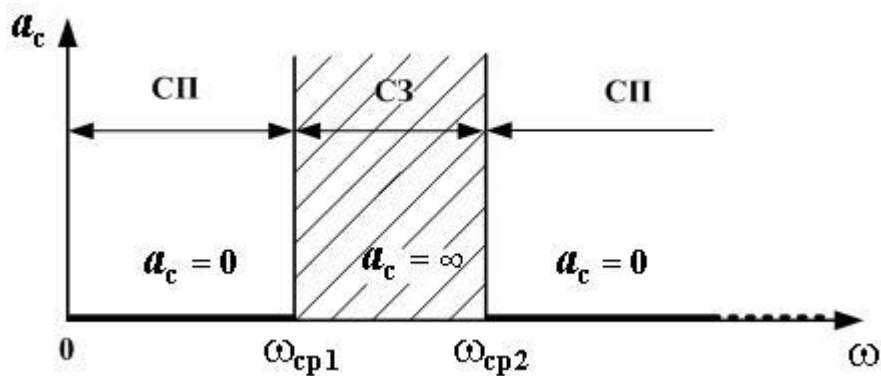


Рис. 4.4. Частотна залежність власного згасання ідеального СЗФ

За типом елементного базису фільтри можна поділити на **пасивні** (в них не використано підсилювальних елементів) та **активні** (з підсилювальними елементами).

Пасивні фільтри поділяють на:

1) реактивні (або LC-фільтри) – фільтри, побудовані виключно з індуктивних і ємнісних елементів;

2) безіндукційні (або RC-фільтри) – фільтри, побудовані виключно з активних опорів та ємнісних елементів;

3) твердотільні – фільтри, побудовані на кристалічних, керамічних або металічних виробках, частотно-вибірних по відношенню до утворюваних у них пружних коливань. Електричний сигнал вводять в такий фільтр і знімають з нього за допомогою спеціальних електромеханічних перетворювачів.

В активних фільтрах підсилювальні елементи використовують як основу для побудови кіл з частотно-залежними зворотними зв'язками. Сюди ж відносять фільтри на базі приладів з переносом заряду та на базі акустооптичних пристроїв.

4.2. LC – фільтри

4.2.1. Загальні зауваження

При розгляді LC-фільтрів будемо вважати втрати в елементах фільтрів знехтувано малими. В більшості практичних випадків результати, одержані на базі цього припущення, є добре узгодженими з дослідними результатами. Випадки, в яких втрати в елементах враховані, будемо відмічати окремо.

Основними задачами теорії LC-фільтрів у тому обсязі, в якому ми її розглянемо, будемо вважати:

- 1) визначення умов, за яких фільтр має смугу пропускання;
- 2) знаходження частот зрізу;
- 3) знаходження частотних характеристик фільтра.

Цієї послідовності дій ми й додержуватимемося нижче. Читачу, який забажає дістати більший обсяг інформації з LC-фільтрів, радимо скористатися неперевершеним навчальним посібником М.Д.Босого [7] та фундаментальним навчальним посібником І.А.Кощеєва [6].

4.2.2. Умови пропускання та затримування

Розглянемо два симетричних чотирьохполюсники, один з яких складено за Т-подібною схемою (рис.4.5,а), а другий – за П-подібною схемою (рис.4.5,б).

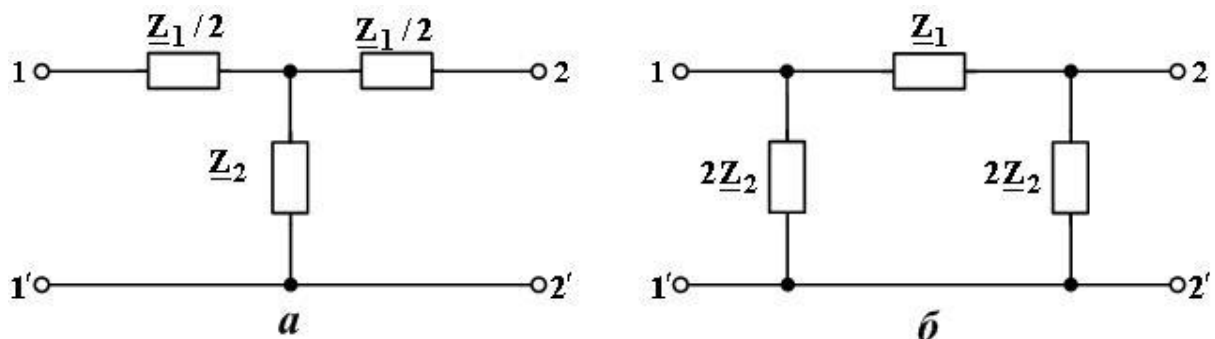


Рис. 4.5

Візьмемо один з четвірки А-параметрів, а саме параметр \underline{A} . Щоб знайти співвідношення, яке пов'язує його із власним згасанням a_c чотириполосника (а саме за поведінкою цієї величини ми у попередньому підрозділі визначали смуги пропускання та затримування), звернемося згідно із зноскою в підрозд. 2.4.3, до підручника [2]. Знаходимо, що за умови $\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2}$, яка саме й має місце для обох наших чотириполосників, існує співвідношення

$$\underline{A} = \text{ch} \underline{g}_c, \quad (4.1)$$

в якому $\underline{g}_c = a_c + j\theta_c$.

Тепер пов'яжемо параметр \underline{A} з опорами \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 (рис.4.5), для чого звернемося до п.2.3 нашого підручника. З порівняння рис.2.14 та 4.5,а для Т-подібних схем отримуємо для чотириполосника з рис.4.5,а рівності $\underline{Z}_a = \underline{Z}_2$, $\underline{Z}_b = \underline{Z}_1/2$ і згідно з формулою (2.40) для розглядової симетричної Т-подібної схеми

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}. \quad (4.2)$$

Аналогічним чином, порівнявши рис. 2.25 та 4.5,б, отримуємо для симетричної П-подібної схеми з рис.4.5,б рівності $\underline{Z}_b = \underline{Z}_1$, $\underline{Z}_d = 2\underline{Z}_2$ і згідно з формулою (2.44) для розглядової симетричної П-подібної схеми параметр \underline{A} пов'язаний з \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 тією ж формулою (4.2). Отже, умови існування смуг пропускання і затримування для симетричних Т- та П-подібного чотириполосників, складених за схемами з рис.4.5, будуть одними й тими самими.

Перш ніж приступити до подальшого аналізу, відмітимо, що параметр \underline{A} для LC-фільтра є дійсною величиною на всіх частотах, бо за визначенням LC-фільтра величини опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є чисто уявними числами, і при діленні згідно з (4.2) множник j скорочується.

Тепер повернемося до виразу (4.1). Згідно з властивостями гіперболічного косинуса маємо

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \text{ch} \underline{g}_c = \text{ch}(a_c + j\theta_c) = \\ &= \text{ch} a_c \cdot \cos \theta_c + j \text{sh} a_c \cdot \sin \theta_c. \end{aligned} \quad (4.3)$$

За визначенням смуги пропускання (див.п.4.1) в ній $a_c = 0$. Оскільки $\text{ch}0=1$, $\text{sh}0=0$, то з (4.3) маємо, що в смугі пропускання

$$\underline{A} = \cos \theta_c. \quad (4.4)$$

З іншого боку, на будь-якій частоті має місце рівність (4.2), тому прирівнювання (4.2) та (4.4) дасть можливість пов'язати опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 співвідношенням, *притаманним для смуги пропускання*

$$\cos \varphi_c = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}. \quad (4.5)$$

З відомої тригонометричної рівності $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$ випливає формула, альтернативна виразу (4.5):

$$\sin \frac{\varphi_c}{2} = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \quad (4.6)$$

Повернемося до виразу (4.5). Оскільки косинус набуває значення від мінус одиниці до одиниці, то з (4.4) та (4.5) випливають подвійні нерівності

$$-1 \leq \underline{A} \leq 1; \quad (4.7)$$

$$-1 \leq 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leq 1.$$

Віднявши одиницю від кожної частини останньої нерівності, отримаємо

$$-2 \leq \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leq 0,$$

звідки, поділивши на два, прийдемо до нерівності

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 0, \quad (4.8)$$

яка означає, що в смугі пропускання відношення $\underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2)$ повинне бути від'ємним числом з інтервалу $[-1, 0]$. Це необхідна та достатня умова існування смуги пропускання. З неї випливає, що в **смугі пропускання** опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 (вони є чисто реактивними за визначенням LC-фільтра) повинні мати **протилежні знаки**, тобто бути різнохарактерними (коли перший опір індуктивний, то другий – ємнісний, і навпаки). Спираючись

на нерівність (4.8), можна сформулювати **умови існування смуги пропускання** і в такому вигляді:

$$1) |\underline{Z}_1| \leq |4\underline{Z}_2|;$$

2) знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 – різні.

Тепер з'ясуємо, як через опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 визначити частоти зрізу. Оскільки кожна частота зрізу лежить на межі смуги пропускання та смуги затримування, то цю частоту можна віднести або до однієї смуги, або до іншої. Віднесемо частоту зрізу до смуги пропускання. Тоді частоти зрізу – це ті частоти, на яких подвійна нерівність (4.8) розпадається на дві рівності:

$$\frac{\underline{Z}_1(\omega_{cp1})}{4\underline{Z}_2(\omega_{cp1})} = 0, \quad (4.9)$$

$$\underline{Z}_1(\omega_{cp2}) = -4\underline{Z}_2(\omega_{cp2}). \quad (4.10)$$

Знаючи залежності $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$ (тобто їх у вигляді формул чи графіків), можна за допомогою рівностей (4.9) і (4.10) знайти частоти зрізу, після чого визначити смугу (або смуги) пропускання вищеописаним способом. Усі інші ділянки осі частот складатимуть смугу затримування.

4.2.3. Частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази

У **смугі пропускання**, за визначенням, маємо $a_c = 0$. Також в цій смугі виконуються рівності (4.5) та (4.6), з яких випливають дві рівноправні формули для розрахунку власного коефіцієнта фази в **смугі пропускання**:

$$\nu_c = \arccos \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right), \quad (4.11)$$

$$\nu_c = 2 \arcsin \left(\sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} \right). \quad (4.12)$$

Тепер розглянемо *смугу затримування*. В ній, з одного боку, маємо за визначенням $a_c > 0$, а з іншого боку, параметр \underline{A} залишається дійсним числом, тобто уявна частина суми (4.3) повинна дорівнювати нулю. Оскільки при $a_c > 0$ маємо $\operatorname{sh} a_c > 0$, то залишається зробити висновок, що

уявна частина перетворюється на нуль завдяки тому, що $\sin \vartheta_c = 0$. Звідси випливає, що в смузі затримування величина ϑ_c дорівнює або нулю, або π . Яке з цих значень обрати? Для отримання відповіді на це питання проаналізуємо вираз (4.3) в смузі затримування. Ми тільки що дійшли висновку, що його уявна частина дорівнює в цій смузі нулю, тому маємо

$$\underline{A} = \operatorname{ch} a_c \cdot \cos \vartheta_c. \quad (4.13)$$

Оскільки для смуги пропускання виконується нерівність (4.7), то усі інші значення \underline{A} , крім діапазону $[-1, 1]$, належать до смуги затримування. Отже, в смузі затримування або $\underline{A} > 1$, або $\underline{A} < (-1)$. Але **гіперболічний косинус** з (4.13), за своїми властивостями, завжди є **додатною величиною**. Тому, розглядаючи рівність (4.13), залишається зробити такі висновки:

- 1) якщо $\underline{A} > 1$ (тобто \underline{A} – додатне), то $\cos \vartheta_c = 1$, звідси $\vartheta_c = 0$;
- 2) якщо $\underline{A} < (-1)$ (тобто \underline{A} – від’ємне), то $\cos \vartheta_c = -1$, звідки $\vartheta_c = \pi$.

Оскільки в обох цих випадках $|\cos \vartheta_c| = 1$, то можемо рівність (4.13) переписати як

$$\operatorname{ch} a_c = \begin{cases} \underline{A}, & \text{при додатних значеннях } \underline{A}, \\ -\underline{A}, & \text{при від’ємних значеннях } \underline{A}. \end{cases}$$

Більш коротко останнє співвідношення записується так:

$$\operatorname{ch} a_c = |\underline{A}|. \quad (4.14)$$

Але ж ми знаємо, що для будь-якої частоти є справедливою рівність (4.2), тому, підставивши її в (4.14), отримаємо, що в **смузі затримування**

$$\operatorname{ch} a_c = \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right|,$$

тобто

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right|^1. \quad (4.15)$$

Тепер повернемося на півсторінки назад, до двох співвідношень, які пов’язують величину ϑ_c із знаком параметра \underline{A} . Наша мета – вивести з них зв’язок між ϑ_c та опорам \underline{Z}_1 і \underline{Z}_2 . Маємо

¹ При обчисленні a_c за цією формулою отримуємо результат у неперах.

$$\epsilon_c = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \underline{A} > 1, \\ \pi, & \text{якщо } \underline{A} < (-1). \end{cases} \quad (4.16)$$

Звернувшись до співвідношення (4.2), справедливого для будь-якої частоти, з нерівності $\underline{A} > 1$ отримаємо еквівалентну нерівність $\underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2) > 0$, що можливо лише тоді, коли знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 однакові (тобто обидва ці опори або індуктивні, або ємнісні). Аналогічно, з нерівності $\underline{A} < (-1)$ отримаємо еквівалентну нерівність $\underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2) < (-2)$, що можливо тоді, коли знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 різні (тобто якийсь один з них індуктивний, а другий – ємнісний). Тому для визначення величини ϵ_c у **смузі затримування** можна записати більш зручне співвідношення, аніж (4.16):

$$\epsilon_c = \begin{cases} 0, & \text{якщо знаки } \underline{Z}_1 \text{ та } \underline{Z}_2 \text{ однакові,} \\ \pi, & \text{якщо знаки } \underline{Z}_1 \text{ та } \underline{Z}_2 \text{ різні.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Отже, в цьому підрозділі ми знайшли аналітичні вирази для частотних залежностей власного згасання та власного коефіцієнта фази Т- та П-подібного симетричних чотириполісників, складених з *довільних* чисто *реактивних* опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 . Зверніть увагу на те, що одержані формули є однаковими як для Т-подібного, так і для П-подібного чотириполісників.

4.2.4. Частотні залежності характеристичних опорів

Виразимо характеристичні опори Т-та П-подібного симетричних чотириполісників через їх складові – опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 (рис.4.5). Скористаємось для цього співвідношенням (2.58) з підрозд. 2.4.1.

Спочатку розглянемо Т-подібний чотириполісник (рис.4.5,а). При замкнених затискачах 2 – 2' його вхідний опір короткого замикання з боку затискачів 1 – 1' становить

$$\underline{Z}_{1\text{кз}} = \frac{\underline{Z}_1}{2} + \frac{\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{2}}{\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2}. \quad (4.18)$$

При розімкнених затискачах 2 – 2' його вхідний опір холостого ходу з боку затискачів 1 – 1' становить

$$\underline{Z}_{1xx} = \frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2. \quad (4.19)$$

Підставивши (4.18) та (4.19) до (2.58), отримаємо **характеристичний опір симетричного Т-подібного чотириполюсника:**

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{xT} &= \sqrt{\left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2\right) \cdot \frac{\underline{Z}_1}{2} + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2}{4} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \\ &= \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Діючи аналогічним чином, неважко знайти **характеристичний опір симетричного П-подібного чотириполюсника:**

$$\underline{Z}_{xT} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \quad (4.21)$$

Зауважимо, що формули (4.20) та (4.21) є справедливими відповідно для Т- та П-подібного чотириполюсників при *довільних комплексних опорах* \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 , а не тільки коли ці опори є чисто реактивними.

4.2.5. Фільтри нижніх частот типу К

Фільтрами типу К називають LC-фільтри, складені за симетричними Т- або П-подібною схемами, в яких виконується співвідношення

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = K, \quad (4.22)$$

тобто добуток опорів дорівнює постійній величині, яка не залежить від частоти.

Зауважимо також, що співвідношення (4.22) є аналогічним співвідношенню (1.3) даного підручника, звідки випливає, що двополюсники, які утворюють горизонтальну чи вертикальну вітки фільтрів типу **К**, є зворотними двополюсниками.

Тепер перейдемо власне до фільтра нижніх частот (ФНЧ) типу **К**. Згідно з визначенням ФНЧ, даним в п.4.1, він повинен добре пропускати на вихід постійний струм та низькочастотні коливання і заглушувати високочастотні коливання. Тому логічно поставити вимогу, щоб

горизонтальна вітка (опір \underline{Z}_1) як Т-подібного, так і П-подібного фільтрів чинила малий опір для низькочастотних коливань і в той же час великий опір для високочастотних коливань. В найпростішому випадку такі умови задовольняє індуктивний елемент. Також логічно поставити вимогу, щоб вертикальна вітка (опір \underline{Z}_2) як Т-подібного, так і П-подібного фільтрів чинила великий опір для низькочастотних струмів, щоб не замикати їх на нижній провід кола (тобто не шунтувати їх). В той же час високочастотні струми якраз повинні цією віткою шунтуватися, замикатися нею і не надходити до навантаження. В найпростішому випадку такі умови задовольняє ємнісний елемент.

$$\text{Отже, маємо } \underline{Z}_1 = j\omega L, \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}, \text{ звідки } \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = \rho^2.$$

Величина ρ дістала назву “**номінальний характеристичний опір фільтра**”. Бачимо, що фільтр з індуктивністю у горизонтальній вітці та ємністю у вертикальній вітці задовольняє визначення фільтра типу **К**.

Схеми ФНЧ типу **К** наведені на рис.4.6,а (Т-подібна) та рис.4.6,б (П-подібна). Коефіцієнти $\frac{1}{2}$ перед індуктивністю на рис.4.6,а та ємністю на рис.4.6,б обумовлені відповідно коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ перед \underline{Z}_1 на рис.4.5,а та коефіцієнтом 2 перед \underline{Z}_2 на рис. 4.5,б.

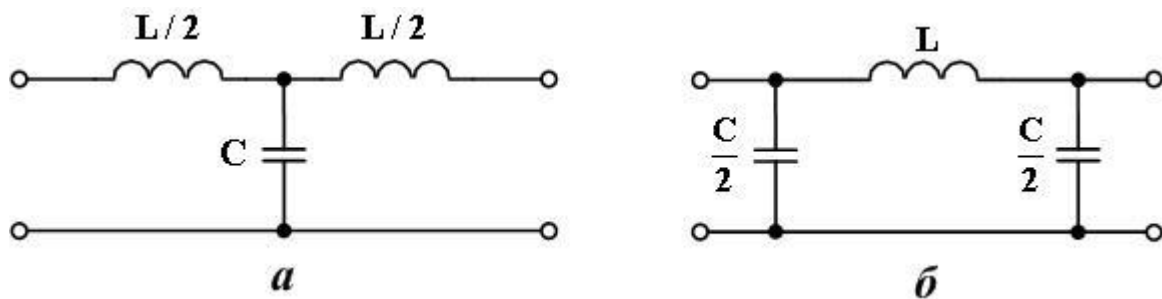


Рис. 4.6. ФНЧ типу **К**

Спочатку знайдемо частоти зрізу. Згідно зі співвідношенням (4.9) маємо

$$\frac{\underline{Z}_1(\omega_{cp1})}{4\underline{Z}_2(\omega_{cp1})} = \frac{j\omega_{cp1} \cdot L}{4 \cdot \frac{1}{j\omega_{cp1}C}} = -\frac{\omega_{cp1}^2 LC}{4} = 0,$$

звідки $\omega_{cp1} = 0$ і є тривіальною, бо впливає з визначення ФНЧ взагалі.

Згідно ж зі співвідношенням (4.10) маємо (опускаючи індекс “2” в позначенні частоти зрізу)

$$j\omega_{cp}L = -4 \cdot \frac{1}{j\omega_{cp}C},$$

звідки

$$\omega_{cp} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (4.23)$$

Це й є частота зрізу ФНЧ типу К.

Дістати якісне уявлення про розташування частоти зрізу та смуг пропускання і затримування можна за допомогою графічних побудовань. Спочатку слід накреслити в координатах “опір-частота” графіки залежностей $\underline{Z}_1(\omega) = j\omega L$ та $4\underline{Z}_2(\omega) = 4 \cdot \frac{1}{j\omega C}$ (це досить зробити ескізно, зберігаючи тільки характерні особливості графіків), як показано на рис.4.7.

Потім шукаємо частоту, на якій обидва графіки відстоять на однаковій відстані від осі частот, але по різні боки від неї. Це й буде частота зрізу ω_{cp} .

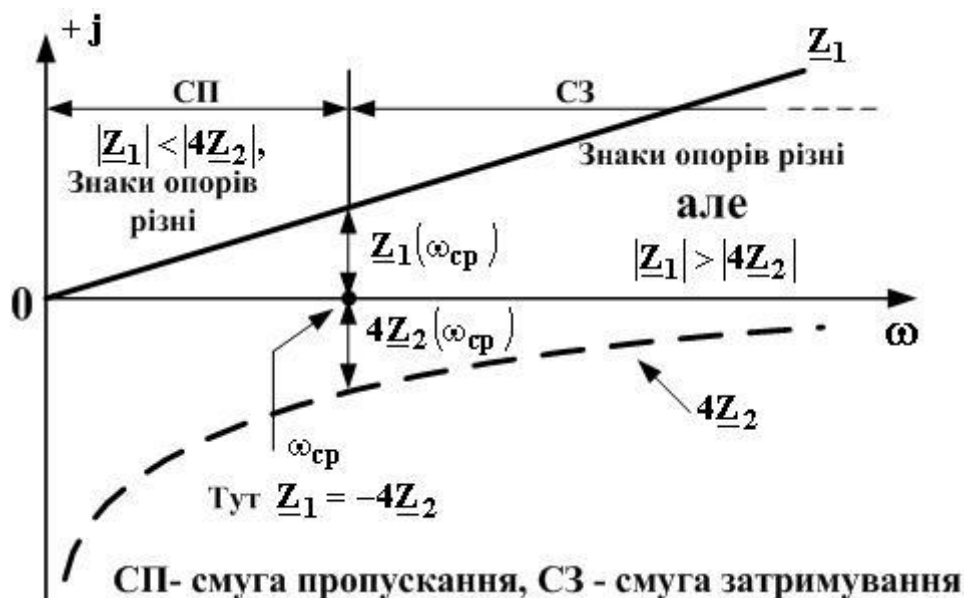


Рис. 4.7

Після цього аналізуємо поведінку графіків $\underline{Z}_1(\omega)$ та $4\underline{Z}_2(\omega)$ по обидва боки від ω_{cp} . Спочатку подивимось лівіше. Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$

менший від $|4\underline{Z}_2|$ і знаки опорів *різні*. Але ж то є, згідно з п.4.2.2, умовою існування смуги пропускання. Отже, вліво від ω_{cp} лежить смуга пропускання. Вона, звісно, закінчується при $\omega_{cp}=0$, тобто в початку координат. Потім подивимось правіше частоти ω_{cp} . Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ більший від $|4\underline{Z}_2|$. Тому хоча знаки опорів і є різними, смуги пропускання справа від ω_{cp} немає, тобто при $\omega > \omega_{cp}$ наш фільтр має смуги затримування.

Таким чином, ми впевнилися, що кола, схеми яких зображені на рис.4.6, й насправді є ФНЧ: вони пропускають струми з частотами від 0 до ω_{cp} і заглушують струми з частотами $\omega > \omega_{cp}$.

Тепер з'ясуємо, наскільки успішно ФНЧ типу **К** здійснює заглушення в смузі затримування, тобто знайдемо формулу, яка описує залежність $a_c(\omega)$.

У **смузі пропускання**, за її визначенням, маємо $a_c = 0$, і нічого обчислювати не треба.

Для **смузі затримування** скористаємось загальною формулою (4.15), в яку підставимо опори горизонтальної та вертикальної віток ФНЧ типу **К** $\underline{Z}_1 = j\omega L$, $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$:

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{j\omega L}{2 \cdot \frac{1}{j\omega C}} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right|.$$

Згідно з (4.23) маємо $2/\sqrt{LC} = \omega_{cp}$, тому

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 - 2 \frac{f^2}{f_{cp}^2} \right|,$$

де

$$f_{cp} = \frac{\omega_{cp}}{2\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} \quad (4.24)$$

– частота зрізу в герцах.

Введемо новий параметр – **нормовану частоту**

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{cp}} = \frac{f}{f_{cp}}. \quad (4.25)$$

З урахуванням такого позначення формула для частотної залежності власного згасання ФНЧ типу **К** у **смузі затримування** набуває вигляду

$$a_c = \text{arch}|1 - 2\Omega^2| \quad (4.26)$$

(одиницею вимірювання результату буде непер).

Повний графік частотної залежності a_c для ФНЧ типу **К** наведений на рис.4.8. Частоті зрізу відповідає, згідно з (4.25), величина $\Omega = 1$; для $\Omega > 1$ ординати графіка розраховані за формулою (4.26). Отже, залежність $a_c(\omega)$ можна в компактному вигляді записати через нормовану частоту Ω як

$$a_c(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq \Omega \leq 1 \text{ (смуга пропускання);} \\ \text{arch}|1 - 2\Omega^2|, & \text{якщо } \Omega > 1 \text{ (смуга затримування).} \end{cases} \quad (4.27)$$

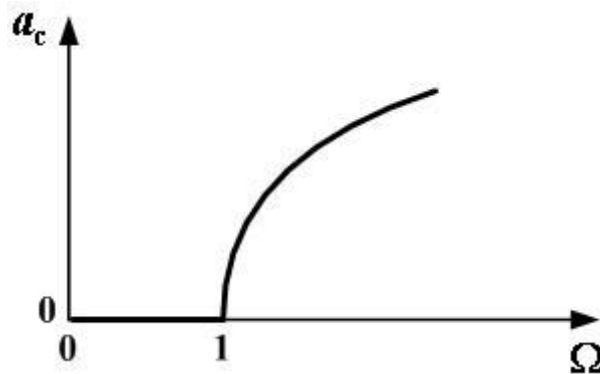


Рис. 4.8. Частотна залежність власного згасання ФНЧ типу **К**

Власне згасання ФНЧ типу **К** в смузі затримування не є всюди нескінченним, на відміну від ідеального ФНЧ (рис.4.1). Наприклад, воно дорівнює близько 2 Нп при $\Omega=1,5$ (тобто $\omega=1,5 \omega_{cp}$), а нескінченним становиться тільки при $\Omega = \infty$.

Тепер знайдемо частотну залежність власного коефіцієнта фази ФНЧ типу **К**. Для **смуги пропускання** скористаємось загальним співвідношенням (4.11). Зробивши в ньому такі ж перетворення дроби $Z_1/(2Z_2)$, як і при виведенні формули для a_c , отримаємо, що в **смузі пропускання**

$$v_c = \text{arc cos}(1 - 2\Omega^2). \quad (4.28)$$

Для смуги затримування скористаємось загальним співвідношенням (4.17). Оскільки в цій смузі \underline{Z}_1 і \underline{Z}_2 мають різні знаки (див. рис.4.7), то з (4.17) маємо $\vartheta_c = \pi$.

Отже, залежність $\vartheta_c(\omega)$ можна в компактному вигляді записати як

$$\vartheta_c(\omega) = \begin{cases} \arccos(1 - 2\Omega^2), & \text{якщо } 0 \leq \Omega \leq 1 \text{ (смуга пропускання);} \\ \pi, & \text{якщо } \Omega > 1 \text{ (смуга затримування).} \end{cases} \quad (4.29)$$

Графік цієї частотної залежності наведено на рис.4.9.

Ще раз зверніть увагу на те, що залежності $a_c(\omega)$ та $\vartheta_c(\omega)$ однакові як для Т-подібного фільтра, так і для П-подібного.

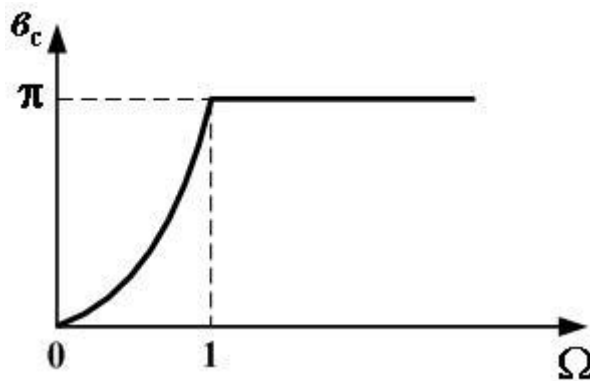


Рис. 4.9. Частотна залежність власного коефіцієнта фази ФНЧ типу К

А ось характеристичні опори для кожного з цих різновидів ФНЧ типу К обчислюють за різними формулами, як це й було доведено при виведенні формул (4.20) та (4.21).

Величину характеристичного опору $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ для Т-подібного ФНЧ типу К отримаємо, підставивши $\underline{Z}_1 = j\omega L$ та $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$ у вираз (4.20):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ХТК}} &= \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(1 + \frac{j\omega L}{4 \cdot \frac{1}{j\omega C}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4} \right)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

На початку цього підрозділу ми вже ввели так званий **номінальний характеристичний опір** ρ ФНЧ типу **К** співвідношенням $\rho^2 = L/C$, звідки

$$\rho = \sqrt{L/C}. \quad (4.31)$$

Також зауважимо, що згідно з(4.23) маємо $\omega_{\text{ср}}^2 = \frac{4}{LC}$. З урахуванням цього, а також формули (4.25) вираз (4.30) набуває вигляду

$$\underline{Z}_{\text{ХТК}} = \rho \cdot \sqrt{1 - \Omega^2}. \quad (4.32)$$

Зробивши аналогічні підстановки, перетворення та позначення у формулі (4.21), отримаємо частотну залежність характеристичного опору $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ для П-подібного ФНЧ типу **К**:

$$\underline{Z}_{\text{ХТК}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \Omega^2}}. \quad (4.33)$$

З'ясуємо характери опорів $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ і $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ в смузі пропускання та в смузі затримування. Оскільки в першій з них нормована частота лежить в межах від нуля до одиниці, то під знаком кореня маємо додатне число. Звідси випливає, що в **смузі пропускання** як $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$, так і $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ є дійсними додатними числами, тобто **обидва опори мають активний характер**.

У смузі затримування величина Ω лежить у межах від одиниці до нескінченності, тому під коренем як в (4.32), так і в (4.33) стоїть від'ємне число, тобто обидва характеристичних опори в цій смузі є чисто уявними величинами. При цьому абсолютна величина $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ згідно з (4.32) зростає із збільшенням величини Ω . Зростання абсолютної величини уявного опору з ростом частоти притаманне індуктивному елементу, тому *опір $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ в смузі затримування має індуктивний характер*.

У той же час абсолютна величина опору $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ згідно з (4.33) зменшується із збільшенням величини Ω . Зменшення абсолютної величини уявного опору з ростом частоти притаманне ємнісному елементу, тому *опір $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ в смузі затримування має ємнісний характер*. Отже, в смузі затримування як $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$, так і $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ мають реактивний характер.

Графіки частотних залежностей абсолютних величин опорів $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ та $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ наведені на рис. 4.10, при цьому там, де опори мають активний характер, графіки накреслені суцільною лінією, а там, де опори мають реактивний характер, графіки накреслено штриховою лінією.

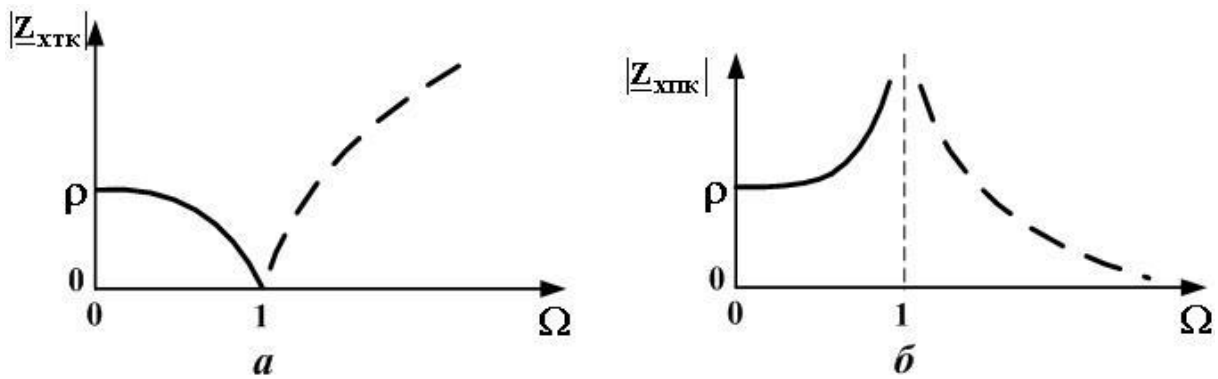


Рис. 4.10. Частотні залежності абсолютних величин характеристичних опорів:

- а – для Т-подібного ФНЧ типу К,
- б – для П-подібного ФНЧ типу К

З вигляду графіків, зображених на рис.4.10, можна зробити висновок, що в смузі пропускання як Z_{xTK} , так і Z_{xPK} сильно змінюються із зміною частоти. Оскільки на практиці навантаженням фільтра є, як правило, активний частотонезалежний опір, то забезпечити досить точне узгодження ФНЧ типу К з навантаженням в більшій частині смуги пропускання неможливо принципіально. Наприклад, якщо розрахувати фільтр так, щоб ρ дорівнював опору навантаження R_n , то величини Z_{xTK} та Z_{xPK} відрізнятяться від цього R_n не більш ніж на 10% в діапазоні частот $0 \leq \Omega \leq 0,4$ (тобто $0 \leq \omega \leq 0,4\omega_{cp}$). Все ж такий вибір величини ρ вважають стандартним при розв'язанні задачі розрахунку параметрів L та C елементів ФНЧ типу К.

Отже, одним з початкових даних до такого розрахунку є опір навантаження R_n , при цьому накладається вимога, щоб номінальний характеристичний опір ρ фільтра дорівнював величині R_n . Оскільки $\rho = \sqrt{L/C}$, то маємо таку рівність:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R_n. \quad (4.34)$$

Крім того, звичайно задаються ще величиною ω_{cp} частоти зрізу. Згідно з (4.23) маємо рівність

$$\sqrt{LC} = \frac{2}{\omega_{cp}}. \quad (4.35)$$

Помноживши (4.34) на (4.35), одразу отримаємо розрахункову формулу

$$L = \frac{2R_n}{\omega_{cp}}. \quad (4.36)$$

Поділивши (4.35) на (4.34), отримаємо другу розрахункову формулу:

$$C = \frac{2}{\omega_{cp} R_n}. \quad (4.37)$$

Слід мати на увазі, що в Т-подібному ФНЧ типу **К** використано котушки індуктивністю $L/2$ (рис. 4.6,а), а в П-подібному ФНЧ типу **К** – конденсатори ємністю $C/2$ (рис.4.6,б).

4.2.6. Фільтри верхніх частот типу **К**

Згідно з визначенням фільтра верхніх частот (ФВЧ), даним в п.4.1, цей фільтр повинен заглушувати постійний струм і низькочастотні коливання і пропускати на вихід високочастотні коливання. Тому логічно поставити вимогу, щоб *горизонтальна вітка* (опір \underline{Z}_1) як Т-подібного, так і П-подібного фільтрів утворювала малий опір для високочастотних коливань і в той же час великий опір для низькочастотних коливань. У найпростішому випадку такі умови задовольняє ємнісний елемент. Також логічно поставити вимогу, щоб *вертикальна вітка* (опір \underline{Z}_2) як Т-подібного, так і П-подібного фільтрів утворювала великий опір для високочастотних струмів, щоб не замикати їх на нижній провід кола (тобто не шунтувати їх). У той же час низькочастотні струми якраз повинні цією віткою шунтуватися, замикатися нею і не доходити до навантаження. В найпростішому випадку такі умови задовольняє індуктивний елемент.

Отже, маємо $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}$, $\underline{Z}_2 = j\omega L$, звідки $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \frac{L}{C} = \rho^2$ де ρ , як і для ФНЧ, носить назву номінального характеристичного опору фільтра. Також бачимо, що такий вибір \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 задовольняє визначення фільтра типу **К**.

Схеми ФВЧ типу **К** наведені на рис.4.11,а (Т-подібна) та рис.4.11,б (П-подібна). Коефіцієнти 2 перед ємністю (рис.4.11,а) та індуктивністю (рис.4.11,б) обумовлені відповідно коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ перед \underline{Z}_1 на рис. 4.5,а та коефіцієнтом 2 перед \underline{Z}_2 на рис.4.5,б.

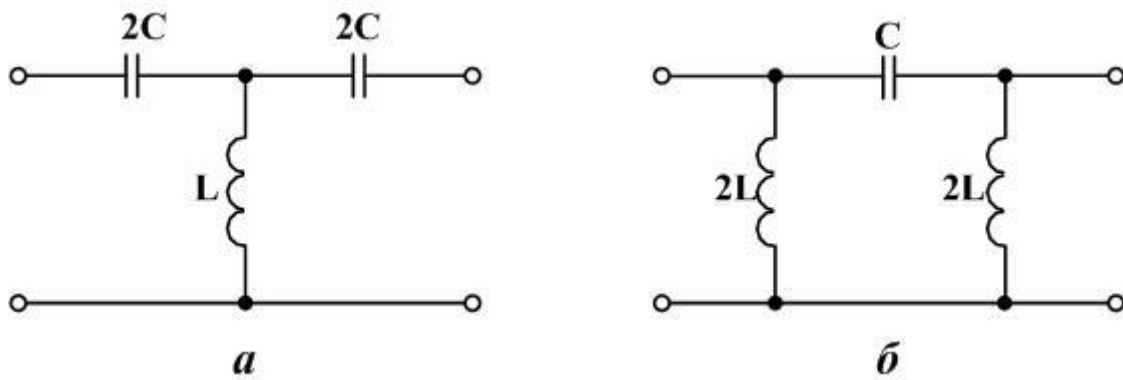


Рис. 4.11. ФВЧ типу К

Спочатку знайдемо частоти зрізу. Згідно зі співвідношенням (4.9) маємо

$$\frac{\underline{Z}_1(\omega_{cp1})}{4\underline{Z}_2(\omega_{cp1})} = \frac{1}{j\omega_{cp1}C} \cdot \frac{1}{4j\omega_{cp1}L} = -\frac{1}{4\omega_{cp}^2 LC} = 0,$$

звідки $\omega_{cp2} = \infty$. Ця величина не має практичного значення, бо є недосяжною.

Згідно ж зі співвідношенням (4.10) маємо (опускаючи індекс “2” в позначенні частоти зрізу)

$$\frac{1}{j\omega_{cp}C} = -4 \cdot j\omega_{cp}L,$$

звідки

$$\omega_{cp} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (4.38)$$

Це й є частота зрізу ФВЧ типу К.

Дістати якісне уявлення про розташування частоти зрізу та смуг пропускання і затримування можна, як і для ФНЧ типу К, за допомогою графічних побудовань. Спочатку треба накреслити в координатах “опір – частота” графіки залежностей $\underline{Z}_1(\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ та $4\underline{Z}_2(\omega) = j\omega L$ (це досить зробити ескізно, зберігаючи тільки характерні особливості графіків), як показано на рис.4.12. Потім шукаємо частоту, на якій обидві криві відстоять на *однаковій відстані* від осі частот, але *по різні боки* від неї. Це й буде частота зрізу ω_{cp} .

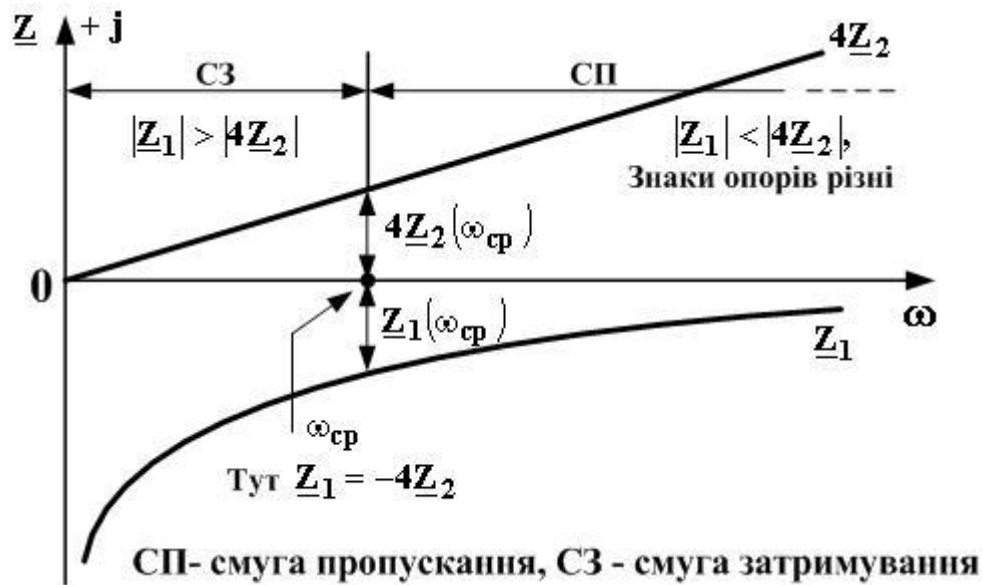


Рис. 4.12

Потім аналізуємо поведінку графіків $\underline{Z}_1(\omega)$ та $4\underline{Z}_2(\omega)$ по обидва боки від ω_{cp} . Спочатку подивимось лівіше. Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ *більший* від $|4\underline{Z}_2|$. Тому, хоча знаки опорів і є різними, але смуги пропускання зліва від ω_{cp} немає, тобто при $0 \leq \omega < \omega_{cp}$ наш фільтр має смугу затримування. Тепер подивимось правіше від ω_{cp} . Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ *менший* від $|4\underline{Z}_2|$ і знаки опорів *різні*. Але ж то є, згідно з п.4.2.2, умовою існування смуги пропускання. Отже, вправо від ω_{cp} лежить смуга пропускання.

Таким чином, ми впевнилися, що кола, схеми яких зображені на рис.4.11, й насправді є ФВЧ: вони заглушують струми з частотами від 0 до ω_{cp} і пропускають струми з частотами $\omega > \omega_{cp}$.

Тепер з'ясуємо, наскільки успішно ФВЧ типу **К** здійснює заглушення в смугі затримування, тобто знайдемо формулу, яка описує залежність $a_c(\omega)$.

У **смугі пропускання**, за її визначенням, маємо $a_c = 0$, і нічого обчислювати не треба.

Для **смуги затримування** скористаємось загальною формулою (4.15), в яку підставимо опори горизонтальної та вертикальної віток ФВЧ типу **К** $\underline{Z}_1 = 1/(j\omega C)$, $\underline{Z}_2 = j\omega L$:

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{1}{2j\omega L} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC} \right|.$$

Згідно з (4.38) маємо $1/(2\sqrt{LC}) = \omega_{\text{cp}}$, тому

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 - 2 \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\omega^2} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 - 2 \frac{f^2}{f_{\text{cp}}^2} \right|,$$

де

$$f_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\text{cp}}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}} \quad (4.39)$$

– частота зрізу в герцах.

Скористаємось нормованою частотою Ω , введеною співвідношенням (4.25). Тоді формула для частотної залежності ФВЧ типу **К** в смузі затримування набуває вигляду

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 - \frac{2}{\Omega^2} \right| \quad (4.40)$$

(одиницею вимірювання результату буде непер).

Повний графік частотної залежності a_c для ФВЧ типу **К** наведений на рис. 4.13. Частоті зрізу відповідає, згідно з (4.25), величина $\Omega = 1$; для $0 \leq \Omega < 1$ ординати графіка розраховують за формулою (4.40). Отже, залежність $a_c(\omega)$ можна записати в компактному вигляді як

$$a_c(\Omega) = \begin{cases} \operatorname{arch} \left| 1 - \frac{2}{\Omega^2} \right|, & \text{якщо } 0 \leq \Omega < 1 \text{ (сму́га затримування);} \\ 0, & \text{якщо } \Omega \geq 1 \text{ (сму́га пропускання).} \end{cases} \quad (4.41)$$

Власне згасання ФВЧ типу **К** в смузі затримування сягає нескінченної величини тільки при $\Omega = 0$, при інших частотах воно скінченне, на відміну від ідеального ФВЧ (рис.4.2). Наприклад, воно дорівнює близько 3 Нп при $\Omega = 0,4$ (тобто $\omega = 0,4 \omega_{\text{cp}}$).

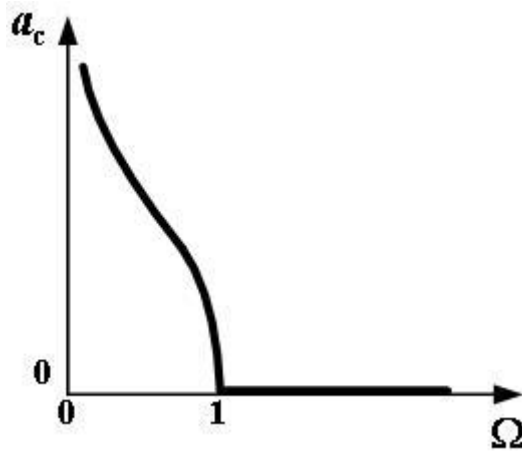


Рис. 4.13. Частотна залежність власного згасання ФВЧ типу К

Тепер знайдемо частотну залежність власного коефіцієнта фази ν_c ФВЧ типу К. Для **смуги пропускання** скористаємось загальним співвідношенням (4.11). Зробивши в ньому такі ж перетворення дроби $Z_1/(2Z_2)$, як і при виведенні формули для a_c , отримаємо, що в **смугі пропускання**

$$\nu_c = \arccos\left(1 - \frac{2}{\Omega^2}\right). \quad (4.42)$$

Для **смуги затримування** скористаємось загальним співвідношенням (4.17). Оскільки в цій смугі Z_1 і Z_2 мають різні знаки (див. рис.4.12), то з (4.17) маємо $\nu_c = \pi$. Але, забігаючи вперед, зазначимо, що залежність $\nu_c(\omega)$ чотириполіусника, який фізично можна виготовити, повинна бути неспадною функцією частоти.¹ Тому для ФВЧ типу К в **смугі затримування** вибирають $\nu_c = -\pi$, що з точки зору величини кута є величиною, еквівалентною π .

Отже, залежність $\nu_c(\Omega)$ можна в компактному вигляді записати як

$$\nu_c(\Omega) = \begin{cases} -\pi, & \text{якщо } 0 \leq \Omega < 1 \text{ (смуга затримування);} \\ \arccos\left(1 - \frac{2}{\Omega^2}\right), & \text{якщо } \Omega \geq 1 \text{ (смуга пропускання).} \end{cases} \quad (4.43)$$

¹ Це зв'язано з тим, що так званий груповий час проходження чотириполіусника сигналом є $t_{гр\ пр} = d\nu_c(\omega)/d\omega$ [5, с.263]. Ця похідна (а з нею – і час) є додатною тільки для неспадних функцій. Величина $t_{гр\ пр}$ не може бути від'ємною, бо це означає появу сигналу на виході раніше, ніж його подано на вхід.

Графік цієї залежності наведено на рис.4.14.

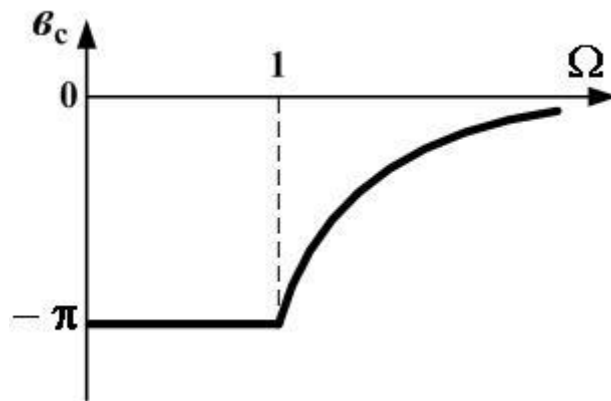


Рис. 4.14. Частотна залежність власного коефіцієнта фази ФВЧ типу **К**

Ще раз зверніть увагу на те, що залежності $a_c(\Omega)$ та $v_c(\Omega)$ однакові як для Т-подібного фільтра, так і для П-подібного.

А ось характеристичні опори для кожного з цих різновидів ФВЧ типу **К** обчислюють за різними формулами, оскільки різними є відповідні формули (4.20) та (4.21) для симетричних Т-подібного та П-подібного чотириполосників.

Величину характеристичного опору $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ для Т-подібного ФВЧ типу **К** отримаємо, підставивши $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}$ та $\underline{Z}_2 = j\omega L$ у вираз (4.20):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ХТК}} &= \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega C \cdot 4 \cdot j\omega L} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 4LC} \right)}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Оскільки $\sqrt{L/C} = \rho$ (див. початок цього підрозділу), а згідно з (4.38) маємо $1/(4LC) = \omega_{\text{ср}}^2$, то $\underline{Z}_{\text{ХТК}} = \rho \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}}$. Використавши ж нормовану частоту Ω , визначену співвідношенням (4.25), матимемо

$$\underline{Z}_{\text{ХТК}} = \rho \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}. \quad (4.45)$$

Зробивши аналогічні підстановки, перетворення та позначення у формулі (4.21), отримаємо формулу частотної залежності характеристичного опору $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ для П-подібного ФВЧ типу К:

$$\underline{Z}_{\text{ХПК}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}. \quad (4.46)$$

Аналізуючи величину (дійсну чи уявну) кожного з цих характеристичних опорів так, як це було зроблено для ФНЧ типу К, можна дійти висновку, що в смузі пропускання обидва вони мають **активний характер**, тоді як в смузі затримування $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ має *ємнісний характер*, а $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ має *індуктивний характер*. Тобто в смузі затримування як $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$, так і $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ мають реактивний характер.

Графіки частотних залежностей абсолютних величин опорів $\underline{Z}_{\text{ХТК}}$ та $\underline{Z}_{\text{ХПК}}$ наведені на рис. 4.15, при цьому там, де опори мають активний характер, графіки накреслені суцільною лінією, а там, де опори мають реактивний характер, графіки накреслені штриховою лінією. Відмітимо, що із зростанням Ω до нескінченності обидва опори прямують до величини ρ .

З вигляду графіків, зображених на рис.4.15, можна зробити ті ж самі висновки щодо поганої узгоджуваності ФВЧ типу К з активним частотонезалежним навантаженням, що й для ФНЧ типу К. Однак і для розрахунку ФВЧ задаються рівністю $\rho = R_n$, тобто

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R_n. \quad (4.47)$$

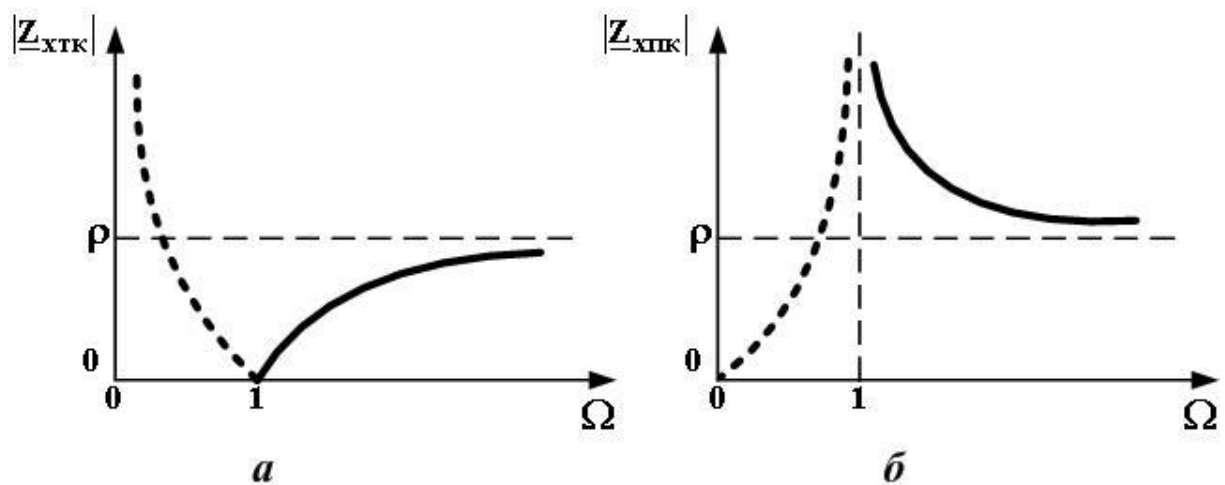


Рис. 4.15. Частотні залежності абсолютних величин характеристичних опорів: *a*– для Т-подібного ФВЧ типу К, *б* – для П-подібного ФВЧ типу К

Задаються також величиною ω_{cp} частоти зрізу. Згідно з (4.38) маємо рівність

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{2\omega_{cp}}. \quad (4.48)$$

Розв'язавши систему двох рівнянь (4.47) та (4.48) з двома невідомими L і C так, як ми це зробили з аналогічною системою для ФНЧ типу K , отримаємо розрахункові формули:

$$L = \frac{R_n}{2\omega_{cp}}, \quad (4.49)$$

$$C = \frac{1}{2\omega_{cp} \cdot R_n}. \quad (4.50)$$

Слід мати на увазі, що в Т-подібному ФВЧ типу K використано конденсатори ємністю $2C$ (рис.4.11,а), а в П-подібному ФВЧ типу K використано котушки індуктивністю $2L$ (рис.4.11,б).

4.2.7. Смугово-пропускаючий фільтр типу K

Згідно з визначенням, даним в п.4.1, смугово-пропускаючий фільтр (СПФ) повинен пропускати на навантаження струми, частоти яких лежать в певному діапазоні $[\omega_1, \omega_2]$, і заглушувати струми всіх інших частот. Тобто СПФ повинен мати властивості як ФНЧ, так і ФВЧ. Тому можна, в принципі, отримати СПФ, якщо каскадно ввімкнути ФНЧ з частотою зрізу ω_{cp2} та ФВЧ з частотою зрізу ω_{cp1} (рис.4.16). Але, як відмічено в [7], таким фільтром доцільно користуватись лише в тому випадку, коли $\omega_{cp2} > 2\omega_{cp1}$. У протилежному випадку кращі характеристики мають СПФ, складені за спеціальними схемами.

Орієнтуючись на побудову СПФ за Т- або П-подібною схемами (рис.4.5), можна розглянути такі міркування. Поставимо вимогу, щоб *горизонтальна вітка* (опір Z_1) чинила малий опір струмам, частоти яких лежать в певному діапазоні навколо деякої частоти ω_0 , а струмам усіх інших частот чинила б великий опір. В найпростішому випадку такі вимоги задовольняє послідовний коливальний контур (див.п.1.3). *Вертикальна ж вітка* (опір Z_2) повинна чинити струмам в тому діапазоні частот навколо ω_0 великий опір, щоб не шунтувати їх, а от струми усіх частот, які лежать іззовні того діапазону, ця вітка повинна шунтувати своїм малим опором.

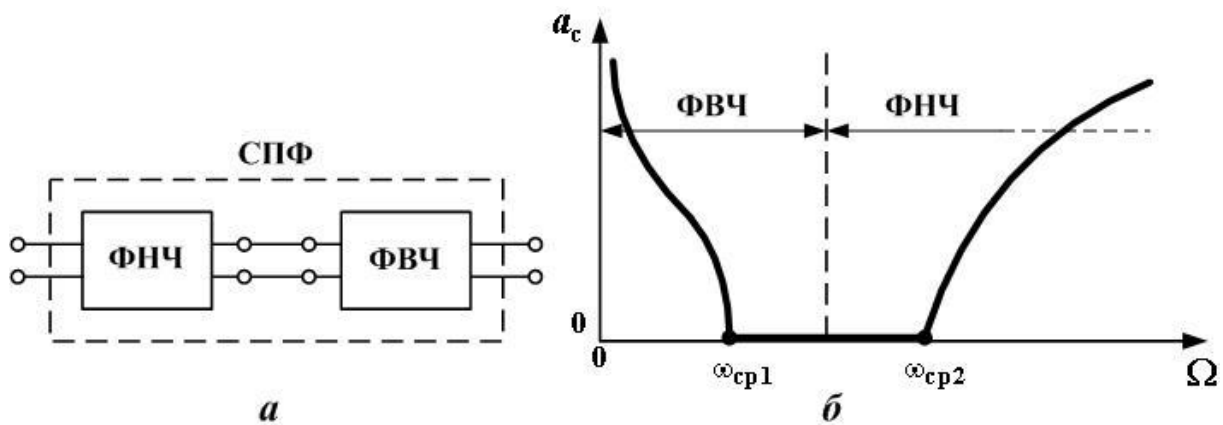


Рис. 4.16. Складений СПФ (а) і наближена частотна залежність його власного згасання (б)

У найпростішому випадку такі вимоги задовольняє паралельний коливальний контур (див.п.1.3). В підсумку приходимо до схем СПФ, наведених на рис.4.17. Коефіцієнти $\frac{1}{2}$ та 2 при індуктивностях і ємностях обумовлені відповідно коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ при \underline{Z}_1 на рис. 4.5,а та коефіцієнтом 2 при \underline{Z}_2 на рис.4.5,б.

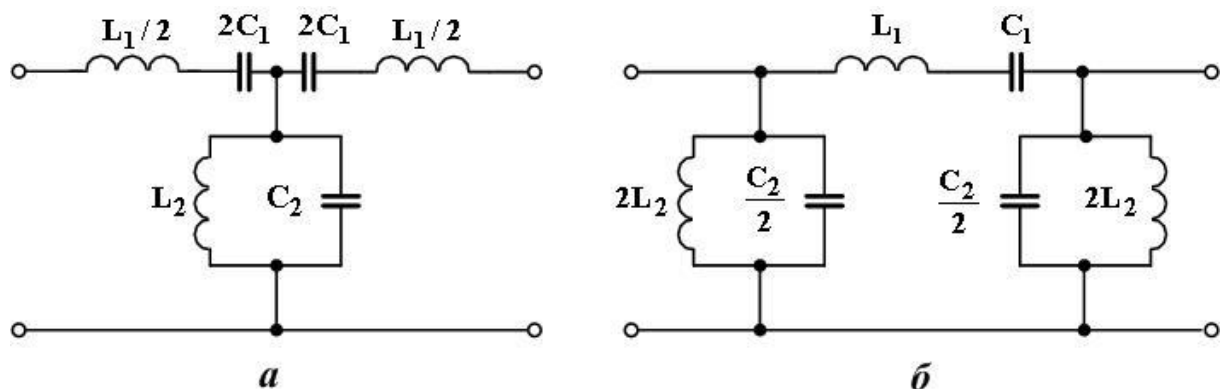


Рис. 4.17. СПФ типу К

Як ми встановили в п.4.2.5, двополюсники, один з яких утворює горизонтальну вітку фільтра типу К і має опір \underline{Z}_1 , а другий утворює вертикальну вітку фільтра типу К і має опір \underline{Z}_2 , повинні бути зворотними. А як показано в п.1.4, послідовний і паралельний контур будуть зворотними двополюсниками лише у випадку, коли їхні резонансні частоти дорівнюють одній і тій самій величині. Позначимо цю величину як ω_0 . Частота резонансу кожного послідовного коливального контуру з рис.4.17 дорівнює $1/\sqrt{L_1 C_1}$, а частота антирезонансу кожного паралельного контуру з рис.4.17 дорівнює $1/\sqrt{L_2 C_2}$. Тож маємо рівність

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0, \quad (4.51)$$

звідки

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{L_2}{C_1}. \quad (4.52)$$

Частотна залежність опору \underline{Z}_1 послідовного коливального контуру визначається вже відомим виразом (1.1):

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = jX_1,$$

де

$$X_1 = \omega L_1 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}. \quad (4.53)$$

Частотна залежність опору \underline{Z}_2 паралельного коливального контуру визначається вже відомим виразом (1.2):

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{j} X_2,$$

де

$$X_2 = \frac{1}{\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (4.54)$$

Тоді маємо

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = X_1 \cdot X_2 = \frac{L_1}{C_2}. \quad (4.55)$$

З огляду на рівність (4.52) також маємо

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = X_1 \cdot X_2 = \frac{L_2}{C_1}. \quad (4.56)$$

Можна ввести єдине позначення

$$\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}. \quad (4.57)$$

Величину ρ , визначену цим співвідношенням, називають **номінальним характеристичним опором СПФ типу К**.

Тепер знайдемо частоти зрізу. Згідно із загальною формулою маємо

$$\frac{j\omega_{cp}L_1 \cdot \frac{\omega_{cp}^2 - \omega_0^2}{\omega_{cp}^2}}{4 \cdot \frac{\omega_{cp}^2}{j\omega_{cp}C_2} \cdot \frac{\omega_{cp}^2 - \omega_0^2}}{4}} = -\frac{\omega_{cp}^2 L_1 C_2}{4} \cdot \left(\frac{\omega_{cp}^2 - \omega_0^2}{\omega_{cp}^2} \right)^2 = 0,$$

або

$$\frac{L_1 C_2}{4} \cdot \frac{(\omega_{cp}^2 - \omega_0^2)^2}{\omega_{cp}^2} = 0.$$

Звідси $\omega_{cp} = \omega_0$. Але згідно з ідеєю побудови СПФ типу **К**, частота ω_0 лежить всередині смуги пропускання і як частота зрізу фізичного сенсу не має.

Використаємо другу загальну формулу для знаходження частоти зрізу – формулу (4.10) з урахуванням (4.53) та (4.54)

$$jX_1(\omega_{cp}) = -\frac{4}{j}X_2(\omega_{cp}). \quad (4.58)$$

Але з (4.55) та (4.57) випливає, що $X_2 = \rho^2 / X_1$, тому співвідношення (4.58) набуває вигляду

$$X_1(\omega_{cp}) = \frac{4\rho^2}{X_1(\omega_{cp})},$$

або

$$X_1^2(\omega_{cp}) = 4\rho^2,$$

звідки

$$X_1(\omega_{cp}) = \pm 2\rho.$$

Підставимо X_1 згідно з (4.53):

$$L_1 \cdot \frac{\omega_{cp}^2 - \omega_0^2}{\omega_{cp}} = \pm 2\rho.$$

Це квадратне рівняння відносно ω_{cp} . Оскільки права частина цього виразу має два варіанти знаків, то розв'язків цього рівняння – чотири. Проте можна впевнитися, що тільки два з них – додатні величини, тобто мають фізичний сенс. Це

$$\omega_{cp1} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}} - \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}, \quad (4.59)$$

$$\omega_{cp2} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}} + \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}. \quad (4.60)$$

Якщо ці два співвідношення перемножити, то одержимо

$$\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2} = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Але згідно з(4.51) $1/(L_1 C_1) = \omega_0^2$, тому

$$\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2} = \omega_0^2. \quad (4.61)$$

Тобто, знаючи ω_0 та одну з частот зрізу, можна обчислити другу частоту зрізу.

Якщо відняти рівність (4.59) від рівності (4.60), то матимемо величину $\Delta\omega$ ширини смуги пропускання СПФ типу К

$$\Delta\omega = \omega_{cp2} - \omega_{cp1} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (4.62)$$

В теорії фільтрів використовують також відносну ширину смуги пропускання

$$s = \Delta\omega / \omega_0$$

та зворотну їй величину

$$d = \frac{1}{s} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (4.63)$$

Дістати якісне уявлення про розташування частот зрізу, смуги пропускання та смуг затримувannya можна, як і для ФНЧ та ФВЧ, за допомогою графічних побудовань. Спочатку накреслимо в координатах “опір – частота” графіки залежностей $\underline{Z}_1(\omega)$ (це крива $\underline{Z}_p(\omega)$ з рис.1.6) та $4\underline{Z}_2(\omega)$ (це крива $\underline{Z}_A(\omega)$ з рис. 1.8). причому, згідно з ідеєю побудови СПФ типу **К**, резонансні частоти повинні співпадати. Графічні побудови можна робити ескізно, зберігаючи тільки характерні особливості графіків. Результат подано на рис.4.18. Перш за все шукаємо частоти зрізу як такі частоти, на котрих графіки $\underline{Z}_1(\omega)$ та $4\underline{Z}_2(\omega)$ відстоять на *однакові відстані* від осі частот, але *по різні боки від неї*. Бачимо, що таких частот дві: нижня частота зрізу ω_{cp1} та верхня частота зрізу ω_{cp2} (зауважимо, що величина $A_1 = |\underline{Z}_1(\omega_{cp1})| = |4\underline{Z}_2(\omega_{cp1})|$ в загальному випадку не дорівнює величині $A_2 = |\underline{Z}_1(\omega_{cp2})| = |4\underline{Z}_2(\omega_{cp2})|$).

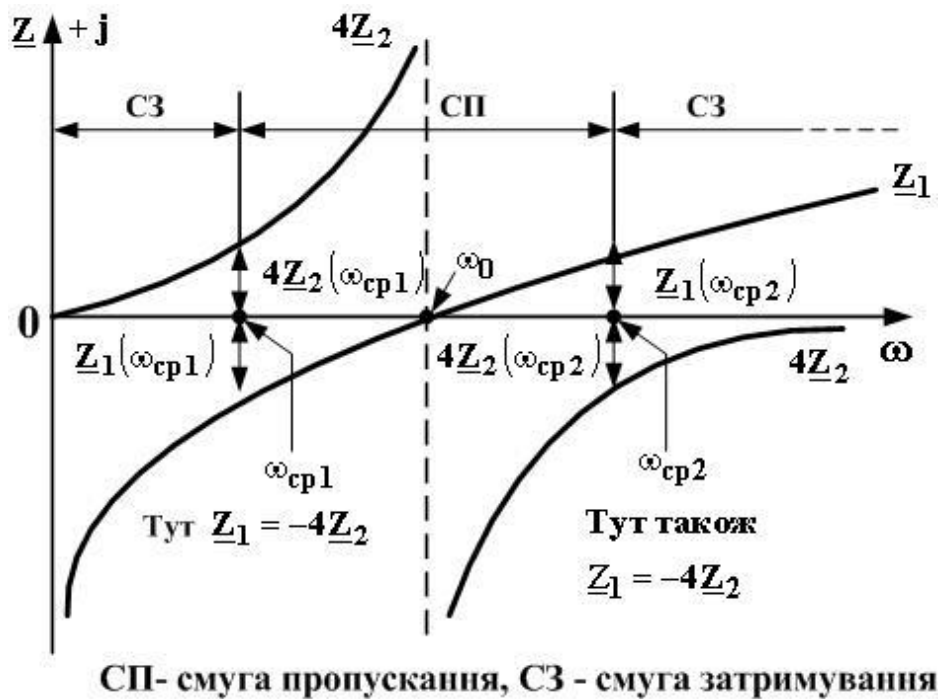


Рис. 4.18

Потім аналізуємо поведінку графіків $\underline{Z}_1(\omega)$ і $4\underline{Z}_2(\omega)$ по обидва боки від ω_{cp1} . Спочатку подивимось лівіше. Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ *більший* від $|4\underline{Z}_2|$, тобто тут має місце смуга затримувannya. Тепер подивимось правіше.

Бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ менший від $|4\underline{Z}_2|$, і знаки опорів \underline{Z}_1 і \underline{Z}_2 різні. Ці умови виконуються на ділянці від ω_{cp1} до ω_{cp2} , тобто на цій ділянці має місце смуга пропускання. Наприкінці, дивимось правіше від частоти ω_{cp2} і бачимо, що там $|\underline{Z}_1|$ знов більший від $|4\underline{Z}_2|$, тому при $\omega > \omega_{cp2}$ теж має місце смуга затримування. Таким чином, ми впевнилися, що кола, схеми яких зображені на рис.4.17, й насправді є СПФ: вони пропускають струми з частотами з діапазону $[\omega_{cp1}, \omega_{cp2}]$ і заглушують струми всіх інших частот.

Перш ніж ми почнемо виводити формули власного згасання та власного коефіцієнта фази СПФ типу **K** із загальних формул (4.11) та (4.15), звернемо увагу на множник $\underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)$, який входить до цих формул. І дещо перетворимо його. Отже, врахувавши (4.53) та (4.54), маємо

$$\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = \frac{-\omega^2 L_1 C_2}{2} \cdot \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} \right)^2 = -\frac{L_1 C_2}{2} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2}.$$

Помноживши чисельник та знаменник на ω_0^2 , продовжимо перетворення

$$\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = \frac{-\omega_0^2 L_1 C_2}{2} \cdot \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 \omega^2} \right)^2 = -\frac{\omega_0^2 L_1 C_2}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Врахувавши співвідношення (4.62) та (4.63), отримаємо:

$$\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = -2 \frac{\omega_0^2}{(\Delta\omega)^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = -2d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Введемо нормовану частоту $\Omega = \omega/\omega_0$, тоді

$$\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = -2d^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2. \quad (4.64)$$

Тепер знайдемо аналітичний опис залежності $a_c(\omega)$. В смузі пропускання, за її визначенням, маємо $a_c = 0$, і нічого обчислювати не треба.

Для смуги затримування скористаємось загальною формулою (4.15), в якій врахуємо співвідношення (4.64):

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 - 2d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right| = \quad (4.65)$$

$$= \operatorname{arch} \left| 1 - 2d^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right|. \quad (4.66)$$

(одиницею вимірювання результату буде непер).
 Повний графік частотної залежності a_c для СПФ типу **К** наведений на рис.4.19. На відміну від ФНЧ та ФВЧ у СПФ величина $\Omega=1$ нормованої частоти відповідає частоті $\omega_0 = \sqrt{\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}}$, а не одній з частот зрізу. Отже, залежність $a_c(\omega)$ можна записати в компактному вигляді як

$$a_c(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega_{cp1} \leq \omega \leq \omega_{cp2}, \\ \operatorname{arch} \left| 1 - 2d^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right| & \text{для всіх інших частот.} \end{cases} \quad (4.67)$$

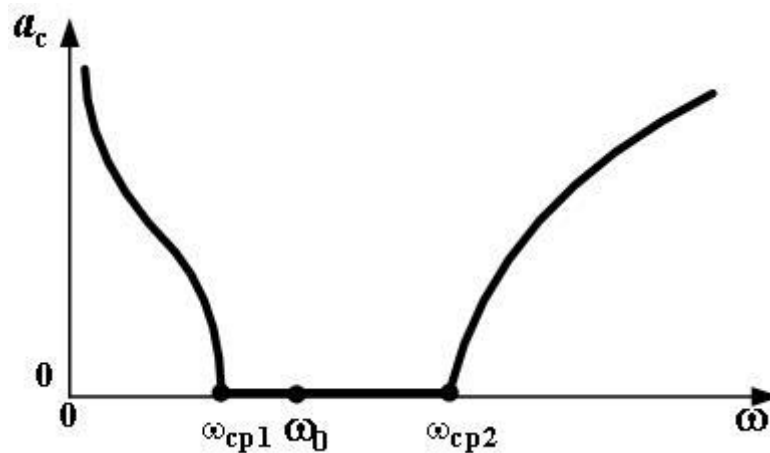


Рис. 4.19. Частотна залежність власного згасання СПФ типу **К**

Тепер знайдемо частотну залежність власного коефіцієнта фази φ_c СПФ типу **К**. Для **смуги пропускання** скористаємось загальним співвідношенням (4.12). Підставивши в нього дріб $Z_1/(2Z_2)$ у вигляді (4.64), отримаємо

$$\varphi_c = 2 \arcsin \left(\sqrt{d^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2} \right) =$$

$$= 2 \arcsin \left[d \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right] = \quad (4.68)$$

$$= 2 \arcsin \left[d \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (4.69)$$

Користуючись співвідношенням (4.61) – (4.63), неважко переконатися, що при $\omega = \omega_{\text{ср1}}$ з (4.69) матимемо $\vartheta_c = -\pi$, а при $\omega = \omega_{\text{ср2}}$ матимемо $\vartheta_c = \pi$. Тож, зважаючи ще й на загальне співвідношення (4.17), матимемо, що в **смузі затримування** $\vartheta_c = -\pi$ при $\omega < \omega_{\text{ср1}}$ та $\vartheta_c = \pi$ при $\omega > \omega_{\text{ср2}}$.

Отже, залежність $\vartheta_c(\omega)$ можна в компактному вигляді записати як

$$\vartheta_c(\omega) = \begin{cases} -\pi & , \text{якщо } \omega < \omega_{\text{ср1}}, \\ 2 \arcsin \left[d \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] & , \text{якщо } \omega_{\text{ср1}} \leq \omega \leq \omega_{\text{ср2}}, \\ \pi & , \text{якщо } \omega > \omega_{\text{ср2}}. \end{cases} \quad (4.70)$$

Графік цієї залежності наведено на рис.4.20. Зверніть увагу на те, що частота ω_0 ближча до $\omega_{\text{ср1}}$, ніж до $\omega_{\text{ср2}}$. Причина в тому, що згідно з (4.61) величина ω_0 є *середнім геометричним* величин $\omega_{\text{ср1}}$ та $\omega_{\text{ср2}}$, а воно завжди *не перевищує середнього арифметичного* значення цих величин (тобто середньої частоти смуги пропускання).

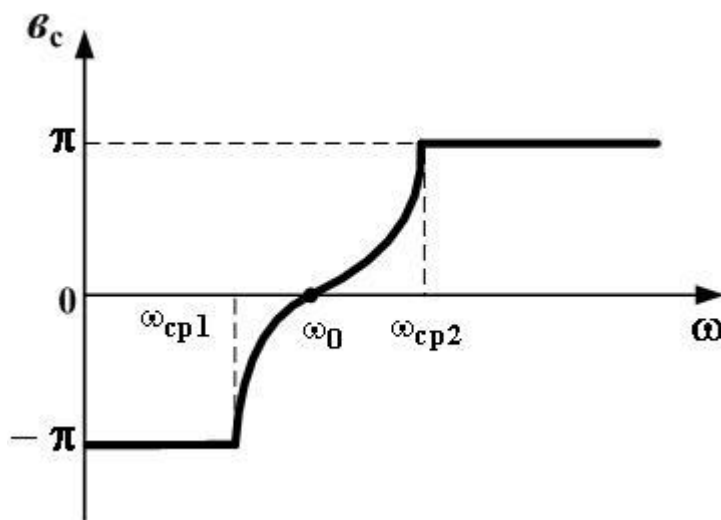


Рис. 4.20. Частотна залежність власного коефіцієнта фази СПФ типу К

Зауважимо, що залежності $a_c(\omega)$ та $v_c(\omega)$ є однаковими як для Т-подібного СПФ типу **К**, так і для П-подібного СПФ типу **К**.

Для знаходження характеристичних опорів кожного з цих різновидів СПФ типу **К** скористаємось загальними співвідношеннями (4.20) та (4.21). Зокрема, підставивши наведені вище вирази для опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 в (4.20) і врахувавши (4.64), матимемо характеристичний опір Т-подібного СПФ типу **К**

$$\underline{Z}_{\text{хтк}} = \rho \cdot \sqrt{1 - d^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2} = \quad (4.71)$$

$$= \rho \sqrt{1 - d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (4.72)$$

де $\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$ – номінальний характеристичний опір згідно з (4.57).

Аналогічним чином перетворивши вираз (4.21), матимемо характеристичний опір П-подібного СПФ типу **К**

$$\underline{Z}_{\text{хпк}} = \rho / \sqrt{1 - d^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2} = \quad (4.73)$$

$$= \rho / \sqrt{1 - d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (4.74)$$

Користуючись співвідношеннями (4.61) – (4.63), неважко переконатися, що при $\omega = \omega_{\text{ср1}}$ маємо $d \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) = -1$, а при $\omega = \omega_{\text{ср2}}$ маємо

$d \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) = 1$ і що в смузі пропускання ця величина лежить між (-1) та 1.

Отже, в смузі пропускання під знаком кореня в (4.72) та (4.74) стоїть додатне число і опори $\underline{Z}_{\text{хтк}}$ та $\underline{Z}_{\text{хпк}}$ є **чисто активними**. Аналізуючи ж характер цих опорів у **обох смугах затримування** аналогічно тому, як це було зроблено для ФНЧ типу **К**, неважко переконатися, що ці опори мають **характери реактивностей**, вказані на рис.4.21. Як і раніше, ділянки графіків, на яких опори мають активний характер, накреслені суцільною лінією, а ділянки, на яких опори мають реактивний характер, накреслені штриховою лінією.

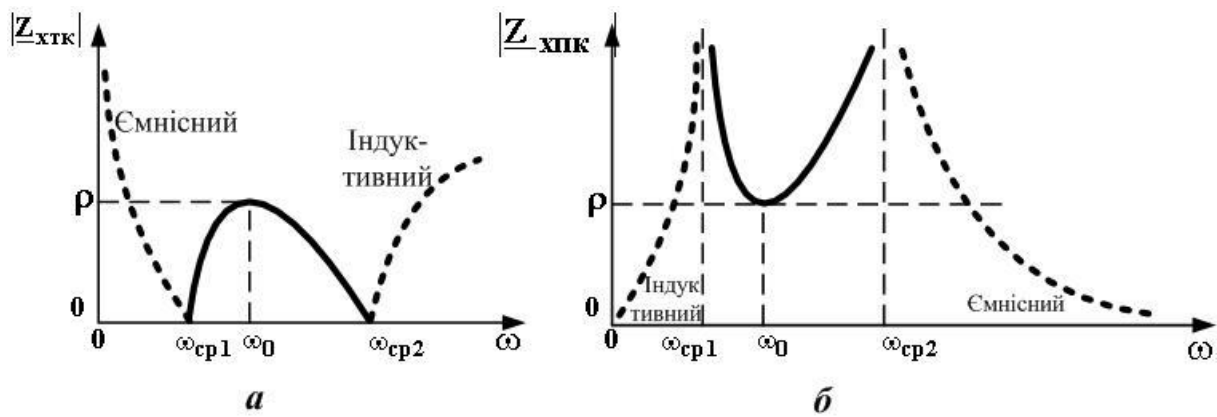


Рис. 4.21. Частотні залежності абсолютних величин характеристичних опорів: *a* – для Т-подібного СПФ типу **К**; *б* – для П-подібного СПФ типу **К**

На частоті ω_0 обидва опори сягають величини ρ , а на інших частотах смуги пропускання набагато відрізняються від цієї величини. Звідси випливає, як і для ФНЧ та ФВЧ типу **К**, що й СПФ цього типу теж забезпечує погане узгодження з активним частотонезалежним навантаженням з опором R_n . Втім, при розрахунку СПФ типу **К** звичайно вважають, що $\rho = R_n$. Ця рівність з урахуванням (4.57) дає першу формулу для розрахунку фільтра:

$$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = R_n. \quad (4.75)$$

Перед початком розрахунку задаються також частотами зрізу ω_{cp1} та ω_{cp2} , тому друге та третє співвідношення для розрахунку СПФ типу **К** – це вираз (4.62)

$$\frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} = \omega_{cp2} - \omega_{cp1} \quad (4.76)$$

та подвійна рівність, що випливає з (4.51) та (4.61):

$$\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2} = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}. \quad (4.77)$$

Поділивши (4.76) на (4.75), отримаємо, що $\frac{L_1}{2} = \frac{R_n}{\omega_{cp2} - \omega_{cp1}}$, звідки

$$L_1 = \frac{2R_H}{\omega_{cp2} - \omega_{cp1}}. \quad (4.78)$$

Зі співвідношення (4.77) маємо

$$C_1 = \frac{1}{\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2} \cdot L_1}.$$

Підставивши сюди L_1 з (4.78), отримаємо

$$C_1 = \frac{\omega_{cp2} - \omega_{cp1}}{2R_H \cdot \omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}}. \quad (4.79)$$

З вихідної рівності (4.75) випливає, що $C_2 = L_1 / R_H^2$. Підстановка сюди рівності (4.78) дає

$$C_2 = \frac{2}{R_H \cdot (\omega_{cp2} - \omega_{cp1})}. \quad (4.80)$$

Нарешті, з другої рівності в співвідношенні (4.77) маємо

$$L_2 = L_1 C_1 / C_2. \quad (4.81)$$

Слід мати на увазі, що в горизонтальних вітках Т-подібного СПФ типу **К** використано котушки індуктивністю $L_1/2$ та конденсатори ємністю $2C_1$ (рис.4.17,а), а у вертикальних вітках П-подібного СПФ типу **К** використано котушки індуктивністю $2L_2$ і конденсатори ємністю $C_2/2$ (рис.4.17,б).

4.2.8. Смугово-затримуючий фільтр типу **К**

Згідно з визначенням, даним в п.4.1, смугово-затримуючий фільтр (СЗФ) повинен заглушувати струми, частоти яких лежать в певному діапазоні $[\omega_1, \omega_2]$, і пропускати на навантаження струми всіх інших частот. Тобто СЗФ має властивості, протилежні властивостям СПФ. З ідеї побудови СПФ типу **К** випливає ідея побудови СЗФ типу **К**: просто поміняти місцями коливальні контури, які стоять в горизонтальній та вертикальній вітках СПФ (рис.4.22, а,б), зберігши при цьому єдину частоту налаштування цих контурів

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Можна довести, що номінальний характеристичний опір СЗФ типу **К** визначається за тими ж співвідношеннями, що й для СПФ:

$$\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}.$$

Частотні характеристики СЗФ типу **К** утворені немовби “зшитими” одна з другою характеристиками ФНЧ та ФВЧ і мають вигляд, наведений на рис. 4.22, в – е. Як і для фільтрів, розглянутих вище, на рис. 4.22 використані скорочення СП – для смуги пропускання, СЗ – для смуги затримування, а також вказано характер опорів $Z_{ХТК}$ і $Z_{ХПК}$ на різних ділянках частотного діапазону. Більш детальна інформація про СЗФ типу **К** міститься в [7].

4.2.9. Переваги та недоліки фільтрів типу **К**

Основні переваги:

- 1) монотонне зростання власного згасання в міру прямування частоти вглиб смуги затримування;
- 2) простота схеми та її розрахунку.

Основні недоліки:

- 1) надто повільне зростання власного згасання на ділянці смуги затримування, що прилягає до частоти зрізу. Як наслідок: не дуже добре розділення сигналів та завад, які межують із частотою зрізу;

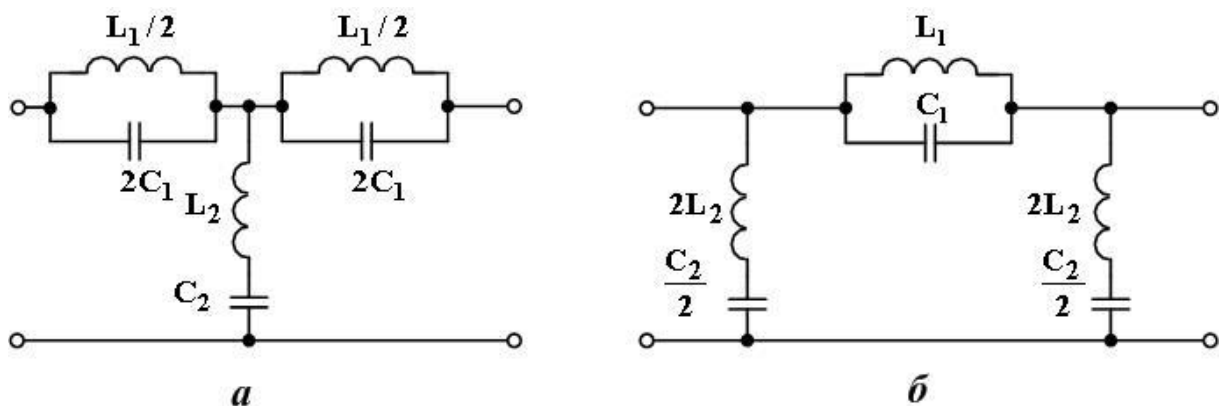


Рис. 4.22. Схеми та частотні характеристики СЗФ типу **К**:
a – Т-подібна схема; **б** – П-подібна схема

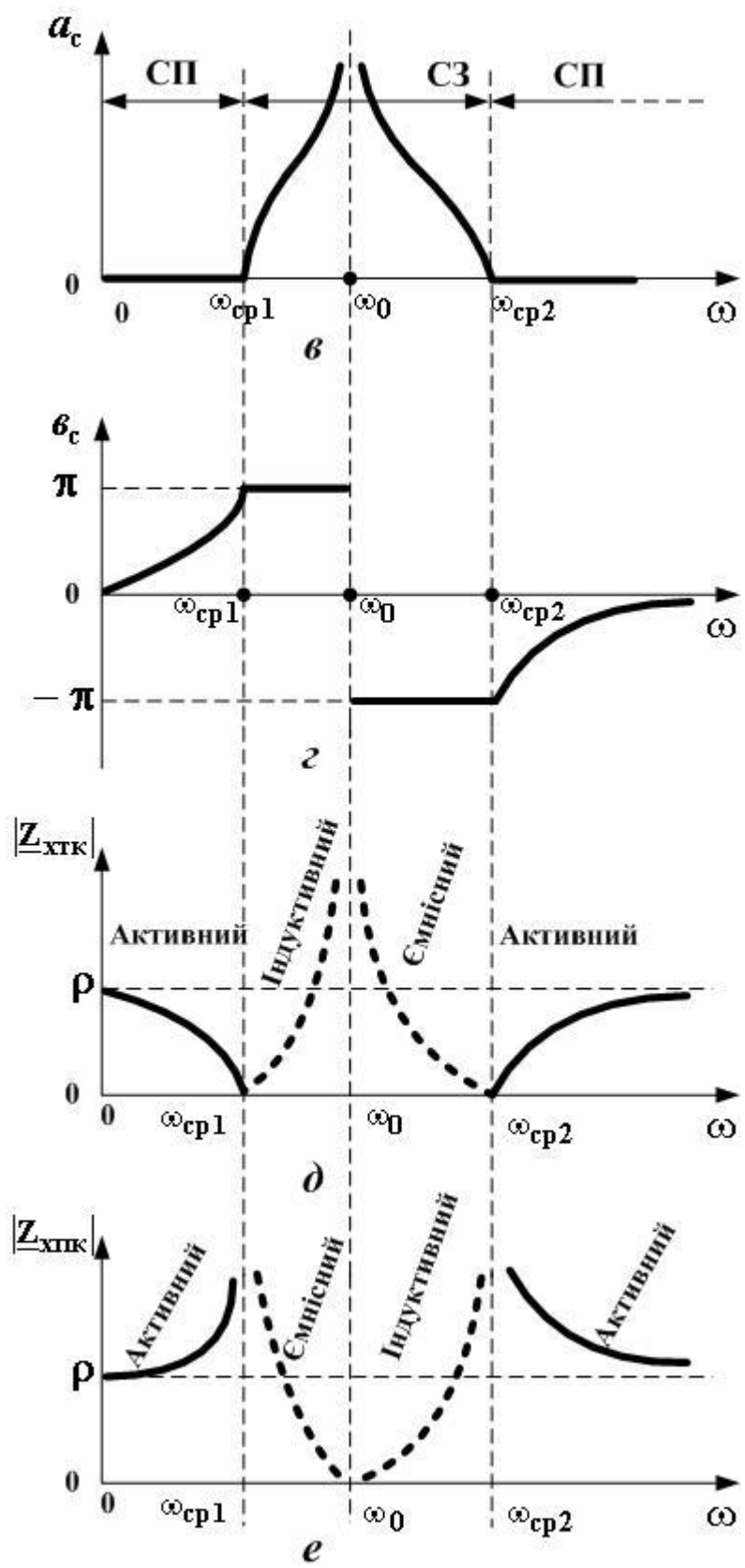


Рис. 4.22. Схеми та частотні характеристики СЗФ типу К:
в - власне згасання; **г** - власний коефіцієнт фази; **д** - характеристичний опір Т-подібного фільтра; **е** - характеристичний опір П-подібного фільтра

2) нелінійність залежності $\epsilon_c(\omega)$ у смузі пропускання, внаслідок чого фільтр вносить фазові спотворення, тобто порушує співвідношення між фазами гармонік сигналу;

3) суттєво непостійна величина характеристичного опору в смузі пропускання, що призводить до поганої узгодженості з активним частотонезалежним опором навантаження.

З огляду на вказані недоліки, в багатьох практичних випадках замість фільтрів типу **K** або сумісно з ними використовують фільтри з більш складними схемами та покращеними характеристиками.

4.2.10. Вплив втрат і неузгодженості на характеристики фільтрів типу **K**

Фізично неможливо виготовити котушку індуктивності, яка б не мала активного опору, та конденсатор без втрат у діелектрику. Втратами в конденсаторі нерідко можна знехтувати (особливо на низьких частотах), але втрати в котушці відчутні практично завжди. Розглянемо вплив цих втрат на прикладі ФНЧ типу **K**.

Розглянемо найпростішу схему заміщення реальної котушки індуктивності (див. [1, с.134], або [18]), зображену на рис.4.23.



Рис. 4.23. Найпростіша схема заміщення реальної котушки індуктивності

Активний опір дроту, яким намотано котушку, врахований резистором R_k . Якість котушки прийнято характеризувати її добротністю $Q = \omega L / R_k$, обернену їй величину називають коефіцієнтом втрат:

$$\alpha = R_k / \omega L. \quad (4.82)$$

Тоді опір Z_1 горизонтальної вітки ФНЧ типу **K** можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_k + j\omega L = \\ &= j\omega L(1 - j\alpha). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Опір Z_2 вертикальної вітки вважаємо, як і раніше, чисто ємнісним: $Z_2 = 1/(j\omega C)$. За таких умов параметр \underline{A} , визначений співвідношеннями

(4.1) і (4.2), вже не є дійсним числом, а є числом комплексним. Це впливає з порівняння (4.1) та (4.2):

$$\text{ch } \underline{g}_c = \text{ch}(a_c + j\epsilon_c) = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}. \quad (4.84)$$

Дріб у правій частині цієї рівності з урахуванням (4.83) набуває вигляду

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\omega^2 LC(1 - \alpha).$$

Врахуємо ще частоту зрізу ФНЧ типу **К**, визначену рівністю (4.23):

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} &= -4 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} \cdot (1 - j\alpha) = \\ &= -4\Omega^2 \cdot (1 - j\alpha), \end{aligned} \quad (4.85)$$

де Ω – нормована частота (4.25).

Підставивши (4.85) в праву частину рівності (4.84), можна знайти a_c та ϵ_c , причому найрозумніше зробити це числовими методами. Якісний вигляд частотних залежностей власного згасання та власного коефіцієнта фази ФНЧ типу **К** з урахуванням втрат у котушках наведено на рис. 4.24.

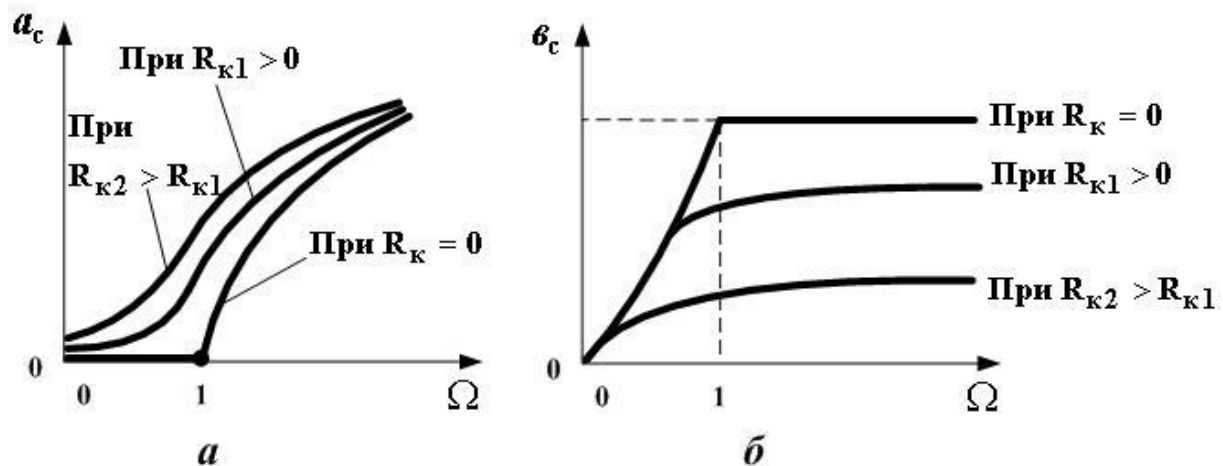


Рис. 4.24. Частотні залежності власного згасання (а) та власного коефіцієнта фази (б) ФНЧ типу **К** за наявності втрат у котушках

Бачимо, що із зростанням величини R_k залежність $a_c(\omega)$ згладжується і мають місце погана частотна вибірність та заглушування сигналів у смузі пропускання. Більш нелінійною стає й залежність $\epsilon_c(\omega)$ в смузі пропускання.

Аналогічний згладжуючий вплив спричиняють втрати й на частотні характеристики ФВЧ, СПФ та СЗФ. В результаті частотна вибірність цих фільтрів погіршується. Більш детально про вплив втрат на характеристики фільтрів типу **К** можна знайти в [6].

Як ми вже зауважували вище, характеристичний опір будь-якого фільтра типу **К** суттєво відрізняється від постійної величини, зокрема, в смузі пропускання. Тому якщо генератор і навантаження мають опори, що є активними та не залежать від частоти (а на практиці так воно й відбувається), то фільтр працює як чотирьополосник, який не узгоджений ані на вході, ані на виході. А це, як показано в п.2.6, призводить до того, що фільтр вносить у сигнал робоче згасання, яке перевищує власне згасання фільтра, тобто призводить до додаткового послаблення сигналу, яке є небажаним явищем. Неузгодженість впливає також і на коефіцієнт фази: робочий коефіцієнт фази (уявна частина робочої сталої передачі(2.95)) перестає дорівнювати власному коефіцієнту фази. Для ілюстрації написаного розглянемо ФНЧ типу **К**, ввімкнений між генератором з внутрішнім опором Z_G і навантаженням з опором Z_H (рис.4.25).

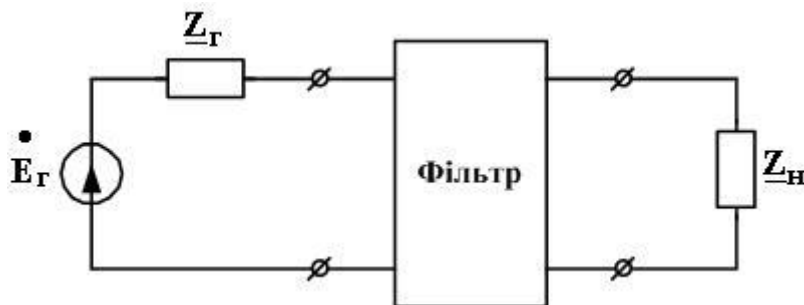


Рис. 4.25

Припустимо, що Z_H є чисто активним і дорівнює величині ρ (як і вважають при стандартному розрахунку ФНЧ типу **К**). Припустимо також, що й $Z_G = \rho$. Як показано на рис.4.26, це призводить до погіршення частотної виборності фільтра.

А ось при $Z_G = Z_H = 10\rho$ частотно-виборні властивості фільтра практично зникають. Вплив величин Z_G та Z_H на коефіцієнт фази проілюстровано на рис.4.27. Більш детальну теорію з впливу неузгодженостей на характеристики фільтрів можна знайти в класичній роботі [7] і, частково, в підручнику [5].

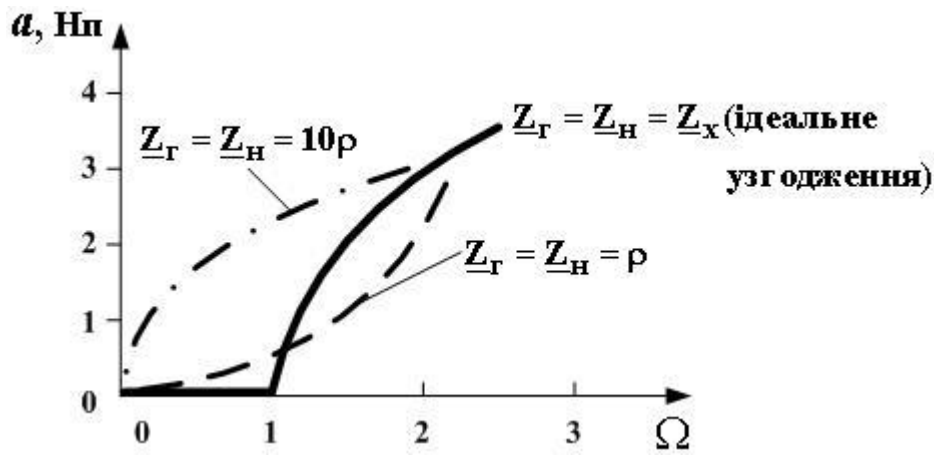


Рис. 4.26

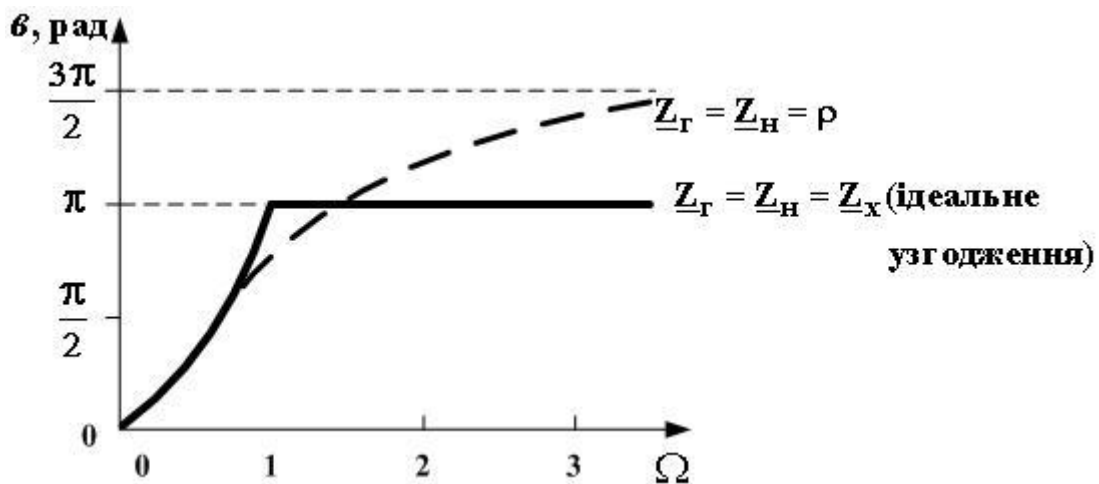


Рис. 4.27

Відхилення частотних характеристик від тих, що відповідають узгодженому режиму роботи, найбільш відчутні в складених фільтрах, утворених з'єднанням окремих фільтрів.

4.2.11. Доцільність вдосконалення фільтрів типу К. Ідея, яка лежить в основі побудови фільтрів нового типу

Перераховуючи недоліки фільтрів типу К, ми відмітили, що ці фільтри погано відділяють сигнали, що лежать в смузі пропускання поблизу частоти зрізу, та завади, котрі лежать поблизу неї ж, але в смузі затримання. Крім того, характеристичний опір будь-якого фільтра типу К дуже вже непостійний в смузі пропускання, що при активних частотонезалежних опорах генератора та навантаження відчутно погіршує частотні характеристики цього фільтра (див. попередній підрозділ). Тому доцільно спробувати виправити становище, побудувавши на базі фільтра

типу **К** новий фільтр, в схемі якого будуть додаткові елементи, що забезпечать нам додаткові можливості для підлаштування частотних характеристик цього нового фільтра під практичні потреби. Що це за елементи, скільки їх потрібно і де їх розташувати? Щоб дістати відповідь, розглянемо за рахунок чого забезпечуються пропускання та затримування Т- та П-подібного чотириполіосників¹ (рис.4.5). Щоб ці кола успішно пропускали струм від генератора до навантаження, треба мати малим опір Z_1 горизонтальних віток, якими струм генератора прямує до навантаження. Водночас треба мати великим опір Z_2 вертикальних віток, щоб струм генератора через них не стікав у нижній провід кола, минаючи навантаження. І навпаки, щоб Т- та П-подібні чотириполіосники успішно заглушували струм генератора (тобто зовсім або майже не пропускали його до навантаження), треба мати великим опір Z_1 горизонтальних віток. При цьому опір Z_2 вертикальних віток треба мати малим, щоб струм генератора замикався ними, минаючи навантаження.

Поставимо такі вимоги: на деякій частоті ω_∞ , що розташована в смузі затримування досить близько до частоти зрізу ω_{cp} , наш новий фільтр повинен або замкнути генератор накоротко, або розірвати шлях між генератором і навантаженням. Спробуємо задовольнити ці вимоги шляхом удосконалення П-подібного ФНЧ типу **К** на базі вищенаведених міркувань. У найпростішому випадку замикання на певній частоті здатний створити відомий нам ідеальний послідовний коливальний контур: його опір на частоті резонансу ω_p дорівнює нулю. Розрив кола на певній частоті здатний створити теж відомий нам ідеальний паралельний коливальний контур: його опір на частоті антирезонансу ω_A дорівнює нескінченності. Тож запропоноване вдосконалення схеми П-подібного ФНЧ типу **К** виглядатиме так, як показано на рис.4.28.

Треба лише так підібрати величини L'_2, C'_2, L''_1, C''_1 , щоб як ω_p , так і ω_A лежали в смузі затримування поблизу ω_{cp} . Очікуваний результат впливу такого вдосконалення на частотну залежність власного згасання фільтра показаний на рис.4.29. Головне, що ми очікуємо, – це чітке відокремлення смуги пропускання від смуги затримування за рахунок різкого зростання $a_c(\omega)$ при $\omega > \omega_{cp}$. Які ще корисні наслідки матиме таке вдосконалення фільтра типу **К**, і які негативні побічні ефекти воно спричинить, побачимо в наступних підрозділах.

¹ Ці міркування стосуються також Г-подібних чотириполіосників.

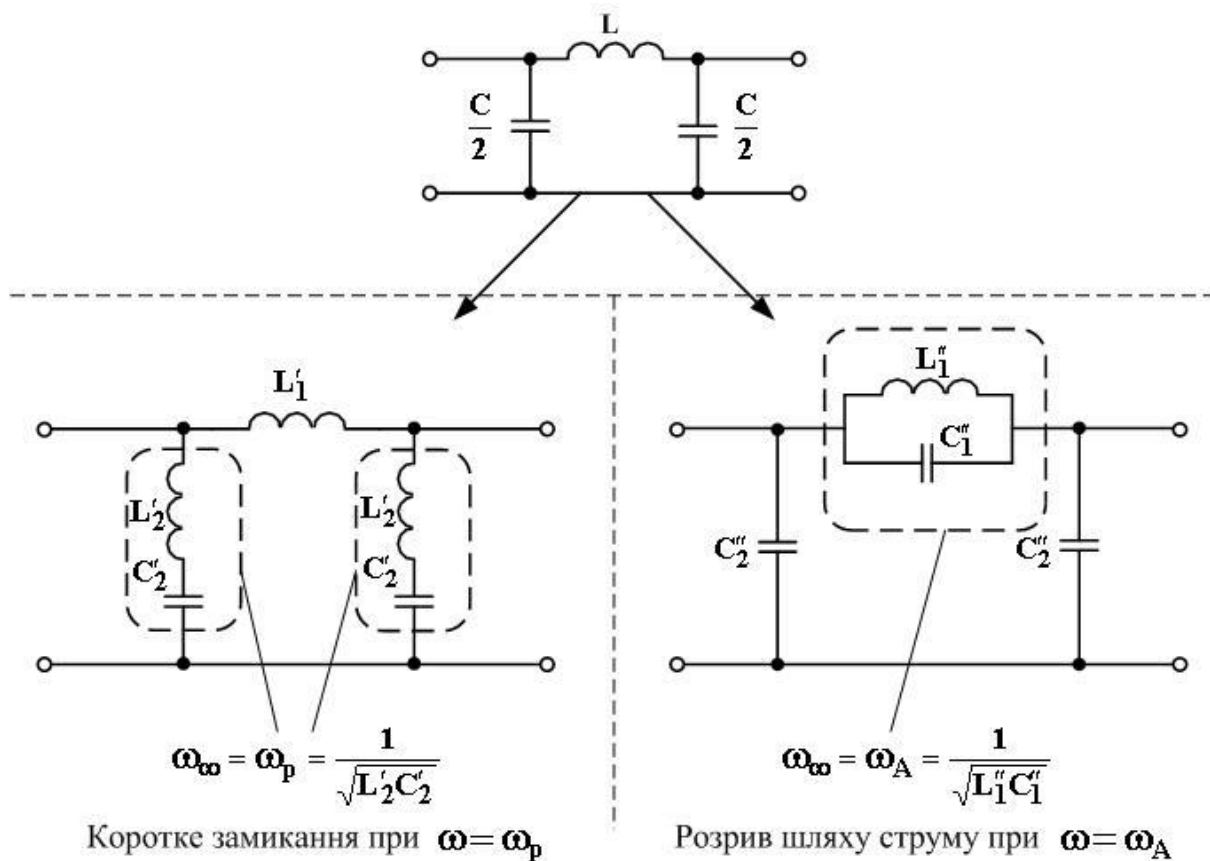


Рис. 4.28

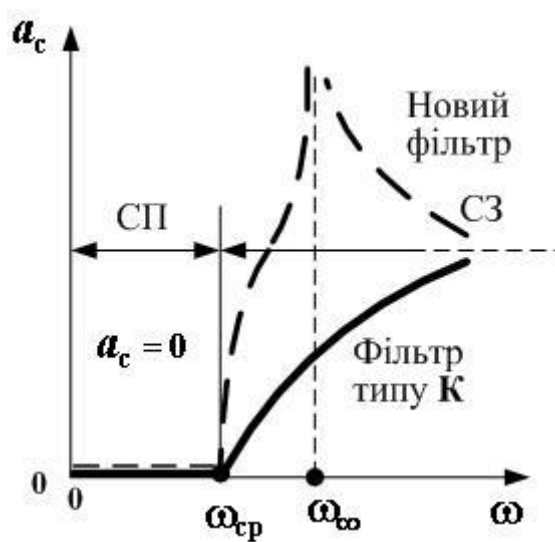


Рис. 4.29

4.2.12. Методика перетворення ланок фільтрів типу К у ланки фільтрів типу m

У підрозд. 2.3 ми вже зустрічалися з Г-подібними чотириполіусниками. Настав час пов'язати їх схеми та параметри із схемами та параметрами Т- та П-подібних чотириполіусників, за схемами яких складено фільтри типу К. Спочатку звернемо увагу на те, що з двох Г-подібних чотириполіусників можна скласти як Т-подібний, так і П-подібний чотириполіусник, як це проілюстровано рис.4.30.

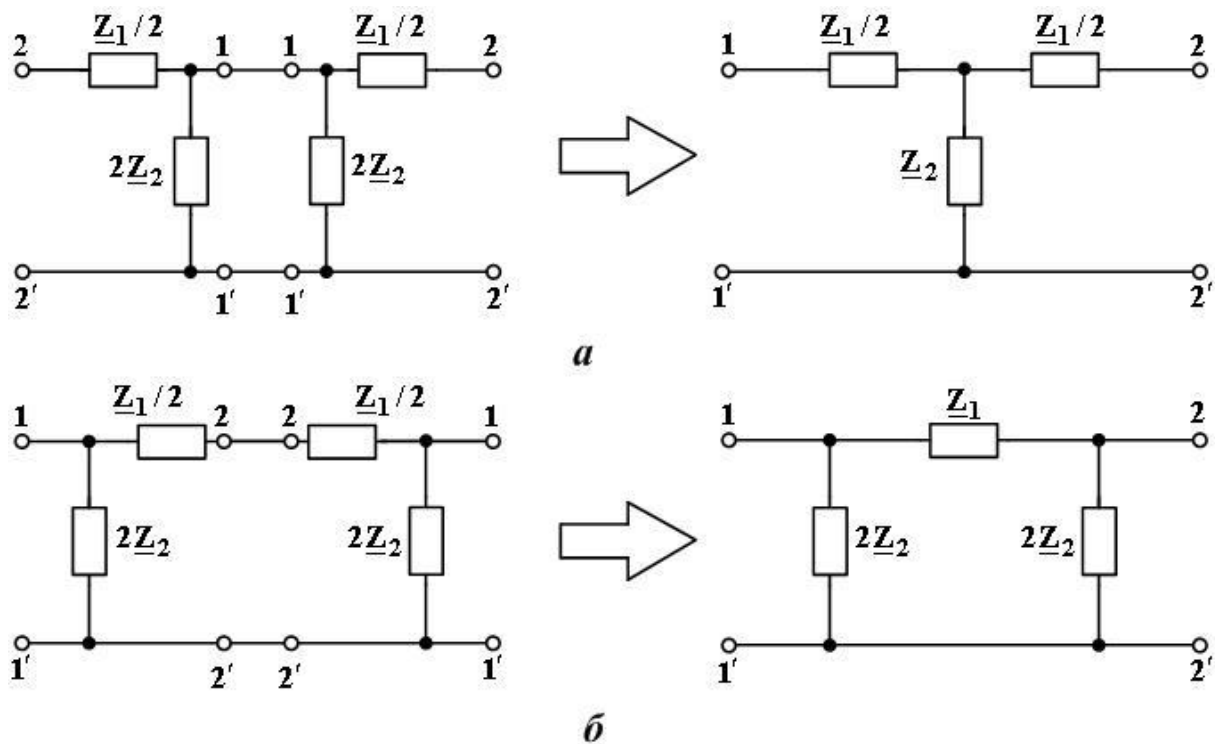


Рис. 4.30. Утворення Т-подібної (а) і П-подібної (б) ланок фільтрів з Г-подібних напівланок

Тому, якщо вважати ці чотириполіусники цілими ланками фільтрів, то Г-подібні чотириполіусники можна вважати напівланками тих же фільтрів.

Отож, розглянемо Г-подібну напівланку деякого фільтра (рис.4.31).

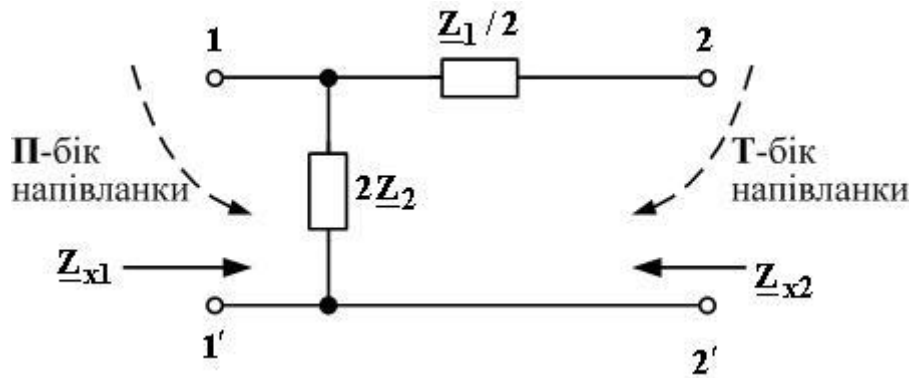


Рис. 4.31

Знайдемо її характеристичний опір \underline{Z}_{x1} з боку затискачів 1–1' через вхідні опори короткого замикання $\underline{Z}_{1кз}$ та холостого ходу $\underline{Z}_{1хх}$ за формулою (2.58):

$$\underline{Z}_{x1} = \sqrt{\underline{Z}_{1кз} \cdot \underline{Z}_{1хх}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{0,5\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2} \cdot 2\underline{Z}_2}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на $2\underline{Z}_2$, отримаємо вже відому формулу (4.21):

$$\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{\pi\pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \quad (4.86)$$

Аналогічне знаходження характеристичного опору \underline{Z}_{x2} Г-подібної напівланки (рис.4.31) з боку затискачів 2–2' за відомою формулою (2.59) дасть нам теж відому формулу (4.20):

$$\underline{Z}_{x2} = \underline{Z}_{\Gamma\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}. \quad (4.87)$$

Отже, в Г-подібній напівланці (рис.4.31) характеристичний опір з боку затискачів 1–1' співпадає з характеристичним опором П-подібної ланки, а характеристичний опір з боку затискачів 2–2' співпадає з характеристичним опором Т-подібної ланки. Тому назвемо 1–1' **П-боком напівланки**, а затискачі 2–2' назвемо **Т-боком напівланки**. Вважатимемо, що напівланка з рис.4.31 є напівланкою фільтра типу **К**. Поставимо **задачу 1**: змінити опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 так, щоб опір \underline{Z}_{x2} з Т-боку напівланки

залишився рівним опорю $\underline{Z}_{\text{хтк}}$ Т-подібного фільтра типу **К**, а опір \underline{Z}_{x1} з П-боку напівланки набув нових властивостей.

Розв'язання цієї задачі почнемо із зображення напівланки нового фільтра, при цьому всі його опори позначимо додатковим індексом **m** (рис.4.32).

Нехай

$$\underline{Z}_{1m} = m \cdot \underline{Z}_1, \quad (4.88)$$

де **m** – деякий постійний коефіцієнт, що є дійсним числом, причому $0 \leq m \leq 1$ (його використанням і пояснюється назва нового типу фільтрів, які ми будемо).

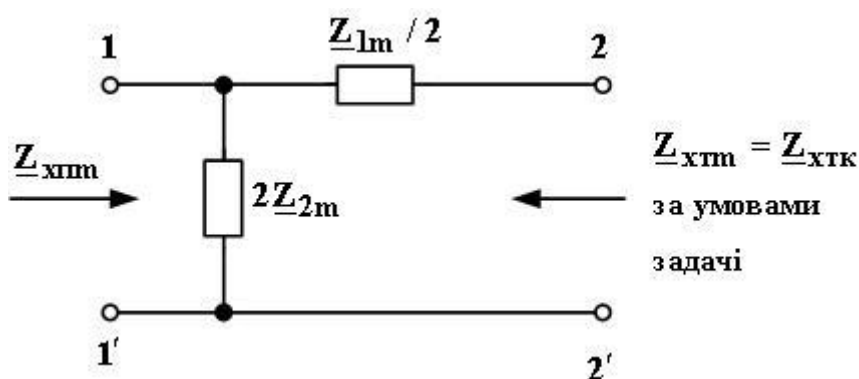


Рис. 4.32

За умовою задачі 1 маємо, що характеристичний опір $\underline{Z}_{\text{хтm}}$ нового фільтра з боку його затискачів 2–2' дорівнює характеристичному опорю $\underline{Z}_{\text{хтк}}$. Обидва вони обчислюються за формулою (4.87), тож після їх прирівнювання матимемо

$$\sqrt{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{Z}_{2m} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}\right)} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}.$$

Піднесемо обидві частини до другого степеня та врахуємо співвідношення (4.88).

$$m\underline{Z}_1 \underline{Z}_{2m} + \frac{m^2 \underline{Z}_1^2}{4} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1^2}{4}.$$

Звідси маємо опір вертикальної вітки нового фільтра:

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \underline{Z}_1 \cdot \frac{1-m^2}{4m}. \quad (4.89)$$

Сума опорів означає, що двополюсник з опором \underline{Z}_{2m} утворений *послідовним з'єднанням* двополюсників з опорами $\frac{\underline{Z}_2}{m}$ та $\underline{Z}_1 \cdot \frac{1-m^2}{4m}$. Тому зображену на рис.4.33 напівланку, утворену згідно зі співвідношеннями (4.88) та (4.89), називають **послідовно-похідною напівланкою типу m**. Один з характеристичних опорів цієї напівланки співпадає з аналогічним опором напівланки типу **K** – це опір $\underline{Z}_{хтк}$ (рис.4.33), другий з характеристичних опорів є новим – це опір $\underline{Z}_{хтм}$ (рис.4.33). Він знаходиться за загальною формулою (4.86) шляхом підстановки в неї рівностей (4.88) та (4.89):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{хтм} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{Z}_{2m}}{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}}} = \sqrt{\frac{m\underline{Z}_1 \left(\frac{\underline{Z}_2}{m} + \underline{Z}_1 \cdot \frac{1-m^2}{4m} \right)}{1 + \frac{m\underline{Z}_1}{4 \left(\frac{\underline{Z}_2}{m} + \underline{Z}_1 \cdot \frac{1-m^2}{4m} \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} \cdot \left[1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1-m^2) \right]}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

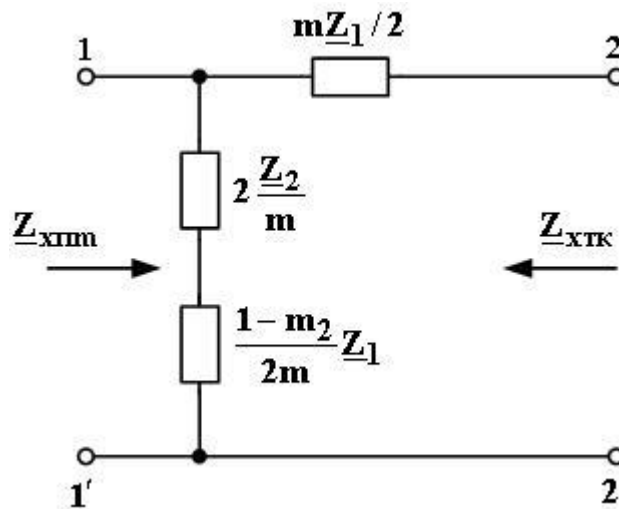


Рис. 4.33. Послідовно-похідна напівланка типу **m**

Оскільки \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є опорами фільтра типу **К**, то корінь квадратний разом із виразом, що під ним знаходиться, згідно із загальною формулою (4.21) є характеристичним опором П-подібної ланки фільтра типу **К**. Тому можна записати характеристичний опір послідовно-похідної напівланки типу **m** з П-боку цієї напівланки як

$$\underline{Z}_{хпм} = \underline{Z}_{хпк} \cdot \left[1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1 - m^2) \right], \quad (4.91)$$

звідки бачимо, що новий опір суттєво відрізняється від свого “попередника” у фільтрі типу **К**.

Тепер розглянемо **задачу 2**: змінити опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 напівланки з рис. 4.31 так, щоб опір \underline{Z}_{x1} з П-боку цієї напівланки залишився рівним опорові $\underline{Z}_{хпк}$ П-подібного фільтра типу **К**, а опір \underline{Z}_{x2} з Т-боку нової напівланки набув нових властивостей.

Розв’язання цієї задачі почнемо із зображення напівланки нового фільтра, при цьому всі його опори позначимо додатковим індексом **m** (рис.4.34), як і при розв’язанні задачі 1.

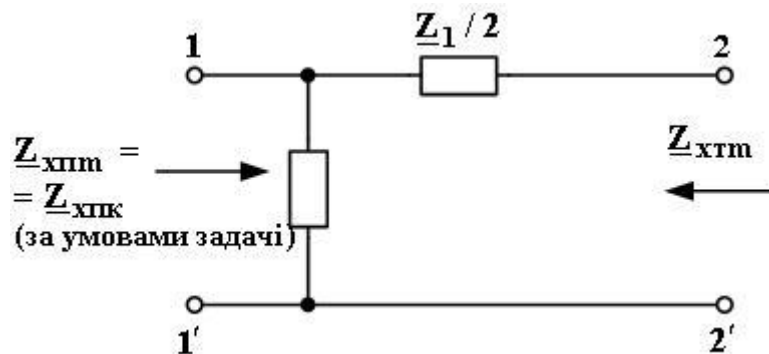


Рис. 4.34

Нехай

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m}, \quad (4.92)$$

де коефіцієнт **m** задовольняє ті ж умови, що й в (4.88).

За умовою задачі 2 маємо, що характеристичний опір $\underline{Z}_{хпм}$ нового фільтра з боку його затискачів 1–1' дорівнює характеристичному опорові $\underline{Z}_{хпк}$. Обидва вони обчислюються за формулою (4.86), тож після їх прирівнювання матимемо

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{Z}_{2m}}{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}.$$

Піднісши обидві частини рівності до другого степеня та підставивши в неї співвідношення (4.92), після нескладних перетворень отримаємо формулу, яка виражає опір \underline{Z}_{1m} горизонтальної вітки нового фільтра через опори фільтра типу **K** та коефіцієнт **m**:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{1m}} = \frac{1}{m\underline{Z}_1} + \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2}. \quad (4.93)$$

Отже, провідність $1/\underline{Z}_{1m}$ горизонтальної вітки нової напівланки дорівнює сумі провідностей $1/(m\underline{Z}_1)$ та $\frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2}$ двох двополюсників.

Це означає, що дана горизонтальна вітка утворена *паралельним з'єднанням* цих двополюсників. Тому нову напівланку, зображену на рис.4.35 і утворену згідно зі співвідношеннями (4.92) та (4.93), називають **паралельно-похідною напівланкою типу m**. Один з характеристичних опорів цієї напівланки співпадає з аналогічним опором напівланки типу **K** – це опір $\underline{Z}_{хтк}$ (рис. 4.35), другий з характеристичних опорів є новим – це опір $\underline{Z}_{хтм}$ (рис. 4.35). Він знаходиться за загальною формулою (4.87) шляхом підстановки в неї рівностей (4.92) та (4.93) і наступних нескладних перетворень:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{хтм} &= \sqrt{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{Z}_{2m} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}\right)} = \\ &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1-m^2)}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Оскільки \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є опорами фільтра типу **K**, то корінь квадратний разом із виразом, що під ним знаходиться, згідно із загальною формулою (4.20) є характеристичним опором T-подібної ланки типу **K**. Тому можна записати характеристичний опір паралельно-похідної напівланки типу **m** з T-боку цієї напівланки як

$$\underline{Z}_{хтм} = \underline{Z}_{хтк} / \left[1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1-m^2)\right], \quad (4.95)$$

звідки бачимо, що новий опір суттєво відрізняється від свого “попередника” у фільтрі типу **К**.

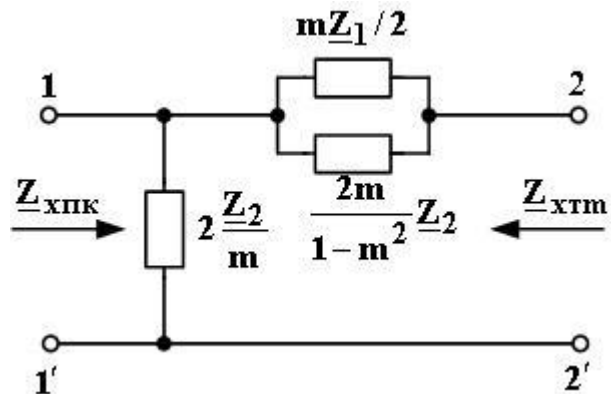


Рис. 4.35. Паралельно-похідна напівланка типу **m**

З огляду на те, що кожен конкретний фільтр типу **m** утворюється шляхом певної перебудови конкретного фільтра типу **К**, останній (тобто фільтр типу **К**) називають **прототипом** фільтра типу **m**.

Збереження в напівланках фільтрів типу **m** одного з характеристичних опорів таким, що дорівнює характеристичному опоріві фільтра типу **К** з цього ж боку напівланки, не є абстрактною вимогою. Воно обумовлене бажанням здійснювати каскадне узгоджене з'єднання (див.п.2.4.2) напівланок типу **m** і ланок типу **К** для створення складених фільтрів, які сполучатимуть у собі кращі якості фільтрів типу **К** і фільтрів типу **m** (про це йтиметься нижче в підрозділі, присвяченому складним ланцюжковим фільтрам).

Якщо в усіх формулах для фільтрів типу **m** прийняти $m = 1$, то ці формули, як легко побачити, перетворяться на формули для фільтрів типу **К**. Тому зауважимо, що при $m = 1$ **фільтр типу m є ідентичним фільтру типу К**.

Також зауважимо, що **частоти зрізу конкретного фільтра типу m дорівнюють частотам зрізу його прототипу – конкретного фільтра типу К**. Доведемо це для послідовно-похідного **фільтра типу m** (доведення для паралельно-похідного фільтра аналогічне). Для цього розглянемо загальні формули (4.9) і (4.10) для частот зрізу Т- та П-подібних симетричних LC-фільтрів і Г-подібних напівланок, з яких ці фільтри складено. Отже, у нас є опори Z_{1m} (4.88) та Z_{2m} (4.89). Знаходимо співвідношення між Z_{1m} та Z_{2m} , яке є основою загальних формул (4.9) і (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{m\underline{Z}_1}{\frac{\underline{Z}_2}{m} + \underline{Z}_1 \cdot \frac{1-m^2}{4m}} = \\ &= \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot \frac{m^2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} (1-m^2)}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Якщо в (4.96) має місце умова (4.9), тобто $\underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)=0$, то й $\underline{Z}_{1m}/(4\underline{Z}_{2m})=0$, а якщо в (4.96) має місце умова (4.10), тобто $\underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)=-1$, то й $\underline{Z}_{1m}/(4\underline{Z}_{2m})=-1$. Тобто загальні умови існування частот зрізу для фільтра типу **m** співпадають із загальними умовами існування частот зрізу його прототипу – фільтра типу **K**.

Тепер знайдемо загальну умову існування **частоти нескінченного згасання** ω_∞ , введеної в п.4.2.11 (згадаємо, що наявність саме цієї частоти повинна забезпечити нашому новому фільтру кращу частотну вибірність, аніж у фільтра типу **K**). Ця частота повинна лежати в смузі затримування (рис. 4.29), де, згідно із загальним виразом (4.15), маємо

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{2\underline{Z}_{2m}} \right| = \operatorname{arch} \left| 1 + 2 \cdot \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} \right|.$$

Підставивши сюди праву частину рівності (4.96), одержимо

$$a_c = \operatorname{arch} \left| 1 + 2 \cdot \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot \frac{m^2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1-m^2)} \right|.$$

Величина a_c сягатиме нескінченності, якщо аргумент арєакосинуса¹ теж сягатиме нескінченності. Це матиме місце, коли

$$1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \cdot (1-m^2) = 0,$$

звідки випливає, що на шуканій частоті ω_∞ повинна мати місце рівність

$$\frac{\underline{Z}_1(\omega_\infty)}{4\underline{Z}_2} = -\frac{1}{1-m^2}. \quad (4.97)$$

¹ Арєакосинусом називають функцію, обернену до гіперболічного косинуса.

Це й є загальна умова існування частоти нескінченного згасання.

Перш ніж перейти до розгляду конкретних фільтрів типу **m**, звернемо увагу читача на той факт, що в цьому підрозділі ми побудували загальні схеми Г-подібних *напівланок* (а не Т-та П-подібних цілих ланок) фільтрів типу **m**, і в подальшому користуватимемось саме цими напівланками. Але ж загальні формули для власного згасання (4.15) та для власного коефіцієнта фази (4.11), (4.12) і (4.17) отримані для *повної ланки*. Що можна сказати про ці величини відносно напівланки? Неважко помітити, що Т- та П-подібні ланки утворені **узгодженим** каскадним з'єднанням Г-подібних напівланок (див.рис.4.30) при якому згідно з (2.75) власна стала передачі ланки є сумою власних сталих передачі напівланок. Ці ж власні сталі (напівланок) є рівними, бо згідно з рис.4.30 схема одної напівланки є дзеркальним відбиттям схеми другої напівланки, а як відмічено в п.2.4.2, власна стала передачі чотириполюсника не залежить від того, яка пара затискачів вважається вхідною, а яка – вихідною. Отже, **власна стала передачі напівланки симетричного фільтра дорівнює половині** власної сталої передачі його **цілої ланки**:

$$\underline{g}_{c1/2} = \frac{1}{2} g_c = \frac{a_c}{2} + j \frac{b_c}{2}. \quad (4.98)$$

Тобто власне згасання та власний коефіцієнт фази напівланки є **удвічі меншими** від аналогічних величин для повної ланки.

4.2.13. Фільтр нижніх частот типу **m**

Спочатку зобразимо схему напівланки ФНЧ типу **K** (рис.4.36) як прототипу шуканого ФНЧ типу **m**. Тут $\underline{Z}_1 = j\omega L$, $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$. Далі ж, користуючись рис. 4.33 та 4.35 (і коефіцієнтами для перерахунку опорів, розміщеними на цих рисунках), очевидним чином переходимо до схем напівланок ФНЧ типу **m** (рис.4.37).

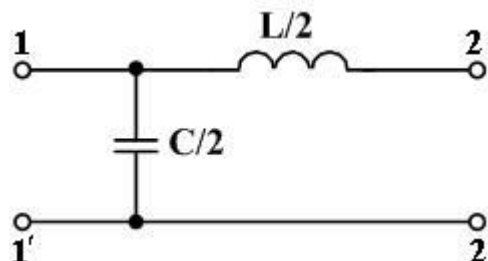


Рис. 4.36. Напівланка ФНЧ типу **K**

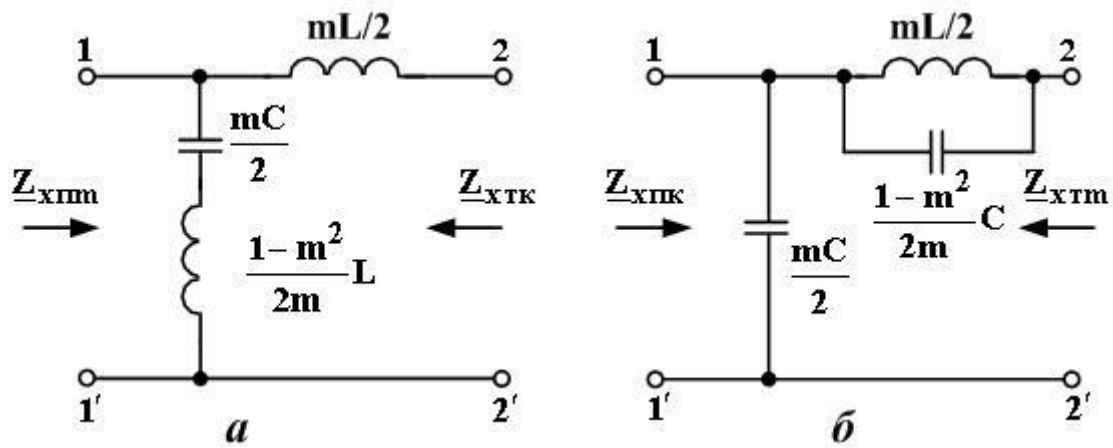


Рис. 4.37. Схеми напівланок ФНЧ типу m : послідовно-похідної (а) та паралельно-похідної (б)

Частоти зрізу цих напівланок, як було доведено в попередньому підрозділі, співпадають з частотою зрізу прототипу (4.23), тобто

$$\omega_{cp} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (4.99)$$

Перейдемо до знаходження математичних виразів, які описують частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази Γ -подібних напівланок ФНЧ типу m . Як визначено загальною формулою (4.15), для Т- та П-подібної ланок будь-якого LC-фільтра маємо

$$\underline{A} = \text{ch}g_c = 1 + \frac{Z_{1m}}{2Z_{2m}}. \quad (4.100)$$

Оскільки ж для напівланки справедливе співвідношення (4.98), то зручніше перейти до якоїсь гіперболічної функції половинного аргументу. Використаємо таке співвідношення:

$$\text{sh} \frac{g_c}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}g_c - 1}{2}}.$$

З огляду ж на (4.100) матимемо

$$\text{sh} \frac{g_c}{2} = \sqrt{\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}. \quad (4.101)$$

Тепер врахуємо вираз (4.96) і отримаємо

$$\operatorname{sh} \frac{\mathbf{g}_c}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_{1m}}{4\mathbf{Z}_{2m}}} \cdot \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2} \cdot (1 - \mathbf{m}^2)}}, \quad (4.102)$$

де \mathbf{Z}_1 та \mathbf{Z}_2 – опори віток ФНЧ типу **K**, тобто $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{j}\omega\mathbf{L}$, $\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}$.

Тому

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{j}\omega\mathbf{L}}{4 \cdot \frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}} = -\frac{\omega^2\mathbf{LC}}{4} = -\frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} = -\Omega^2,$$

де Ω – вже відома нам нормована частота (4.25).

Отже,

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2} = -\Omega^2, \quad (4.103)$$

що після підстановки до (4.102) дає співвідношення

$$\operatorname{sh} \frac{\mathbf{g}_c}{2} = \pm \mathbf{j} \frac{\mathbf{m}\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2(1 - \mathbf{m}_2)}}. \quad (4.104)$$

З іншого боку, згідно з властивостями гіперболічного синуса комплексного аргументу

$$\operatorname{sh} \frac{\mathbf{g}_c}{2} = \operatorname{sh} \left(\frac{a_c}{2} + \mathbf{j} \frac{\theta_c}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a_c}{2} \cdot \cos \frac{\theta_c}{2} + \mathbf{j} \cdot \operatorname{ch} \frac{a_c}{2} \cdot \sin \frac{\theta_c}{2}. \quad (4.105)$$

Врахуємо, що в смузі пропускання (тобто при $0 \leq \Omega \leq 1$) величина $a_c = 0$ за визначенням. В смузі затримування $a_c > 0$ і є два характерних діапазони частот:

- 1) $1 < \Omega \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{m}^2}}$, при цьому підкорінний вираз у (4.104) додатний;

2) $\Omega > \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$, при цьому підкорінний вираз у (4.104) від'ємний.

Порівнявши вирази (4.104) та (4.105) з урахуванням щойно наведених міркувань і за тією ж логічною схемою, якою ми скористалися при порівнянні виразів (4.2) та (4.3), можна отримати шукані частоти залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази Γ -подібної напівланки ФНЧ типу m :

$$\frac{a_c}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \Omega \leq 1, \\ \operatorname{arch} \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2(1-m^2)}} & \text{при } 1 < \Omega \leq \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}, \\ \operatorname{arsh} \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2(1-m^2)}} & \text{при } \Omega > \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \end{cases} \quad (4.106)$$

$$\frac{\theta_c}{2} = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2(1-m^2)}} & \text{при } 0 < \Omega \leq 1, \\ \pi/2 & \text{при } 1 < \Omega \leq \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}, \\ 0 & \text{при } \Omega > \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \end{cases} \quad (4.107)$$

Частоту ω_∞ , на якій a_c сягає нескінченності, може бути обчислено через частоту зрізу ω_{cp} та коефіцієнт m . Й насправді, з одного боку маємо вже доведене співвідношення (4.97), а з іншого боку, згідно з (4.103), на частоті ω_∞ маємо

$$\frac{\underline{Z}_1(\omega_\infty)}{4\underline{Z}_2(\omega_\infty)} = -\Omega_\infty^2 = -\frac{\omega_\infty^2}{\omega_{cp}^2}. \quad (4.108)$$

Порівнявши праві частини співвідношень (4.97) та (4.108), отримаємо $\frac{1}{1-m^2} = \frac{\omega_\infty^2}{\omega_{cp}^2}$, звідки

$$\omega_{\infty} = \frac{\omega_{cp}}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (4.109)$$

Графіки залежностей $\frac{a_c(\omega)}{2}$ та $\frac{\theta_c(\omega)}{2}$ як функцій нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_{cp}$ наведені на рис.4.38. Слід звернути увагу на те, що при зростанні параметра m нескінченний “сплеск” згасання зсувається в бік більших частот, а фільтр типу K є, власне, фільтром типу m , у якого $\Omega_{\infty} = \infty$. Важливим є й той факт, що при малих величинах параметра m величина a_c на початку смуги затримування зростає дуже різко, тоді як при більших величинах m це зростання більш плавне. І, нарешті, найважливіше: власне згасання ФНЧ типу m , швидко сягнувши нескінченності (це добре) на частоті $\Omega = \Omega_{\infty}$, при подальшому збільшенні частоти зменшується до певної постійної величини (це погано), різної для різних значень параметра m . В той же час у ФНЧ типу K власне згасання зростає із зростанням частоти, хоча й повільно, проте невпинно. Це нашоєхує на думку щодо поєднання фільтрів типу K та типу m у єдиний фільтр із різким зростанням та великим значенням a_c в смузі згасання. Кількома підрозділами нижче ми розглянемо таку можливість.

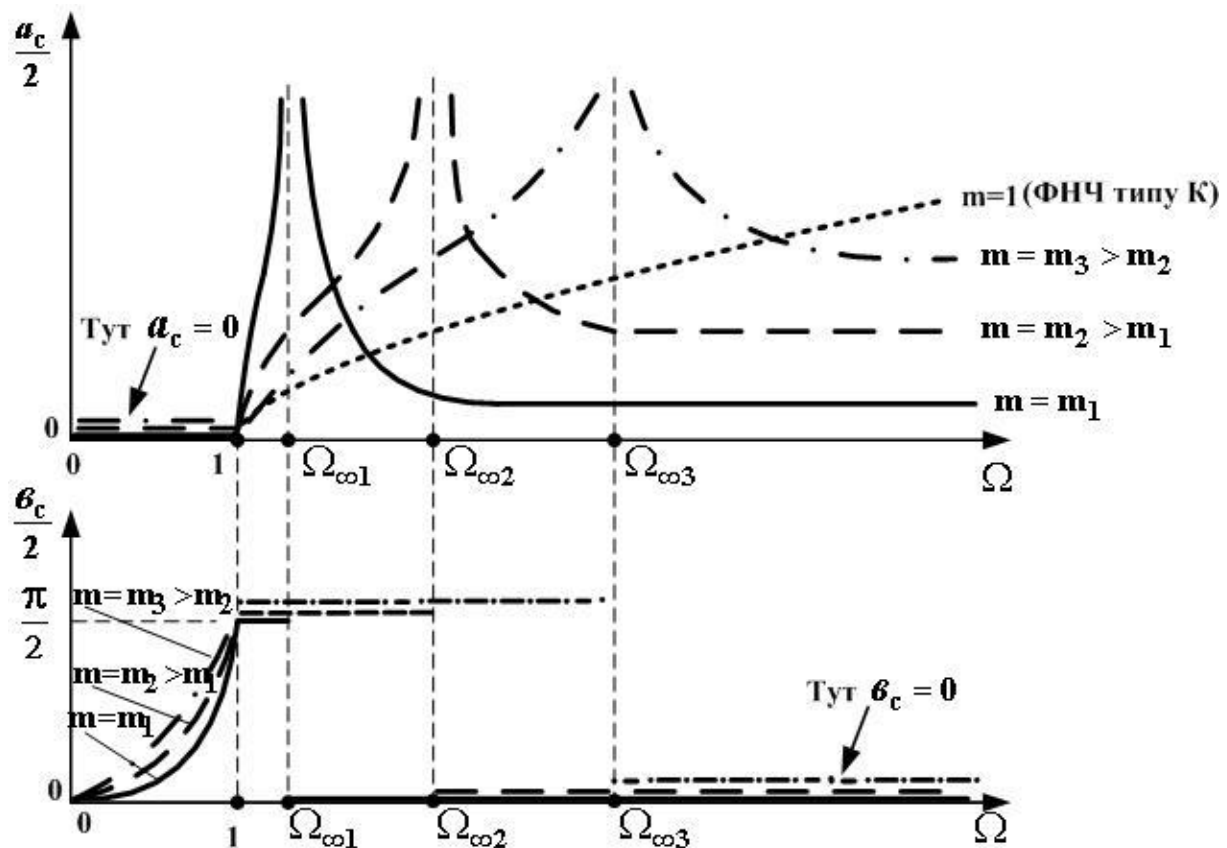


Рис. 4.38. Частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази ФНЧ типу m

Дістати якісне уявлення про розташування частот ω_{cp} та смуг пропускання і затримування ФНЧ типу **m** можна за допомогою графічних побудовань. Аналогічно тому, як ми робили це для фільтрів типу **K**, спочатку слід накреслити в координатах “опір – частота” графіки залежностей $\underline{Z}_{1m}(\omega)$ та $4\underline{Z}_2(\omega)$ (це досить зробити ескізно, зберігаючи тільки характерні особливості графіків), як показано на рис. 4.39 для послідовно-похідного ФНЧ типу **m**.

Подальший хід міркувань для діапазону частот $[0, \omega_\infty]$ повністю такий, як для ФНЧ типу **K**. Сама ж частота ω_∞ визначається в даному випадку як частота, на якій $\underline{Z}_{2m} = 0$, тобто на якій вертикальна вітка закорочує джерело сигналу, повністю “відволікаючи” струм від шляху до навантаження і тим самим забезпечуючи нескінченне згасання.

На частотах $\omega > \omega_\infty$ знаки опорів \underline{Z}_{1m} та \underline{Z}_{2m} однакові, тобто не виконується одна з вимог існування смуги пропускання (див.п.4.2). Отже, цей діапазон відноситься до смуги затримування. З огляду на те, що в ньому \underline{Z}_{1m} та \underline{Z}_{2m} мають однаковий характер (у даному випадку – індуктивний) інколи кажуть, що фільтр поводить тут себе як подільник напруги, складений з індуктивностей (це добре видно, якщо розвернути Г-подібну схему так, як це показано на рис.4.40).

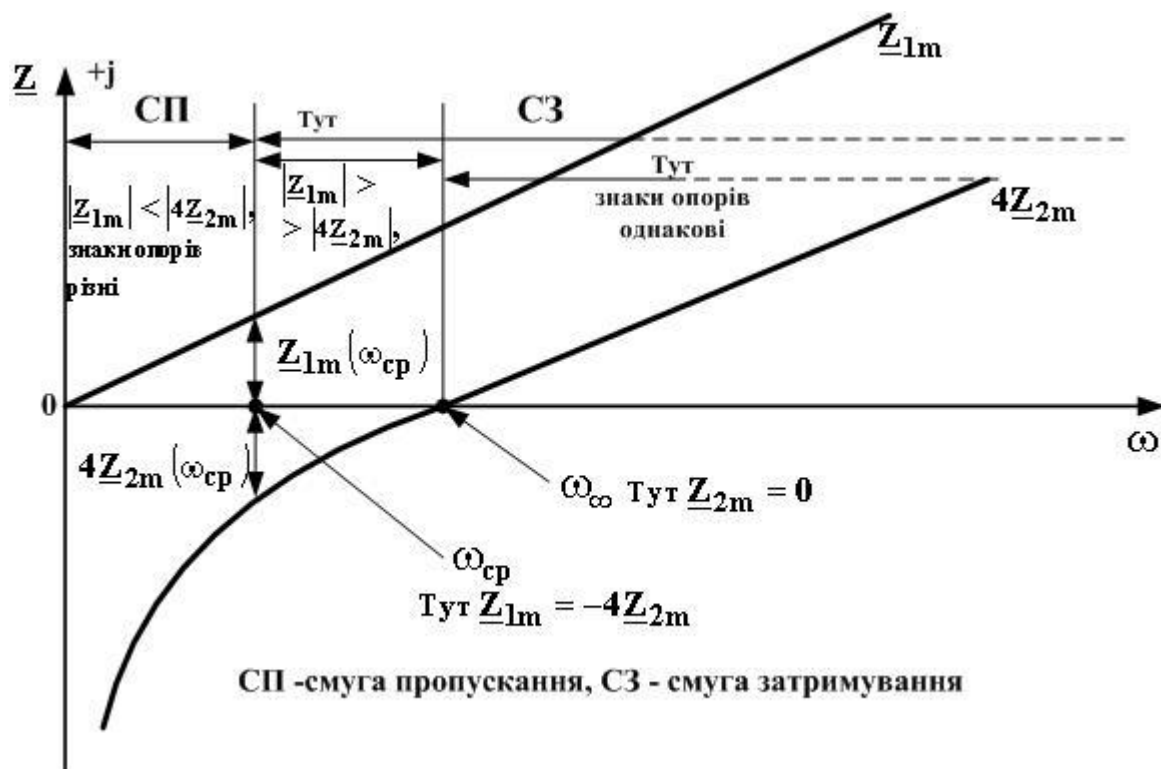


Рис. 4.39

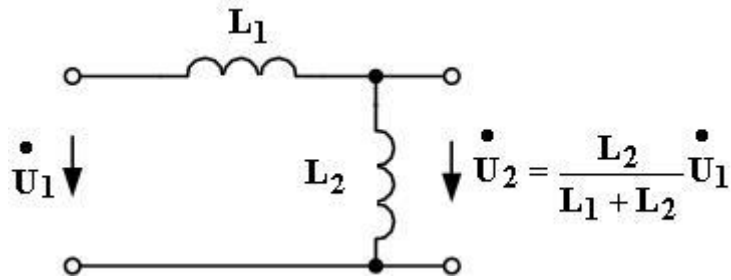


Рис. 4.40

Зазначимо, що залежності $a_c(\omega)$ та $v_c(\omega)$ для послідовно-похідної напівланки співпадають з цими ж залежностями для паралельно-похідної напівланки.

Тепер знайдемо вирази для частотних залежностей характеристичних опорів $\underline{Z}_{хтм}$ та $\underline{Z}_{хпм}$, які у ФНЧ типу **m** є новими порівняно з ФНЧ типу **K** (їх розташування див. на рис.4.37). Ми вже вивели загальні вирази для цих опорів – це (4.91) для $\underline{Z}_{хпм}$ та (4.95) для $\underline{Z}_{хтм}$. Щоб конкретизувати їх для ФНЧ типу **m**, підставимо в першій з них величину $\underline{Z}_{хпк}$ з (4.46), а в другий – величину $\underline{Z}_{хтк}$ з (4.45), а також замінимо дріб $\underline{Z}/(4\underline{Z}_2)$ згідно з (4.103) на величину $(-\Omega^2)$. В результаті таких перетворень одержимо

$$\underline{Z}_{хпм} = \rho \cdot \frac{1 - \Omega^2 \cdot (1 - m^2)}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad (4.110)$$

$$\underline{Z}_{хтм} = \rho \cdot \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{1 - \Omega^2 \cdot (1 - m^2)}, \quad (4.111)$$

де ρ , як і для ФНЧ типу **K**, є номінальним характеристичним опором, який обчислюється за формулою (4.31).

Наближені графіки залежностей $|\underline{Z}_{хтм}(\Omega)|$ та $|\underline{Z}_{хпм}(\Omega)|$ наведені на рис.4.41.

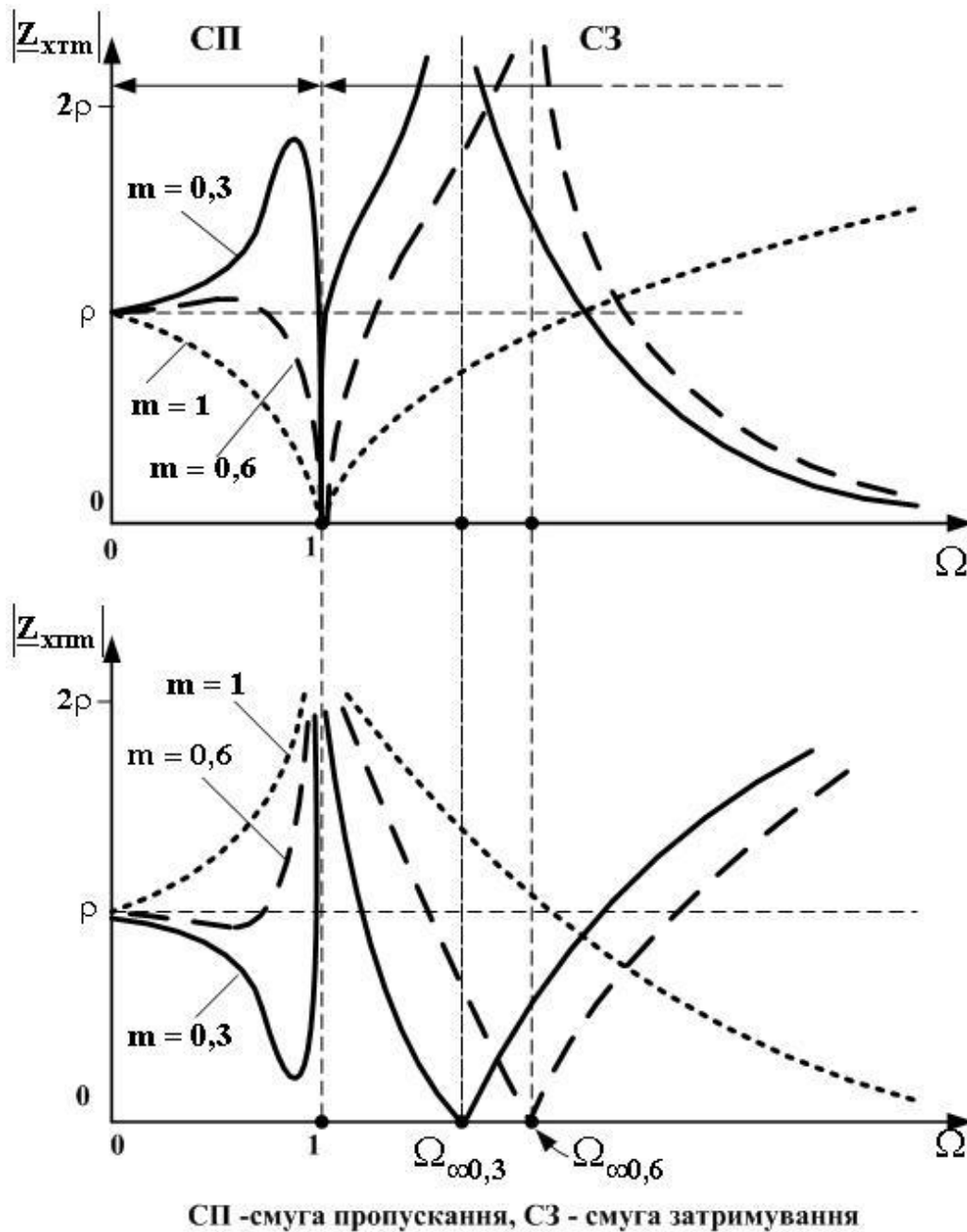


Рис. 4.41. Частотні залежності абсолютних величин характеристичних опорів ФНЧ типу m

Як і у фільтрів типу K , характеристичні опори ФНЧ типу m мають активний характер у смузі пропускання і реактивний – в смузі затримування. Як приклад, Z_{xtm} в одній частині смуги затримування (від ω_{cp} до ω_{∞}) має індуктивний характер, а в другій частині (після ω_{∞}) – ємнісний.

Звернемо увагу на те, що при великих (близько 1) та малих (близько 0) величинах m характеристичні опори в смузі пропускання дуже відхиляються від постійної величини, а при деяких середніх величинах m це відхилення не надто велике. Доведено [7], що з точки зору стабільності

величини \underline{Z}_x в смузі пропускання оптимальним є $m=0,6$: при ньому $\underline{Z}_{xтм}$ і $\underline{Z}_{xтнм}$ відрізняються від ρ не більш ніж на 5% в діапазоні частот $(0...0,87)\omega_{ср}$.

Вихідними даними для розрахунку ФНЧ типу m є опір навантаження R_n , частота зрізу $\omega_{ср}$ і бажана величина m . Розрахункові формули для обчислення параметрів L та C – ті ж самі, що й для ФНЧ типу K . Індуктивності та ємності елементів конкретного фільтра розраховують за величинами L , C та m за формулами, наведеними на рис.4.37.

4.2.14. Фільтр верхніх частот типу m

Спочатку зобразимо схему напівланки ФНЧ типу K (рис. 4.42) як прототипу шуканого ФВЧ типу m . В цьому прототипі $\underline{Z}_1 = 1/(j\omega C)$, $\underline{Z} = j\omega L$. Далі, користуючись рис. 4.33 та 4.35 (і коефіцієнтами для перерахунку опорів, розміщеними на цих же рисунках), переходимо до схем напівланок ФВЧ типу m (рис. 4.43).

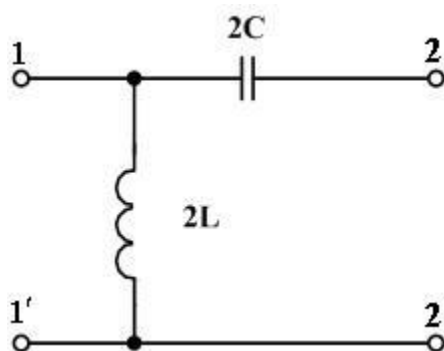


Рис. 4.42. Напівланка ФВЧ типу K

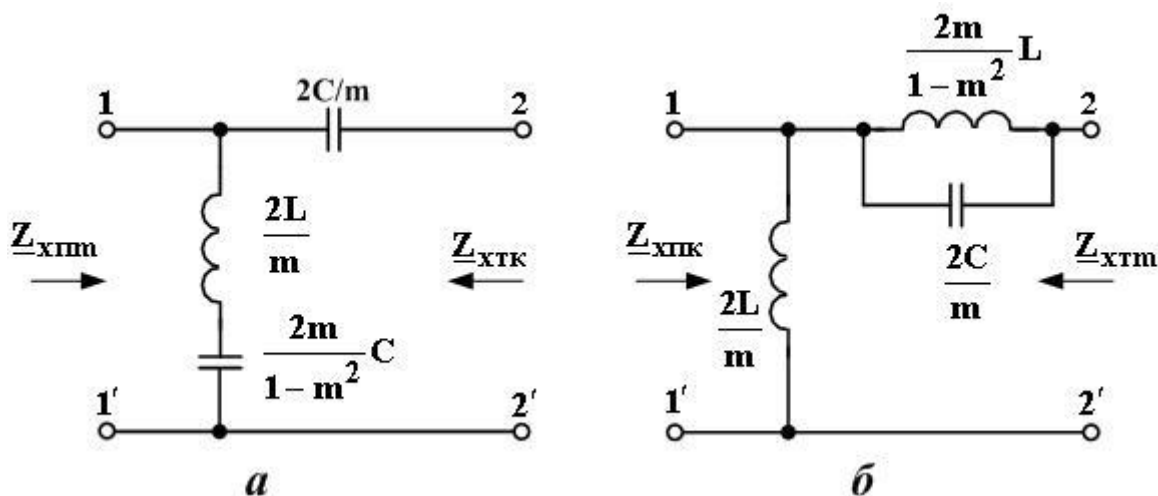


Рис. 4.43. Схеми напівланок ФВЧ типу m : послідовно-похідної (а) та паралельно-похідної (б)

Частоти зрізу цих напівланок, як було доведено в п.4.2.12, співпадають з частотою зрізу прототипу (4.38), тобто

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (4.112)$$

Перейдемо до знаходження математичних виразів, які описують частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази Г-подібних напівланок ФВЧ типу **m**. Почнемо з того, що в нас вже є формула (4.102), справедлива для *будь-якого* фільтра типу **m**:

$$\text{sh} \frac{g_c}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \cdot (1 - m^2)}}, \quad (4.113)$$

де Z_1 та Z_2 – опори віток фільтра – прототипу типу **K**, тобто

$$Z_1 = 1/(j\omega C), \quad Z_2 = j\omega L.$$

Тому

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{1}{j\omega C \cdot 4 \cdot j\omega L} = -\frac{1}{\omega^2 4LC} = -\frac{\omega_{\text{cp}}}{\omega^2} = -\frac{1}{\Omega^2},$$

де Ω – вже відома нам нормована частота (4.25).

Отже,

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{\Omega^2}, \quad (4.114)$$

що після підстановки до (4.113) дає співвідношення

$$\text{sh} \frac{g_c}{2} = \pm j \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2} (1 - m^2)}}. \quad (4.115)$$

Порівнюючи цей вираз із виразом (4.105), який відображає тільки властивості гіперболічного синуса і тому справедливий для будь-якого фільтра, аналогічно тому, як це було зроблено для ФНЧ типу **m**, отримаємо шукані частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази Г-подібної напівланки ФВЧ типу **m**:

$$\frac{a_c}{2} = \begin{cases} \operatorname{arsh} \frac{m/\Omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}(1 - m^2)}} & \text{при } 0 \leq \Omega < \sqrt{1 - m^2}, \\ \operatorname{arch} \frac{m/\Omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}(1 - m^2)}} & \text{при } \sqrt{1 - m^2} \leq \Omega < 1, \\ 0 & \text{при } \Omega \geq 1, \end{cases} \quad (4.116)$$

$$\frac{\theta_c}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \Omega < \sqrt{1 - m^2}, \\ -\pi/2 & \text{при } \sqrt{1 - m^2} \leq \Omega < 1, \\ -2 \operatorname{arcsin} \frac{m/\Omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}(1 - m^2)}} & \text{при } \Omega \geq 1. \end{cases} \quad (4.117)$$

Частоту ω_∞ , на якій a_c сягає нескінченності, може бути обчислено через частоту зрізу ω_{cp} та коефіцієнт m . З одного боку, ми маємо вже доведене співвідношення (4.97), а з іншого боку, згідно з (4.114), на частоті ω_∞ маємо

$$\frac{Z_1(\omega_\infty)}{4Z_2(\omega_\infty)} = -\frac{1}{\Omega_\infty^2} = -\frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\omega_\infty^2}. \quad (4.118)$$

Порівнявши праві частини співвідношень (4.97) та (4.118), отримаємо $\frac{1}{1 - m^2} = \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\omega_\infty^2}$, звідки

$$\omega_\infty = \omega_{\text{cp}} \cdot \sqrt{1 - m^2}. \quad (4.119)$$

Графіки залежностей $\frac{a_c(\omega)}{2}$ та $\frac{\theta_c(\omega)}{2}$ як функцій нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_{\text{cp}}$ наведені на рис.4.44. Слід звернути увагу на те, що при зростанні параметра m нескінченний “сплеск” згасання зсувається в бік менших частот, а фільтр типу **K**, якому відповідає випадок $m=1$, є фільтром типу **m**, у якого $\Omega_\infty = 0$. Видно також, що частотна залежність

власного згасання має ті ж добрі та погані риси, що й у ФНЧ типу \mathbf{m} (див. попередній підрозділ).

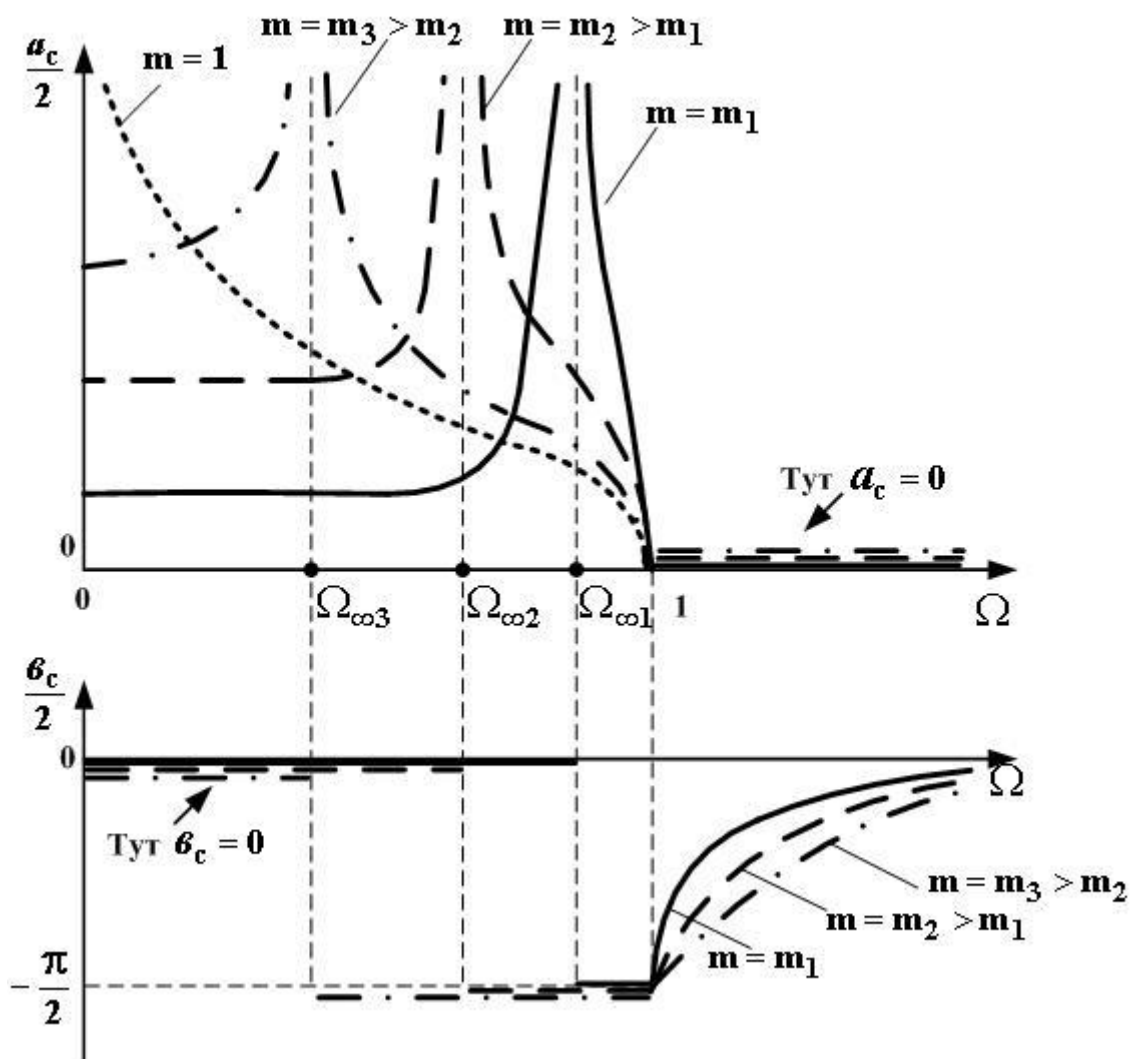


Рис. 4.44. Частотні залежності власного згасання та власного коефіцієнта фази ФВЧ типу \mathbf{m}

Графічні побудовання та міркування, за допомогою яких можна дістати якісне уявлення про розташування частот ω_{cp} , ω_{∞} та смуг пропускання і затримування, аналогічні таким, що описані для ФНЧ типу \mathbf{m} (звичайно, що опори \underline{Z}_{1m} та \underline{Z}_{2m} для ФВЧ є іншими).

Зазначимо, що залежності $a_c(\omega)$ та $\theta_c(\omega)$ для послідовно-похідної напівланки співпадають з цими ж залежностями для паралельно-похідної напівланки.

Тепер знайдемо вирази для частотних залежностей характеристичних опорів $\underline{Z}_{xтm}$ та \underline{Z}_{xmm} , які у ФВЧ типу \mathbf{m} є новими порівняно з ФВЧ типу \mathbf{K} (їх розташування див. на рис.4.37). Ми вже вивели загальні вирази для цих опорів – це вирази (4.91) для \underline{Z}_{xmm} та (4.95) для $\underline{Z}_{xтm}$. Щоб конкретизувати їх для ФВЧ типу \mathbf{m} , підставимо в перший з них величину $\underline{Z}_{xнк}$ з (4.46), а в другий – величину $\underline{Z}_{xтк}$ з (4.45), а також замінимо дріб $\underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)$ згідно з (4.114) на величину $(-1/\Omega^2)$. В результаті таких перетворень одержимо

$$\underline{Z}_{xmm} = \rho \cdot \frac{1 - \frac{1}{\Omega^2} \cdot (1 - m^2)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}, \quad (4.120)$$

$$\underline{Z}_{xтm} = \rho \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}{1 - \frac{1}{\Omega^2} \cdot (1 - m^2)}, \quad (4.121)$$

де ρ , як і для ФВЧ типу \mathbf{K} , є номінальним характеристичним опором, який обчислюється за формулою $\rho = \sqrt{L/C}$.

Наближені графіки залежностей $|\underline{Z}_{xтm}(\Omega)|$ та $|\underline{Z}_{xmm}(\Omega)|$ наведені на рис.4.45. Як і у ФВЧ типу \mathbf{K} , характеристичні опори ФВЧ типу \mathbf{m} мають активний характер у смузі пропускання і реактивний – у смузі затримування. Як приклад, опір $\underline{Z}_{xтm}$ в одній частині смуги затримування (від $\mathbf{0}$ до ω_∞) має індуктивний характер, а в другій частині (від ω_∞ до ω_{cp}) – ємнісний.

Як і для ФНЧ типу \mathbf{m} , найменше відхилення характеристичних опорів ФВЧ типу \mathbf{m} від постійної величини ρ в смузі пропускання має місце при $\mathbf{m=0,6}$.

Вихідними даними для розрахунку ФВЧ типу \mathbf{m} є опір навантаження $\mathbf{R}_н$, частота зрізу ω_{cp} і величина \mathbf{m} . Розрахункові формули для обчислення величин параметрів \mathbf{L} та \mathbf{C} – ті ж самі, що й для ФВЧ типу \mathbf{K} . Індуктивності та ємності елементів конкретного фільтра розраховують за величинами \mathbf{L} , \mathbf{C} та за формулами, наведеними на рис.4.43.

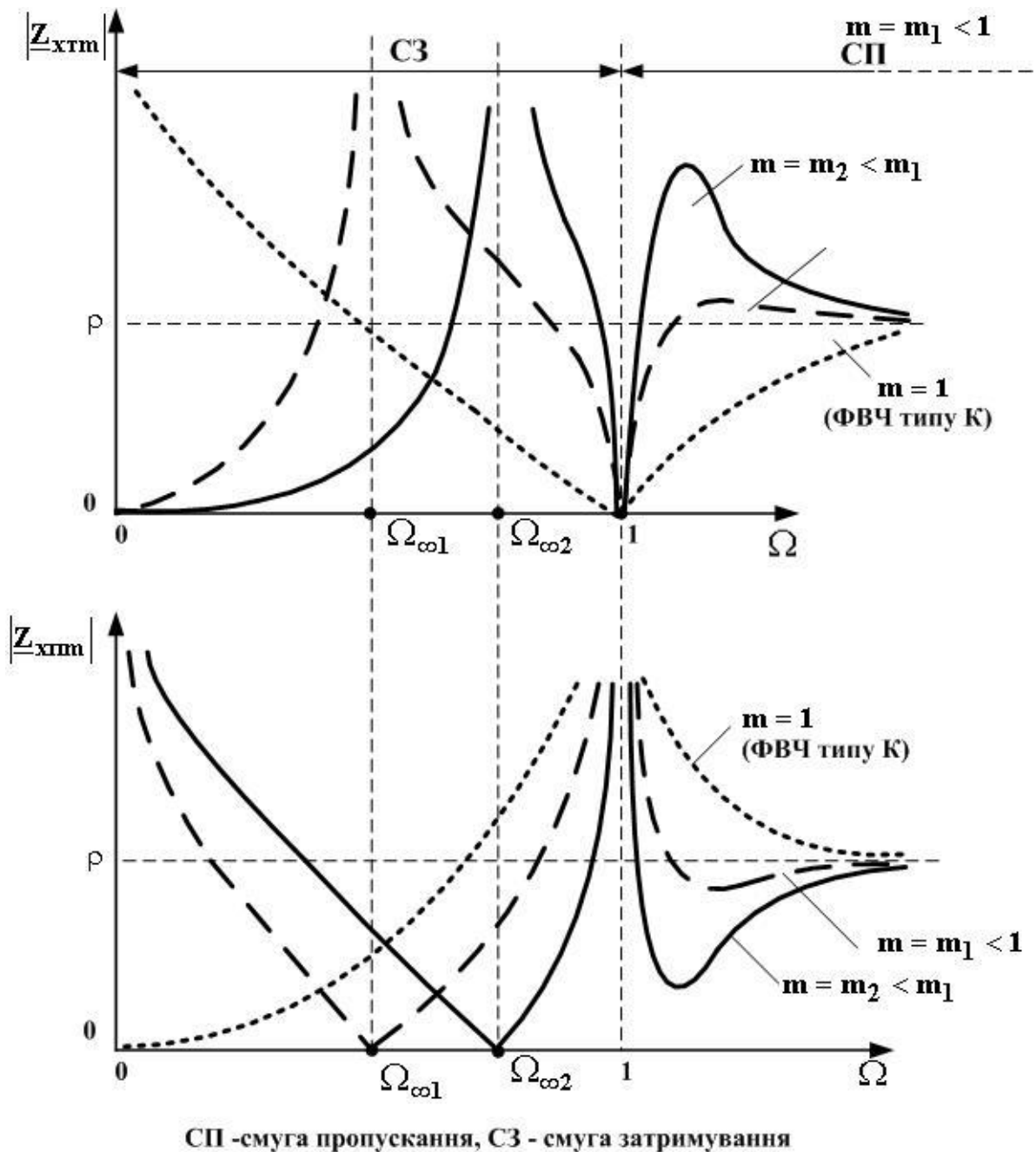


Рис. 4.45. Частотні залежності абсолютних величин характеристичних опорів ФВЧ типу m

4.2.15. Смугово-пропускаючий фільтр типу m

Як звичайно, спочатку намалюємо схему напівланки СПФ типу K (рис.4.46). Нагадаємо, що для цього фільтра виконується таке співвідношення між величинами параметрів його елементів:

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0. \quad (4.122)$$

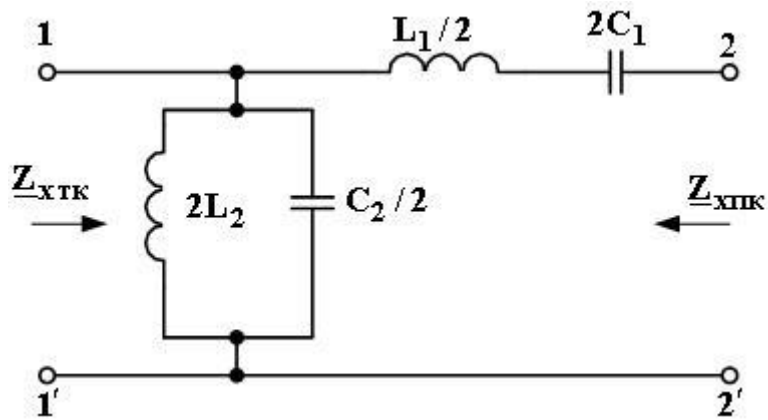


Рис. 4.46. Напівланка СПФ типу К

Опір \underline{Z}_1 – це опір послідовного коливального контуру, тож згідно з (1.1) маємо

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = jL_1 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) = j\omega_0 L_1 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (4.123)$$

Опір \underline{Z}_2 – це опір паралельного коливального контуру, тож згідно з (1.2) маємо

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{jC_2} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{jC_2} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}} = \frac{1}{j\omega_0 C_2} \cdot \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}. \quad (4.124)$$

Далі, користуючись рис.4.33 та 4.35 (і коефіцієнтами для перерахунку опорів, розміщеними на цих самих рисунках) за умови збереження співвідношення (4.122) переходимо до схем напівланок СПФ типу **m** (рис.4.47).

Частоти зрізу цих напівланок, як було доведено в п.4.2.12, співпадають з частотами зрізу ω_{cp1} та ω_{cp2} прототипу, визначеними співвідношеннями (4.59) та (4.60), тож ширина смуги пропускання теж є такою, як у прототипу, і визначається співвідношенням (4.62).

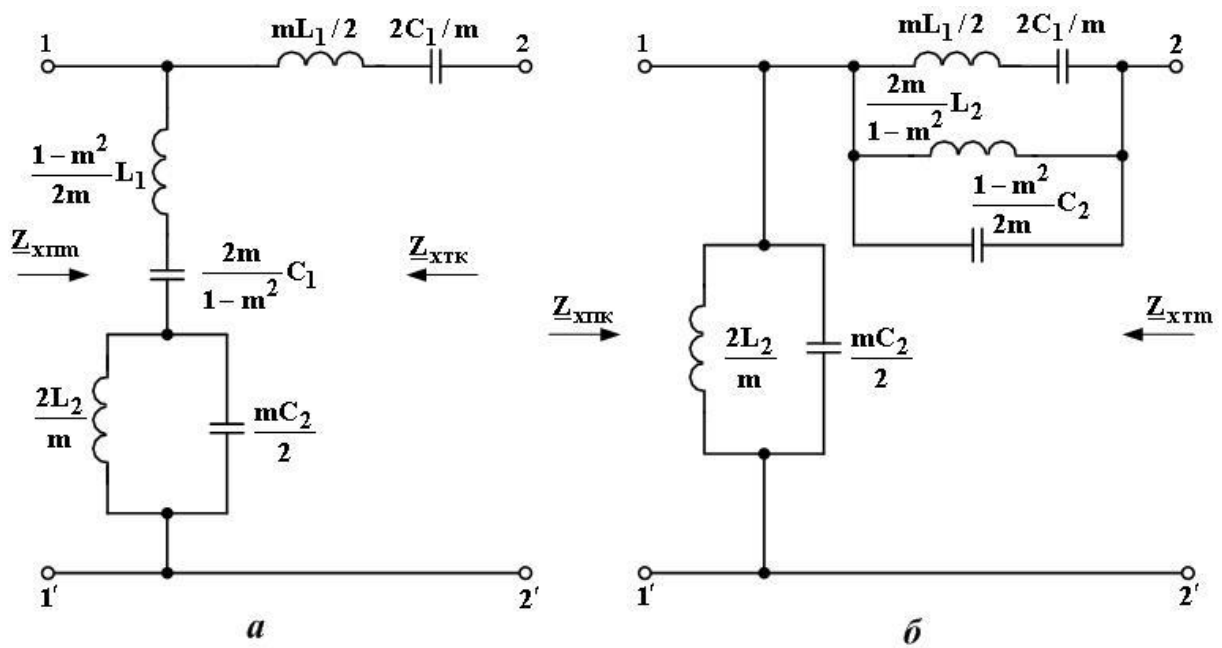


Рис. 4.47. Схеми напівланок СПФ типу **m**: послідовно-похідної (а) та паралельно-похідної (б)

Щоб записати вирази для частотних характеристик СПФ типу **m**, знайдемо спочатку величину дробу $\underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2)$, який до цих виразів входить, врахувавши (4.123) та (4.124):

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{\omega_0^2 L_1 C_2}{4} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = -\frac{\omega_0^2}{\Delta\omega^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Як і для СПФ типу **K**, позначимо $\mathbf{d} = \omega_0 / \Delta\omega$ та $\Omega = \omega / \omega_0$ (нормована частота). Тоді

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\mathbf{d}^2 \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2. \quad (4.125)$$

В результаті (детальне виведення можна знайти в [6]) шукані частотні характеристики мають такий вигляд:

– в смузі пропускання ($\omega_{cp1} \leq \omega \leq \omega_{cp2}$)

$$\begin{cases} a_c = 0, \\ \frac{\theta_c}{2} = \pm \arcsin \frac{m \cdot d \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}{\sqrt{\left| 1 - (1 - m^2) \cdot d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right|}}; \end{cases} \quad (4.126)$$

– в частині смуги затримування від $\omega_{\infty 1}$ до ω_{cp1} та від ω_{cp2} до $\omega_{\infty 2}$

$$\begin{cases} \frac{a_c}{2} = \operatorname{arch} \frac{m \cdot d \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}{\sqrt{\left| 1 - (1 - m^2) \cdot d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right|}}, \\ \frac{\theta_c}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (4.127)$$

– в частині смуги затримування від 0 до $\omega_{\infty 1}$ та від $\omega_{\infty 2}$ до ∞

$$\begin{cases} \frac{a_c}{2} = \operatorname{arsh} \frac{m \cdot d \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}{\sqrt{\left| 1 - (1 - m^2) \cdot d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right|}}, \\ \theta_c = 0 \end{cases}, \quad (4.128)$$

$$\underline{Z}_{xnm} = \frac{\underline{Z}_{xrk}}{1 - (1 - m^2) \cdot d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2}, \quad (4.129)$$

$$\underline{Z}_{xnm} = \underline{Z}_{xnk} \cdot \left[1 - (1 - m^2) \cdot d^2 \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 \right], \quad (4.130)$$

де \underline{Z}_{xrk} та \underline{Z}_{xnk} – характеристичні опори СПФ типу **K**, визначені виразами (4.71) і (4.73).

Графіки частотних характеристик СПФ типу **m** наведені на рис.4.48.

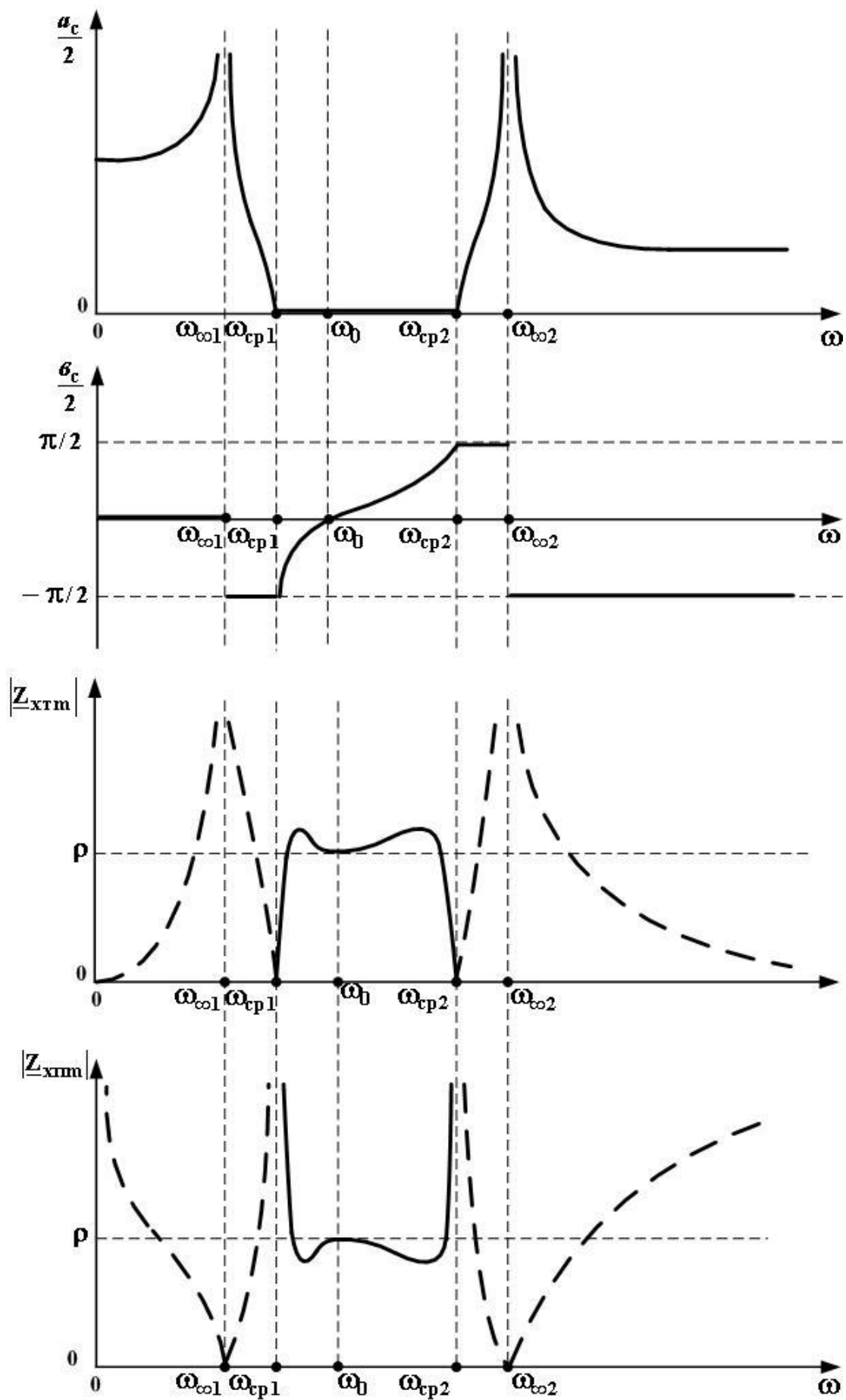


Рис. 4.48. Частотні характеристики СПФ типу **m**

Як і для СПФ типу **K**, номінальний характеристичний опір обчислюється як $\rho = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}$. Найкраще узгодження СПФ типу **m** з активним частотонезалежним опором навантаження забезпечується при **m=0,6**. Крім того, для СПФ типу **m** обидві частоти зрізу та обидві частоти нескінченного згасання пов'язані співвідношенням

$$\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2} = \omega_{\infty1} \cdot \omega_{\infty2} = \omega_0^2. \quad (4.131)$$

Тому при заданій частоті ω_0 з двох частот нескінченного згасання лише одну можна обирати довільно, що не завжди є прийнятним.

4.2.16. Смугово-затримуючий фільтр типу **m**

Спочатку намалюємо схему напівланки СЗФ типу **K** (рис.4.49), яка є прототипом.

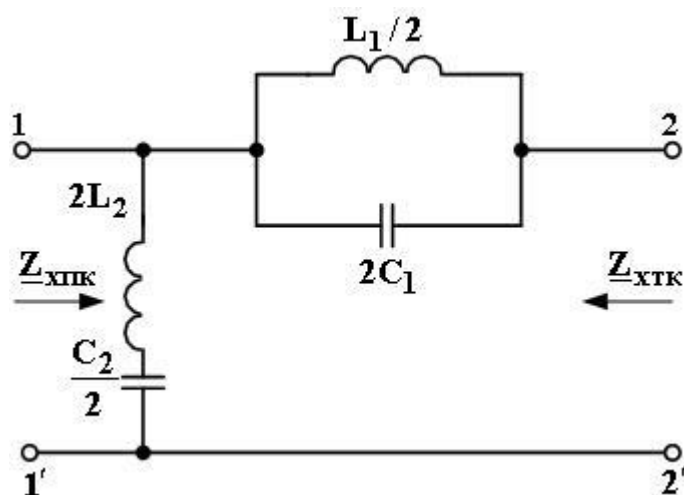


Рис. 4.49. Напівланка СЗФ типу **K**

Перерахунок опорів горизонтальної та вертикальної віток за формулами (4.88) та (4.89) дасть нам величини параметрів елементів послідовно-похідної напівланки СЗФ типу **m** (рис.4.50), а перерахунок тих же опорів за формулами (4.92) та (4.93) дасть нам величини параметрів елементів паралельно-похідної напівланки СЗФ типу **m** (рис.4.51).

Як і для прототипу, для обох напівланок мають місце рівності

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0, \quad (4.132)$$

$$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \rho.$$

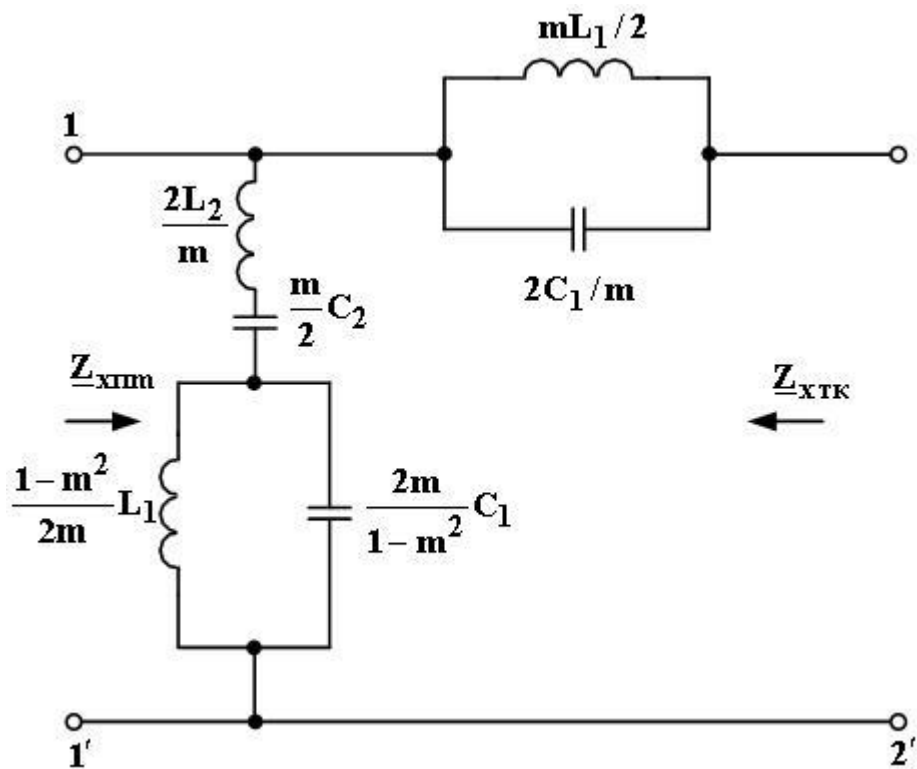


Рис. 4.50. Послідовно-похідна напівланка СЗФ типу m

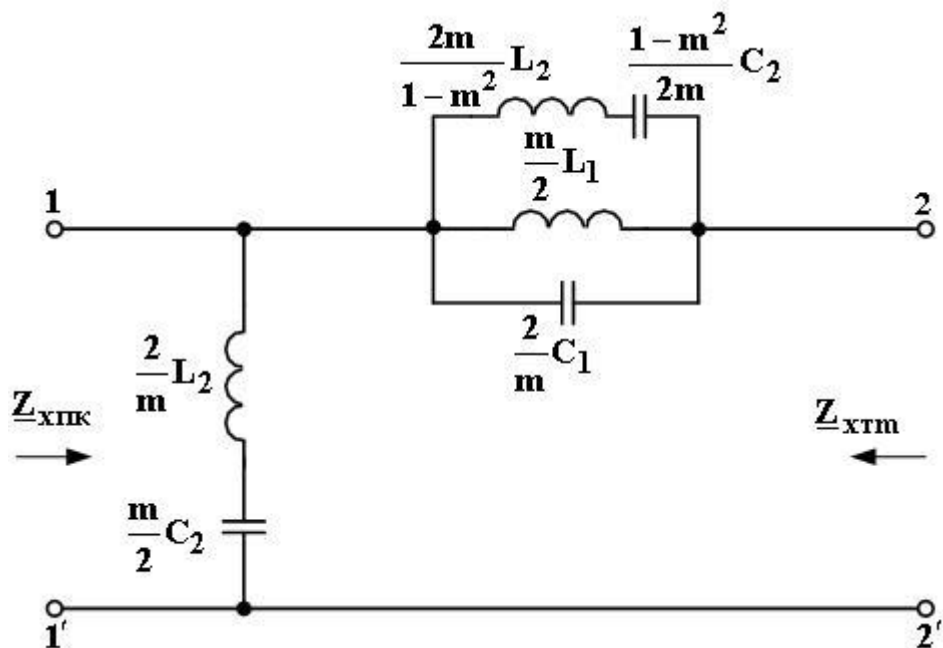


Рис. 4.51. Паралельно-похідна напівланка СЗФ типу m

Частотні характеристики СЗФ типу m (рис. 4.52) – це частотні характеристики ФНЧ та ФВЧ типу m , які “зшиті” на частоті ω_0 .

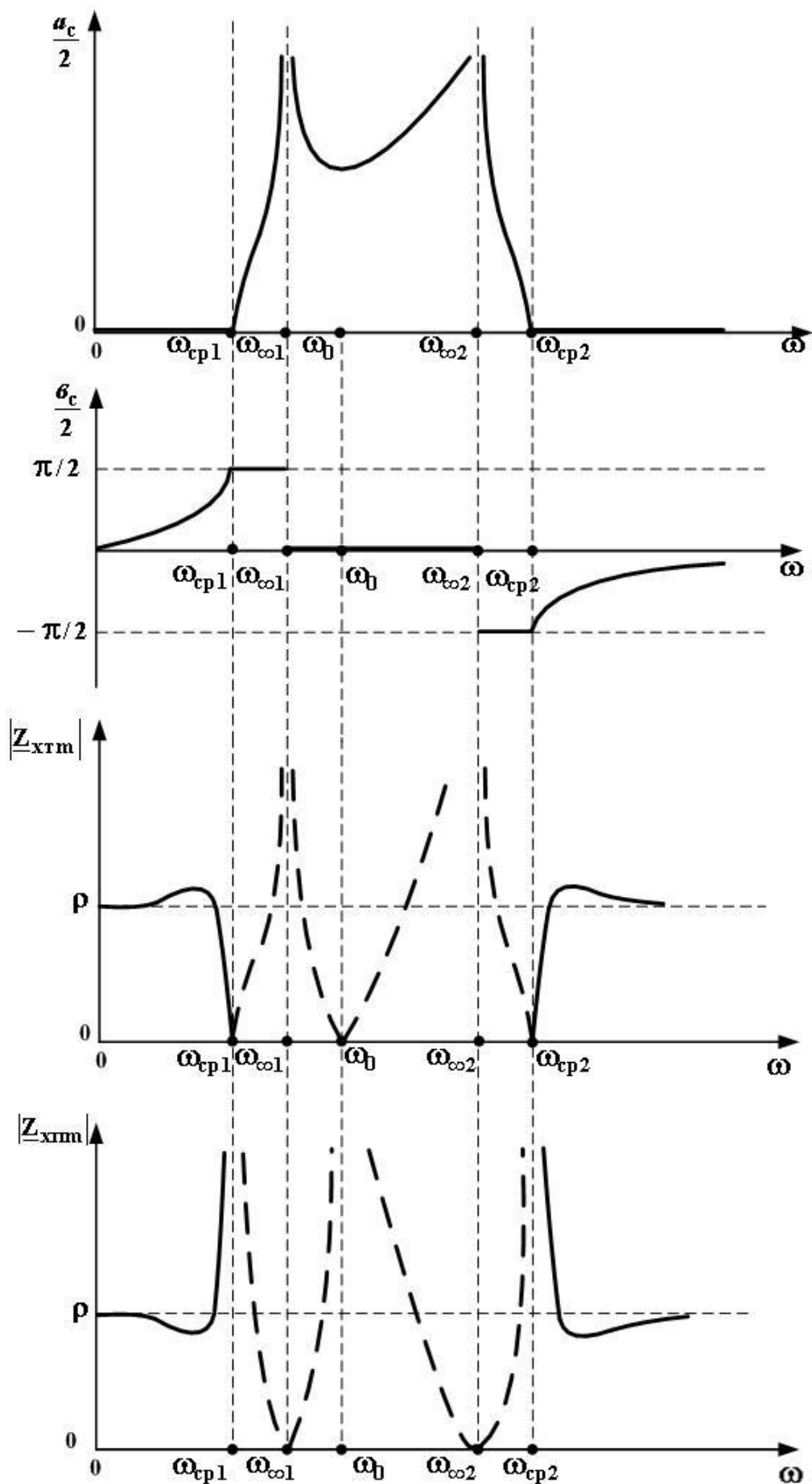


Рис. 4.52. Частотні характеристики СЗФ типу **m**

4.2.17. Переваги та недоліки фільтрів типу **m**

Оговоримо відразу, що ми розглянемо переваги фільтрів типу **m** над фільтрами типу **K**.

Першою суттєвою перевагою є більша крутість частотної залежності власного згасання на ділянці між частотою ω_{cp} зрізу та частотою ω_{∞} нескінченного згасання. Це дозволяє краще відокремлювати сигнали від перешкод. Другою суттєвою перевагою є більш наближена до постійної величини частотна залежність характеристичних опорів у смузі пропускання. Це забезпечує краще узгодження фільтра з активним частотонезалежним опором навантаження R_n .

Першим суттєвим недоліком є велике зменшення величини згасання при відході від частоти ω_{∞} вглиб смуги затримування. Це може призводити до незадовільного заглушення перешкод, спектр яких лежить в глибині смуги затримування.

Другим суттєвим недоліком є нелінійність частотної залежності власного коефіцієнта фази ν_c в смузі пропускання, внаслідок чого фільтр вносить фазові спотворення в спектр сигналу (тобто порушує співвідношення між початковими фазами гармонік сигналу). Це призводить до спотворення форми сигналу, тобто до спотворення закону зміни сигналу в часі.

Третім недоліком є більш складні схеми порівняно з аналогічними фільтрами типу **K**.

Четвертим недоліком є взаємозалежність частоти нескінченного згасання (див., наприклад, співвідношення (4.131) та (4.132)).

Дуже корисні міркування щодо специфіки частотних властивостей фільтрів типу **m** містяться в §3.9 класичного підручника [7].

4.2.18. Перетворення масштабу частот

Порівняємо формулу (4.27) частотної залежності власного згасання ФНЧ типу **K** з аналогічною формулою (4.40) для ФВЧ типу **K**, а формулу (4.28) частотної залежності власного коефіцієнта фази ФНЧ типу **K** з аналогічною формулою (4.42) для ФВЧ типу **K**. Бачимо, що формули для ФВЧ можна отримати простою заміною змінної в формулах для ФНЧ, а саме – заміною Ω на $1/\Omega$, де Ω визначається як ω/ω_{cp} . Аналогічне порівняння ФНЧ типу **K** з СПФ типу **K** ілюструє перехід від формул для ФНЧ до формул для СПФ шляхом заміни Ω на $d\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)$ за умови, що в СПФ $\Omega = \omega/\omega_0$. Такі ж висновки можна зробити, порівнявши характеристичні опори ФНЧ з характеристичними опорами ФВЧ та СПФ. Це ж саме стосується й фільтрів типу **m**. Отже, маючи у своєму

розпорядженні тільки частотні характеристики ФНЧ, можна шляхом заміни змінної перерахувати їх в характеристики ФВЧ та СПФ. Таку заміну змінної називають *перетворенням масштабу частот*. Взагалі, виконавши належну заміну змінної, можна перейти від ФНЧ до будь-якого фільтра того ж типу (**K**, **m** або іншого). Цей факт широко використовують в довідниках з розрахунку фільтрів: наводять дані лише для ФНЧ, а для переходу до інших фільтрів вказують відповідні формули для перетворення масштабу частот.

Для більш детального ознайомлення з питанням перетворення масштабу частот рекомендуємо розд. 9.2 підручника [12] та розд. 1.5 оглядової монографії [20], а також розд. 4 навчального посібника [21].

4.2.19. Поняття про складні ланцюжкові фільтри

Той факт, що будь-яка напівланка фільтра типу **m** з одного із своїх боків має характеристичний опір, який дорівнює характеристичному опоріві фільтра типу **K**, забезпечує можливість каскадного (воно ж – ланцюжкове) узгодженого з'єднання фільтрів типу **m** і типу **K**. Простим прикладом застосування такої можливості служить складний ФНЧ, який складено із центральної ланки типу **K** і початкової та кінцевої напівланок типу **m** (рис.4.53).

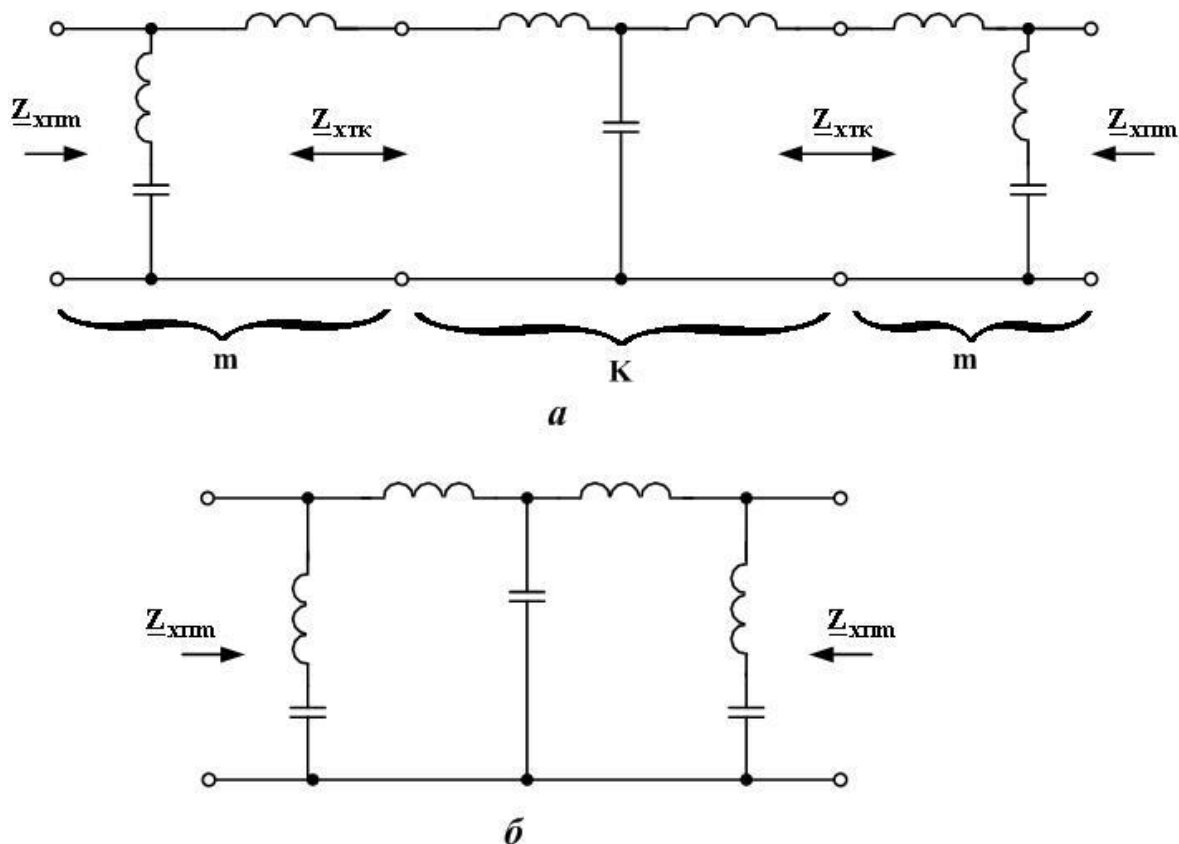


Рис. 4.53. Приклад складного ФНЧ, отриманого шляхом каскадного узгодженого з'єднання фільтрів типу **K** та типу **m**:
a – ілюстрація принципу з'єднання; *б* – підсумкова схема

При цьому всі три фільтри повинні мати одну й ту ж частоту зрізу $\omega_{\text{ср}}$. Також вважатимемо, що обидві напівланки типу **m** мають один і той самий коефіцієнт **m**. Позначимо власне згасання ланки типу **K** як $a_{\text{ск}}$, а власне згасання напівланки типу **m** як $a_{\text{см}}/2$. Як відомо з теорії чотириполіусників, власна стала передачі \underline{g}_c результуючого чотириполіусника, утвореного каскадним узгодженням з'єднанням окремих чотириполіусників, дорівнює сумі власних сталих передачі цих чотириполіусників. А відтак, власне згасання результуючого чотириполіусника $a_{\text{с рез}}$ теж дорівнює сумі власних згасань чотириполіусників. Отже, для складного ФНЧ, зображеного на рис.4.53, маємо таке власне згасання:

$$a_{\text{с рез}} = \frac{a_{\text{см}}}{2} + a_{\text{ск}} + \frac{a_{\text{см}}}{2} = a_{\text{см}} + a_{\text{ск}}.$$

Графік частотної залежності цієї величини наведений на рис.4.54.

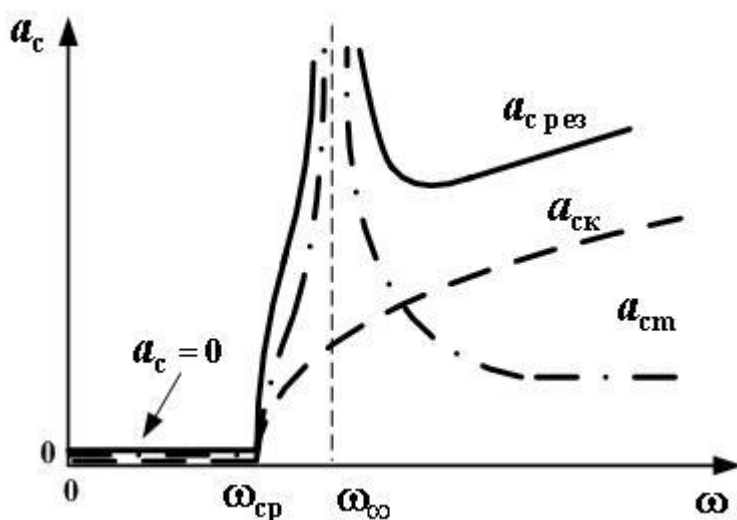


Рис. 4.54

Видно, що $a_{\text{с рез}}$ вище частоти ω_{∞} , на відміну від $a_{\text{см}}$, має лише невеликий спад, після чого росте з тією ж швидкістю, що й власне згасання $a_{\text{ск}}$ ФНЧ типу **K**.

Якщо ж величини параметра **m** у початкової та кінцевої напівланок (рис.4.53,а) будуть різними, то результуючий фільтр матиме два нескінченних сплески згасання – на частоті $\omega_{\infty 1}$ завдяки початковій напівланці та на частоті $\omega_{\infty 2}$ завдяки кінцевій напівланці. Це ще більше наближує результуючий складний фільтр до ідеального ФНЧ.

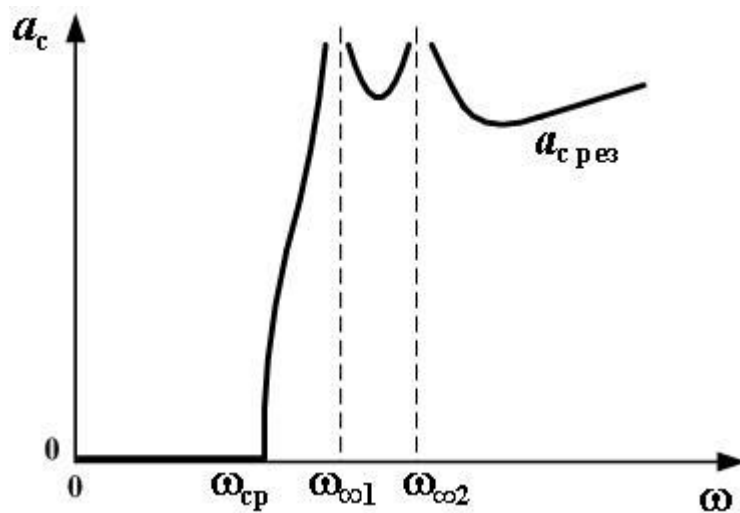


Рис. 4.55

Взагалі, комбінуючи в каскадному включенні кілька фільтрів типу **K** та типу **m**, можна отримати складні фільтри з високою частотною вибірністю завдяки різкому переходу від смуги пропускання до смуги згасання (властивість фільтра типу **m**) та великому згасанню в глибині смуги затримування (властивість фільтра типу **K**). А застосування напівланок типу **m** в першому та в останньому каскадах складного фільтра забезпечує близьку до постійної величину характеристичного опору цього фільтра в смузі пропускання, тобто забезпечує добре його узгодження з активним частотонезалежним опором навантаження R_n .

Для розширеного вивчення питання утворення складних ланцюжкових фільтрів рекомендуємо прочитати § 4.1 класичної роботи [7].

4.2.20. Мостові фільтри. Принцип дії, умови пропускання та затримування

Розглянемо чотиріполюсник, складений за відомою мостовою схемою [2, 4, 12] для того окремого випадку, коли опори плечей моста є попарно рівними (рис.4.56,а). Як неважко впевнитися, цю схему можна зобразити і в **еквівалентному** вигляді з перехрещенням плечей моста (рис.4.56,б). Останній варіант зображення схеми прийнятий в літературі з електричних фільтрів. Відомо (див., наприклад, [2, с.82]), що за будь-якої величини вхідної напруги \dot{U}_1 вихідна напруга \dot{U}_2 тотожно дорівнюватиме нулю за умови **рівноваги мостової схеми**, яка для випадку симетричної схеми (рис.4.56) має вигляд

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2. \quad (4.133)$$

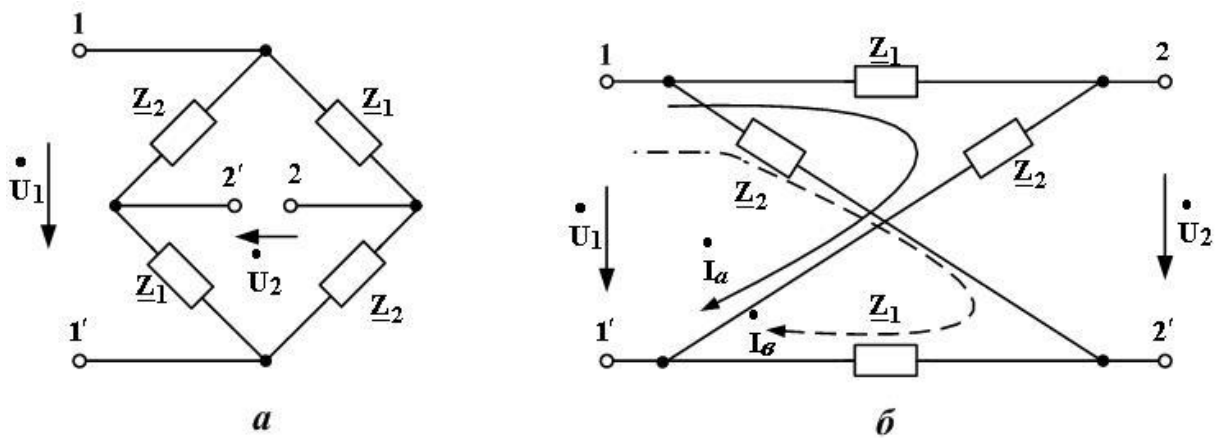


Рис. 4.56. Мостовий чотириполлюсник

Отже, на частоті (або кількох частотах), на якій виконується умова (4.133), сигнал на виході відсутній. На тих частотах (власне, в діапазоні частот), для яких ця умова не виконується, сигнал на виході є. Тобто чотириполлюсник, складений за мостовою схемою, має властивість частотної виборності і може бути використаний як фільтр; такий фільтр має назву мостового фільтра. **Звернемо увагу** на те, що фільтрація шляхом **врівноважування моста** – це **принципово інший спосіб фільтрації**, аніж розрив або замикання шляху струму, на яких базується робота Т-, П- та Г-подібних фільтрів.

В той же час, властивості мостового чотириполлюсника щодо пропускання та затримування сигналів, як і аналогічні властивості Т-, П- та Г-подібних чотириполлюсників, можна дослідити, аналізуючи сумісно його А-параметри та його власну сталу передачі. Згідно з (2.4) коефіцієнт \underline{A} знаходимо при розімкнених затискачах 2 – 2' як

$$\underline{A} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_a \underline{Z}_2 - \dot{I}_e \underline{Z}_1}.$$

Оскільки $\dot{I}_a = \dot{I}_e = \dot{U}_1 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)$, то після підстановки та скорочення на \dot{U}_1 отримаємо

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} =$$

$$\frac{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}{1 - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (4.134)$$

З іншого боку, згідно з (4.3), маємо

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \operatorname{ch} \underline{g}_c = \\ &= \operatorname{ch}(a_c + j\theta_c) = \operatorname{ch} a_c \cdot \cos \theta_c + j \operatorname{sh} a_c \cdot \sin \theta_c. \end{aligned} \quad (4.135)$$

У **смугі пропускання**, за її визначенням, власне згасання дорівнює нулю, тому в ній $\underline{A} = \cos \theta_c$, звідки випливає, що $-1 \leq \underline{A} \leq 1$. Замінивши \underline{A} на вираз (4.134), отримаємо подвійну нерівність

$$-1 \leq \frac{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}{1 - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \leq 1.$$

Ця нерівність виконується, якщо

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \leq 0, \quad (4.136)$$

тобто якщо дріб $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2$ є дійсним числом, а знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 різні.

Як і раніше (в усьому розділі «LC-фільтри») вважаємо, що \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є чисто реактивними опорами. Тоді вимога дійсності величини дроби $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2$ задовольняється автоматично. Отже, **умовою існування смуги пропускання** мостового фільтра є така: **знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 різні** (тобто різними є й характери цих опорів – якийсь з них індуктивний, а інший – ємнісний).

Умова затримування є виконання нерівності, протилежної (4.136):

$$\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 > 0. \quad (4.137)$$

Звідси випливає, що **умовою існування смуги затримування** мостового фільтра є така: **знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 однакові** (тобто обидва ці опори мають однаковий характер).

Частоти зрізу мостового фільтра, з математичної точки зору, – це ті частоти, при переході через які знак дроби $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2$ змінюється.

Тепер перейдемо до визначення частотних характеристик мостових фільтрів. З порівняння (4.134) та (4.135) отримаємо рівність

$$\operatorname{ch} \underline{g}_c = \frac{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}{1 - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (4.138)$$

Гіперболічні косинус та синус мають такі властивості:

$$\operatorname{ch} x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}, \quad \operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2},$$

де x – будь-яке (в тому числі й комплексне) число. Звідси гіперболічний тангенс можна обчислити як

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}.$$

Замінивши x на \underline{g}_c і врахувавши (4.138), отримаємо

$$\operatorname{th} \frac{\underline{g}_c}{2} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (4.139)$$

У смузі пропускання $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 \leq 0$ (див.(4.136)) та $a_c=0$. Тоді

$$\operatorname{th} \frac{\underline{g}_c}{2} = \operatorname{th} \left(\frac{a_c}{2} + j \frac{\beta_c}{2} \right).$$

Оскільки $\operatorname{th}(jx) = j \cdot \operatorname{tg} x$, то в смузі пропускання

$$\operatorname{th} \frac{\underline{g}_c}{2} = j \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} = \pm j \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Отже, в смузі пропускання маємо

$$a_c=0,$$

$$\vartheta_c = \pm 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (4.140)$$

В смузі затримування $Z_1 / Z_2 > 0$ (див. (4.137)), а також $a_c > 0$. Звідси випливає, що визначений виразом (4.139) $\operatorname{th} \frac{g_c}{2}$ в цій смузі є дійсним числом. Використаємо таку властивість гіперболічного тангенса:

$$\operatorname{th}(x + jy) = \frac{\operatorname{sh}2x - j \sin 2y}{\operatorname{ch}2x + \cos 2y}, \quad (4.141)$$

де x та y – дійсні числа.

Тоді можна записати, що

$$\operatorname{th}\left(\frac{g_c}{2}\right) = \operatorname{th}\left(\frac{a_c}{2} + j \frac{\vartheta_c}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}a_c - j \sin \vartheta_c}{\operatorname{cha}_c + \cos \vartheta_c}. \quad (4.142)$$

Оскільки в смузі затримування, як ми вже з'ясували, $\operatorname{th} \frac{g_c}{2}$ є дійсним числом, то в (4.142) множник при j дорівнює нулю, тобто в цій смузі

$$\sin \vartheta_c = 0. \quad (4.143)$$

Є два варіанти розв'язування цієї рівності:

1) $\vartheta_c = 0 \pm 2k\pi$, $k=0,1,2,3,\dots$

Доданок $2k\pi$ як такий, що не має принципового значення, ми опустимо. Тоді з (4.139) та (4.142) отримаємо

$$\operatorname{th} \frac{a_c}{2} = \frac{\operatorname{sh}a_c}{\operatorname{cha}_c + 1} = \pm \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (4.144)$$

Але $\operatorname{sh}a_c$ завжди менший від $(\operatorname{cha}_c + 1)$ (див. рис.4.57,а), крім того $a_c > 0$.

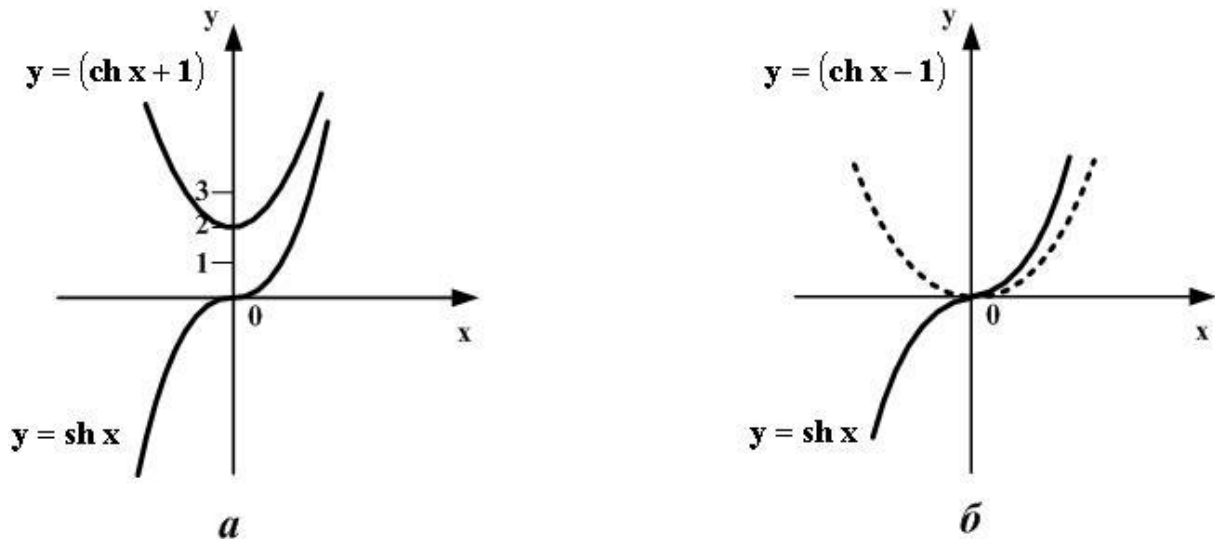


Рис. 4.57

Тоді $0 < \text{sha}_c / (\text{cha}_c + 1)$, тобто перед коренем в (4.144) слід взяти знак “+”:

$$\frac{\text{sha}_c}{\text{cha}_c + 1} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} < 1.$$

Отже, якщо в смузі затримування $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 < 1$, то там $\nu_c = 0$ і, згідно з (4.144),

$$a_c = 2 \text{arth} \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}; \quad (4.145)$$

$$2) \nu_c = \pm \pi \pm 2k\pi, \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Доданок $2k\pi$ як такий, що не має принципового значення, опустимо. Тоді з (4.139) та (4.142) отримаємо

$$\text{th} \frac{g_c}{2} = \frac{\text{sha}_c}{\text{cha}_c - 1} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (4.146)$$

Але sha_c завжди більший від $(\text{cha}_c - 1)$ (див. рис.4.57,б), крім того, $a_c > 0$. Тоді $\text{sha}_c / (\text{cha}_c - 1) > 1$, тобто перед коренем в (4.146) слід взяти знак “+”:

$$\frac{\text{sha}_c}{\text{cha}_c - 1} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} > 1,$$

тобто $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 > 1$. Крім того, при $\nu_c = \pm\pi$ маємо

$$\text{th} \frac{\underline{g}_c}{2} = \text{th} \left(\frac{a_c}{2} \pm j \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\text{th} \frac{a_c}{2}} = \text{cth} \frac{a_c}{2},$$

що впливає з властивостей гіперболічного тангенса. Таким чином, ліва частина рівності (4.146) перетворилася на $\text{cth} \frac{a_c}{2}$, а в правій частині перед коренем стоїть знак ”+”:

$$\text{cth} \frac{a_c}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}.$$

Отже, якщо в смузі затримування $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 > 1$, то там $\nu_c = \pm\pi$ та

$$a_c = 2 \text{arcth} \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = 2 \text{arth} \sqrt{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}}. \quad (4.147)$$

Таким чином, ми визначили частотні залежності власного згасання a_c та власного коефіцієнта фази ν_c мостового фільтра для будь-якої комбінації опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 .

Визначивши властивості мостового фільтра щодо пропускання та затримування сигналів, знайдемо загальну формулу для визначення характеристичних опорів мостового фільтра. Оскільки цей фільтр є симетричним (див.рис.4.56,б), то обидва характеристичні опори в нього співпадають, і їм можна присвоїти одне позначення $\underline{Z}_{\text{XM}}$. Знайдемо його методом холостого ходу та короткого замикання згідно з формулою (2.58) і використовуючи будь-яку схему з рис. 4.56:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{XM}} &= \sqrt{\underline{Z}_{1\text{kз}} \cdot \underline{Z}_{1\text{xx}}} = \sqrt{2 \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2}} = \\ &= \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Як бачимо, цей вираз є набагато простішим порівняно з виразами для характеристичних опорів фільтрів типу **K** та типу **m**.

4.2.21. Елементарні мостові фільтри нижніх частот

Умови пропускання і затримування для мостових фільтрів є такими, що один й той самий фільтр (ФНЧ, ФВЧ, СПФ і т.д.) можна реалізувати, використовуючи, строго кажучи, нескінченну чисельність комбінацій опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 . Мостові фільтри, що утворені найпростішими двополюсниками \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 , які ще забезпечують бажаний характер фільтра, назвемо елементарними мостовими фільтрами.

Схеми елементарних мостових ФНЧ наведені на рис.4.58. Розглянемо ФНЧ, складений за першою з цих схем. Спочатку, сумісно аналізуючи графіки $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$ на базі умов пропускання та затримування, покажемо, що це – саме ФНЧ. Маємо $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$ та

$$\underline{Z}_2 = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = j\omega L_2 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2} \right) = j\omega L_2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \text{ де } \omega_p - \text{ частота}$$

резонансу послідовного коливального контуру $L_2 C_2$. В залежності від конкретного сполучення параметрів L_1, L_2, C_1, C_2 графіки $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$ можуть перетинатися (рис. 4.59,а) або не перетинатися (рис.4.59,б). Наявність перетинання на певній частоті означає те, що на цій частоті (яку ми завбачливо позначили як ω_∞) має місце рівність $\underline{Z}_1(\omega_\infty) = \underline{Z}_2(\omega_\infty)$, тобто міст є *урівноваженим*, а відтак – сигналу на виході немає. Це означає наявність нескінченно високого сплеску власного згасання на частоті ω_∞ (рис.4.59,в). Відсутність перетинання графіків $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$, ілюстрована рис. 4.59,б, свідчить про відсутність сплеску власного згасання (рис. 4.59,г).

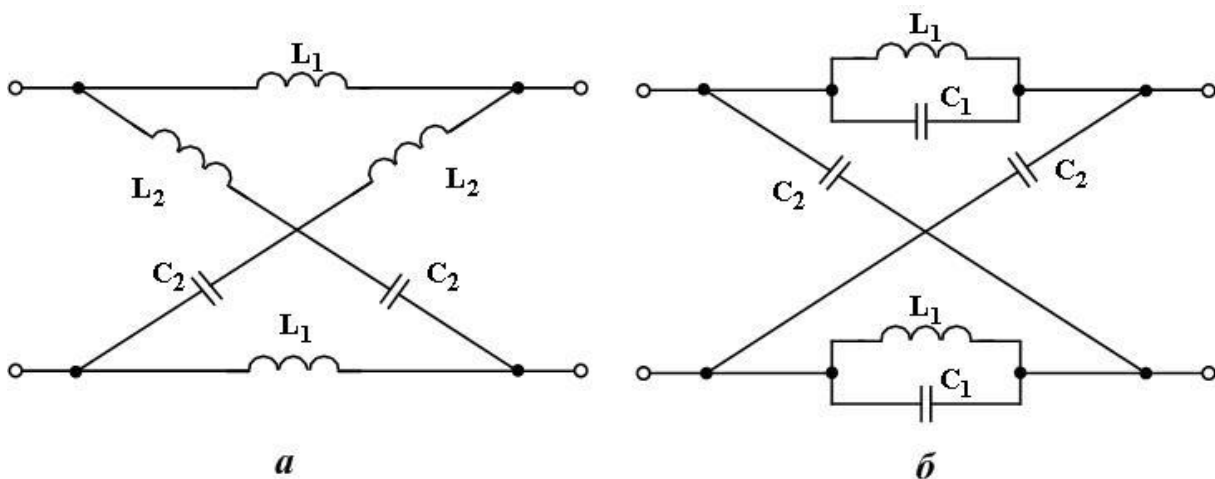


Рис. 4.58. Елементарні мостові ФНЧ

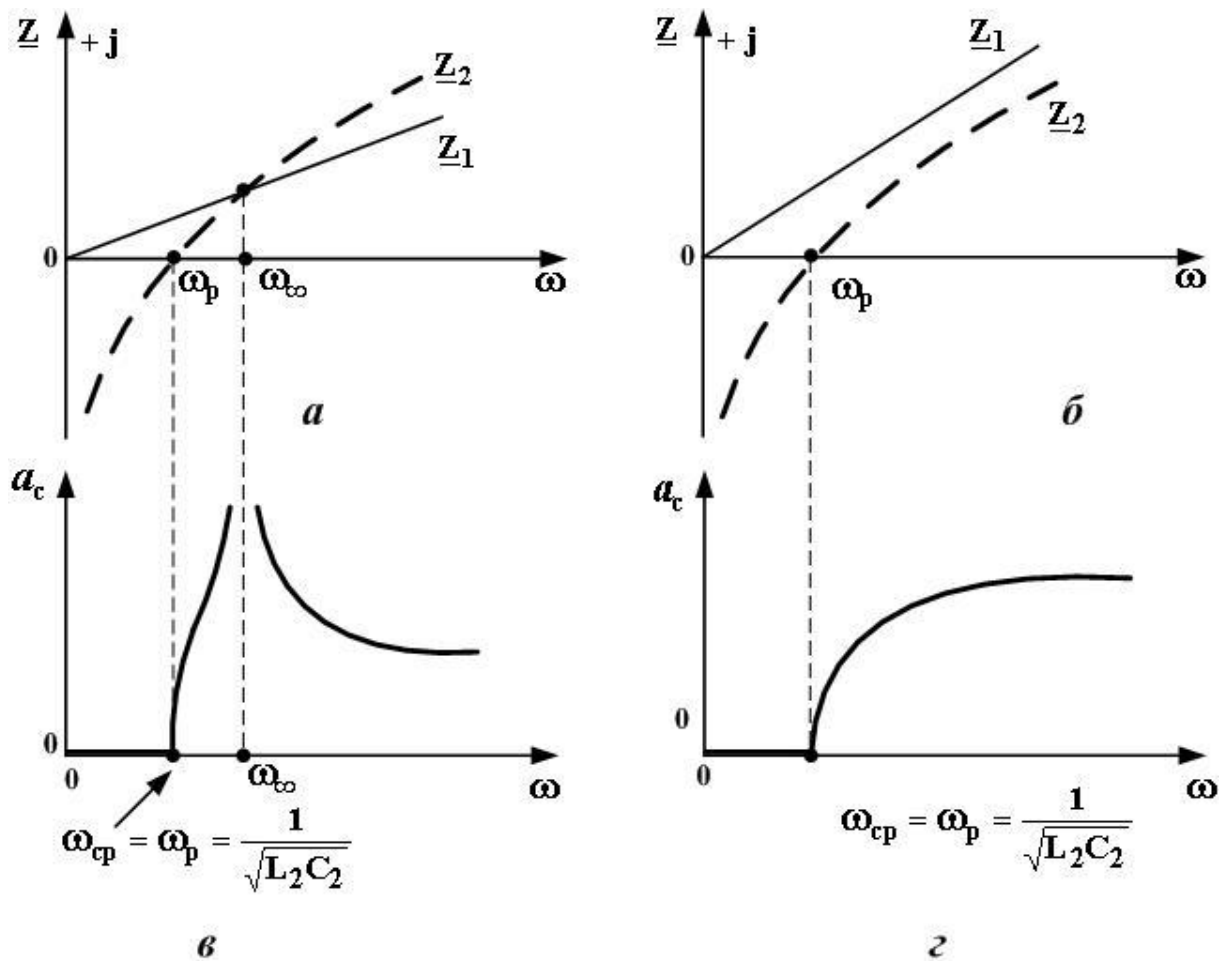


Рис. 4.59. Частотні залежності опорів віток та власного згасання елементарного мостового ФНЧ

В діапазоні від 0 до ω_p знаки опорів Z_1 та Z_2 є *різними* в обох випадках (рис.4.59,а та рис.4.59,б). Це означає, що в даному діапазоні має місце смуга пропускання. Для частот, більших від ω_p , знаки опорів є *однаковими*, тобто там має місце смуга затримування. Отже, частота $\omega_p = 1/\sqrt{L_2C_2}$ резонансу послідовного коливального контуру L_2C_2 є водночас і частотою ω_{cp} зрізу елементарного мостового ФНЧ, складеного за схемою з рис.4.58,а.

Зробивши побудовання, аналогічні наведеним на рис. 4.59, для кола, схему якого зображено на рис.4.58,б, неважко впевнитися, що це коло також є мостовим ФНЧ.

Продовжимо розгляд елементарного мостового ФНЧ з рис.4.58,а. Конкретизуємо для нього вираз $\sqrt{Z_1/Z_2}$, який відіграє важливу роль в теорії мостових фільтрів (див. п.4.2.20), врахувавши, що $\omega_p = \omega_{cp}$:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{j\omega L_2 \cdot \left(1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}\right)}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}}.$$

Введемо новий параметр

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (4.149)$$

та вже відому нормовану частоту

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{cp}}. \quad (4.150)$$

Тоді

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\mathbf{m}\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}. \quad (4.151)$$

Згасання буде нескінченним при $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$. Позначивши відповідну нормовану частоту як Ω_∞ , з (4.151) отримаємо

$$\frac{\mathbf{m}\Omega_\infty}{\sqrt{\Omega_\infty^2 - 1}} = 1,$$

звідки

$$\mathbf{m} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega_\infty^2}}. \quad (4.152)$$

З даного виразу випливає, що при $0 \leq \mathbf{m} < 1$ (тобто, згідно з (4.149), при $L_1 < L_2$) величина Ω_∞ лежить в межах $(1, \infty)$, тобто $\omega_{cp} < \omega_\infty < \infty$. Це означає фізичну наявність частоти ω_∞ , на якій має місце нескінченний сплеск згасання. Якщо ж $\mathbf{m} > 1$ (тобто $L_1 > L_2$), то Ω_∞ є суто уявним числом, тобто дійсної величини ω_∞ не існує, і величина a_c при $\omega \rightarrow \infty$ зростає до якоїсь скінченної величини. При $\mathbf{m} = 1$ (тобто при $L_1 = L_2$) маємо $\omega_\infty = \infty$. Це означає, що сплеск згасання “розташований на нескінченності”, й тому при $\omega \rightarrow \infty$ згасання монотонно зростає до нескінченності.

Відтак, у випадку $0 \leq m < 1$ елементарний мостовий ФНЧ має частотну залежність згасання, яка повторює аналогічну залежність для ФНЧ типу m . У випадку ж $m = 1$ цей мостовий ФНЧ за поведінкою власного згасання ідентичний ФНЧ типу K (при $m > 1$ він схожий на фільтр типу K , але не ідентичний йому).

Без виведення (зацікавлений читач може знайти його в [7]) наведемо формули для обчислення власного згасання та власного коефіцієнта фази елементарних мостових ФНЧ (рис.4.58,а та 4.58,б):

$$a_c = \begin{cases} 0 & \text{в смузі пропускання,} \\ 2\operatorname{arth} \frac{m\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} & \text{в смузі затримування} \end{cases} \quad (4.153)$$

$$\theta_c = \begin{cases} 2\operatorname{arctg} \frac{m\Omega}{\sqrt{|\Omega^2 - 1|}} & \text{в смузі пропускання,} \\ \pi & \text{при } \omega_{\text{ср}} < \omega \leq \omega_{\infty}, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_{\infty}. \end{cases} \quad (4.154)$$

Звернемо увагу читача на те, що для елементарного мостового ФНЧ, складеного за схемою з рис. 4.58,б, величина m визначається формулою

$$m = \sqrt{C_2 / C_1}. \quad (4.155)$$

Графіки залежності $\theta_c(\omega)$ наведені на рис.4.60.

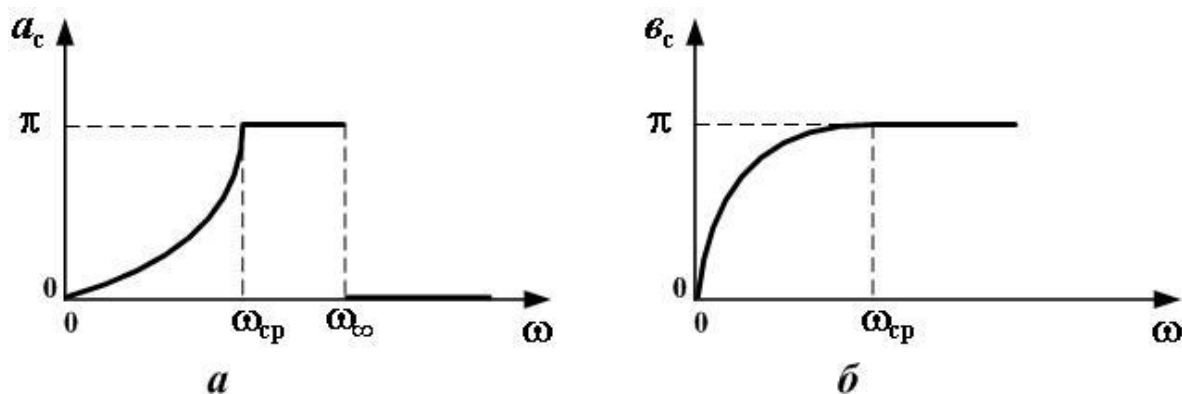


Рис. 4.60. Частотна залежність власного коефіцієнта фази елементарного мостового ФНЧ:

a – при $m < 1$; $б$ – при $m \geq 1$

Розглянуті варіанти елементарного мостового ФНЧ мають корисну особливість: змінюючи величину m , можна регулювати вигляд залежності $v_c(\omega)$ в смузі пропускання – від “прогнутої” (рис. 4.60,а) до “вигнутої” (рис.4.60,б). Найбільш близькою до ідеалу прямої лінії ця залежність стає при $m \approx 1,4$.

Тепер знайдемо характеристичні опори елементарних мостових ФНЧ. Для першого з цих фільтрів (рис.4.58,а), згідно з (4.148), маємо

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ХМ}} &= \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} = \sqrt{j\omega L_1 \cdot j\omega L_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)} = \sqrt{-\omega^2 L_1 L_2 \cdot \frac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega^2 L_2 C_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L_1}{C_2} \cdot (1 - \omega^2 L_2 C_2)}. \end{aligned}$$

Оскільки $1/\sqrt{L_2 C_2}$ є частотою ω_p резонансу послідовного коливального контуру і водночас частотою ω_{cp} зрізу даного ФНЧ (див., наприклад, рис.4.59,а та 4.59,в), то

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ХМ}} &= \sqrt{\frac{L_1}{C_2} \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}\right)} = \\ &= \rho \sqrt{1 - \Omega^2}, \end{aligned} \tag{4.156}$$

де $\rho = \sqrt{L_1 / C_2}$ – номінальний характеристичний опір елементарного мостового ФНЧ (схема з рис.4.58,а);

Ω – нормована частота згідно з (4.150).

Діючи аналогічним чином, можна для елементарного мостового ФНЧ, складеного за схемою з рис.4.58,б, знайти

$$\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \rho / \sqrt{1 - \Omega^2}. \tag{4.157}$$

Бачимо, що частотні залежності характеристичних опорів елементарних мостових ФНЧ співпадають з аналогічними залежностями для Т-подібного ФНЧ типу **К** (фільтр з рис. 4.58,а) та П-подібного ФНЧ типу **К** (фільтр з рис.4.58,б). **Дуже важливо**, що вирази (4.156) та (4.157) не залежать від параметра m . Це означає, що при регулюванні залежностей $a_c(\omega)$ та $v_c(\omega)$ у мостових фільтрів *не змінюється вигляд частотної залежності $\underline{Z}_{\text{ХМ}}$* .

Наостанок без виведення наведемо корисне співвідношення, яке пов'язує частоти ω_{cp} та ω_{∞} для обох варіантів елементарного мостового ФНЧ:

$$\omega_{\infty} = \omega_{cp} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (4.158)$$

Формули для розрахунку параметрів елементів розглянутих фільтрів, наведені в посібнику [7], є такими:

– для схеми з рис.4.58,а

$$L_1 = \frac{m \cdot R_n}{\omega_{cp}}, \quad L_2 = \frac{R_n}{m \cdot \omega_{cp}}, \quad C_2 = \frac{m}{R_n \cdot \omega_{cp}};$$

– для схеми з рис. 4.58,б

$$L_1 = \frac{m \cdot R_n}{\omega_{cp}}, \quad C_1 = \frac{1}{m \cdot R_n \cdot \omega_{cp}}, \quad C_2 = \frac{m}{R_n \cdot \omega_{cp}},$$

де R_n – опір навантаження.

4.2.22. Елементарні мостові фільтри верхніх частот

Схеми елементарних мостових ФВЧ наведені на рис.4.61. Досі незвичні читачеві “штрихові” ділянки цих схем є умовним позначенням, яке часто використовують для економії місця при зображенні схем мостових фільтрів. Штриховими лініями в схемах замінюють ті ділянки, що повторюються (наприклад, ємність C_1 по горизонталі рис. 4.61,а та ланцюжок L_2C_2 по діагоналі цього ж рисунка).

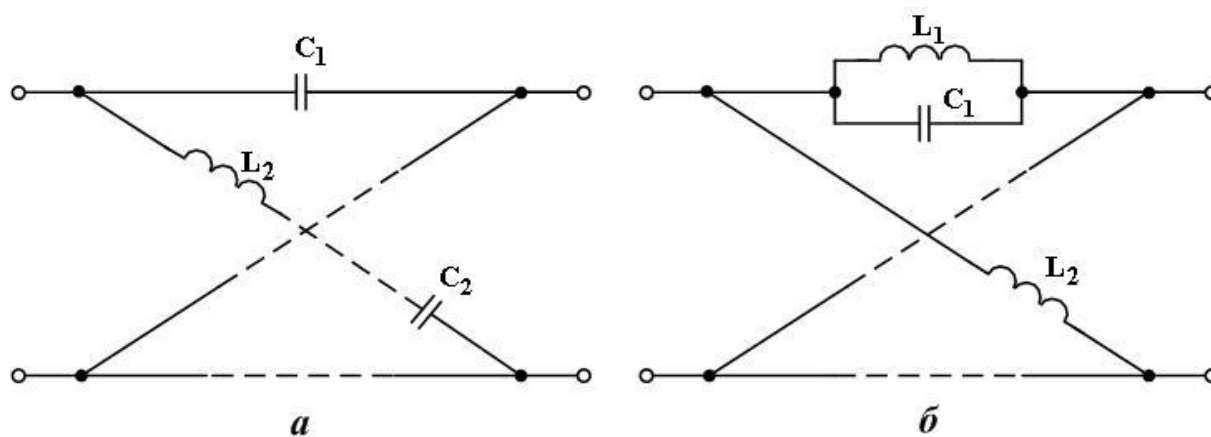


Рис. 4.61. Елементарні мостові ФВЧ

Розглянемо ФВЧ, складений за першою з цих схем. Спочатку, сумісно аналізуючи графіки $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$ на базі умов пропускання та затримування мостових чотириполюсників, покажемо, що це саме ФВЧ. Маємо

$$\underline{Z}_1(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1}, \quad \underline{Z}_2(\omega) = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = j\omega L_2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

де $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ – частота резонансу послідовного коливального контуру $L_2 C_2$.

В залежності від конкретного сполучення параметрів L_1, L_2, C_1, C_2 графіки $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$ можуть перетинатися (рис.4.62,а) або не перетинатися (рис. 4.62,б). Наявність перетинання на певній частоті (позначеній як ω_∞) означає те, що на цій частоті має місце рівність $\underline{Z}_1(\omega_\infty) = \underline{Z}_2(\omega_\infty)$, тобто міст є *врівноваженим* (див. (4.133)), що призводить до повного непропускання сигналу на вихід. Це означає наявність нескінченно високого сплеску власного згасання на частоті ω_∞ (рис.4.62,в). Й навпаки, відсутність перетинання графіків $\underline{Z}_1(\omega)$ та $\underline{Z}_2(\omega)$, ілюстрована на рис.4.62,б, свідчить про відсутність сплеску власного згасання (рис.4.62,г).

В діапазоні від ω_p до нескінченності знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є *різними* в обох випадках (рис.4.62,а та 4.62,б). Згідно з умовою пропускання мостового чотириполюсника це означає, що в даному діапазоні має місце смуга пропускання. Для частот, які лежать у діапазоні від 0 до ω_p , знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є *однаковими*, тобто там має місце смуга затримування. Отже, частота $\omega_p = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ резонансу послідовного коливального контуру $L_2 C_2$ є водночас і частотою ω_{cp} зрізу елементарного мостового ФВЧ, складеного за схемою з рис.4.61,а.

Зробивши побудовання, аналогічні наведеним на рис.4.62, для кола, схему якого зображено на рис.4.61,б, неважко впевнитися, що це коло також є мостовим ФВЧ.

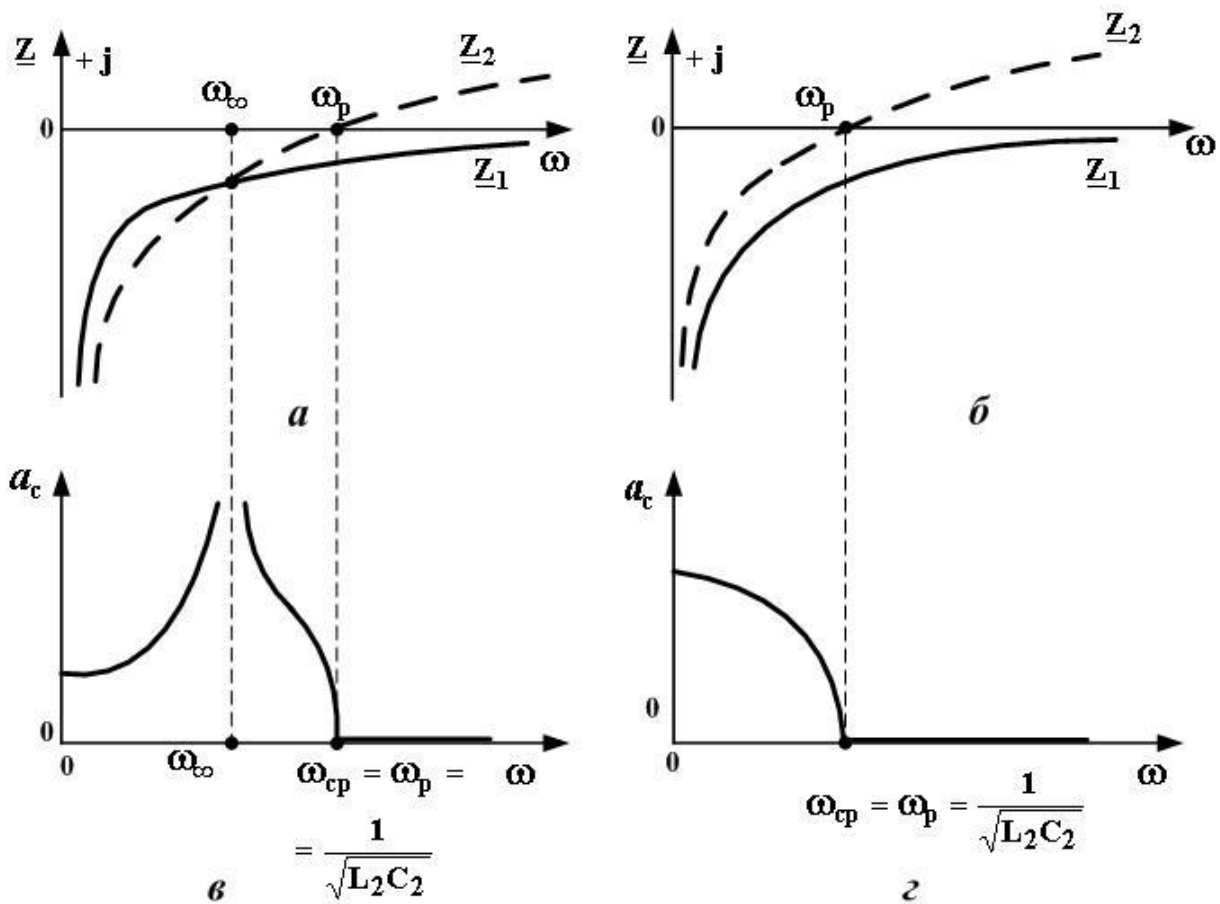


Рис. 4.62. Частотні залежності опорів віток та власного згасання елементарного мостового ФВЧ

Продовжимо розгляд елементарного мостового ФВЧ, складеного за схемою з рис. 4,61,а. Конкретизуємо для нього вираз $\sqrt{Z_1/Z_2}$, який відіграє важливу роль у теорії мостових фільтрів (див.п.4.2.20), врахувавши, що $\omega_p = \omega_{cp}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} &= \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega L_2 \cdot \left(1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C_1 L_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 L_2 C_2}{\omega^2 C_1 L_2 (1 - \omega^2 L_2 C_2)}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}}} \end{aligned}$$

Введемо новий параметр

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad (4.159)$$

і позначимо згідно з (4.150) $\Omega = \omega / \omega_{\text{cp}}$. Тоді

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{1 - \Omega^2}}.$$

Згасання буде нескінченним при $Z_1 = Z_2$. Позначивши відповідну нормовану частоту як Ω_∞ , з останнього виразу отримаємо

$$\frac{\mathbf{m}}{\sqrt{1 - \Omega_\infty^2}} = 1,$$

звідки

$$\mathbf{m} = \sqrt{1 - \Omega_\infty^2}. \quad (4.160)$$

З даного виразу випливає, що при $0 \leq \mathbf{m} < 1$ (тобто, згідно з (4.159), при $C_2 < C_1$, величина Ω_∞ лежить в межах $[0, 1]$, тобто $0 \leq \omega_\infty \leq \omega_{\text{cp}}$. Це означає фізичну наявність частоти Ω_∞ , на якій має місце нескінченний сплеск власного згасання. Якщо ж $\mathbf{m} > 1$ (тобто $C_2 > C_1$), то Ω_∞ є суто уявним числом, тобто дійсної величини Ω_∞ не існує, і величина a_c при $\omega \rightarrow 0$ зростає до якоїсь скінченої величини. При $\mathbf{m} = 1$ (тобто при $C_2 = C_1$) маємо $\Omega_\infty = 0$. Це означає, що сплеск згасання має місце для постійного струму, тобто при $\omega \rightarrow 0$ згасання монотонно зростає до нескінченності.

Відтак, у випадку $0 \leq \mathbf{m} < 1$ елементарний мостовий ФВЧ має частотну залежність власного згасання, яка повторює аналогічну залежність для ФВЧ типу \mathbf{m} . У випадку ж $\mathbf{m} = 1$ цей мостовий ФВЧ за частотною залежністю власного згасання ідентичний ФВЧ типу \mathbf{K} (при $\mathbf{m} > 1$ він *схожий* на фільтр типу \mathbf{K} , але не ідентичний йому).

Без виведення наведемо формули для обчислення власного згасання та власного коефіцієнта фази розглянутих елементарних мостових ФВЧ [7]:

$$a_c = \begin{cases} 2 \operatorname{arth} \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{1 - \Omega^2}} & \text{при } 0 \leq \omega < \omega_{\text{cp}}, \\ 0 & \text{при } \omega \geq \omega_{\text{cp}} \end{cases} \quad (4.161)$$

$$\theta_c = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \omega < \omega_\infty, \\ -\pi & \text{при } \omega_\infty \leq \omega < \omega_{cp}, \\ 2\operatorname{arctg} \frac{m}{\sqrt{1-\Omega^2}} & \text{при } \omega \geq \omega_{cp}. \end{cases} \quad (4.162)$$

Звернемо увагу читача на те, що для елементарного мостового ФВЧ, складеного за схемою з рис.4.61,б, величина m визначається формулою

$$m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (4.163)$$

Типовий графік залежності $\theta_c(\omega)$ наведений на рис.4.63.

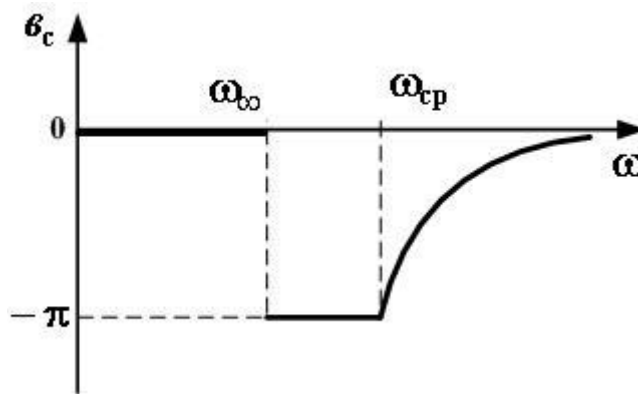


Рис. 4.63. Частотна залежність власного коефіцієнта фази елементарного мостового ФВЧ

Тепер знайдемо характеристичні опори елементарних мостових ФВЧ. Для першого з цих фільтрів (рис.4.61,а) згідно з (4.148) маємо

$$\underline{Z}_{ХМ} = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\omega L_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)}.$$

Оскільки $1/\sqrt{L_2 C_2}$ є частотою ω_p резонансу послідовного коливального контуру $L_2 C_2$ і водночас частотою ω_{cp} зрізу даного ФВЧ (див., наприклад, рис.4.62,а та 4.62,в), то

$$\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1} \cdot \left(1 - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}\right)} = \rho \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}, \quad (4.164)$$

де $\rho = \sqrt{L_2/C_1}$ – номінальний характеристичний опір елементарного мостового ФВЧ (схема з рис.4.61,а);

Ω – нормована частота згідно з (4.150).

Діючи аналогічним чином, можна для елементарного мостового ФВЧ, складеного за схемою з рис.4.61,б, знайти

$$\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \rho / \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}. \quad (4.165)$$

Бачимо, що частотні залежності характеристичних опорів елементарних мостових ФВЧ співпадають з аналогічними залежностями для Т-подібного ФВЧ типу **К** (фільтр з рис.4.61,а) та П-подібного ФВЧ типу **К** (фільтр з рис. 4.61,б).

Як і елементарних мостових ФНЧ, у ФВЧ вирази для $\underline{Z}_{\text{ХМ}}$ не залежать від параметра **m**, тому в них при регулюванні залежностей $a_c(\omega)$ та $v_c(\omega)$ також не змінюється вигляд частотної залежності $\underline{Z}_{\text{ХМ}}$.

Без виведення наведемо співвідношення, яке пов'язує частоти $\omega_{\text{ср}}$ та ω_{∞} для обох варіантів елементарного мостового ФВЧ:

$$\omega_{\infty} = \omega_{\text{ср}} \cdot \sqrt{1 - m^2}. \quad (4.166)$$

Формули для розрахунку параметрів елементів розглянутих фільтрів, наведені в посібнику [7], є такими:

– для схеми з рис.4.61,а

$$C_1 = \frac{1}{mR_n\omega_{\text{ср}}}, \quad C_2 = \frac{m}{\omega_{\text{ср}}R_n}, \quad L_2 = \frac{R_n}{m\omega_{\text{ср}}};$$

–для схеми з рис. 4.61,б

$$C_1 = \frac{1}{mR_n\omega_{\text{ср}}}, \quad L_1 = \frac{mR_n}{\omega_{\text{ср}}}, \quad L_2 = \frac{R_n}{m\omega_{\text{ср}}},$$

де R_n – опір навантаження.

4.2.23. Елементарні мостові смугово-пропускаючі фільтри

Схеми елементарних мостових СПФ наведені на рис. 4.64. Бачимо, що вони утворені двома послідовними коливальними контурами (рис. 4.64,а) та двома паралельними коливальними контурами (рис.4.64,б).

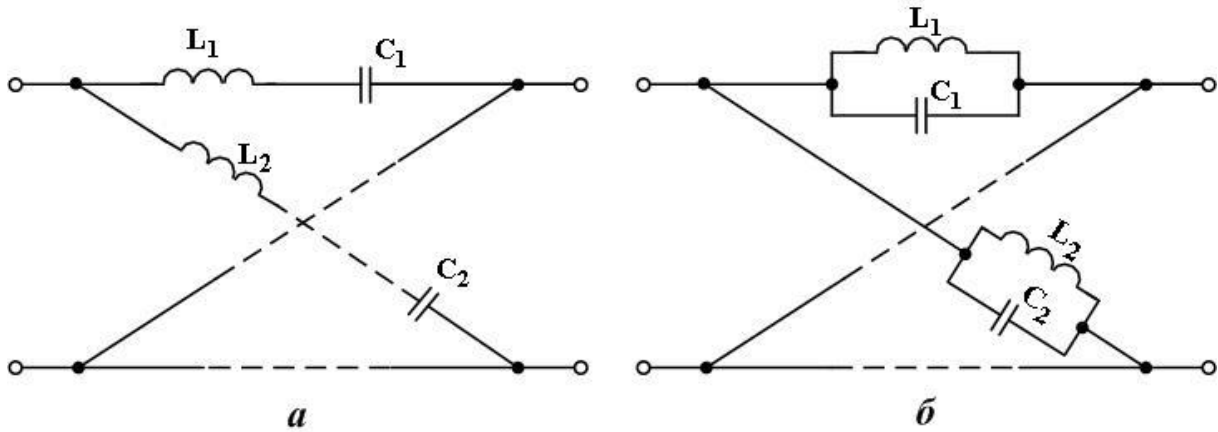


Рис. 4.64. Елементарні мостові СПФ

Тому для схеми **a** маємо згідно з (1.1)

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 &= j\omega L_1 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{p1}^2}{\omega^2}, \\ \underline{Z}_2 &= j\omega L_2 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{p2}^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.167)$$

а для схеми **б** маємо згідно з (1.2)

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{A1}^2}, \\ \underline{Z}_2 &= \frac{1}{j\omega C_2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{A2}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.168)$$

де ω_{p1}, ω_{p2} – частоти резонансів першого та другого послідовних коливальних контурів (рис.4.64,а);

ω_{A1}, ω_{A2} – частоти антирезонансів першого та другого паралельних коливальних контурів (рис.4.64,б).

Щоб визначити кількість частот нескінченного згасання, яку має мостовий СПФ, проаналізуємо загальний вираз (4.145) для його власного згасання: $a_c = 2\text{arth}\sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Z}_2}$. Для схеми **a** з рис.4.64 маємо

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{p1}^2}{\omega^2 - \omega_{p2}^2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_{p2}^2} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p2}^2}}.$$

Оскільки $\omega_{p1} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, а $\omega_{p2} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$, то

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{L_2 C_2}{L_1 C_1} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p2}^2}} = m \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p2}^2}},$$

де

$$m = \sqrt{C_2/C_1}. \quad (4.169)$$

Тоді для схеми **a** маємо

$$\frac{a_c}{2} = \text{arth} \left[m \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p2}^2}}} \right]. \quad (4.170)$$

При $a_c = \infty$ маємо $\text{th} \frac{a_c}{2} = \text{th} \infty = 1$. Тому на частоті ω_∞ маємо

$$m \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_\infty^2}{\omega_{p1}^2}}{1 - \frac{\omega_\infty^2}{\omega_{p2}^2}}} = 1, \quad (4.171)$$

звідки

$$\omega_{\infty} = \omega_{p2} \cdot \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m^2 \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1}}. \quad (4.172)$$

З даної рівності випливає, що при $m=0$ маємо $\omega_{\infty} = \omega_2$, а при $m = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ маємо $\omega_{\infty} = \infty$. Отже, при $0 \leq m \leq \frac{\omega_1}{\omega_2}$ частота ω_{∞} (тобто місце розташування нескінченного сплеску згасання) знаходиться *вище частоти ω_2* .

Розв'язку рівняння (4.172) можна надати й такого вигляду:

$$\omega_{\infty} = \omega_{p1} \cdot \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m^2 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_{p2}^2}}}. \quad (4.173)$$

З цієї рівності випливає, що при $m=1$ маємо $\omega_{\infty} = 0$, а при $m=\infty$ маємо $\omega_{\infty} = \omega_1$. Отже, при $1 \leq m \leq \infty$ частота ω_{∞} знаходиться *нижче частоти ω_1* .

Якщо вважати, що послідовні коливальні контури L_1C_1 та L_2C_2 налаштовані так, що $\omega_1 < \omega_2$, то з проведеного аналізу виразів (4.172) та (4.173) випливає, що частота ω_{∞} є єдиною і може існувати за будь-яких величин m , окрім величин $\frac{\omega_1}{\omega_2} < m < 1$.

Аналогічних висновків можна дійти, розглянувши схему **б** з рис.4.64 і ввівши позначення

$$m = \sqrt{L_1 / L_2}. \quad (4.174)$$

Отже, можливі три варіанти поведінки графіків опорів Z_1 та Z_2 :

- 1) вони перетинаються нижче частоти ω_1 ;
- 2) вони не перетинаються взагалі; 3) вони перетинаються вище ω_2 .

Усі три варіанти стосовно до схеми **а** проілюстровані рисунком 4.65, на якому наведені також відповідні графіки частотних залежностей власного згасання.

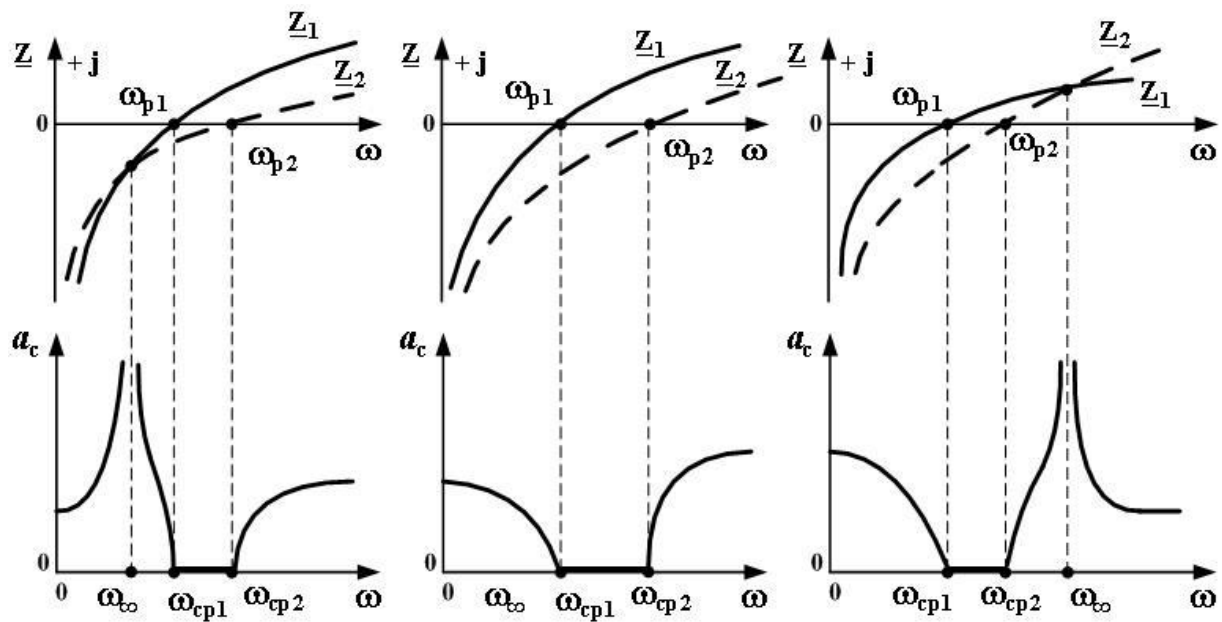


Рис. 4.65. Усі можливі варіанти частотних залежностей опорів та власного згасання мостового СПФ (рис. 4.64,а)

Неважко впевнитися, що мостовий СПФ, складений за схемою *б*, матиме такі ж графіки $a_c(\omega)$.

При цьому для схеми *а* частотами зрізу ω_{cp1} та ω_{cp2} є частоти ω_{p1} та ω_{p2} резонансу послідовних контурів L_1C_1 та L_2C_2 , а для схеми *б* частотами зрізу є частоти ω_{A1} та ω_{A2} антирезонансу паралельних контурів L_1C_1 та L_2C_2 (причому $\omega_{A1} < \omega_{A2}$).

Отже, елементарний мостовий СПФ, на відміну від СПФ типу *м*, забезпечує щонайбільше один нескінченний сплеск власного згасання.

Частотна залежність власного згасання елементарного мостового СПФ, складеного за схемою *а*, в смузі затримування визначається, згідно з (4.171), виразом

$$a_c = 2\text{arth} \left[m \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp1}^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp2}^2}}} \right]. \quad (4.175)$$

Тут m визначається рівністю (4.169); враховано також, що $\omega_{cp1} = \omega_{p1}$ та $\omega_{cp2} = \omega_{p2}$.

В смузі пропускання, за її визначенням, маємо $a_c = 0$.

Неважко довести, що частотна залежність власного згасання елементарного мостового СПФ, складеного за схемою *б*, в смузі

затримування теж визначається виразом (4.175), в якому, однак, $\omega_{cp1} = \omega_{A1}$, $\omega_{cp2} = \omega_{A12}$ та

$$\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{L}_1 / \mathbf{L}_2}. \quad (4.176)$$

Без виведення наведено вирази для частотних залежностей характеристичних опорів елементарних мостових СПФ. Для схеми *a*

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\text{ХМ}} = \frac{\rho}{\Delta\omega \cdot \omega} \cdot \sqrt{(\omega^2 - \omega_{cp1}^2) \cdot (\omega_{cp2}^2 - \omega^2)}, \quad (4.177)$$

де $\Delta\omega = \omega_{cp2} - \omega_{cp1}$ – ширина смуги пропускання;

$$\rho = \Delta\omega \cdot \sqrt{\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2}. \quad (4.178)$$

Для схеми *б*

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\text{ХМ}} = \frac{\rho \cdot \Delta\omega \cdot \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{cp1}^2) \cdot (\omega_{cp2}^2 - \omega^2)}}, \quad (4.179)$$

де

$$\rho = \frac{1}{\Delta\omega \sqrt{\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2}}. \quad (4.180)$$

Вихідними даними для розрахунку елементарного мостового СПФ є опір навантаження \mathbf{R}_n , частоти зрізу ω_{cp1} і ω_{cp2} , а також величина коефіцієнта \mathbf{m} (вона, як показано вище, визначає місце розташування сплеску згасання на осі частот). На їх базі, згідно з [7], параметри елементів схеми *a* розраховуються як

$$\mathbf{L}_1 = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_n \cdot \omega_{cp2}}{\omega_{cp1} \cdot \Delta\omega}, \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\omega_{cp1} \cdot \mathbf{R}_n}{\mathbf{m} \cdot \omega_{cp2} \cdot \Delta\omega},$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\Delta\omega}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_n \cdot \omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}}, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \Delta\omega}{\mathbf{R}_n \cdot \omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}};$$

параметри елементів схеми *б* розраховуються як

$$L_1 = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_H \cdot \Delta\omega}{\omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}}, \quad L_2 = \frac{\mathbf{R}_H \cdot \Delta\omega}{\mathbf{m} \cdot \omega_{cp1} \cdot \omega_{cp2}},$$

$$C_1 = \frac{\omega_{cp1}}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_H \cdot \omega_{cp1} \cdot \Delta\omega}, \quad C_2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \omega_{cp2}}{\omega_{cp1} \cdot \Delta\omega}.$$

У посібнику [7] також висвітлене питання еквівалентності мостових СПФ та Т-подібних ланцюжкових фільтрів.

4.2.24. Елементарний мостовий смугово-затримуючий фільтр

Елементарні мостові СЗФ можна отримати з елементарних мостових СПФ одночасною заміною двох горизонтальних або двох діагональних двополюсників на зворотні двополюсники (див. п.1.4 даного підручника). Наприклад, замінивши в схемі з рис. 4.64,а послідовні контури горизонтальних віток на паралельні, отримаємо СЗФ, схему якого зображено на рис.4.66. Щоб упевнитися, що це саме СЗФ, проаналізуємо частотні залежності опорів \underline{Z}_1 (опір паралельного коливального контуру) та \underline{Z}_2 (опір послідовного коливального контуру). Дивлячись на рис. 4.67,а, бачимо, що в діапазонах частот $0 \leq \omega \leq \omega_p$ та $\omega \geq \omega_A$ опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 мають *різні* знаки, а це, як доведено в п.4.2.20, є умовою того, що в цих діапазонах має місце смуга пропускання. В діапазоні частот $\omega_p < \omega < \omega_A$ знаки опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 *однакові*, тобто в цьому діапазоні має місце смуга затримування. Відповідна частотна залежність власного згасання графічно зображена на рис.4.67,б. Отже, розглянутий мостовий фільтр дійсно є смугово-затримуючим фільтром (СЗФ).

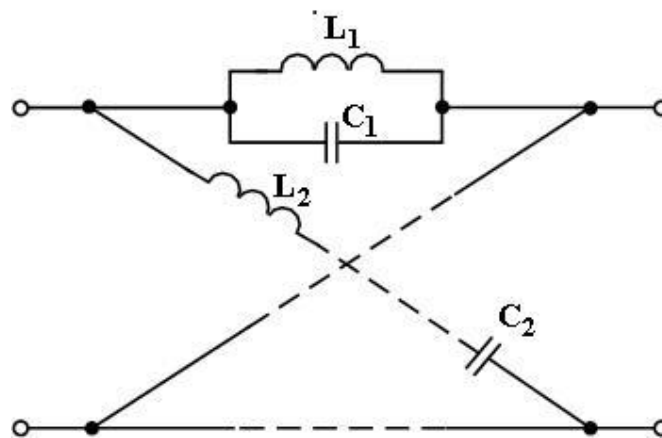


Рис. 4.66. Один з варіантів схеми елементарного мостового СЗФ

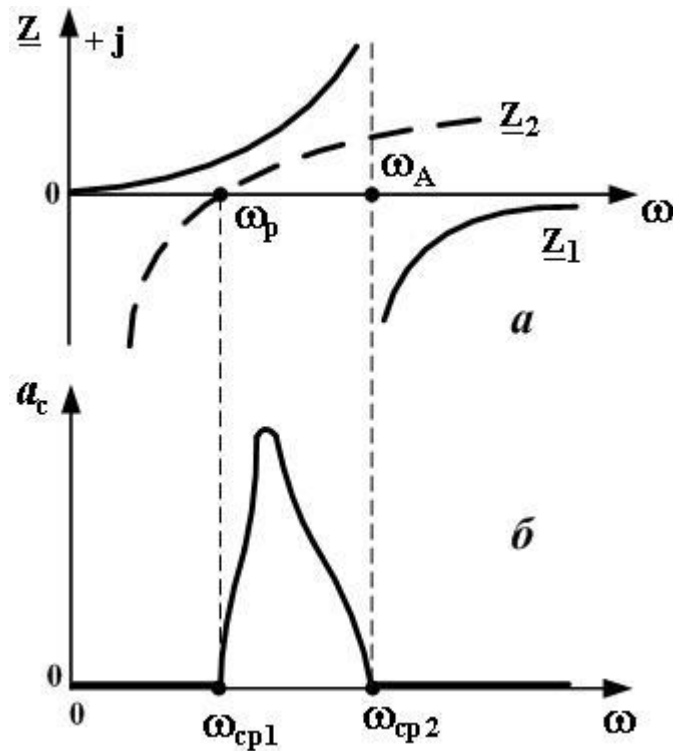


Рис. 4.67. Частотні залежності опорів віток та власного згасання мостового СЗФ (рис.4.66)

Частота ω_p резонансу послідовного коливального контуру L_2C_2 та частота ω_A антирезонансу паралельного коливального контуру L_1C_1 є частотами зрізу відповідно ω_{cp1} та ω_{cp2} :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{cp1} &= \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \\ \omega_{cp2} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.181)$$

Частотна залежність власного згасання в смузі затримування, згідно з [7], обчислюється за формулою

$$a_c = 2 \cdot \text{arth} \frac{m \cdot \omega \cdot \omega_{cp2}}{\sqrt{(\omega_{cp1}^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{cp2}^2)}},$$

де $m = \sqrt{C_2 / C_1}$.

Частотна залежність характеристичного опору визначається як

$$\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{\text{сп}2}^2 - \omega^2}{\omega_{\text{сп}1}^2 - \omega^2}}.$$

З цього співвідношення сумісно з виразами для частот зрізу (4.181) випливає, що при $\omega = 0$ матимемо $\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \sqrt{L_1/C_2}$, а при $\omega = \infty$ матимемо $\underline{Z}_{\text{ХМ}} = \sqrt{L_2/C_1}$. Це слід мати на увазі, коли йдеться про узгодження розглянутого варіанта елементарного мостового СЗФ з активним частотонезалежним опором навантаження.

Як відмічено в [7], мостовий СЗФ не є найбільш економічним з точки зору кількості використаних елементів; існують більш економічні немостові схеми СЗФ.

4.2.25. Покращення характеристик мостових фільтрів

Розглянуті елементарні мостові фільтри в багатьох випадках задовольняють практичні потреби. Однак в низці пристроїв забезпечувані ними частотні залежності власного згасання або (та) характеристичного опору є незадовільними. Покращення цих характеристик досягається шляхом застосування ускладнених (порівняно з елементарними) двополісників, які складають вітки \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 мостового фільтра [5, 7]. Якщо схема мостового фільтра, адекватного практичним вимогам, виявляється надто складною, то її в багатьох випадках можна перетворити в менш складну схему еквівалентного диференціально-мостового фільтра [7, 22].

4.2.26. Переваги та недоліки мостових фільтрів

Основні переваги:

- 1) можливість за однієї і тієї ж схеми забезпечити частотні залежності згасання як подібні таким для фільтрів типу **K**, так і подібні таким для фільтрів типу **m**;
- 2) незалежне регулювання вигляду частотних залежностей власного згасання та характеристичного опору;
- 3) можливість шляхом належного вибору параметра **m** забезпечити лінійну частотну залежність власного коефіцієнта фази в смузі пропускання.

Основні недоліки:

- 1) значно більша чутливість характеристик до точності підбору елементів схеми (порівняно з фільтрами Т-, П- та Г-подібних, тобто ланцюжкових схем);

2) більша, порівняно з фільтрами ланцюжкових схем, кількість елементів схеми при одних і тих самих частотних характеристиках;

3) неможливість використання в колах із загальним проводом (“землею”), оскільки нижня горизонтальна вітка мостового фільтра буде “врізаною” в цей провід.

Як буде йтися нижче, за мостовою схемою будують не тільки LC-фільтри з реальних індуктивностей та ємностей, але й фільтри на базі п’єзоелектричних та електромеханічних резонаторів.

4.2.27. Додаткові відомості з LC-фільтрів

Розмаїття фільтрів, побудованих на базі ідеальних котушок і конденсаторів, не вичерпується розглянутими різновидами цих фільтрів, – вони є найбільш вживаними базовими пристроями. Існують й більш складні схеми із значно покращеними характеристиками; такі схеми звичайно розглядають у довідниках з розрахунку фільтрів. Існують фільтри, які є спрощенням базових (див., наприклад, підручник [5]); ці фільтри мають гірші характеристики, але вони компактніші та дешевші. В радіотехніці широко використовують смугово-пропускаючі фільтри, побудовані у вигляді ланцюжка коливальних контурів, зв’язаних через ємнісні елементи або через індуктивні елементи, або через трансформатори. Детальну теорію таких СПФ можна знайти в підручниках [6, 9, 10, 26, 42] та монографії [22], основи їх теорії – у підручниках [2, 12].

4.2.28. Завдання для самоконтролю

1. Що таке електричний фільтр? Що таке смуга пропускання, смуга затримування, частота зрізу?

2. Що таке фільтр нижніх частот? Що таке фільтр верхніх частот? Що таке смугово-пропускаючий фільтр? Що таке смугово-затримуючий фільтр?

3. Дайте визначення фільтра типу **К**.

4. Як впливає наявність втрат в елементах LC-фільтра на його частотну вибірність?

5. При складанні СПФ типу **К** (рис. 4.17,а) конденсатор C_2 за недоглядом забули припаяти. Що за пристрій утворився?

Відповідь: утворився також СПФ, в якому, на відміну від СПФ типу **К**, при нескінченному зростанні частоти власне згасання прямує до деякої скінченої величини.

6. Експериментально виявлено, що вхідний опір деякого П-подібного ФНЧ типу **К**, навантаженого узгоджено, при $f=0$ має величину 400 Ом. На обох конденсаторах вказано їх ємність – по 0,1 мкФ. Обчисліть індуктивність котушки фільтра та його частоту зрізу.

Відповідь: $L = 0,032$ Гн, $f_{cp} \approx 3979$ Гц.

7. Сформулюйте ідею, яка лежить в основі переходу від фільтрів типу **К** до фільтрів типу **м**.

8. Чому ланки фільтрів типу **К** та типу **м** доцільно об'єднувати в ланцюжкову конструкцію?

9. Розглянемо паралельно-похідну напівланку ФНЧ типу **м** (рис. 4.37,б). Нехай ємність конденсатора горизонтальної вітки дорівнює C_1 , а ємність конденсатора вертикальної вітки дорівнює C_2 . Доведіть, що $m = \sqrt{C_2 / (C_1 + C_2)}$.

10. Яка величина **m** є оптимальною з точки зору найкращого узгодження фільтра типу **м** з постійним активним опором навантаження? З якого боку напівланки типу **м** це навантаження слід підключати?

Відповідь: $m=0,6$. Навантаження слід підключати з того боку, з якого характеристичний опір дорівнює $Z_{хтм}$ або $Z_{хпм}$.

11. В чому полягає принципова різниця між способами заглушення електричних коливань, реалізованими в ланцюжкових (Т-, П- та Г-подібних) фільтрах та мостових фільтрах?

12. Елементарний мостовий ФНЧ складено за схемою, наведеною на рис. 4.58,б. Параметри елементів: $L_1=0,1$ мГн, $C_1=0,04$ мкФ, $C_2=0,2$ мкФ. Якими є величини частоти зрізу f_{cp} та частоти нескінченного згасання f_{∞} ?

Відповідь: $f_{cp} = 79580$ Гц, $f_{\infty} = 88970$ Гц.

13. Чи зміниться частотна залежність власного згасання будь-якого мостового фільтра, якщо опори Z_1 та Z_2 поміняти місцями?

Відповідь: ні.

14. Чи зміниться частотна залежність власного коефіцієнта фази будь-якого мостового фільтра, якщо опори Z_1 та Z_2 поміняти місцями?

Відповідь: так.

15. Чому мостові фільтри, розглянуті в пп.4.2.21 – 4.2.24, називають елементарними?

4.3. RC-фільтри

4.3.1. Доцільність застосування RC-фільтрів

З точки зору технології виготовлення котушка індуктивності є більш складним виробом, аніж конденсатор та резистор, особливо в мікроелектроніці. Крім того, добротності котушок з великою індуктивністю та конденсаторів з великою ємністю малі, а їх габарити та вага – великі. Тому виготовлення вузькосмугових LC-фільтрів, призначених для роботи в області низьких частот, є проблематичним. У цьому діапазоні стають прийнятними фільтри на базі резисторів та конденсаторів (RC-фільтри). Вони компактні та мало чутливі до зовнішніх електричних і (або) магнітних полів. Проте їм притаманні й недоліки, основними з яких є:

- 1) слабкі частотно-вибірні властивості порівняно з LC-фільтрами;
- 2) обмеженість діапазону робочих частот з боку високих частот з причини впливу ємностей монтажу та навантаження.

Перший з цих недоліків значною мірою усунуто в так званих активних RC-фільтрах. Другий недолік суттєво зменшено в мікроелектронних RC-фільтрах, які, до того ж, зазвичай є активними.

4.3.2. Пасивний RC- фільтр нижніх частот

Виходячи із найбільш загальних міркувань, цей фільтр треба скомпонувати з резисторів і конденсаторів так, щоб він пропускав постійний струм (тобто струм з частотою $\omega = 0$) і якось “відволікав” від навантаження струми з великими частотами. В найпростішому випадку, очевидно, ці вимоги задовольняє Г-подібний чотириполусник, схему якого зображено на рис.4.68 (опір навантаження R_H до нього, звісно, не входить, тому він і зображений штриховою лінією).

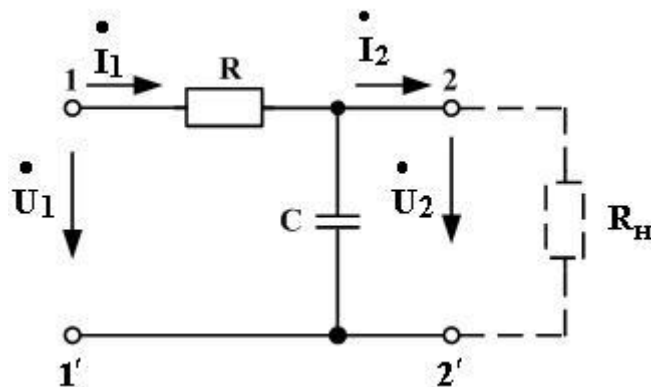


Рис. 4.68. Пасивний RC-фільтр нижніх частот

Його називають **RC**-фільтром нижніх частот (**RC**-ФНЧ) першого порядку. Дійсно, постійний струм проходить крізь резистор R_1 в опір навантаження R_n , тоді як високочастотні струми протікають переважно через низький опір конденсатора C , який, таким чином, шунтує навантаження.

При аналізі властивостей **RC**-фільтрів прийнято вживати не власну сталу передачі, як для **LC**-фільтрів, а деякий новий параметр, що дістав назву “стала передачі” і описує властивості **RC**-чотириполюсника з урахуванням опору навантаження:

$$\underline{g}_n = \ell n \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}. \quad (4.182)$$

Щоб виразити її через величини параметрів елементів нашого **RC**-ФНЧ (рис.4.68), згадаємо перше з рівнянь чотириполюсника у формі А (2.1):

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2.$$

Поділивши обидві частини на \dot{U}_2 і врахувавши, що $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = R_n$, маємо

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \underline{A} + \underline{B} \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_n}.$$

Підставивши це в (4.182), отримаємо

$$\underline{g}_n = \ell n \left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{R_n} \right). \quad (4.183)$$

З іншого боку, сталу передачі як комплексну величину може бути записано як у алгебраїчній, так і в експоненціальній формі [1, п.5.2.2]:

$$\underline{g}_n = a + j\theta. \quad (4.184)$$

Дійсну та уявну частини сталої передачі в загальному вигляді можна отримати з виразу (4.182):

$$\begin{aligned}\underline{g}_n &= \ell n \frac{\underline{U}_1 \cdot e^{j\varphi_{U1}}}{\underline{U}_2 \cdot e^{j\varphi_{U2}}} = \\ &= \ell n \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + \mathbf{j}(\varphi_{U1} - \varphi_{U2}),\end{aligned}\quad (4.185)$$

де φ_{U1} та φ_{U2} – початкові фази напруг відповідно \dot{U}_1 та \dot{U}_2 .
Порівнявши (4.185) з (4.184) маємо

$$\mathbf{a} = \ell n \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}, \quad (4.186)$$

$$\mathbf{b} = \varphi_{U1} - \varphi_{U2}.$$

Тепер виразимо величини \mathbf{a} та \mathbf{b} через параметри елементів **RC**-ФНЧ першого порядку та через опір навантаження, для чого повернемося до формули (4.183). Згідно з (2.4) маємо $\underline{A} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}$, тобто це відношення напруг при від'єданому опорі навантаження \mathbf{R}_n (відомий нам режим холостого ходу). Вважаючи \dot{U}_1 відомою, знаходимо для цього режиму

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{\mathbf{R} + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}} = \\ &= \mathbf{1} + \mathbf{j}\omega \mathbf{RC}.\end{aligned}\quad (4.187)$$

Згідно ж з (2.6) маємо $\underline{B} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}$, тобто ця величина визначається при замкнених затискачах 2 – 2' (відомий нам **режим короткого замикання**). Вважаючи \dot{U}_1 відомою, знаходимо для цього режиму

$$\underline{\mathbf{B}} = \dot{\underline{\mathbf{U}}}_1 : \left(\frac{\dot{\underline{\mathbf{U}}}_1}{\mathbf{R}} \right) = \mathbf{R}. \quad (4.188)$$

Перш ніж використати ці результати, введемо кілька нових термінів. **Частотою квазирезонансу** назвемо частоту, на якій опір конденсатора RC-ФНЧ дорівнює опорі резистора цього фільтра:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{1}{\mathbf{RC}}. \quad (4.189)$$

Відносною (нормованою) частотою назвемо величину

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}} = \omega \mathbf{RC}. \quad (4.190)$$

Коефіцієнтом навантаження назвемо величину

$$\alpha = \mathbf{R}_n / \mathbf{R}. \quad (4.191)$$

З урахуванням нових позначень (4.189) – (4.191) вираз (4.187) набуде вигляду

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega, \quad (4.192)$$

а вираз (4.188) – вигляду

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_n / \alpha. \quad (4.193)$$

Підставивши два останні вирази в (4.183), отримаємо

$$\underline{\mathbf{g}}_n = \ell n \left(\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega + \frac{\mathbf{R}_n}{\alpha} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}_n} \right) = \ell n \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha} + \mathbf{j}\Omega \right).$$

Перевівши комплексний вираз, що стоїть у дужках, до експоненціальної форми, матимемо

$$\underline{\mathbf{g}}_n = \ell n \left[\sqrt{\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha} \right)^2 + \Omega^2} \cdot e^{\mathbf{j} \arctg \frac{\Omega}{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha}}} \right] = \ell n \sqrt{\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha} \right)^2 + \Omega^2} + \mathbf{j} \cdot \arctg \frac{\Omega}{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha}}.$$

Порівнявши останній вираз з (4.184), знаходимо формули для згасання та коефіцієнта фази (нагадуємо: це **не** власні параметри):

$$a = 0,5 \ln \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \Omega^2 \right], \quad (4.194)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{1 + \frac{1}{\alpha}}. \quad (4.195)$$

Відповідні графіки частотних залежностей наведені на рис.4.69.

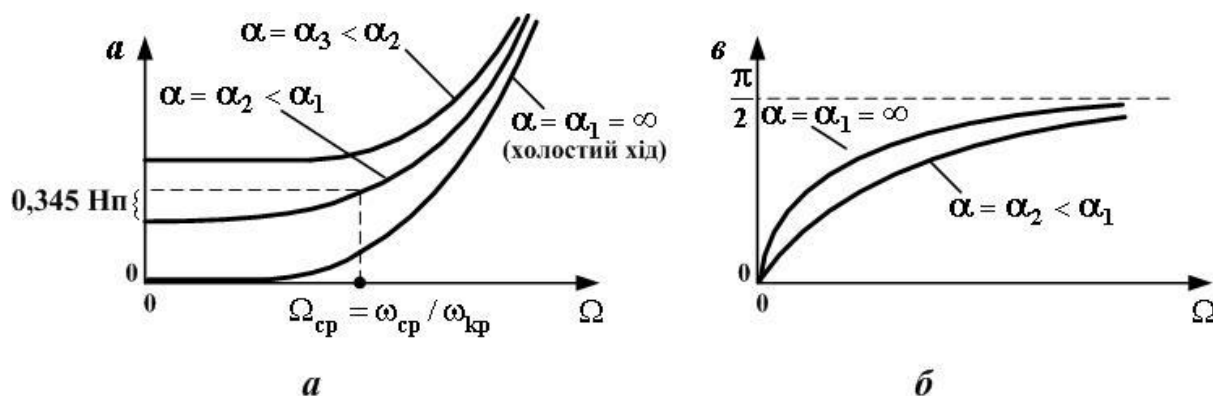


Рис. 4.69. Частотні характеристики RC-ФНЧ першого порядку:
a – згасання; *b* – коефіцієнт фази

Бачимо, що криві є плавними і чітко окресленої смуги пропускання немає. Тому межу між смугою пропускання та смугою затримування визначають умовно: вважають частотою зрізу таку частоту ω_{cp} , на якій згасання зростає на 0,345 Нп⁴ порівняно з величиною згасання при $\Omega = 0$. Розв'язавши відносно Ω_{cp} рівняння $a(\Omega_{cp}) - a(0) = 0,345$ (де a визначається формулою (4.194)) і перейшовши від Ω до ω згідно з (4.201), отримаємо такий зв'язок між частотою зрізу ω_{cp} та частотою квазирезонансу ω_{kp} :

$$\omega_{cp} = \omega_{kp} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (4.196)$$

⁴ Тобто на 3 дБ, як впливає із зв'язку між децибелами та неперами, встановленого в п.2.6.

Зазначимо, що в режимі холостого ходу (коли $\alpha = \infty$) матимемо $\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{кр}} = \frac{1}{RC}$. Вхідний опір RC-ФНЧ першого порядку обчислюють за відомою формулою (2.78), попередньо отримавши вирази для параметрів \underline{C} та \underline{D} цього фільтра як чотириполюсника. Кінцевий вираз, як показано в [7], має вигляд

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R \frac{1 + \alpha + \alpha^2 \Omega^2}{1 + \alpha^2 \Omega^2} - jR \frac{\alpha^2 \Omega}{1 + \alpha^2 \Omega^2},$$

де R – опір резистора, що входить до схеми фільтра (рис.4.68).

Інколи при розрахунку пристроїв зв'язку та автоматики користуються **логарифмічною частотною характеристикою**. Цю характеристику визначають в режимі холостого ходу як

$$K(j\omega) = 20 \lg \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (4.197)$$

Оскільки дріб $\left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}$ згідно з (2.4) дорівнює параметру \underline{A} , який у свою

чергу для RC-ФНЧ першого порядку визначається виразом (4.187), то

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= 20 \lg \frac{1}{\underline{A}} = 20 \cdot \lg \frac{1}{1 + j\omega RC} = \\ &= 20 \cdot \lg F(j\omega). \end{aligned} \quad (4.198)$$

де

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (4.199)$$

– так звана частотна характеристика RC-ФНЧ першого порядку в режимі холостого ходу.

З порівняння виразів (4.197) та (4.198) випливає, що $F(j\omega) = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}$, тобто $F(j\omega)$ має сенс комплексної передавальної функції за напругою в режимі холостого ходу (див. [1, п.11.4.2]).

² Зверніть увагу на те, що логарифм у даному випадку – десятковий.

Її модуль

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (4.200)$$

називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) даного RC-ФНЧ, а аргумент

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \quad (4.201)$$

називають фазочастотною характеристикою (ФЧХ) даного RC-ФНЧ.

Графік АЧХ (4.200) наведений на рис.4.70.

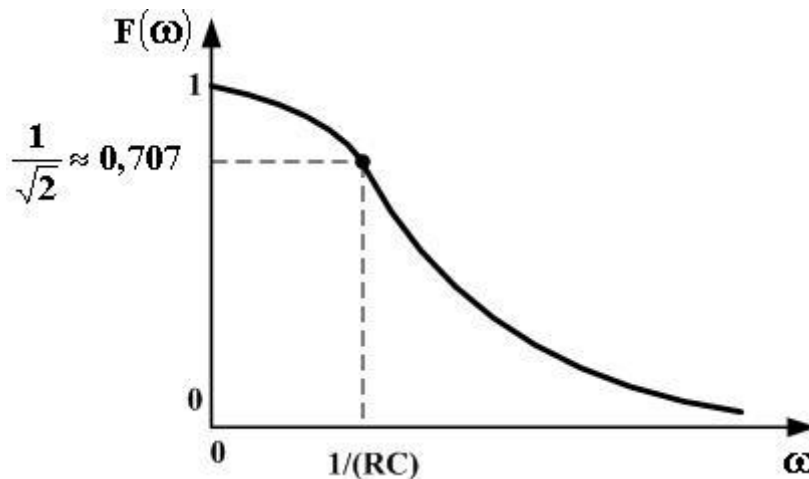


Рис. 4.70. АЧХ пасивного RC-ФНЧ першого порядку

Зауважимо, що частоту $\omega_{cp} = 1/(RC)$, на якій $F(\omega)$ зменшується у $\sqrt{2}$ разів (тобто на 3 дБ), називають частотою зрізу; причому її значення співпадає з ω_{cp} , визначеною формулою (4.196) при $\alpha = \infty$ (тобто якраз в режимі холостого ходу).

Дещо вийшовши за рамки розгляду кола з рис.4.68 як фільтра, звернемо увагу читача на те, що при $RC \gg 1$ буде $F(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega RC}$; а цьому

виразу відповідає операторне співвідношення (див.[1, с.233]) $F(p) = \frac{1}{pRC}$,

яке визначає наведену на рис.4.68 схему як схему інтегратора (див. [5, с. 81]). Отже, при $\omega \gg 1/(RC)$, тобто для сигналу $S(t)$, спектр якого лежить далеко в глибині смуги затримування, RC-ФНЧ першого порядку

виконує математичну операцію інтегрування $\int_0^t S(t)dt$. Цю його властивість широко використовують в імпульсній техніці.

Великим недоліком RC-ФНЧ першого порядку є надто повільне зростання величини згасання в смузі затримування – приблизно на 20 дБ (тобто на 2,3 Нп) при зростанні величини ω у 10 разів (або, як пишуть у технічній літературі, при зростанні величини a із швидкістю 20 дБ на декаду). Покращити цей показник можна, використавши дволанковий RC-ФНЧ (рис.4.71), який називають пасивним RC-ФНЧ другого порядку. Такий фільтр дещо сильніше заглушує сигнал у смузі пропускання (в режимі холостого ходу величина a збільшується на 5 дБ на частоті $\omega_{кр}$), але в смузі затримування згасання зростає із швидкістю 40 дБ на декаду. Частота квазирезонансу $\omega_{кр}$ цього фільтра є такою ж, як і у RC-ФНЧ першого порядку. Щодо вибору коефіцієнта m , як і щодо детальної теорії RC-ФНЧ, відішлемо зацікавленого читача до посібника [7]. Корисно також ознайомитися з теорією, викладеною на с. 101 – 105 підручника [12]; для практичної роботи можуть статися в нагоді матеріали книжок [23, п.1.1.1] та [24, п.1.19].

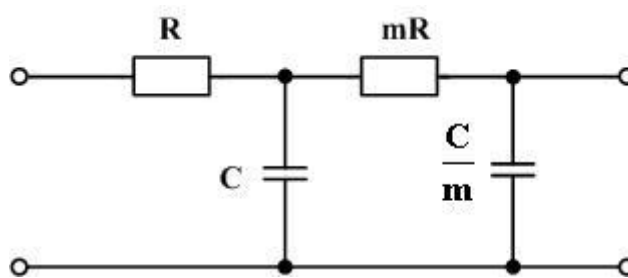


Рис. 4.71. Пасивний RC-ФНЧ другого порядку

4.3.3. Пасивний RC-фільтр верхніх частот

Цей фільтр треба скомпонувати з резисторів та конденсаторів так, щоб він повністю приглушував постійний струм (тобто струм з частотою $\omega=0$), а високочастотні струми майже без приглушення подавав на навантаження. В найпростішому випадку ці умови задовольняє Г-подібний чотириполюсник, схему якого зображено на рис. 4.72 (звичайно, до нього не входить опір навантаження R_n). Його називають RC-ФВЧ першого порядку.

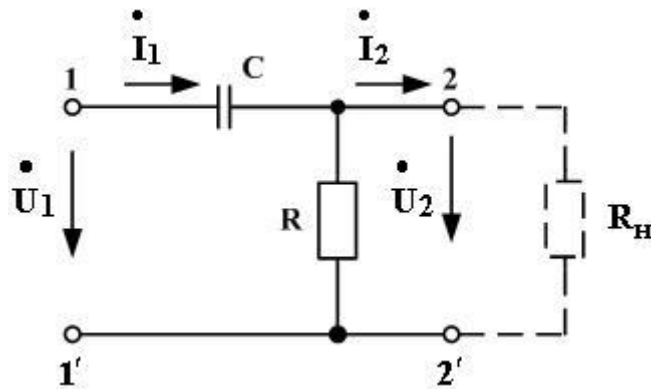


Рис. 4.72. Пасивний RC – ФВЧ першого порядку

Частотні властивості цього фільтра теж будемо описувати за допомогою сталої передачі, введеної в п.4.3.2 формулою (4.183):

$$\underline{g}_n = \ln \left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{R}_H} \right).$$

Аналогічно тому, як ми це зробили для RC-ФВЧ, неважко отримати вирази для А-параметрів RC-ФВЧ першого порядку:

$$\underline{A} = 1 - j \frac{1}{\Omega}, \quad \underline{B} = \frac{R}{j\Omega}, \quad \underline{C} = \frac{1}{R}, \quad \underline{D} = 1,$$

де Ω – відносна частота, визначена виразом (4.190), причому частота квазирезонансу $\omega_{кр}$ є такою ж, як і для RC-ФНЧ першого порядку.

Тож маємо

$$\begin{aligned} \underline{g}_n &= \ln \left(1 - j \frac{1}{\Omega} + \frac{R}{j\Omega} \cdot \frac{1}{R_H} \right) = \ln \left(1 - j \frac{1}{\Omega} - j \frac{1}{\alpha \Omega} \right) = \ln \left\{ 1 - j \frac{1}{\Omega} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right\} = \\ &= \ln \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2} \cdot e^{-j \arctg \left[\frac{1}{\Omega} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]} \right\} = \\ &= \ln \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2} - j \arctg \left[\frac{1}{\Omega} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Порівнявши цей вираз з (4.184), матимемо відповідно згасання та коефіцієнт фази:

$$a = 0,5 \ln \left[1 + \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right], \quad (4.202)$$

$$\phi = -\arctg \left[\frac{1}{\Omega} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]. \quad (4.203)$$

Відповідні графіки частотних залежностей наведені на рис. 4.73.

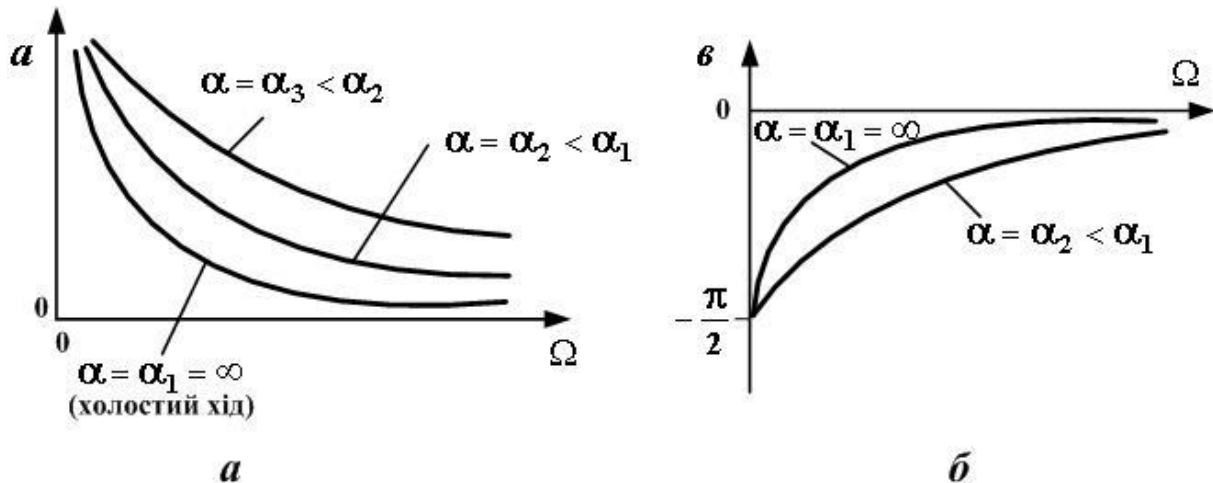


Рис. 4.73. Частотні характеристики RC – ФВЧ першого порядку:
a – згасання; *б* – коефіцієнт фази

Ці криві є плавними, і чітко окреслених смуг пропускання та затримування немає. Чим менша величина α (тобто чим менший опір навантаження R_n), тим гірші частотно-вибірні властивості цього фільтра.

Визначимо частоту зрізу ω_{cp} як таку, на якій згасання зростає на 0,345 Нп (див. зноску в аналогічному поясненні до RC-ФНЧ). Користуючись виразом (4.202), неважко довести, що з такого визначення матимемо

$$\omega_{cp} = \omega_{кр} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (4.204)$$

як і для RC-ФНЧ першого порядку. Зазначимо, що в режимі холостого ходу (коли $\alpha = \infty$) матимемо $\omega_{cp} = \omega_{кр} = 1/(RC)$.

Вхідний опір RC-ФВЧ першого порядку при довільному опорі навантаження можна визначити за відомою загальною формулою (2.78),

підставивши до неї величини А-параметрів цього фільтра, наведені на початку п.4.3.3.

В ряді випадків при розрахунку кіл з RC-ФВЧ більш зручно користуватися введеною в п.4.3.2 комплексною передавальною функцією за напругою в режимі холостого ходу $F(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 \Big|_{I_2=0}$. Її неважко знайти, розглянувши схему з рис. 4.72 при відімкненому R_H .

$$F(j\omega) = \left(\frac{\dot{U}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot R \right) / \dot{U}_1 = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \quad (4.205)$$

Модуль цієї функції є АЧХ RC-ФВЧ першого порядку:

$$F(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (4.206)$$

а її аргумент є ФЧХ RC-ФВЧ першого порядку

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega RC). \quad (4.207)$$

Графік АЧХ (4.206) наведений на рис.4.74.

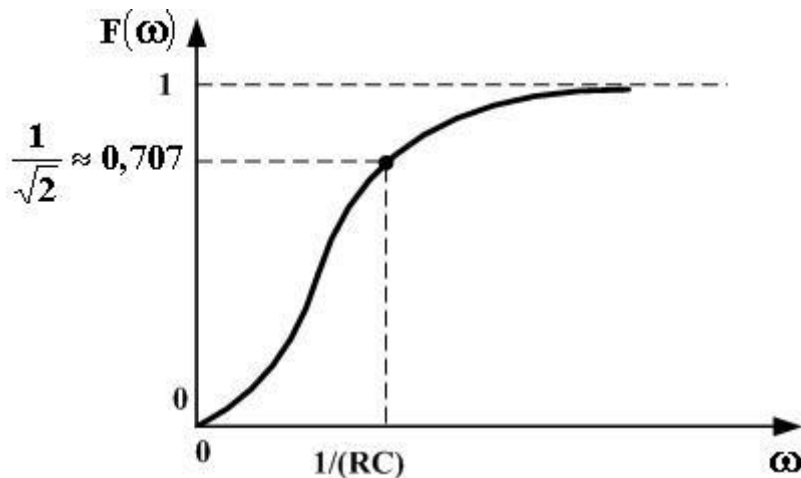


Рис. 4.74. АЧХ пасивного RC-ФВЧ першого порядку

Зауважимо, що частоту $\omega_{cp} = 1/(RC)$, на якій $F(\omega)$ зменшується у $\sqrt{2}$ разів (тобто на 3 дБ) порівняно з її величиною при $\omega = \infty$, називають частотою зрізу, причому її значення співпадає з величиною ω_{cp} , визначеною формулою (4.204) при $\alpha = \infty$ (тобто якраз в режимі холостого ходу).

Дещо вийшовши за рамки розгляду кола з рис.4.72 як фільтра, звернемо увагу читача на те, що при $\omega \ll 1/(RC)$ комплексна передавальна функція за напругою в режимі холостого ходу $F(j\omega)$ матиме наближений вигляд $F(j\omega) \approx j\omega RC$, а цьому виразу відповідає операторне співвідношення (див.[1, с.233]) $F(p) = pRC$, яке визначає наведену на рис. 4.72 схему як схему диференціюючого кола, оскільки зображення за Лапласом $F(p) = k \cdot p$ є зображенням похідної (див.[1, с.230]). Отже, при $\omega \ll 1/(RC)$, тобто для сигналу $S(t)$, спектр якого лежить в глибині смуги затримування, RC-ФВЧ першого порядку виконує математичну операцію диференціювання $\frac{ds(t)}{dt}$. Ця його властивість широко використовується в імпульсній техніці.

Великим недоліком RC-ФВЧ першого порядку є надто повільне зростання величини згасання в смузі затримування: як і у RC-ФНЧ першого порядку, воно зростає із швидкістю 20 дБ на декаду. Покращити цей показник можна, використавши дволанковий RC-ФВЧ, який називають RC-ФВЧ другого порядку (рис.4.75,а), або триланковий RC-ФВЧ, який називають RC-ФВЧ третього порядку (рис.4.75,б). Перший з них забезпечує зростання згасання із швидкістю приблизно 40 дБ на декаду, а другий – із швидкістю приблизно 60 дБ на декаду, при цьому при $m=1$ кожна нова ланка вносить приблизно 6 дБ додаткового згасання на частоті $\omega_{cp} = 1/(RC)$, як це проілюстровано рис. 4.76 (криві залучені з посібника [7]).

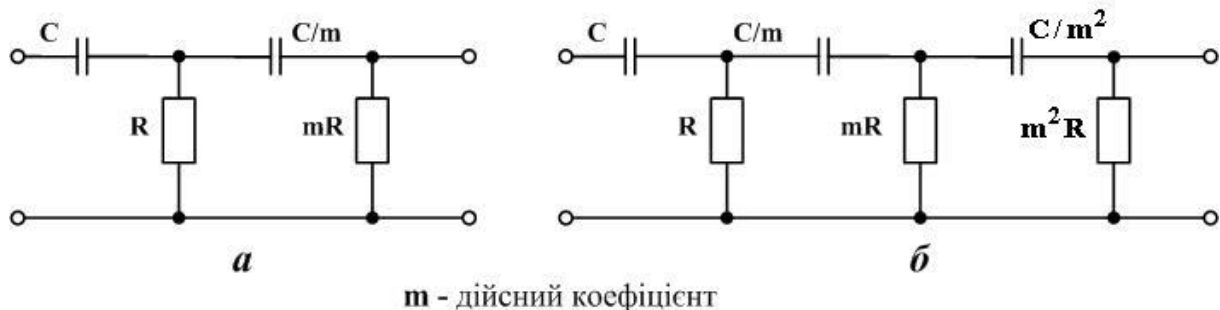


Рис. 4.75. Пасивні RC-ФВЧ: другого порядку (а) та третього порядку (б)

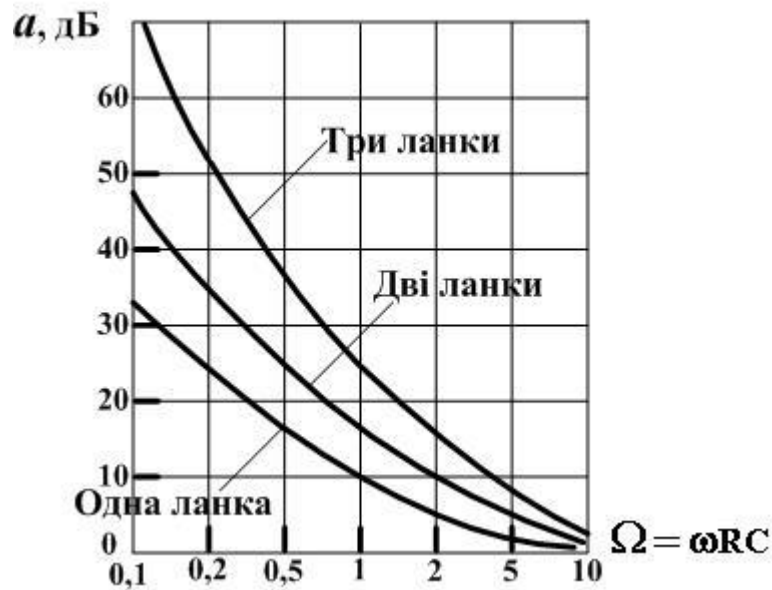


Рис. 4.76. Згасання пасивних RC-ФВЧ

Корисні міркування щодо впливу кількості ланок на АЧХ RC-фільтрів взагалі містяться в п.5.01 роботи [24].

При необхідності, параметри дво- та триланкових RC-ФВЧ як чотиріполюсників (наприклад, їх входні опори) можна розрахувати на базі наведених в [7] виразів для їх А-параметрів:

– для дволанкового – ФВЧ

$$\underline{A} = 1 - j\frac{1}{\Omega}, \quad \underline{B} = \frac{mR}{j\Omega}, \quad \underline{C} = \frac{1}{mR}, \quad \underline{D} = 1;$$

– для триланкового RC-ФВЧ

$$\underline{A} = 1 - j\frac{1}{\Omega}, \quad \underline{B} = \frac{m^2R}{j\Omega}, \quad \underline{C} = \frac{1}{m^2R}, \quad \underline{D} = 1.$$

Як і RC-ФНЧ, так і RC-ФВЧ є сенс використовувати тоді, коли частоти корисного сигналу та завади відрізняються набагато (у кілька десятків разів).

4.3.4. Пасивні смугово - пропускаючі RC-фільтри

В найпростішому випадку пасивний смугово-пропускаючий RC-фільтр (називатимемо його скорочено RC-СПФ) можна отримати шляхом каскадного (воно ж ланцюжкове) з'єднання ланок RC-ФНЧ та RC-ФВЧ (рис.4.77).

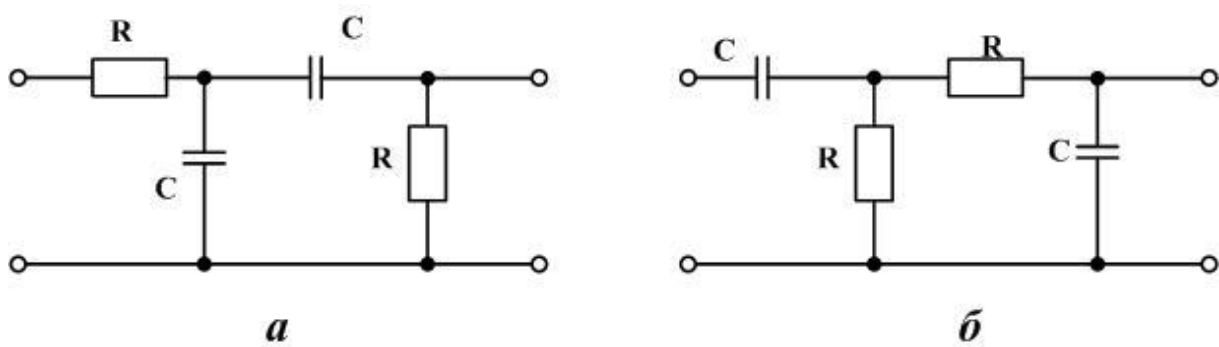


Рис. 4.77. Варіанти найпростіших схем RC-СПФ

На практиці використовують також RC-СПФ, виконані за схемою моста Віна (рис. 4.78). В ньому конденсатор C не пропускає постійний струм, але добре пропускає височастотні струми, в той час як конденсатор $\frac{C}{m}$ ці струми замикає крізь себе, “відволікаючи” їх від навантаження. Отже, на деяких середніх частотах в мості Віна конденсатор C добре пропускає струми, а конденсатор $\frac{C}{m}$ їх не надто шунтує. Діапазон цих середніх частот і складає смугу пропускання моста Віна.

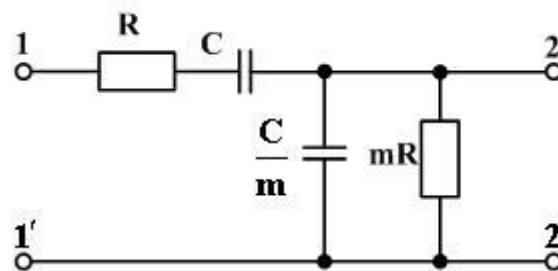


Рис. 4.78. Міст Віна

АЧХ моста Віна, який навантажено опором R_n , підімкненим до затискачів 2–2' (рис.4.78), можна обчислити за формулою⁵

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{m + \alpha}{\alpha}\right) \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}}, \quad (4.208)$$

де $\alpha = R_n / R$ – коефіцієнт навантаження;

$\Omega = \omega RC$ – відносна (нормована) частота.

⁵ Цю формулу отримано з виразу для згасання моста Віна, наведеного в таблиці 10.2 посібника [7], стовпчик 2.

ФХЧ моста Віна за цих же умов є такою:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{m+\alpha}{\alpha}} \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}{1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{\alpha}}. \quad (4.209)$$

Зокрема для режиму холостого ходу (коли $R_H = \infty$, тобто $\alpha = \infty$) та $m=1$ маємо

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}}, \quad (4.210)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[\frac{1}{3} \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]. \quad (4.211)$$

Графіки частотних залежностей, які відповідають формулам (4.210) та (4.211), наведені на рис. 4.79. В даному випадку максимальна величина $F(\omega)$ складає 0,33 на частоті $\Omega=1$ (тобто $\omega=1/(RC)$).

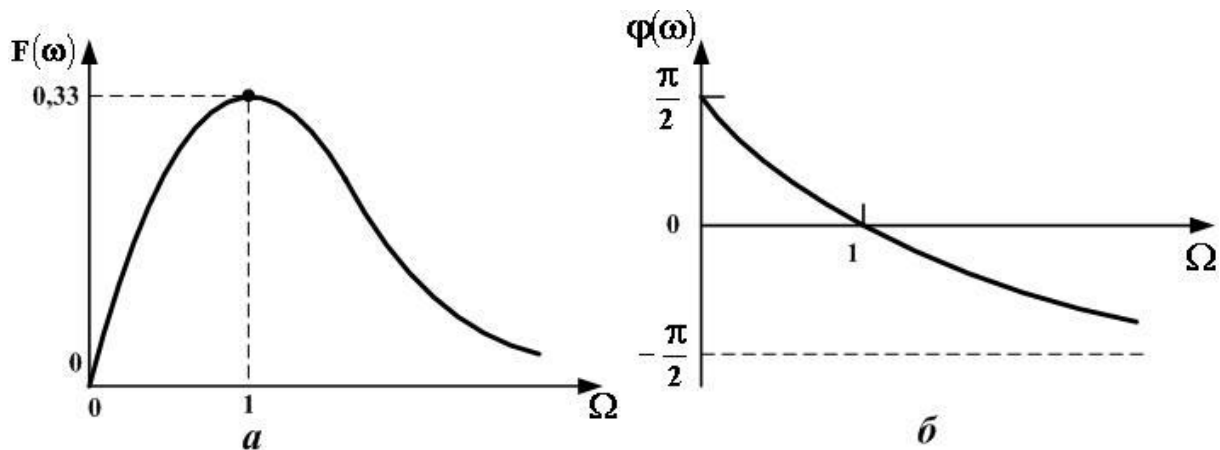


Рис. 4.79. АЧХ (а) та ФЧХ (б) пасивного RC-СПФ, складеного за схемою моста Віна

Повернувшись до RC-СПФ у вигляді касадно з'єднаних ланок RC-ФВЧ та RC-ФНЧ у дещо узагальненому варіанті (рис.4.80), відмітимо, що такий фільтр, як і міст Віна, характеризується дуже низькою частотною вибірністю, і його частотні характеристики сильно залежать від величини опору навантаження. Зокрема графіки частотних залежностей $a(\omega)$ та $b(\omega)$ цього фільтра мають вигляд, наведений на рис. 4.81.

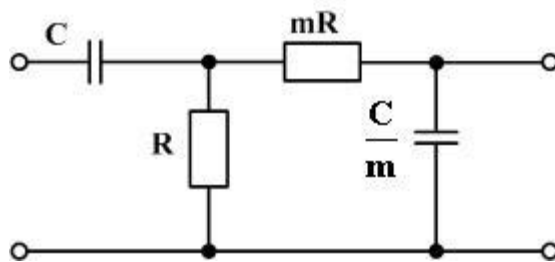


Рис. 4.80. Варіант схеми пасивного RC-СПФ

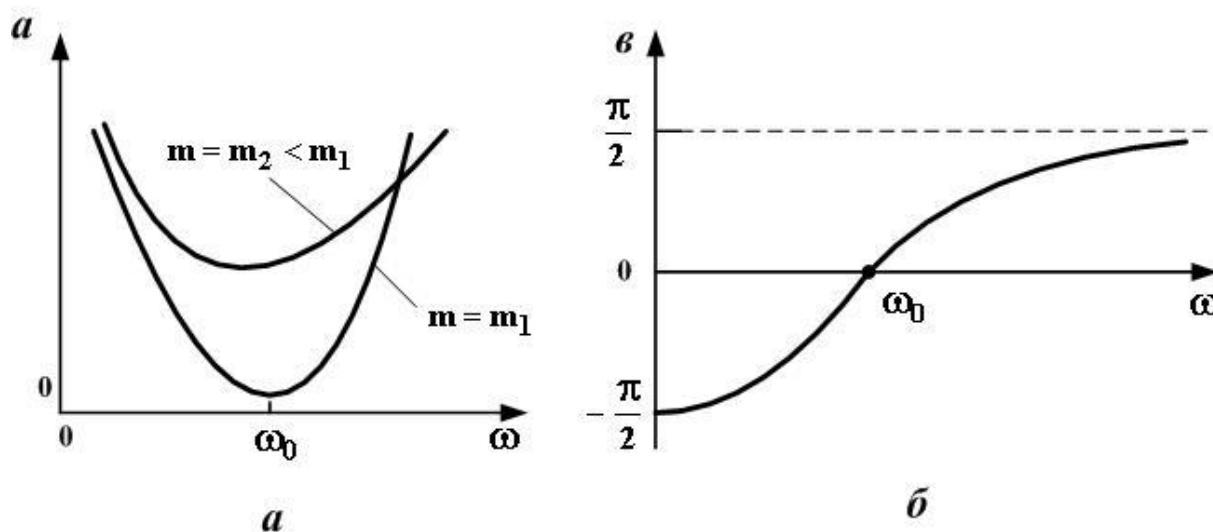


Рис. 4.81. Частотні залежності згасання (а) та коефіцієнта фази (б) пасивного RC-СПФ з рис. 4.80

Величина згасання сягає мінімуму на частоті $\omega_0 = \frac{1}{RC} \cdot \sqrt{\frac{m + \alpha + 1}{\alpha}}$.

Дуже детальний розгляд частотних характеристик різноманітних RC-СПФ міститься в [7].

4.3.5. Пасивні смугово-затримуючі RC-фільтри

Найпростіші пасивні RC-СЗФ будують за Т-подібною мостовою схемою (інколи її називають перекритою схемою), варіанти якої показано на рис.4.82. Поясненням застосовності слова “мостова схема” до цих фільтрів є рис.4.83, на якому схему *a* зображено в іншому вигляді.

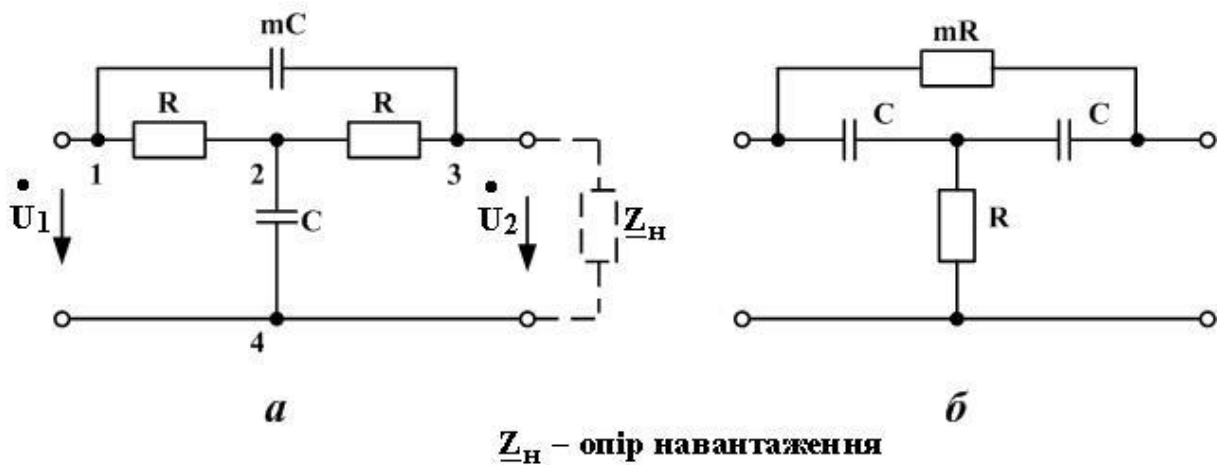


Рис. 4.82. Варіанти схем найпростішого пасивного RC-C3Ф

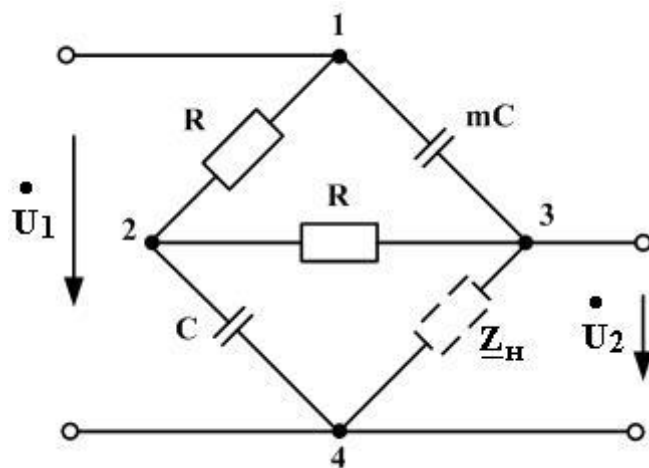


Рис. 4.83. Альтернативне зображення пасивного RC-C3Ф з рис. 4.82,а

Тепер наочно видно, що це мостова схема, в якій навантаження ввімкнене не в діагональ моста, а в одне з його плечей (між вузлами 3 та 4). Оскільки ж повне заглушення сигналу, як видно з теорії мостових чотириполюсників, може бути забезпечене тільки при діагональному ввімкненні навантаження, то слід очікувати, що фільтри з рис. 4.82 не забезпечуватимуть нескінченного згасання на жодній частоті. Більш детальний аналіз (див. [7, 25] підтверджує цю здогадку: ці фільтри мають максимум згасання на частоті $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m \cdot RC}}$, але не дуже великий.

Наприклад, в режимі холостого ходу, при $m=1000$ різниця між величинами згасання на частоті ω_0 та частоті $1,5 \omega_0$ (або ж частоті $0,67 \omega_0$) складає близько 30 дБ; при зменшенні параметра m цей показник суттєво погіршується (рис.4.84).

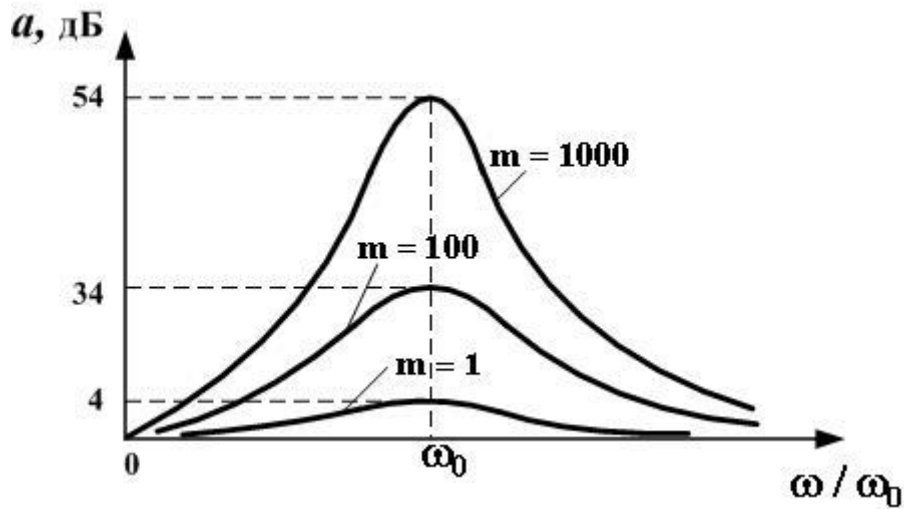


Рис. 4.84. Частотна залежність згасання Т-подібного мостового RC-C3Ф

Набагато кращих результатів вдається досягти при побудові RC-C3Ф за так звану подвійною Т-подібною схемою (рис. 4.85,а). Власне кажучи, вона є результатом паралельного з'єднання (див. п.2.2.3) двох Т-подібних чотирьохполюсників, як це показано на рис.4.85,б.

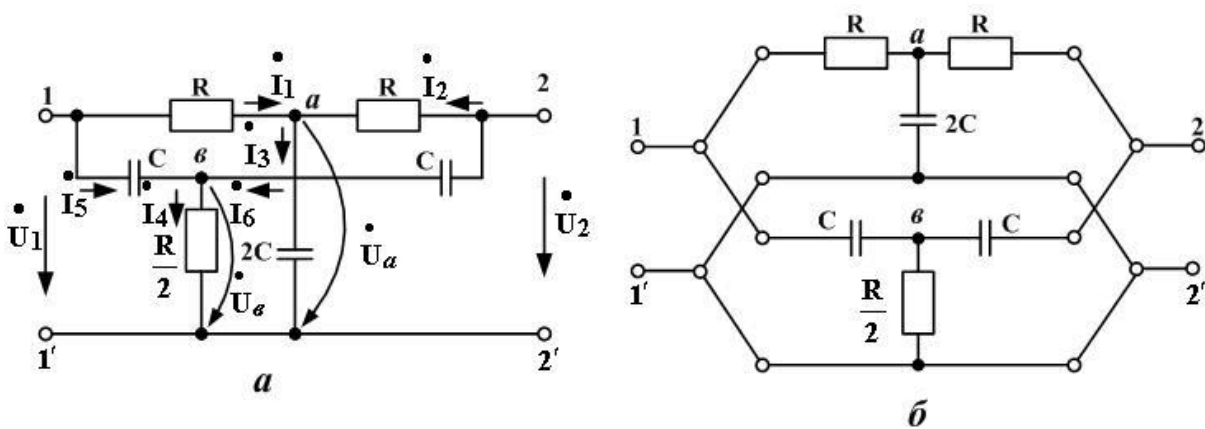


Рис. 4.85. RC-C3Ф, складений за подвійною Т-подібною схемою:
a – власне схема фільтра; *б* – подання її як результату паралельного з'єднання двох чотирьохполюсників

Знайдемо комплексну передавальну функцію $F(j\omega)$ цього фільтра в режимі холостого ходу (тобто при розімкнених затискачах 2–2'). Для цього запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа:

– для вузла *a*

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3;$$

– для вузла *b*

$$\dot{\mathbf{I}}_5 + \dot{\mathbf{I}}_6 = \dot{\mathbf{I}}_4;$$

– для вузла *c*

$$\dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_6 = \mathbf{0}.$$

Виразивши ці струми через напруги та опори, матимемо систему рівнянь

$$\frac{\dot{\mathbf{U}}_1 - \dot{\mathbf{U}}_a}{\mathbf{R}} + \frac{\dot{\mathbf{U}}_2 - \dot{\mathbf{U}}_a}{\mathbf{R}} = \mathbf{j}\omega \cdot 2\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_a, \quad (4.212)$$

$$\mathbf{j}\omega\mathbf{C} \cdot \left(\dot{\mathbf{U}}_1 - \dot{\mathbf{U}}_e \right) + \mathbf{j}\omega\mathbf{C} \cdot \left(\dot{\mathbf{U}}_2 - \dot{\mathbf{U}}_e \right) = \frac{2\dot{\mathbf{U}}_e}{\mathbf{R}}, \quad (4.213)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{U}}_2 - \dot{\mathbf{U}}_a}{\mathbf{R}} + \mathbf{j}\omega\mathbf{C}(\dot{\mathbf{U}}_2 - \dot{\mathbf{U}}_e) = \mathbf{0}. \quad (4.214)$$

З рівнянь (4.212) та (4.213) виражаємо напруги $\dot{\mathbf{U}}_a$ та $\dot{\mathbf{U}}_e$ через вхідну та вихідну напруги $\dot{\mathbf{U}}_1$ та $\dot{\mathbf{U}}_2$:

$$\dot{\mathbf{U}}_a = \frac{\dot{\mathbf{U}}_1 + \dot{\mathbf{U}}_2}{2 \cdot (1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{RC})},$$

$$\dot{\mathbf{U}}_e = \frac{\mathbf{j}\omega\mathbf{RC} \cdot (\dot{\mathbf{U}}_1 + \dot{\mathbf{U}}_2)}{2 \cdot (1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{RC})}.$$

Підставивши ці вирази в (4.214) і позначивши $\Omega = \omega\mathbf{RC}$, отримаємо

$$\frac{\dot{\mathbf{U}}_2}{\mathbf{R}} - \frac{\dot{\mathbf{U}}_1 + \dot{\mathbf{U}}_2}{2\mathbf{R}(1 + \mathbf{j}\Omega)} + \mathbf{j}\omega\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_2 - \mathbf{j}\omega\mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{j}\Omega(\dot{\mathbf{U}}_1 + \dot{\mathbf{U}}_2)}{2 \cdot (1 + \mathbf{j}\Omega)} = \mathbf{0}.$$

Помноживши обидві частини на \mathbf{R} та згрупувавши доданки окремо з множником $\dot{\mathbf{U}}_1$ і окремо – з множником $\dot{\mathbf{U}}_2$ матимемо рівність

$$\dot{\mathbf{U}}_2 \cdot \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{2(\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)} + \mathbf{j}\Omega + \frac{\Omega^2}{2(\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)} \right] = \dot{\mathbf{U}}_1 \cdot \left[\frac{\mathbf{1}}{2(\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)} - \frac{\Omega^2}{2 \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)} \right]$$

або, після помноження обох частин на $(\mathbf{1} + \mathbf{j}\omega)$, рівність

$$\dot{\mathbf{U}}_2 \cdot [2(\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)^2 + \Omega^2 - \mathbf{1}] = \dot{\mathbf{U}}_1 \cdot (\mathbf{1} - \Omega^2).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{j}\omega) &= \frac{\dot{\mathbf{U}}_2}{\dot{\mathbf{U}}_1} = \frac{\mathbf{1} - \Omega^2}{2 \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{j}\Omega)^2 + \Omega^2 - \mathbf{1}} = \\ &= \frac{\mathbf{1} - \Omega^2}{\mathbf{1} - \Omega^2 + \mathbf{j}4\Omega}. \end{aligned} \quad (4.215)$$

Тож АЧХ фільтра з рис. 4.85,а має вигляд

$$\mathbf{F}(\omega) = |\mathbf{F}(\mathbf{j}\omega)| = \frac{|1 - \Omega^2|}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}} \Big|_{\Omega = \omega RC}. \quad (4.216)$$

З цього виразу випливає, що при $\Omega=1$ (тобто $\omega=\omega_0 = 1/(RC)$) АЧХ сягає нуля, а відтак, на цій частоті в режимі холостого ходу RC-СЗФ, складений за подвійною Т-подібною схемою, повністю заглушує сигнал (рис. 4.86). Фізично причиною цього явища є те, що на частоті ω_0 струми $\dot{\mathbf{I}}_2$ та $\dot{\mathbf{I}}_6$ (рис. 4.85,а) стають рівними за величиною, але протилежними за напрямком, причому, як показано в [7], це має місце при довільному опорі навантаження.

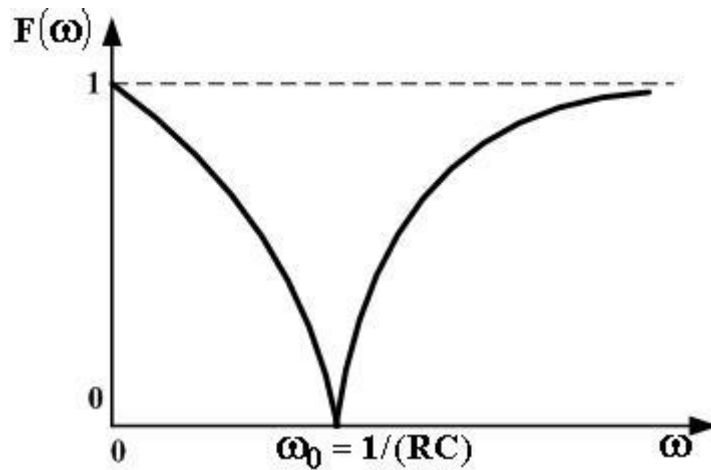


Рис. 4.86. АЧХ RC-C3Ф, складеного за подвійною Т-подібною схемою

Оскільки в режимі холостого ходу $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, то, маючи цю частоту як вихідне дане, і задаючись або **R**, або **C**, можна знайти опори та ємності всіх елементів схеми фільтра (рис.4.85,а).

Зауважимо, що в посібнику [7] зацікавлений читач знайде детальний аналіз характеристик подвійного Т-подібного RC-C3Ф й несиметричної (на відміну від рис.4.85,а) схеми.

Можливою є й побудова RC-C3Ф у вигляді *повного* моста Віна із забезпеченням повного заглушення сигналу на частоті $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ [34].

Але “сплачувати” за це доводиться, як і в мостових **LC**-фільтрах, втратою загального проводу.

4.3.6. Попередні відомості про активні RC-фільтри

Ми вже відмічали, що більшість пасивних RC-фільтрів має низьку частотну вибірність, в той час як вибірність LC-фільтрів є суттєво вищою. Постає питання: чи можна поєднати компактність, характерну для пасивних RC-фільтрів, з високою частотною вибірністю, характерною для LC-фільтрів? Як виявляється, можна. Для досягнення цієї мети треба розширити елементну базу побудови RC-фільтрів, додавши до резисторів та конденсаторів підсилювальні елементи – транзистори або операційні підсилювачі [24, 27], або навіть електронні лампи [7]. Щоправда, з підсилювальними елементами додаються й їхні недоліки: нелінійні спотворення сигналу, обмеженість динамічного діапазону фільтра (це відношення максимальної та мінімальної амплітуди неспотвореного сигналу), викликана обмеженістю максимальної амплітуди робочого сигналу напівпровідникових, а також лампових підсилювальних елементів

та їх внутрішніми шумами. Надійність підсилювальних елементів нижча за надійність резисторів та конденсаторів. Однак позитивні якості фільтрів, побудованих на базі резисторів, конденсаторів і підсилювальних (їх ще звуть активними) елементів, як в сенсі їх доброї частотної виборності, так і в сенсі технологічності їх виготовлення, забезпечили цим фільтрам, названим ARC-фільтрами, широке застосування в радіоелектронній апаратурі.

Строго кажучи, початком розробки будь-якого фільтра є вибір деякої функції $y(\omega)$, яка з бажаною точністю апроксимує ідеальну АЧХ цього фільтра (інколи апроксимують його ідеальну фазочастотну характеристику (ФЧХ); одночасна незалежна апроксимація АЧХ та ФЧХ неможлива фізично). Початкові відомості з цієї проблеми зацікавлений читач знайде в джерелах [5, 24, 27], більш детальний аналіз – в оглядовій монографії [20], а глибоке математичне дослідження цієї проблеми (і багато схемотехнічних висновків з нього) – в роботах [28, 29]. Ми ж, маючи за мету нашого підручника викладення основних ідей побудови ARC-фільтрів, констатуємо лише, що апроксимовані частотні характеристики фільтра можуть бути реалізовані кількома способами [30]:

1) використанням підсилювальних елементів (найчастіше це операційні підсилювачі), охоплених спеціально розрахованими RC-колами зворотного зв'язку;

2) побудовою фільтрів за відомими схемами LC-фільтрів, в яких індуктивності імітовані спеціальними пристроями – гіраторами. Останні являють собою необоротні чотириполюсники, які мають таку властивість: їх опір $\underline{Z}_{\text{вх}}$ з боку вхідних затискачів є величиною, зворотною до величини опору $\underline{Z}_{\text{н}}$, підімкненого до їх навантажувальних затискачів. Отже, якщо

навантаження – ємність з опором $\underline{Z}_{\text{н}} = \frac{1}{j\omega C_{\text{н}}}$, то вхідним опором є

$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{н}}} = j\omega C_{\text{н}}$, тобто в цьому випадку $\underline{Z}_{\text{вх}}$ – чисто індуктивний з

величиною індуктивності, яка числово дорівнює ємності навантаження. Схемотехніку гіраторів детально розглянуто в книзі [30] і дуже детально – в брошурі [31];

3) побудовою фільтрів на базі звичайних резисторів та конденсаторів з додаванням “незвичайних” елементів – резисторів з від’ємним опором та (або) конденсаторів з від’ємною ємністю [30], а також (або) D – елемента –

пристрою, опір якого змінюється за законом $\underline{Z}_{\text{D}} = -\frac{1}{\omega^2 D}$, де D – постійна

величина [5, 12]. Такий елемент можна реалізувати тільки на базі підсилювача, охопленого ланцюжками зворотного зв'язку, побудованими із звичайних резисторів та конденсаторів. Від’ємні резистори та ємності

отримують шляхом застосування так званих конверторів (або перетворювачів) від'ємного опору [5, 12, 30].

Як відмічено в роботі [27], будь-які пристрої на гіраторах і конверторах від'ємного опору мають один спільний недолік: низький рівень вихідного сигналу, дуже малий порівняно з вихідною напругою підсилювачів, на яких їх побудовано. Оскільки мінімальна величина вихідного сигналу обмежена рівнем шумів, то можна зробити висновок, що динамічний діапазон вказаних пристроїв невеликий. В той же час ARC-фільтри першого типу мають вихідну напругу, що дорівнює вихідній напрузі підсилювача, а відтак, досить великий динамічний діапазон. Тому в нашому підручнику увагу приділено саме їм.

Перш за все нагадаємо відоме з курсу електроніки (див., наприклад, підручники та посібники [27, 32]) поняття зворотного зв'язку. **Зворотним зв'язком називають** подачу деякої частини сигналу з виходу підсилювача до його входу. Цей зв'язок називають **позитивним**, якщо його введення призводить до *збільшення* коефіцієнта підсилення порівняно із підсилювачем, не охопленим ним, і **негативним**, якщо його введення призводить до *зменшення* коефіцієнта підсилення підсилювача.

Нехай $K(j\omega)$ – комплексна передавальна функція за напругою (див. [1, п.11.4.2]) підсилювача, не охопленого зворотним зв'язком, $\gamma(j\omega)$ – комплексна передавальна функція за напругою кола зворотного зв'язку, а $K_{oc}(j\omega)$ – комплексна передавальна функція за напругою підсилювача, охопленого зворотним зв'язком. Такому (із зворотним зв'язком) підсилювачу відповідає узагальнена структурна схема (на ній неконкретизовані способи підімкнення кола зворотного зв'язку), зображена на рис.4.87. Як відомо з курсу електроніки, вказані передавальні функції пов'язані таким співвідношенням:

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 - \gamma(j\omega) \cdot K(j\omega)}. \quad (4.217)$$

Звідси випливає, що підбираючи різні види залежності $\gamma(j\omega)$ можна суттєво впливати на залежність $K_{oc}(j\omega)$, надаючи їй бажаних частотно-виборних властивостей, тобто утворюючи ARC-фільтр.

Як видно з рис. 4.87, підсилювач без зворотного зв'язку та коло зворотного зв'язку утворюють кільцевий шлях для сигналу; цей шлях прийнято називати **петлею зворотного зв'язку**. Кількість цих петель та вид зворотного зв'язку (позитивний або негативний) вважатимемо ознаками для певного впорядкування відомостей про ARC-фільтри (детальна систематизація таких відомостей є складною задачею [30, 33], яка виходить далеко за рамки нашого підручника).



Рис. 4.87. Узагальнена структурна схема підсилювача, охопленого зворотним зв'язком

4.3.7. ARC-фільтри з однопетельним негативним зворотним зв'язком

Найпростішою схемою, за якою можна побудувати вказаний в заголовку ARC-фільтр, є схема, наведена на рис. 4.88.

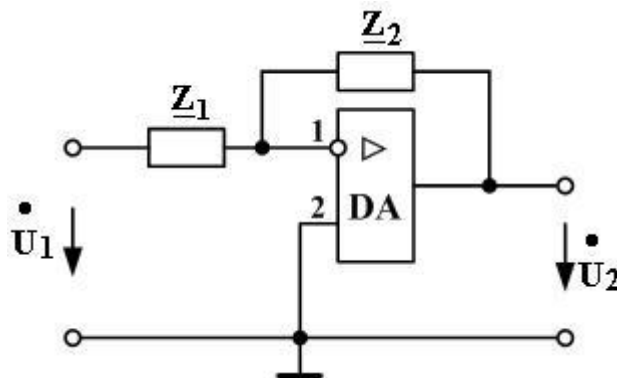


Рис. 4.88. Узагальнена схема ARC-фільтра з однопетельним негативним зворотним зв'язком

Як підсилювальний елемент використано ідеальний операційний підсилювач¹ DA; його вхід 1, помічений кружечком, називають інвертуючим входом (поданий на нього сигнал, прийшовши на вихід, зазнає зсуву по фазі на 180°), а його вхід 2 називають неінвертуючим входом (поданий на нього сигнал, прийшовши на вихід, не зазнає зсуву по фазі).

¹ Операційний підсилювач, з огляду на його важливе місце в схемотехніці, є предметом розгляду не тільки в літературі з електроніки, але й в літературі з теорії електричних кіл – наприклад, у підручниках [3, 5, 9, 12], де наведені й основні властивості кіл, побудованих на його базі.

Відомо (див., наприклад, посібники [12, 32]), що комплексна передавальна функція кола, схему якого зображено на рис.4.88, залежить тільки від опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 :

$$K(j\omega) = -\frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega)}. \quad (4.218)$$

При цьому петля зворотного зв'язку замикається через опір \underline{Z}_2 . Нехай $\underline{Z}_1 = R_1$, а двополусник з опором \underline{Z}_2 утворений паралельним з'єднанням резистора R_2 та конденсатора C_2 . Тоді матимемо схему, наведену на рис. 4.89. Тут

$$\underline{Z}_2(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}.$$

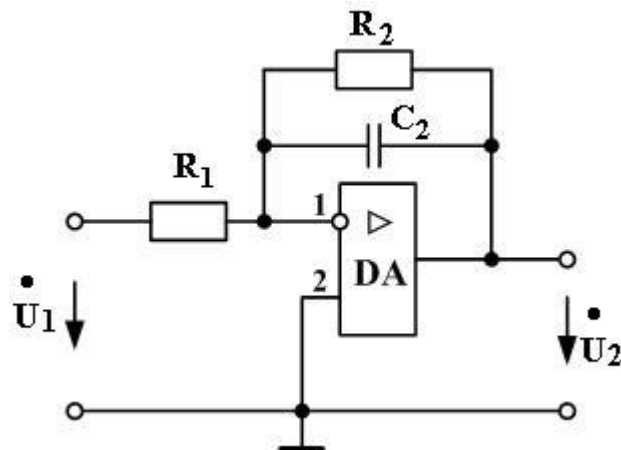


Рис. 4.89. АРС-ФНЧ першого порядку

З урахуванням цього формула (4.218) набуває вигляду

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} = \\ &= -K_0 \cdot \frac{1}{1 + j\Omega}, \end{aligned} \quad (4.219)$$

де $K_0 = R_2 / R_1$ – величина коефіцієнта підсилення фільтра з рис. 4.89 при постійному струмі;

$\Omega = \omega R_2 C_2$ – приведена частота (аналогічно виразу (4.190)).

З точністю до постійного множника ($-K_0$) вираз (4.219) співпадає з виразом (4.199) для частотної характеристики пасивного RC-ФНЧ першого порядку, отже, склавши фільтр за схемою з рис. 4.89, матимемо ФНЧ першого порядку з підсиленням та з інверсією сигналу.

Аналогічним чином можна впевнитися, що схеми, зображені на рис.4.90 та 4.91, є схемами відповідно ARC-ФВЧ першого порядку та ARC-СПФ.

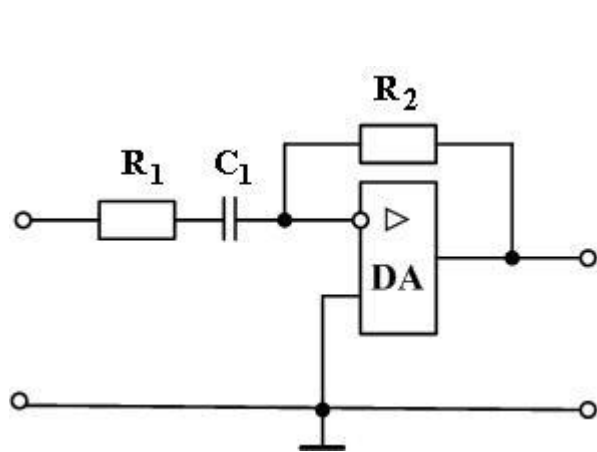


Рис. 4.90. ARC-ФВЧ першого порядку

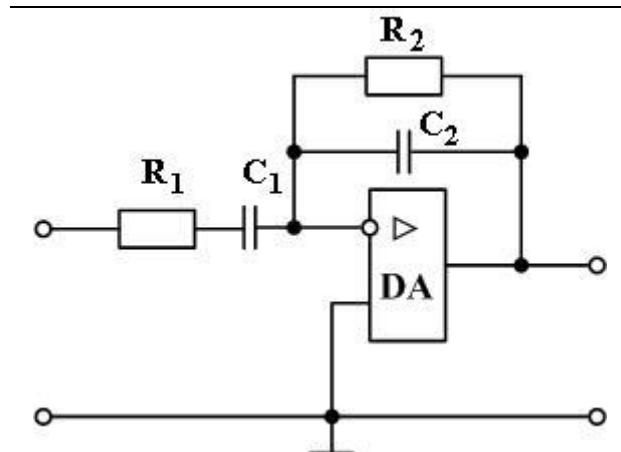


Рис. 4.91. ARC-СПФ

Для такого ARC-ФВЧ маємо

$$K(j\omega) = -K_0 \cdot \frac{\Omega}{1 + j\Omega}, \quad (4.220)$$

де $\Omega = \omega R_1 C_1$;

$$K_0 = R_2 / R_1.$$

ARC-СПФ з рис.4.90 має колоколоподібну ФЧХ з центральною частотою $\omega_0 = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$, максимальним значенням підсилення $K_0 = 1/\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)$ та шириною смуги пропускання, виміряною на рівні $0,707 K_0$, яка має величину

$$\Delta\omega = \omega_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} + \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} \right).$$

За своєю частотною вибірністю ARC-фільтри першого порядку аналогічні пасивним RC-фільтрам першого порядку. Також аналогічно

пасивним RC-фільтрам існують ARC-фільтри другого порядку [27], які забезпечують зростання згасання в смузі затримування із швидкістю 40 дБ на декаду. Їхня комплексна передавальна функція залежить вже від квадрата приведеної частоти Ω , на відміну від (4.219) та (4.220).

Оскільки операційні підсилювачі мають дуже великий вхідний опір і малий вихідний опір, то при каскадному ввімкненні ланок ARC-фільтрів взаємний вплив ланок буде дуже малим. Цей фактор, а також те, що шляхом каскадного з'єднання ланок першого та другого порядків можна отримати ARC-фільтр з будь-якою потрібною частотною характеристикою [27], обумовив широку розповсюдженість каскадного методу реалізації ARC-фільтрів.

Окрім ідеї побудови ARC-фільтрів з однопетельним негативним зворотним зв'язком за загальною схемою, наведеною на рис.4.88, варто взяти до уваги й ідею безпосереднього використання фільтруючих властивостей петлі зворотного зв'язку. Наприклад, ввімкнувши в коло *негативного* зворотного зв'язку смугово-затримуючий фільтр, ми отримаємо $K_{oc}(j\omega)$, яка являтиме собою частотну характеристику смугово-пропускаючого фільтра. Результат використання в колі негативного зворотного зв'язку RC-СЗФ, складеного за подвійною Т-подібною схемою, наведено на рис. 4.92 (деякі варіанти можна знайти в [12] та [30]).

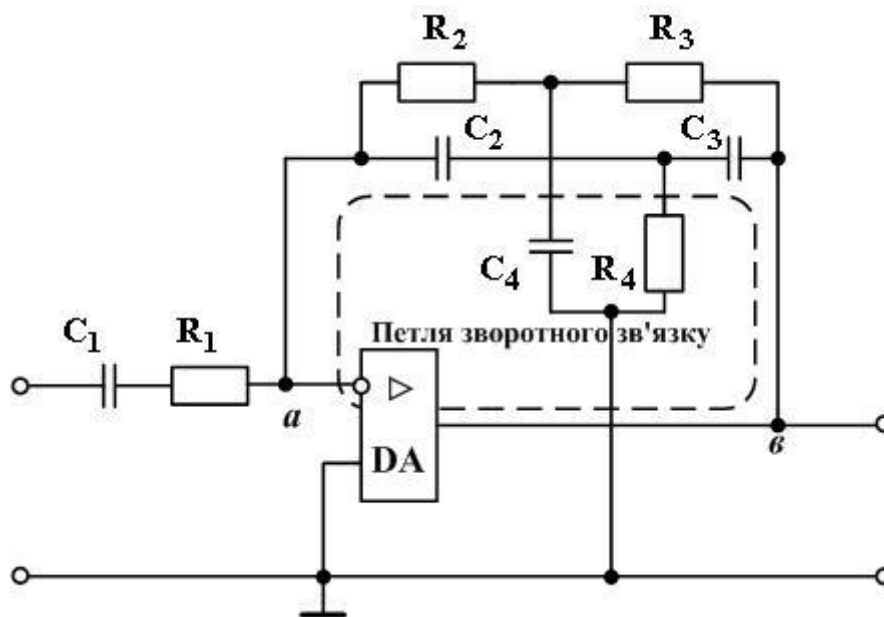


Рис. 4.92. Приклад ARC-СПФ, отриманого в результаті ввімкнення RC-СЗФ у коло негативного зворотного зв'язку

На частоті ω_0 (див.п.4.3.5) та поблизу неї подвійний Т-подібний фільтр зовсім або майже не пропускає сигнал з виходу (точка *в*) до входу (точка *а*), тобто негативний зворотний зв'язок “не працює” і результуючий

коефіцієнт підсилення $|K_{oc}(j\omega)|$ великий; ARC-фільтр добре пропускає сигнал. Це – смуга пропускання. На частотах, віддалених від ω_0 , подвійний Т-подібний фільтр подає майже всю напругу вихідного сигналу на вхід операційного підсилювача, тобто негативний зворотний зв'язок тут сильний, і результуючий коефіцієнт підсилення $|K_{oc}(j\omega)|$ малий; ARC-фільтр заглушує сигнал. Це – смуга затримування. Якщо визначити за межі смуги пропускання частоти, на яких коефіцієнт підсилення $|K_{oc}(j\omega)|$ складає $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ від своєї найбільшої величини K_0 на частоті ω_0 , то можна ввести параметр добротності фільтра $Q = \omega_0 / \Delta\omega$, де $\Delta\omega$ – ширина смуги пропускання. Максимальна добротність, якої можна досягти при використанні ARC-СПФ з рис. 4.92, складає $K_0/4$, що дуже багато, оскільки величина K_0 на практиці може дорівнювати кільком тисячам.

4.3.8. ARC-фільтри з однопетельним позитивним зворотним зв'язком

Ідею побудови таких фільтрів розглянемо на прикладі СПФ, побудованого шляхом включення RC-СПФ у коло позитивного зворотного зв'язку підсилювача. За цієї умови в смузі пропускання вказаного RC-СПФ сигнал позитивного зворотного зв'язку буде максимальним, що, за визначенням цього типу зв'язку, забезпечить максимальний коефіцієнт підсилення $|K_{oc}(j\omega)|$; в смузі затримування вказаного RC-СПФ сигнал позитивного зворотного зв'язку буде малим, а тому малим буде й $|K_{oc}(j\omega)|$. Отже, охоплений таким зворотним зв'язком підсилювач вестиме себе як СПФ.

Для прикладу розглянемо ARC-СПФ, побудований шляхом включення моста Віна (див.п.4.3.4) в коло позитивного зворотного зв'язку операційного підсилювача (рис.4.93). Резистори R_1 та R_2 визначають коефіцієнт підсилення при відімкненому зворотному зв'язку: згідно з (4.218) він складає $K(j\omega) = -R_2 / R_1 = K_0$. Частотну характеристику моста Віна наведено на рис. 4.79: на частоті $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ вона сягає свого максимального значення $\gamma_0 \approx 0,33$ (при $m=1$). Тепер звернемось до виразу (4.217):

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 - \gamma(j\omega) \cdot K(j\omega)} = \frac{K_0}{1 - \gamma(j\omega) \cdot K_0}. \quad (4.221)$$

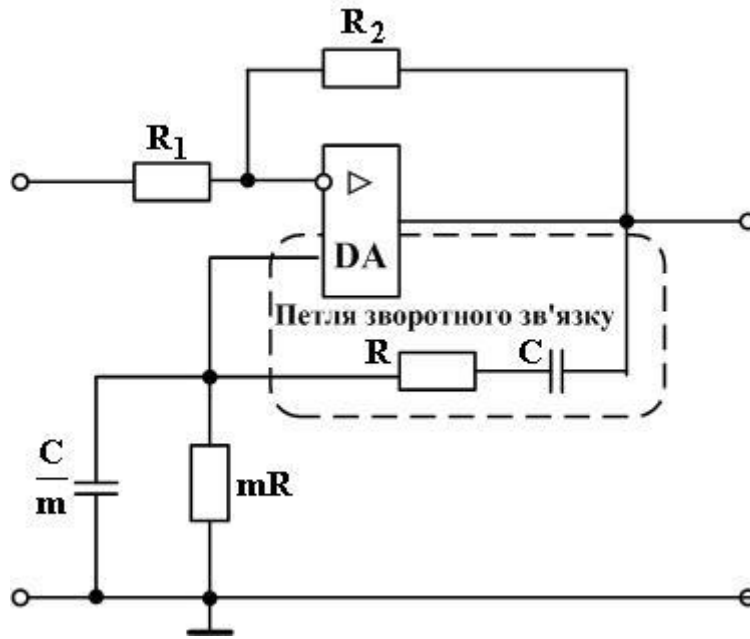


Рис. 4.93. Приклад ARC-СПФ, отриманого в результаті ввімкнення RC-СПФ у коло позитивного зворотного зв'язку

Щоб підсилювач, охоплений позитивним зворотним зв'язком, не увійшов у режим генерації коливань, знаменник виразу (4.221) не повинен перетворюватися на нуль. Це можливо, якщо максимум модуля добутку $\gamma(j\omega) \cdot K_0$ буде меншим від одиниці, тобто

$$\max|\gamma(j\omega) \cdot K_0| = K_0 \cdot \max|\gamma(j\omega)| = K_0 \cdot \gamma_0 < 1.$$

Звідси величина K_0 не повинна перевищувати критичного значення $\frac{1}{\gamma_0}$, інакше підсилювач, як кажуть, “загенерує”. Реально досяжна величина добротності Q (див. кінець попереднього підрозділу) СПФ, складеного за схемою з рис. 4.93, не перевищує 10. При більших величинах Q величина K_0 виявляється занадто близькою до критичного значення $\frac{1}{\gamma_0}$ і під дією дестабілізуючих факторів (наприклад, температури) може сягнути цього значення, перевівши фільтр у небажаний режим – режим генерації коливань.

Дещо детальніші відомості з теми цього підрозділу можна знайти в посібнику [32].

4.3.9. ARC-фільтри з багатопетельним зворотним зв'язком

Як відомо (див., наприклад, посібники [27, 32], негативний зворотний зв'язок робить характеристики охоплених ним підсилювачів менш чутливими до відхилень величин параметрів елементів схеми від розрахункових значень, порівняно з підсилювачами з такими ж АЧХ та ФЧХ, але не охопленими негативним зворотним зв'язком. В той же час застосування позитивного зворотного зв'язку є дуже плідотворним шляхом конструювання ARC-фільтрів, і відмовлятися від нього не варто. Отже, доцільно будувати ARC-фільтри із комбінованими зворотними зв'язками. Такі фільтри можна побудувати як на базі підсилювача з нескінченним (на практиці – дуже великим, близько 10^5) коефіцієнтом підсилення, так і на базі підсилювача з малим (близько одиниць) коефіцієнтом підсилення.

Розглянемо перший з цих шляхів. Нехай в нашому розпорядженні є ідеальний операційний підсилювач з усіма притаманними йому властивостями: коефіцієнт підсилення – нескінченний, потенціали ϕ_a та ϕ_e його входів – рівні, входні струми обох входів дорівнюють нулю. Проаналізуємо схему (рис.4.94), складену на базі такого підсилювача, щоб знайти частотну залежність її коефіцієнта підсилення.

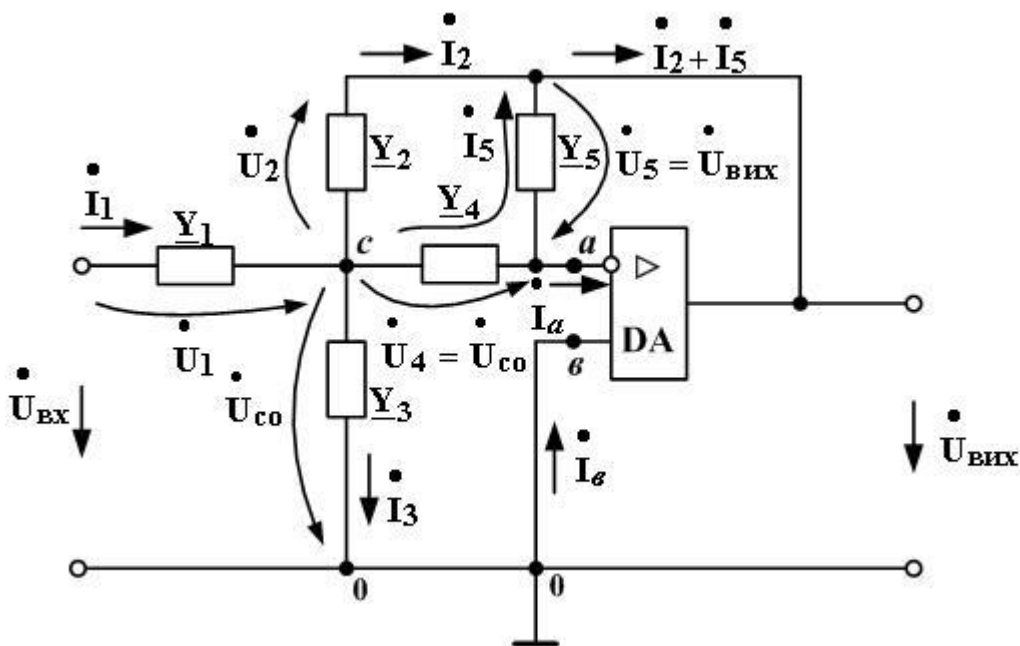


Рис. 4.94. ARC-фільтр з двопетельним зворотним зв'язком

Оскільки зворотний зв'язок замикається двома шляхами – через провідність \underline{Y}_2 та через провідність \underline{Y}_5 , то даний ARC-фільтр має двопетельний зворотний зв'язок. Неінвертуючий вхід e заземлено, його

потенціал $\varphi_g = 0$, і за властивостями ідеального операційного підсилювача маємо також $\varphi_a = 0$. Звідси $\dot{U}_4 = \dot{U}_{co}$ (вважаємо, що на вхід подано синусоїдну напругу $\dot{U}_{вх}$ з частотою ω). Оскільки ж вхідні струми $\dot{I}_a = \dot{I}_e = 0$, то $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_5$. Виразивши ці струми через напруги та провідності, отримаємо

$$\dot{U}_1 \dot{Y}_1 = \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_{co} \dot{Y}_3 + \dot{U}_{co} \dot{Y}_4. \quad (4.222)$$

За другим законом Кірхгофа маємо

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{co} - \dot{U}_{вих};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{вх} - \dot{U}_{co},$$

тому вираз (4.222) набуває вигляду

$$\dot{U}_{вх} \dot{Y}_1 - \dot{U}_{co} \dot{Y}_1 = -\dot{U}_{вих} \dot{Y}_2 + \dot{U}_{co} \cdot (\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4)$$

або

$$\dot{U}_{вх} \dot{Y}_1 = \dot{U}_{co} \cdot (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) - \dot{U}_{вих} \dot{Y}_2. \quad (4.223)$$

Оскільки, за властивостями ідеального операційного підсилювача, має місце рівність $\varphi_a = \varphi_g = 0$, то $\dot{U}_4 = \dot{U}_{co}$ та $\dot{U}_5 = \dot{U}_{вих}$. Тому можна записати, що $\dot{I}_5 = -\dot{U}_{вих} \cdot \dot{Y}_5 = \dot{U}_{co} \dot{Y}_4$, звідки

$$\dot{U}_{co} = -\dot{U}_{вих} \cdot \frac{\dot{Y}_5}{\dot{Y}_4}.$$

Підставивши це співвідношення до виразу (4.223), отримаємо

$$\dot{U}_{вх} \dot{Y}_1 = -\dot{U}_{вих} \cdot \frac{\dot{Y}_5}{\dot{Y}_4} \cdot (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) - \dot{U}_{вих} \cdot \dot{Y}_2.$$

Звідси комплексна передавальна функція за напругою АРС-фільтра з рис. 4.94 є такою:

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{-\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_4}{\underline{Y}_5 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_4}. \quad (4.224)$$

Провідності підбирають під конкретну задачу. Наприклад, потрібний ФНЧ другого порядку. Його комплексна передавальна функція за напругою (КПФ) дорівнює добутку КПФ двох однакових ФНЧ першого порядку (див.п.4.3.7)

$$K_{фнч}(j\omega) = \frac{A}{1 + j\omega B} \cdot \frac{A}{1 + j\omega B} = \frac{A^2}{-\omega^2 B^2 + j2\omega B + 1}, \quad (4.225)$$

де А та В – константи, які обчислюються через величини опорів та ємностей кола.

Порівнюючи (4.224) та (4.225), робимо такі висновки. По-перше, величина A^2 не залежить від частоти ω , тому в чисельнику виразу (4.224) \underline{Y}_1 та \underline{Y}_4 – активні провідності, тобто резистори ($\underline{R}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1}$, $\underline{R}_4 = \frac{1}{\underline{Y}_4}$). Щоб отримати постійний доданок в знаменнику, \underline{Y}_2 теж повинна бути резистором ($\underline{R}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2}$). За цих умов, щоб отримати $(-\omega^2)$ у знаменнику, провідності \underline{Y}_3 та \underline{Y}_5 повинні бути чисто ємнісними ($\underline{Y} = j\omega C$). Тоді вираз (4.224) набуває вигляду

$$\begin{aligned} K_{oc}(j\omega) &= \frac{-\frac{1}{R_1 \cdot R_4}}{-\omega^2 C_3 C_5 + j\omega C_5 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) + \frac{1}{R_2 R_4}} = \\ &= \frac{-R_2 / R_1}{-\omega^2 R_2 R_4 C_3 C_5 + j\omega C_5 \cdot \left(\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_4 + R_2\right) + 1}. \end{aligned} \quad (4.226)$$

Останній вираз аналогічний виразові (4.225) для КПФ ФНЧ другого порядку, отже наш вибір провідностей є правильним. Результуюча схема АРС-ФНЧ другого порядку з двопетельним зворотним зв'язком наведена на рис.4.95.

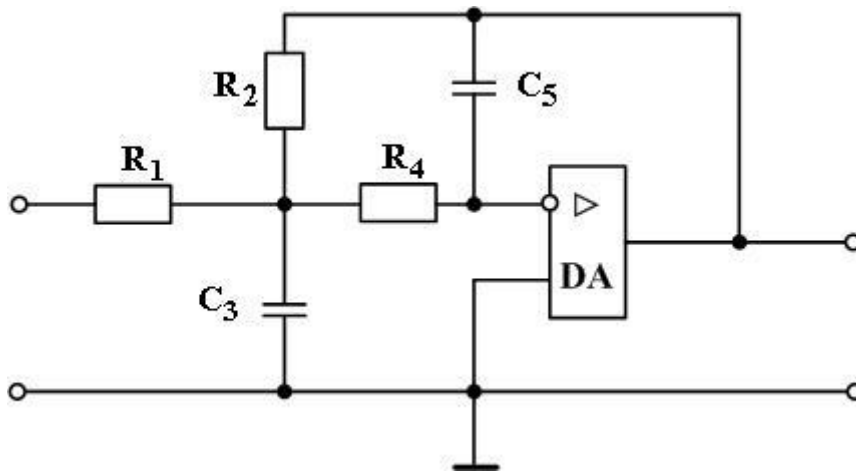


Рис. 4.95. ARC-ФНЧ другого порядку з двопетельним зворотним зв'язком

Якщо замінити всі резистори такого ARC-ФНЧ на ємності, а всі його ємності – на резистори, то згідно з [32] отримаємо ARC-ФВЧ другого порядку (рис.4.96).

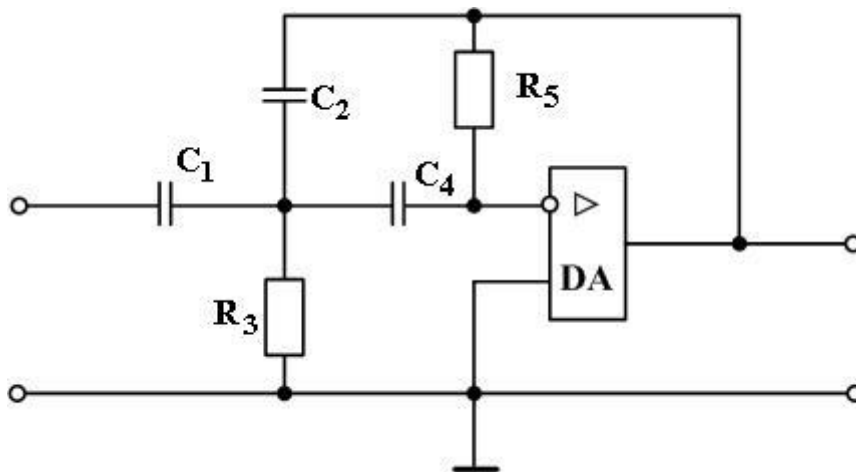


Рис. 4.96. ARC-ФВЧ другого порядку з двопетельним зворотним зв'язком

Детальний аналіз ARC-ФНЧ (рис.4.95) та ARC-ФВЧ (рис.4.96) наведений у посібнику [32]; там же наведені міркування та співвідношення для розрахунку параметрів елементів цих фільтрів. Як показано в підручнику [12], за загальною схемою з рис.4.94 можна також побудувати смугово-пропускаючий ARC-фільтр, а от смугово-затримуючий фільтр за цією схемою побудувати не можна, для цього слід використати більш складну схему так званого біквдратного фільтра (див. також п.5.08 роботи [24]).

Як ми вже згадували на початку цього підрозділу, ARC-фільтри можна побудувати також на базі підсилювача з малим коефіцієнтом підсилення. Як такий вузол часто використовують операційний підсилювач, охоплений негативним зв'язком за схемою, наведеною на рис.4.97.

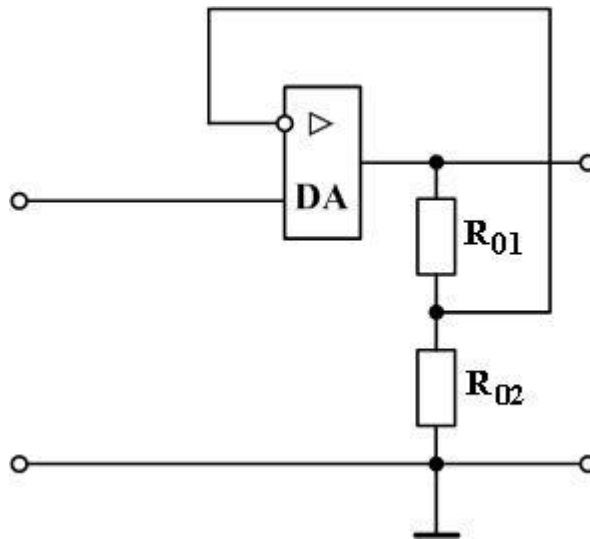


Рис. 4.97. Базова схема підсилювача з малим коефіцієнтом підсилення

Його коефіцієнт підсилення згідно з [27, 32] дорівнює

$$K = 1 + \frac{R_{01}}{R_{02}}. \quad (4.227)$$

Загальну схему ARC-фільтра на базі підсилювача з малим коефіцієнтом підсилення наведено на рис.4.98. Його комплексна передавальна функція за напругою є такою:

$$K_{oc}(j\omega) = \frac{KY_1Y_3}{(Y_1 + Y_2) \cdot (Y_3 + Y_4) + Y_3Y_4 - K \cdot Y_2Y_3}, \quad (4.228)$$

де величину K визначено співвідношенням (4.227).

Якщо, наприклад, як Y_1 та Y_3 використати резистори, а як Y_2 та Y_4 ємності, то отримаємо ARC-ФНЧ, схему якого наведено на рис. 4.99.

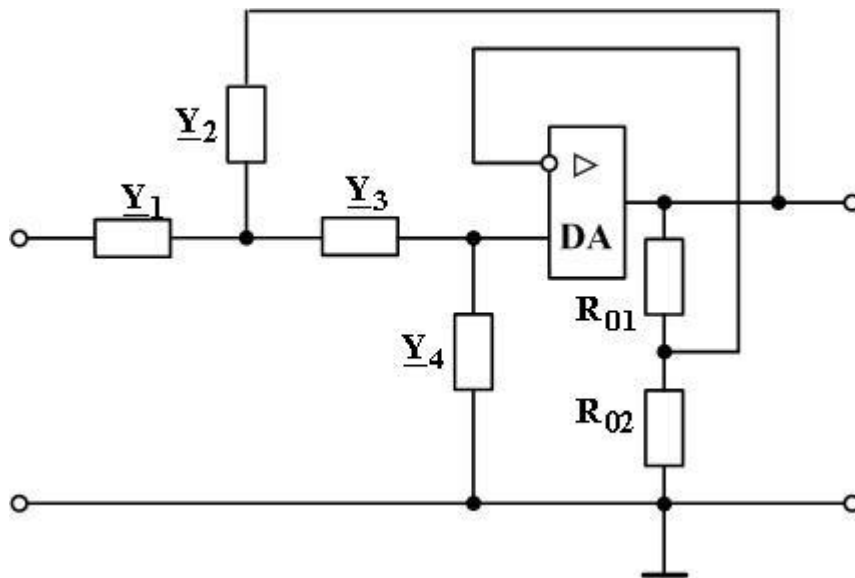


Рис. 4.98. ARC-фільтр на базі підсилювача з малим коефіцієнтом підсилення

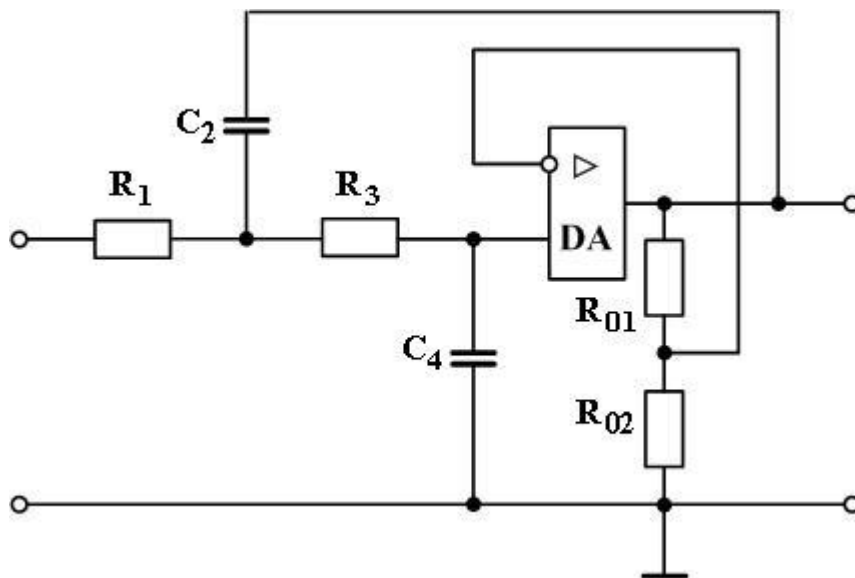


Рис. 4.99. ARC-ФНЧ на базі підсилювача з малим коефіцієнтом підсилення

В роботах [27, 32] проведено детальний аналіз частотних властивостей цього фільтра, а також побудованих за загальною схемою з рис.4.98 ARC-ФВЧ та ARC-СПФ, в [27] також розглянуто й смуговозатримуючий фільтр (ARC-СЗФ). В роботі [24, п.5.06, 5.07] наведено методику розрахунку складних фільтрів, побудованих шляхом каскадного з'єднання ланок, складених за загальною схемою з рис.4.98.

Існують й більш складні схеми побудови ARC-фільтрів з багатопетельним зворотним зв'язком, в основі яких лежать спеціальні теоретичні та інженерні напрацювання [24, 28, 33].

4.3.10. Завдання для самоконтролю

1. При якій величині опору навантаження R_n частотно-виборні властивості пасивних RC-фільтрів є найкращими?

Відповідь: при $R_n = \infty$.

2. Як визначають частоту зрізу пасивного RC-фільтра?

3. Накресліть схеми пасивних RC-ФНЧ та RC-ФВЧ першого та другого порядків.

4. Накресліть схеми відомих Вам смугово-пропускаючих та смугово-затримуючих пасивних RC-фільтрів.

5. Який пасивний фільтр слід увімкнути в петлю негативного зворотного зв'язку підсилювача, щоб в результаті утворився активний смугово-пропускаючий фільтр?

Відповідь: слід увімкнути смугово-затримуючий фільтр.

6. Який пасивний фільтр слід увімкнути в петлю позитивного зворотного зв'язку підсилювача, щоб в результаті утворився активний смугово-пропускаючий фільтр?

Відповідь: слід увімкнути смугово-пропускаючий фільтр.

7. Чим викликане обмеження максимальної величини коефіцієнта підсилення підсилювача, на базі якого будують ARC-фільтр із позитивним зворотним зв'язком?

8. Які переваги ARC-фільтрів перед пасивними RC-фільтрами?

4.4. Механічні резонатори та фільтри на їх базі

4.4.1. Загальні відомості

Механічні резонатори – це спеціальні кристалічні, керамічні або металеві вироби¹, в яких механічні коливання суттєвої амплітуди виникають при зовнішніх збурних діях, частоти яких лежать у дуже вузькому діапазоні. По відношенню до механічних коливань ці резонатори є тим самим, що й складні коливальні контури по відношенню до електричних коливань, і тому для механічних резонаторів теж можна ввести поняття “частота резонансу” (під нею розуміють частоту ω_0 , на якій механічні коливання в резонаторі відбуваються з найбільшою амплітудою) та «ширина смуги пропускання» (під нею розуміють діапазон частот

¹ Кажучи взагалі, тверdotільні резонатори можуть бути зроблені з будь-якого механічно-пружного матеріалу.

шириною $\Delta\omega$, на краях якого амплітуда механічних коливань зменшується в $\sqrt{2}$ разів порівняно з амплітудою на частоті резонансу). А відтак можна поширити на механічні резонатори й поняття **добротності**, визначивши її вже відомим співвідношенням $Q = \omega_0 / \Delta\omega$. Так ось, добротності механічних резонаторів у $10^2 \dots 10^4$ разів вищі, ніж у електричних коливальних контурів. Тому фільтри, побудовані на базі механічних резонаторів, мають набагато кращі частотно-виборні властивості, ніж LC-фільтри.

Деякі з механічних резонаторів чутливі до зовнішніх збурних діянь як у вигляді електричного поля, так і у вигляді механічних вібрацій. Це п'єзокерамічні та п'єзокристалічні (останні часто називають кварцевими) резонатори, які часто об'єднують назвами "п'єзоелектричні резонатори". Для фільтрації електричних сигналів на базі цих резонаторів можна побудувати фільтри двох типів:

1) фільтри, в яких усі резонатори пов'язані тільки електричними зв'язками, в тому числі і з зовнішнім колом;

2) фільтри, в яких зв'язок із зовнішнім колом є електричним, а зв'язки між резонаторами є механічними.

Механічні резонатори іншого типу чутливі до зовнішніх збурних діянь як у вигляді магнітного поля, так і, знову ж таки, механічних вібрацій. Це магнітострикційні резонатори. Оскільки електричний сигнал нескладно перетворити в магнітне збурне діяння, подавши його на котушку індуктивності, то для фільтрації електричних сигналів на базі магнітострикційних резонаторів можна побудувати фільтри таких же типів, що й для п'єзрезонаторів.

Нарешті, суто механічні резонатори (диски, стрижні, пластинки та ін.) чутливі тільки до механічних вібрацій. Щоб під'єднати механічні фільтруючі системи, складені з цих резонаторів, до джерел та споживачів електричного сигналу, на вхідному кінці такої системи треба встановити перетворювач електричного сигналу в механічні коливання, а на вихідному кінці – перетворювач механічних коливань в електричний сигнал. Найчастіше це магнітострикційні перетворювачі, інколи – п'єзоперетворювачі або перетворювачі інших типів. Фільтри такої комбінованої конструкції називають електромеханічними фільтрами.

4.4.2. П'єзоелектричні фільтри

В п'єзоелектричних фільтрах використовують резонатори, робота яких базується на **п'єзоелектричному ефекті**. Цей ефект полягає в такому: при механічній деформації кристала (або шматка спеціальної кераміки) на його поверхнях утворюються електричні заряди різних знаків, причому при зміні напрямку деформації на протилежний змінюються й знаки зарядів. **Зворотний п'єзоелектричний ефект** полягає в тому, що

геометричні розміри кристала (або шматка спеціальної кераміки) змінюються під дією зовнішнього електричного поля.

В найпростішому випадку п'єзореzonатор являє собою пластинку з кварцу (п'єзокристалічний резонатор) або зі спеціальної кераміки (п'єзокерамічний резонатор), на яку з обох боків нанесені срібні контактні електроди (рис. 4.100). При необхідності до них під'єднують зовнішні виводи п'єзореzonатора. Умовне позначення цього резонатора наведено на рис.4.101.

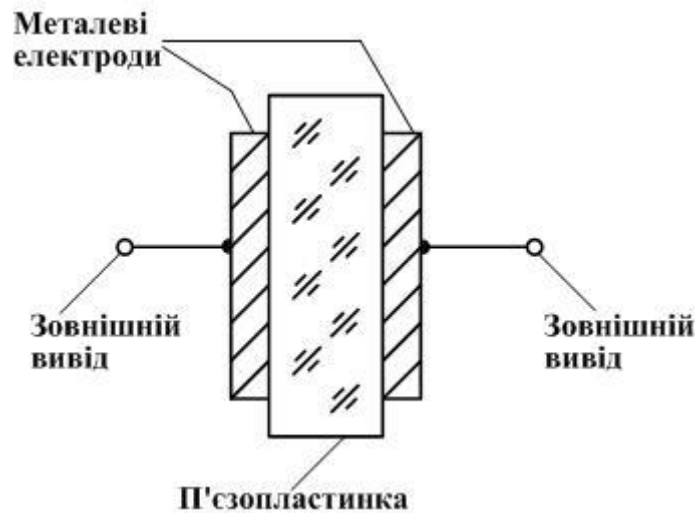


Рис. 4.100

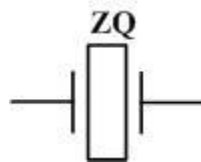
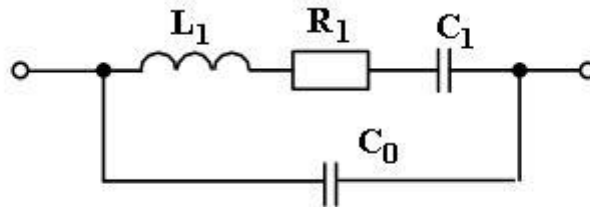


Рис. 4.101

Як пружне тіло, що має інерцію, пластинка має й певну частоту ω_s власних механічних коливань. Коли частота ω_s напруги, прикладеної до електродів, дорівнюватиме частоті ω_s , настане п'єзореzonанс, при якому амплітуда заряду на металізованих боках пластини буде максимальною. Оскільки струм i заряд q пов'язані співвідношенням $i = dq / dt$, то максимум амплітуди заряду означає й максимум амплітуди струму крізь резонатор, а відтак – мінімум повного опору резонатора. Тому п'єзореzonатор еквівалентний послідовному коливальному контуру (див.[1, п.5.5.2]). Контактні електроди (рис.4.100) виявляються еквівалентними деякому конденсатору ємністю C_0 , підімкненому

паралельно до цього послідовного коливального контуру; тож еквівалентна електрична схема п'єзрезонатора має вигляд, поданий на рис.4.102 (зауважимо, що ця схема є спрощеною і справедлива лише для вузького діапазону частот, всередині якого лежить частота ω_s ; для ознайомлення з властивостями п'єзрезонатора в широкій смузі частот радимо звернутися до оглядової монографії [20].



L_1, C_1, R_1 - еквівалентні електричні параметри п'єзопластинки

Рис. 4.102. Спрощена еквівалентна електрична схема п'єзрезонатора

В залежності від розмірів та форми п'єзрезонатора (на практиці він – не обов'язково пластинка) параметри його еквівалентної схеми орієнтовно такі: $L \approx (0,1 \dots 100)$ Гн, $C_1 \approx (0,01 \dots 100)$ пФ, $R_1 \approx (10 \dots 1000)$ Ом, $C_2 \approx (100 \dots 1000)$ пФ. Реальна добротність п'єзрезонатора є величиною близько $10^4 \dots 10^6$, оскільки реактивний опір $(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})$ набагато

перевищує величину R_1 , тому при наближеному аналізі можна вважати $R_1=0$. За цієї умови коло з рис.4.102 перетворюється на триелементний реактивний двополусник (див.п.1.5 даного підручника), графік частотної залежності комплексного опору якого наведений на рис. 4.103.

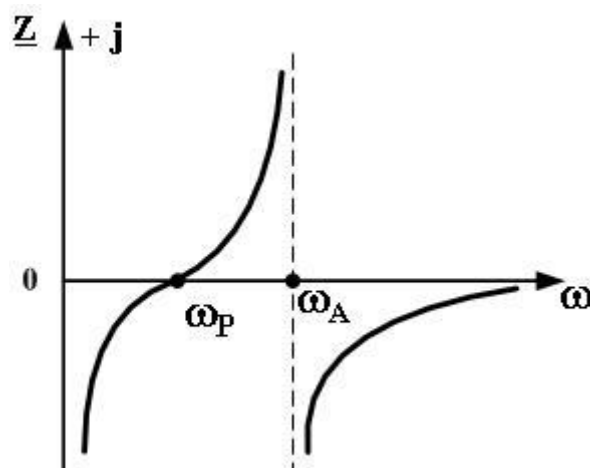


Рис. 4.103. Наближена частотна залежність опору п'єзрезонатора

Тут маємо частоту резонансу $\omega_p = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ та частоту антирезонансу $\omega_A = 1/\sqrt{L_1 \cdot \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1}}$; величини цих частот на практиці є дуже близькими.

Способи застосування п'єзокристалічних (кварцевих) та п'єзокерамічних резонаторів здебільшого відрізняються. П'єзокристалічні резонатори випускають у вигляді окремих радіокомпонентів і так само й використовують, складаючи фільтри з них, з котушок та конденсаторів. Як приклад, на рис.4.104 наведено найпростішу схему мостового смугово-пропускаючого фільтра (СПФ) на базі двох кварцевих резонаторів (радімо самостійно довести, що це коло є СПФ, користуючись умовами пропускання та затримування мостового фільтра, наведеними в п.4.2.20 цього підручника).

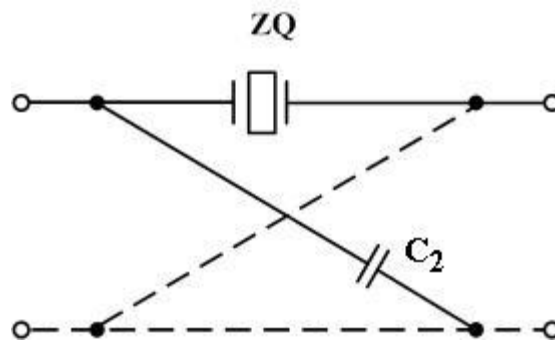


Рис. 4.104. Найпростіший мостовий СПФ на базі кварцевих резонаторів

П'єзокерамічні резонатори, як правило, не використовують у вигляді окремих радіокомпонентів. З них одразу будують готові модулі фільтрів (частіше це СПФ), в яких окремі резонатори з'єднані електрично або механічно у ланцюжкову структуру. Таким чином, окремим радіокомпонентом є готовий п'єзокерамічний фільтр (фільтри, в яких застосовують механічний зв'язок, інколи називають п'єзомеханічними).

Читачеві, зацікавленому в розширенні та (або) поглибленні своїх знань з п'єзоелектричних резонаторів та фільтрів, рекомендуємо звернутися до літературних джерел [20, 35, 36].

4.4.3. Магнітострикційні фільтри

В магнітострикційних фільтрах застосовують так звані магнітострикційні резонатори, робота яких базується на **магнітострикційному ефекті** – зміні розмірів феромагнітних тіл під дією магнітного поля. Стосовно до, наприклад, феромагнітного стрижня

магнітострикційний ефект полягає в зміні довжини цього стрижня як функції миттєвого значення магнітного потоку Φ , що пронизує цей стрижень вздовж його осі. Якщо цей потік утворюється внаслідок протікання струму крізь деяку котушку індуктивності, то ми маємо факт перетворення електричного сигналу (струм) у механічні вібрації (зміна довжини стрижня).

Зворотний магнітострикційний ефект полягає в зміні відносно магнітної проникності μ внаслідок дії механічних сил вздовж осі феромагнітного стрижня. В результаті миттєве значення магнітного потоку Φ в стрижні змінюється як функція величини μ . Якщо на стрижень намотано котушку індуктивності з кількістю витків W , то в цій котушці при зміні в часі величини μ наводиться (згідно із законом електромагнітної індукції) ЕРС

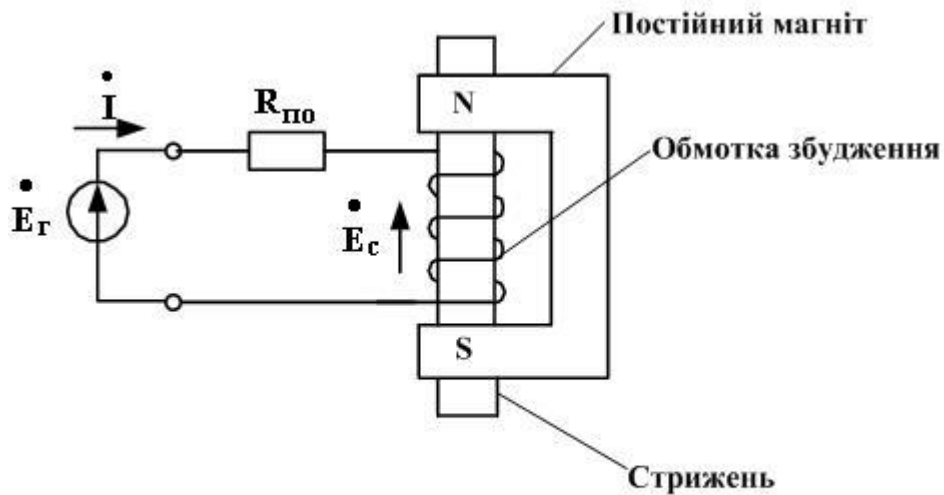
$$E_c = -W \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.229)$$

тобто ми матимемо перетворення механічних вібрацій в електричний сигнал.

Магнітострикційний резонатор складається з магнітострикційного стрижня (інколи – феромагнітного тіла іншої форми [20]), обмотки збудження та постійного магніту (рис.4.105). Наявність останнього викликана такими міркуваннями. Оскільки зміна довжини стрижня не залежить від напрямку магнітного поля, а залежить лише від абсолютної величини його потоку $|\Phi|$, то при синусоїдній зміні миттєвого значення Φ цього потоку стрижень коливатиметься з подвійною частотою. Для усунення цього явища й застосовують постійний магніт: його поле в сумі з полем котушки утворює в стрижні однонаправлене поле, яке пульсує з частотою вхідного сигналу (рис.4.106).

Як пружне тіло, що має інерцію, стрижень має й певну частоту ω_s власних механічних коливань. Коли частота ω_0 генератора (рис.4.105) співпадає з ω_s , стрижень коливається з максимальною амплітудою (тобто резонує), а відтак, згідно з (4.229), *максимальною* є й амплітуда ЕРС індукції. Внаслідок цього струм \dot{I} (рис.4.105) є *мінімальним*, оскільки

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_r - \dot{E}_c}{R_{no}}.$$



E_G – комплекс діючого значення ЕРС джерела сигналу;
 $R_{по}$ – опір втрат у обмотці збудження.

Рис. 4.105. Магнітострикційний резонатор: побудова та підімкнення до джерела сигналу

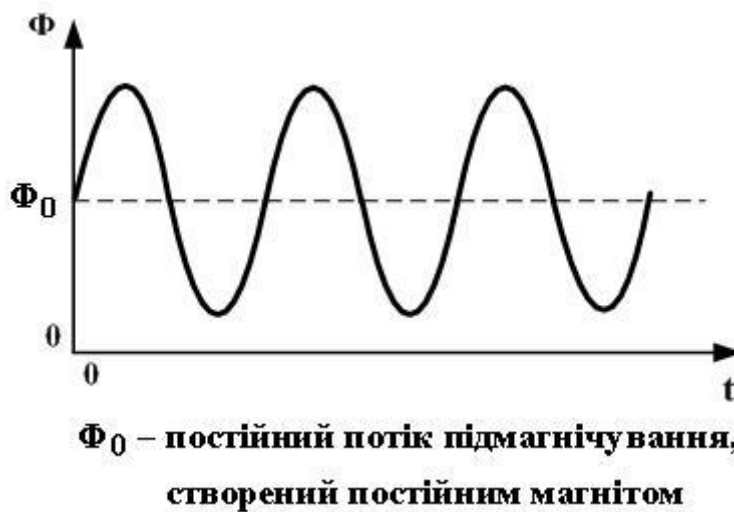


Рис. 4.106

Мінімум струму при резонансі – явище, характерне для паралельного коливального контуру (див.[1, п.5.6.2]). Отже, магнітострикційний резонатор подібний до паралельного коливального контуру з параметрами L_1 та C_1 . Наявність обмотки збудження обумовлює ще й наявність додаткової котушки L_0 в його еквівалентній схемі (рис.4.107).

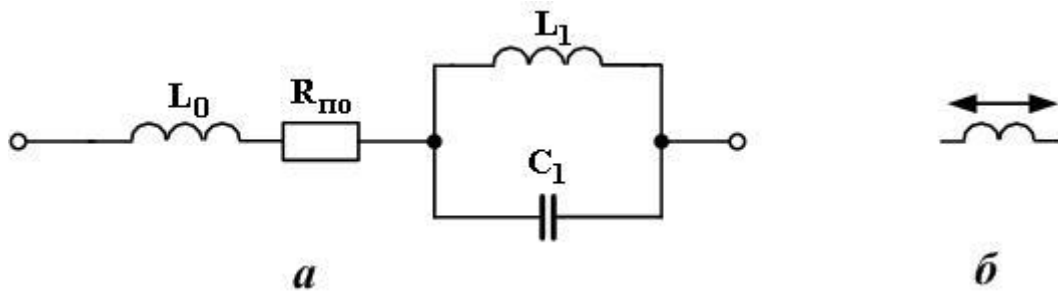


Рис. 4.107. Еквівалентна схема (а) та умовне позначення (б) магнітострикційного резонатора

Реальна добротність магнітострикційного резонатора є величиною близько $10^3 \dots 10^4$, тому при наближеному аналізі можна вважати, що $R_{\Pi\Pi 0} = 0$. За цієї умови коло з рис.4.107,а перетворюється на триелементний реактивний двополусник (див.п.1.5 даного підручника), графік частотної залежності комплексного опору якого наведений на рис.4.108. Тут маємо частоту антирезонансу $\omega_A = \omega_S = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ та частоту резонансу $\omega_P = 1/\sqrt{\frac{L_0 L_1}{L_0 + L_1} \cdot C_1}$; величини цих частот на практиці є дуже близькими.

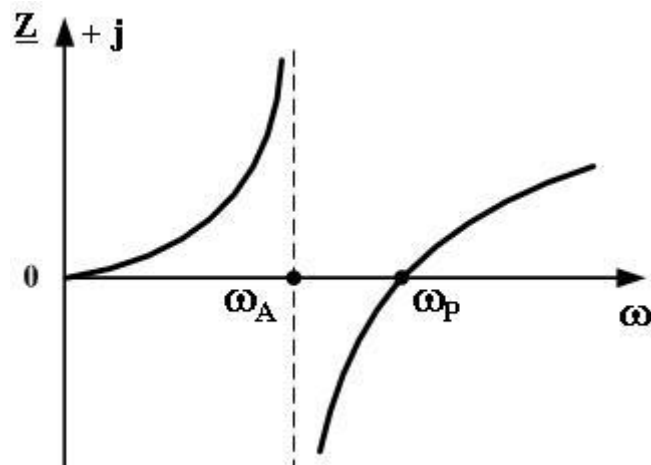


Рис. 4.108. Частотна залежність опору магнітострикційного резонатора

Фільтри, побудовані на базі магнітострикційних резонаторів, називають магнітострикційними фільтрами. Як приклад розглянемо чотирьорезонаторний магнітострикційний СПФ, складений за мостовою схемою (рис.4.109).

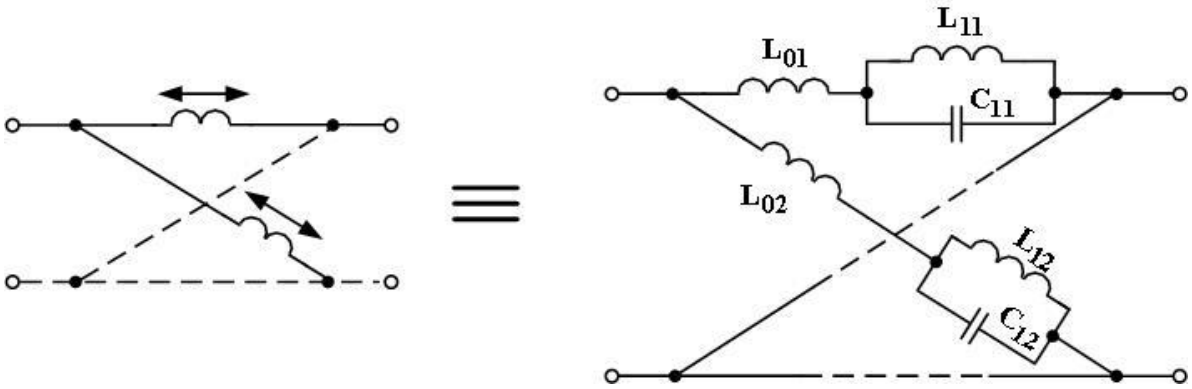


Рис. 4.109. Чотирезонаторний мостовий СПФ на базі магнітострікційних резонаторів

Розглянувши частотні залежності опорів Z_1 (горизонтальні вітки фільтра) та Z_2 (діагональні вітки фільтра), наведені на рис.4.110,а, і скориставшись умовами пропускання та затримування мостового фільтра, наведеними в п.4.2.10 цього підручника, отримаємо частотну залежність його власного згасання, наведену на рис.4.110,б. Вона ілюструє, що коло із схемою, наведеною на рис.4.109, дійсно є СПФ, за умови підбору таких пар резонаторів, в яких $\omega_{p1} = \omega_{A2}$.

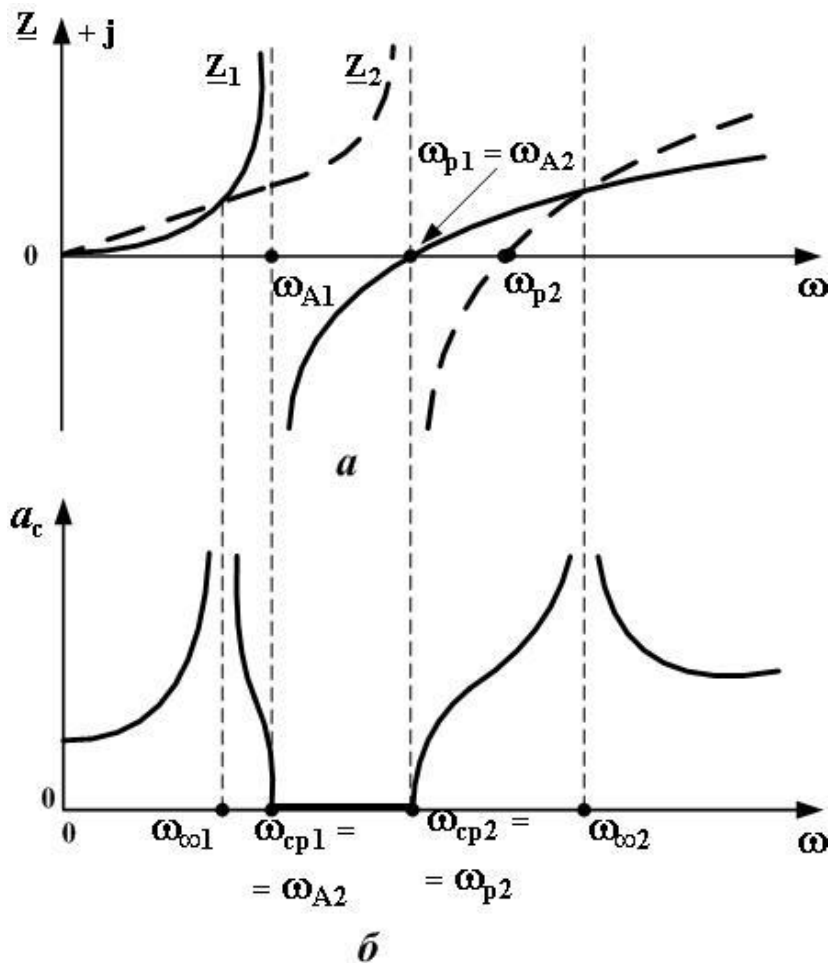


Рис. 4.110. До аналізу частотних властивостей кола з рис.4.109

Читачеві, зацікавленому в розширенні та (або) поглибленні своїх знань з магнітострикційних резонаторів та фільтрів, рекомендуємо звернутися до літературних джерел [7, 20, 37].

4.4.4. Електромеханічні фільтри

Як вже згадано в п.4.4.1, електромеханічні фільтри здійснюють функцію фільтрації механічних вібрацій, закон зміни яких у часі співпадає із законом зміни в часі вхідного електричного сигналу. Щоб під'єднати вхід та вихід механічної фільтруючої системи до електричного кола, на її вхідному та вихідному кінцях розташовують електромеханічні перетворювачі магнітострикційного, п'єзоелектричного, електромагнітного або іншого типу [38].

Таким чином, узагальнену структурну схему електромеханічного фільтра можна подати у вигляді ланцюжка “вхідний електромеханічний перетворювач (ЕМП_{ВХ}) – механічна фільтруюча система – вихідний електромеханічний перетворювач (ЕМП_{ВИХ})”. У свою чергу механічна фільтруюча система звичайно являє собою ланцюжок “механічна зв'язка (МЗ) – механічний резонатор (МР) – МЗ – МР –... – МЗ – МР” (рис.4.111). Кількість ланок такого ланцюжка в різних конструкціях є різною; в найпростішому випадку такий фільтр містить два резонатори. Основний внесок у створення амплітудно- та фазочастотних характеристик електромеханічного фільтра роблять резонатори (як вузькосмугові елементи конструкції), механічні ж зв'язки (МЗ) мають дуже слабкі частотно-вибірні властивості (тобто є широкосмуговими елементами конструкції).

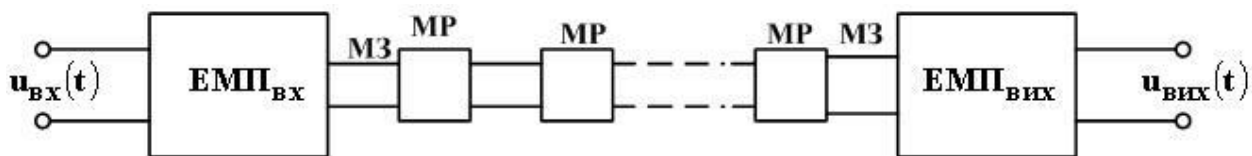


Рис. 4.111. Узагальнена структурна схема електромеханічного фільтра

Електромеханічні фільтри (ЕМФ) здатні працювати як вузькосмугові смугово-пропускючі фільтри з центральною частотою від десятків герців до одиниць мегагерців, в залежності від конструкції. Найбільш високочастотними є дискові ЕМФ (рис.4.112) та стрижньові ЕМФ (рис.4.113); конструкції та частотні властивості їх елементів досить детально розглянуто в роботах [7, 20, 38].

Фільтри цих двох типів знайшли широке застосування в техніці зв'язку.

Набагато низькочастотнішими є камертонні фільтри (це стосується більшості цих фільтрів; існують й камертонні резонатори на частоти в сотні кілогерців [38]). Спрощений вигляд такого фільтра наведено на рис.4.114.

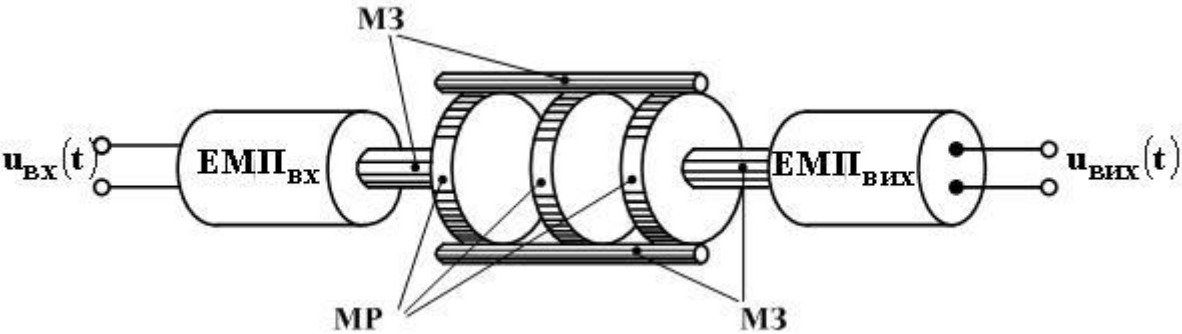


Рис. 4.112

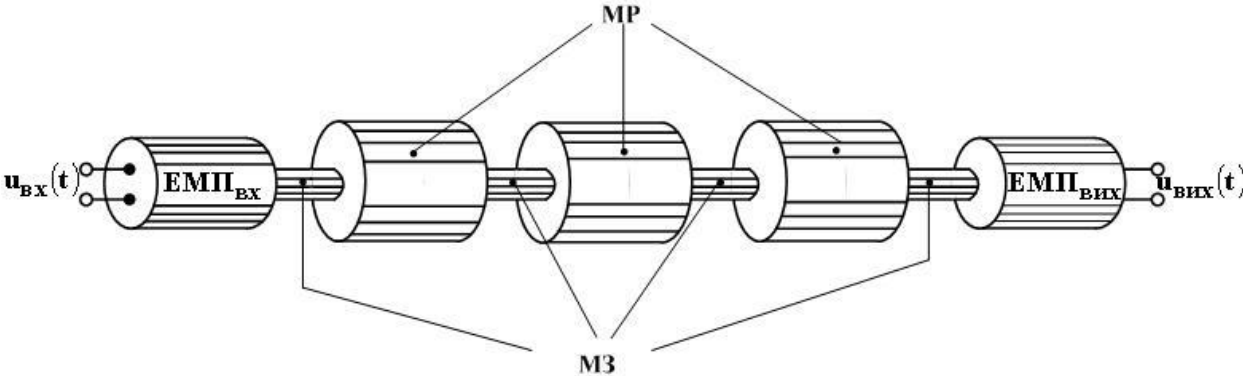


Рис. 4.113

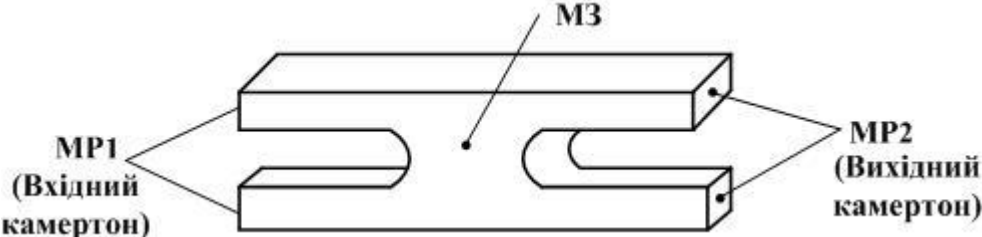


Рис. 4.114

Механічними резонаторами є камертони, що виготовлені з пружного магнітно-якого феромагнетика. Механічні коливання являють собою почергове зближення та віддалення кінців ніжок камертонів. Ці коливання створюють (стосовно до конструкції, зображеної на рис.4.114) за допомогою електромагнітних перетворювачів. Дані перетворювачі утворюють пульсуюче за законом зміни в часі вхідного сигналу односпрямоване магнітне поле. Коливання ніжок виникають тому, що вони, як й усякі феромагнітні об'єкти, намагаються переміститися в область простору, де величина магнітного потоку найбільша, а пружні сили в той же час намагаються розпрямити ці ніжки. Необхідність створення саме пульсуючого односпрямованого магнітного потоку Φ (а звідси й застосування зображених на рис.4.114 постійних магнітів) зумовлено тим, що сили, які діють на ніжки з боку магнітного поля, пропорційні Φ^2 , тобто не залежать від напрямку магнітного потоку. Відтак, при зміні Φ за законом синуса з частотою ω і за відсутності постійних магнітів ніжки коливалися б з подвійною частотою, що призвело б до спотворення сигналу. За наявності постійного магнітного потоку підмагнічування, створеного постійними магнітами, цих спотворень, в першому наближенні, не виникає.

Отже, механічні коливання ніжок вхідного камертона проходять через зв'язку до вихідного камертона, після чого через вихідний електромагнітний перетворювач поступають до навантаження вже у вигляді електричної напруги.

Показаний на рис.4.114 фільтр на базі здвоєного камертона із суцільною зв'язкою може виявитися надто вузькосмуговим. Для розширення смуги пропускання у зв'язці роблять пропили, наприклад такі, які показані на рис.4.115. Величина розширеної таким чином смуги пропускання складає приблизно (0,5...1,5)% від центральної частоти цієї смуги. Згасання сигналу в смузі пропускання лежить в межах (4...8) дБ.

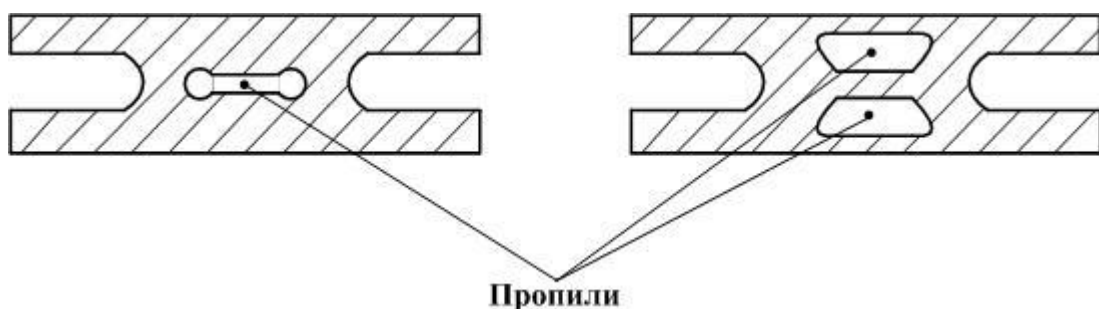


Рис. 4.115. Приклади пропилів для розширення смуги пропускання камертонного фільтра

Широке коло питань, пов'язаних із камертонними фільтрами, розглянуте в класичній роботі [7] та, на більш сучасному рівні, в роботі [38].

Досі в цьому підрозділі ми розглядали електромеханічні фільтри, складені з окремих конструктивних елементів (ЕМП, дисків, стрижнів, камертонів). Але можливості мікроелектроніки дозволяють виконати ЕМП, резонатори та зв'язки у вигляді єдиного виробу, утвореного шляхом нанесення на певні місця поверхні п'єзопластини металевих електродів спеціальної форми. Механічні коливання поширюються від вхідного ЕМП до вихідного ЕМП у вигляді або об'ємних, або поверхневих акустичних хвиль [39]. Такі електромеханічні фільтри називають монолітними. За цією технологією виготовляють фільтри на поверхневих акустичних хвилях (див. роботи [12, 20] та довідник [39], звернувши увагу на список літератури в ньому), а також деякі типи п'єзокерамічних фільтрів. На веб-сторінці <http://pspost.ru/Filters/htm> можна ознайомитись з найсучаснішими технічними характеристиками фільтрів, побудованих на базі п'єзокристалів і п'єзокераміки, а також електромеханічних фільтрів.

4.4.5. Завдання для самоконтролю

1. Що можна сказати про частотну виборність фільтрів, побудованих на базі механічних резонаторів, порівнюючи її з аналогічною характеристикою LC-фільтрів?

2. Накресліть еквівалентну електричну схему п'єзоелектричного резонатора. Наведіть (з точністю до порядку) величини параметрів її елементів.

3. Як побудувати найпростіший смугово-затримуючий фільтр на базі п'єзоелектричних резонаторів?

Відповідь: скористатися схемою, наведеною на рис. 4.104, замінивши в ній конденсатор C_2 на котушку індуктивності.

4. Накресліть еквівалентну електричну схему магнітострикційного резонатора та наближену частотну залежність його опору.

5. Накресліть узагальнену структурну схему електромеханічного фільтра. Поясніть принцип його дії.

6. Навіщо використано постійні магніти в камертонному фільтрі?

4.5. Коректувальні кола

4.5.1. Коректори амплітудно-частотних характеристик

Власне згасання реальної лінії зв'язку в межах робочої смуги частот не є постійною величиною. Оскільки ж між амплітудами гармонічних складових вхідного сигналу цієї лінії існують цілком певні співвідношення (див. розд. 8 та п.11.4 посібника [1]), а лінія по-різному послаблює коливання різних частот, то на її виході вказані співвідношення виявляються зовсім іншими, аніж на вході. В результаті цього форма сигналу (тобто графік залежності його миттєвого значення від часу) на виході є не такою, як на вході, тобто лінія вносить до сигналу **амплітудно-частотні спотворення**. Як правило, ці спотворення є небажаними, тому постає проблема їх усунення. Певним кроком у напрямку розв'язання цієї проблеми є введення до лінії додаткових котушок або ємностей (останнє стосується рейкових кіл), щоб наблизити її частотні властивості до частотних властивостей довгої лінії без спотворень (див. п.3.11 даного підручника). Але цей захід нерідко виявляється недостатнім; потрібні ще якісь заходи, щоб забезпечити постійність власного згасання лінії зв'язку в її робочій смузі частот. Ідея розв'язання проблеми базується на одному з висновків теорії чотириполосників, а саме – на тому, що при касадному узгодженому з'єднанні чотириполосників власне згасання результуючого чотириполосника дорівнює сумі власних згасань з'єднаних чотириполосників (див. п.2.4.2 цього підручника). Отже, якщо першим з цих чотириполосників є лінія зв'язку, то другим треба касадно та узгоджено підключити спеціальний чотириполосник, власне згасання $a_{св}(\omega)$ якого в сумі з власним згасанням $a_{сл}(\omega)$ лінії дає постійну величину в межах робочої смуги частот (поза цією смугою частотна залежність суми $a_{сл}(\omega) + a_{св}(\omega)$ може бути довільною) як це показано на рис.4.116.

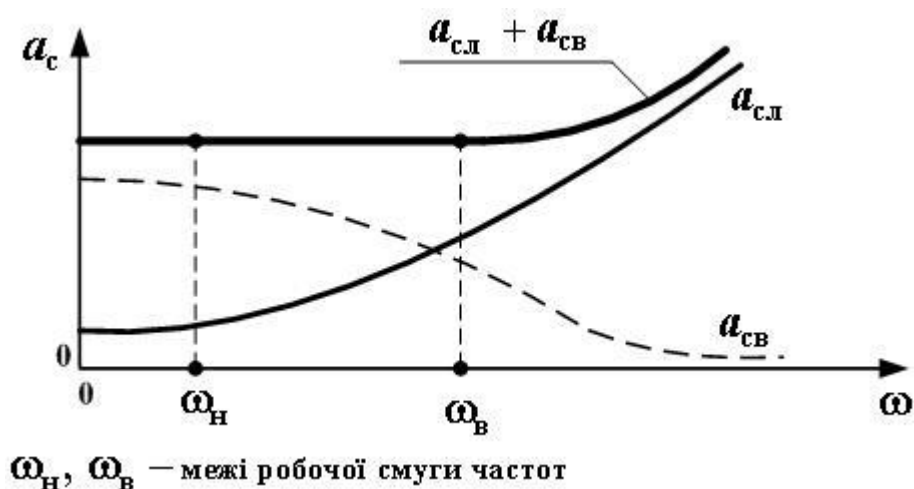
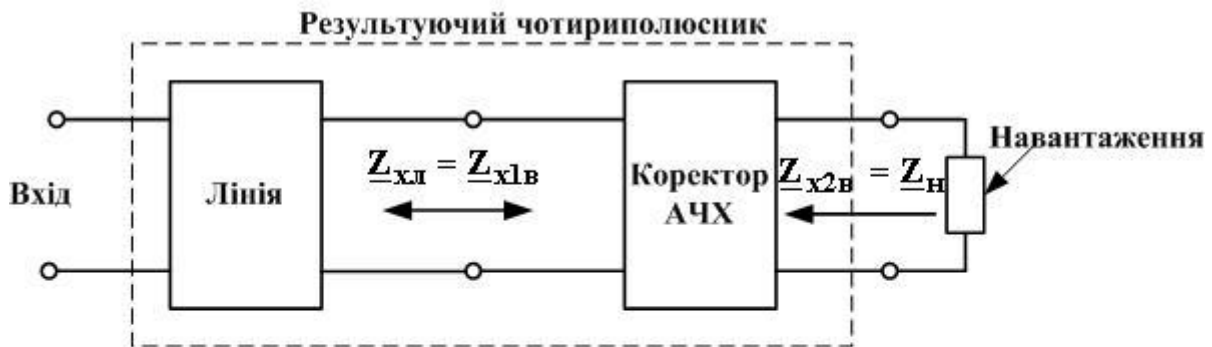


Рис. 4.116

Такий спеціальний чотириполіусник називають коректором амплітудно-частотної характеристики (коректори АЧХ)¹ або амплітудним вирівнювачем (рис.4.117). Оскільки $a_{cl} \geq 0$ і $a_{cb} \geq 0$, то ціною, якою доводиться сплачувати за використання коректора АЧХ, є те, що загальне власне згасання стає доволі великим. Проте воно є *однаковим* для всіх гармонічних складових сигналу, отже, сигнал на виході результуючого чотириполіусника буде меншої амплітуди, але тієї ж форми, що й на вході.



$\underline{Z}_{xл}$ - характеристичний опір лінії (дорівнює її хвильовому опорі);

$\underline{Z}_{xлв}$ - вхідний характеристичний опір коректора АЧХ;

$\underline{Z}_{x2в}$ - вихідний характеристичний опір коректора АЧХ;

$\underline{Z}_н$ - опір навантаження зкоректованої лінії.

Рис. 4.117. Підімкнення коректора АЧХ до лінії

Типовою схемою побудови коректора АЧХ є Т-подібна мостова схема (інколи її називають перекритою схемою), наведена на рис.4.118 (звичайно, що опір навантаження $\underline{Z}_н$ до схеми коректора не входить, як і ЕРС генератора $\dot{E}_Г$ та опір генератора $\underline{Z}_Г$).

¹ Коректування АЧХ також необхідне в контурах зворотного зв'язку систем автоматики; воно є предметом спеціального розгляду в літературі з систем автоматичного керування. Широку підбірку результатів з цієї тематики наведено в [43].

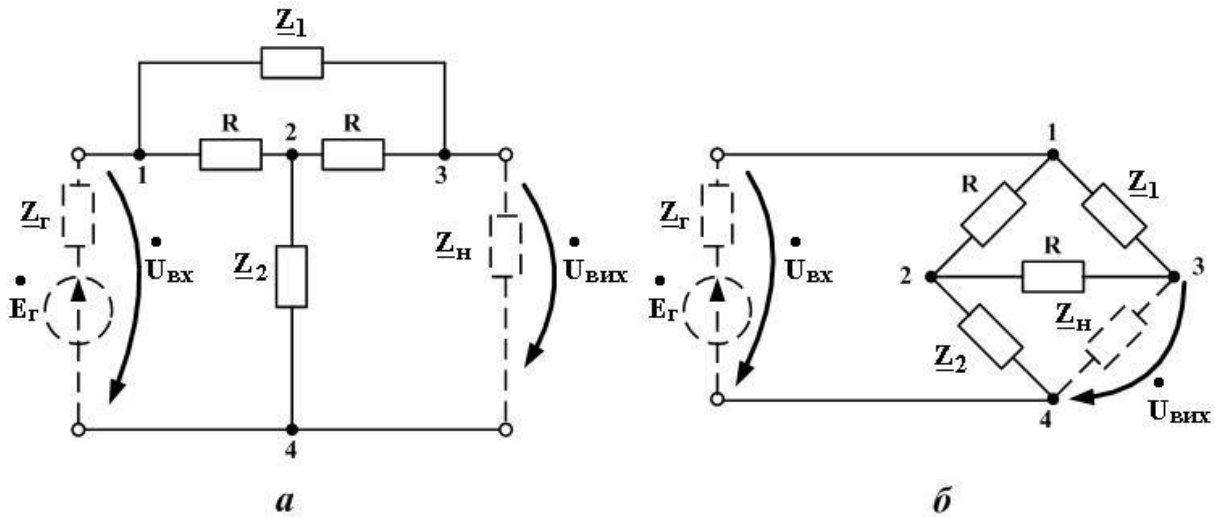


Рис. 4.118. Т-подібна мостова схема: *a* – поширене на практиці зображення; *б* – альтернативне зображення, яке підкреслює мостовий тип цієї схеми

Опори двополюсників \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 при цьому повинні відповідати співвідношенню

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R^2, \quad (4.230)$$

тобто ці двополюсники повинні бути *зворотними* (див.п.1.4 цього підручника).

Опором навантаження коректора АЧХ, як правило, є постійний частотонезалежний активний опір (наприклад, вхідний опір кінцевого підсилювача тракту передачі сигналів). Доцільно обрати $\underline{Z}_n = R$, при цьому міст буде урівноваженим, оскільки $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R^2$ та $R \cdot \underline{Z}_n = R^2$ (див. рис.4.118,б з урахуванням виразу (4.230)). Як відомо, при урівноваженості моста струм між точками 2 та 3 не тектиме, тому опір R , розташований між цими точками, можна уявити собі видаленим. За цієї умови вхідний опір коректора АЧХ з боку затискачів 1–4, тобто з боку генератора, є таким:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1-4} &= \frac{(R + \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_1 + R)}{R + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 + R} = \frac{R\underline{Z}_1 + R^2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2R}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2R} = \\ &= \frac{R \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + 2R^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2R} = R. \end{aligned}$$

Тому при навантаженні $\underline{Z}_H = \mathbf{R}$ доцільно вибрати й генератор з внутрішнім опором $\underline{Z}_G = \mathbf{R} = \underline{Z}_{1-4}$, бо при цьому коректор виявиться узгодженим на вході. Звичайно як \underline{Z}_G виступає хвильовий опір лінії, який в робочій смузі частот є практично активним.

Неважко довести, що при $\underline{Z}_G = \mathbf{R}$ вихідний опір Т-подібного моста з боку затискачів 3 – 4, тобто з боку навантаження, теж дорівнює величині \mathbf{R} . Отже, при $\underline{Z}_G = \underline{Z}_H = \mathbf{R}$ коректор є узгодженим як на вході, так і на виході.

Можуть виникнути такі питання: “Якщо при $\underline{Z}_H = \mathbf{R}$ струм через опір \mathbf{R} , розташований між точками 2 та 3, не тече, то навіщо його взагалі використовувати в схемі? Чи не можна його або видалити і отримати більш просту схему, зображену на рис.4.119,а, або замінити його перемичкою (бо струм же ж усе одно нею не тектиме) і отримати більш просту схему, зображену на рис.4.119,б ?” Дійсно, ці спрощені схеми мають право на існування, і коректори АЧХ, складені за схемою з рис.4.119,б, раніше широко вживалися на практиці [6]. Але в них є один суттєвий недолік: вихідні опори цих коректорів є частотозалежними, що погіршує узгодження з навантаженням. Тому нині найбільш поширеними є коректори АЧХ, складені за схемою з рис.4.118,а. Знайдемо їх власну сталу передачі через вхідні опори короткого замикання $\underline{Z}_{1кз}$ та холостого ходу $\underline{Z}_{1хх}$ згідно з формулою (2.73). Спочатку в уяві замкнемо точки 3 та 4 і знайдемо $\underline{Z}_{1кз}$ як вхідний опір з боку точок 1 – 4 (без генератора!):

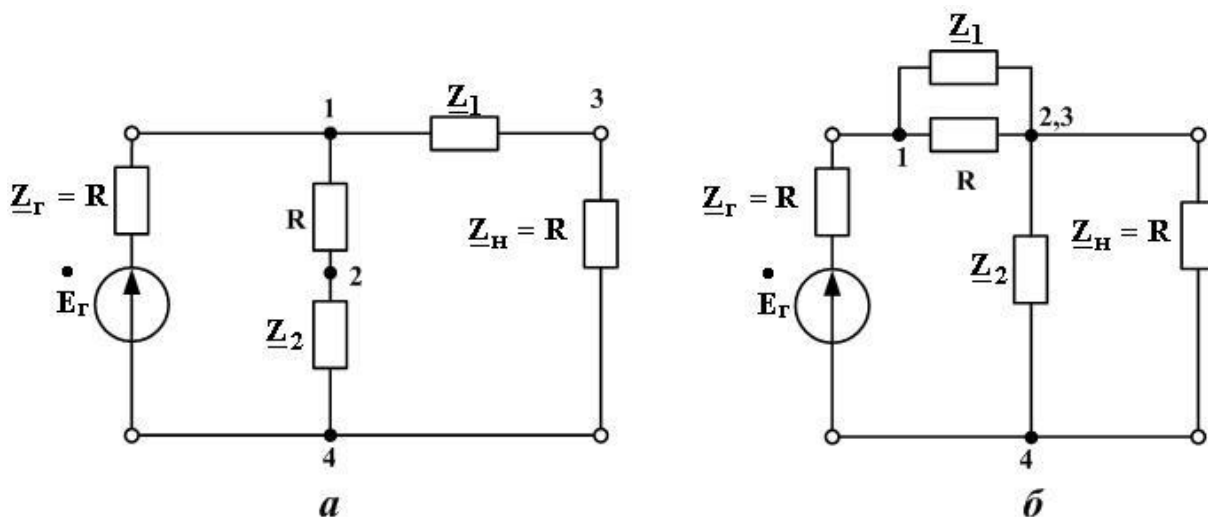


Рис. 4.119. Можливі спрощені схеми коректора АЧХ

$$\underline{Z}_{1кз} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \underline{Z}_2}{\mathbf{R} + \underline{Z}_2} \right)}{\underline{Z}_1 + \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \underline{Z}_2}{\mathbf{R} + \underline{Z}_2}} = \mathbf{R} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + 2\mathbf{R}}{\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2 + 2\mathbf{R}}.$$

Потім в уяві розімкнемо точки 3 та 4 і знайдемо \underline{Z}_{1xx} як вхідний опір з боку точок 1–4 (також без генератора!):

$$\underline{Z}_{1xx} = \mathbf{R} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2 + 2\mathbf{R}}{\underline{Z}_1 + 2\mathbf{R}}.$$

Тоді, згідно з (2.73), маємо гіперболічний тангенс власної сталої передачі

$$\text{thg}_{\underline{g}_c} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1кз}}{\underline{Z}_{1xx}}} = \frac{\underline{Z}_1 + 2\mathbf{R}}{\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2 + 2\mathbf{R}} = \underline{x}. \quad (4.231)$$

З іншого боку маємо

$$\underline{x} = \text{thg}_{\underline{g}_c} = \frac{\text{shg}_{\underline{g}_c}}{\text{chg}_{\underline{g}_c}} = \frac{e^{\underline{g}_c} - e^{-\underline{g}_c}}{e^{\underline{g}_c} + e^{-\underline{g}_c}} = \frac{e^{2\underline{g}_c} - 1}{e^{2\underline{g}_c} + 1}.$$

Звідси

$$e^{2\underline{g}_c} = \frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}},$$

тобто

$$e^{\underline{g}_c} = \sqrt{\frac{1 + \underline{x}}{1 - \underline{x}}}. \quad (4.232)$$

Підставивши до виразу (4.232) величину \underline{x} з (4.231) і помноживши чисельник та знаменник дробу під знаком кореня в (4.232) на \underline{Z}_1 , отримаємо

$$e^{\underline{g}_c} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2 + 2R\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2 + 2R\underline{Z}_1 + R^2}{R^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\underline{Z}_1 + R)^2}{R^2}} = \frac{\underline{Z}_1 + R}{R} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{R}.$$

Звідси

$$\underline{g}_c = \ell n \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{R} \right) = \quad (4.233)$$

$$= \ell n \left[\left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{R} \right| \cdot e^{j\varphi(\underline{Z}_1, R)} \right] = \ell n \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{R} \right| + j \cdot \varphi(\underline{Z}_1, R), \quad (4.234)$$

де $\varphi(\underline{Z}_1, R)$ – аргумент комплексного числа, що стоїть під логарифмом.

З іншого боку, $\underline{g}_c = a_c + j\theta_c$. Порівнявши цей вираз з виразом (4.234), маємо **власне згасання** коректора АЧХ, складеного за схемою з рис.4.118:

$$a_c = \ell n \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{R} \right|. \quad (4.235)$$

Аналогічно через опори $\underline{Z}_{1кз}$ та $\underline{Z}_{1хх}$ можна згідно з (2.58) знайти характеристичний опір цього коректора АЧХ

$$\underline{Z}_x = \sqrt{\underline{Z}_{1кз} \cdot \underline{Z}_{1хх}} = R \quad (4.236)$$

(оскільки схема з рис.4.118 симетрична, то вхідний опір з її обох боків однаковий).

Отже, на базі виразу (4.235) можна зробити висновок, що, обираючи як \underline{Z}_1 двополюсники з різними частотними залежностями опору, можна будувати за схемою з рис.4.118 коректори АЧХ з відповідно різними частотними залежностями власного згасання a_c . Наприклад, побудуємо двополюсник \underline{Z}_1 за схемою, наведеною на рис.4.120. Маємо

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{j\omega R_1 C_1 + 1}.$$

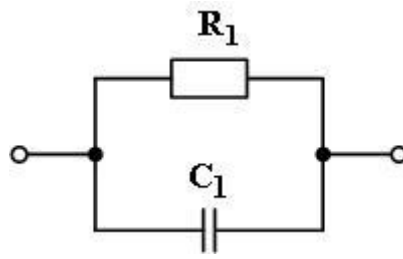


Рис. 4.120

Опір \underline{Z}_2 знайдемо з виразу (4.230):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{R}^2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{R}^2}{\underline{R}_1} \cdot (1 + j\omega \underline{R}_1 C_1) = \\ &= \frac{\underline{R}^2}{\underline{R}_1} + j\omega \underline{R}^2 C_1 = \underline{R}_2 + j\omega L_2. \end{aligned} \quad (4.237)$$

Тобто \underline{Z}_2 – це послідовне з'єднання резистора та котушки індуктивності, що, власне, й впливає з правила побудови зворотного двополюсника (див.п.1.4 цього підручника). Отже, з (4.237) маємо співвідношення $\underline{R}^2 / \underline{R}_1 = \underline{R}_2$, звідки

$$\underline{R}_1 \cdot \underline{R}_2 = \underline{R}^2 \quad (4.238)$$

та співвідношення $\underline{R}^2 C_1 = L_2$, звідки

$$L_2 / C_1 = \underline{R}^2. \quad (4.239)$$

Підсумкова схема коректора АЧХ, розглянутого в даному прикладі, наведена на рис.4.121. Неважко побачити, що частотна залежність його власного згасання наближено має вигляд кривої $a_{\text{св}}(\omega)$, наведеної на рис.4.116.

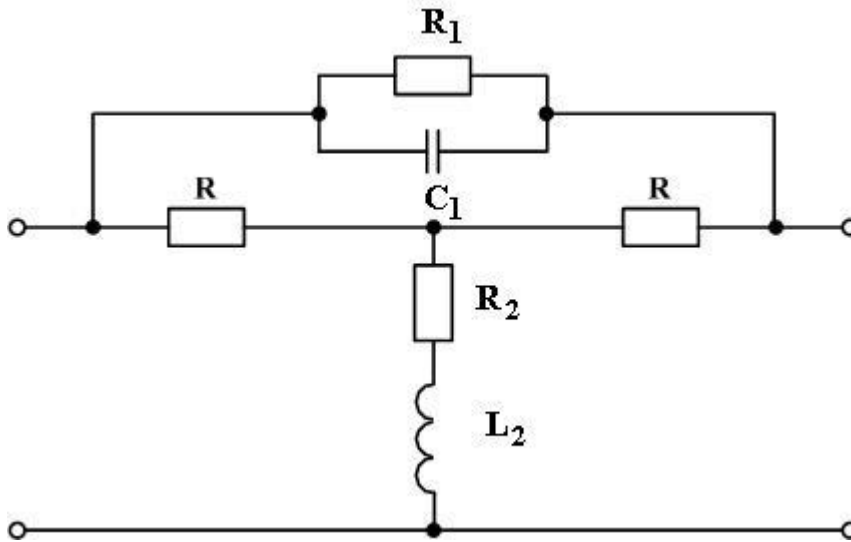


Рис. 4.121

Вихідними даними для розрахунку коректора з рис.4.121 є опір навантаження R_H та графік (або таблиця) потрібної залежності $a_{св}(\omega)$. Задаємося $R = R_H$ і підставляємо цю величину у формулу (4.235). Щоб знайти невідомі R_1 та C_1 , які утворюють опір Z_1 в цій формулі, складемо два рівняння таким чином. Виберемо дві найважливіші частоти ω_1 та ω_2 робочої смуги частот і вимагатимемо, щоб на цих частотах власне згасання нашого коректора, обчислене за формулою (4.235), дорівнювало величинам $a_{св}(\omega_1)$ та $a_{св}(\omega_2)$ заданої залежності $a_{св}(\omega)$:

$$\begin{cases} a_{св}(\omega_1) = \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \cdot \frac{R_1}{1 + j\omega_1 R_1 C_1} \right|, \\ a_{св}(\omega_2) = \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \cdot \frac{R_1}{1 + j\omega_2 R_1 C_1} \right|. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо R_1 та C_1 , а підставивши їх до (4.238) та (4.239), знайдемо R_2 та L_2 .

Якщо потрібна висока точність відповідності залежності $a_c(\omega)$, обчисленої за формулою (4.235), та заданої залежності $a_{св}(\omega)$, треба обрати більш складну схему двополюсника Z_1 (див. підручник [5, с.262] та для схеми з рис. 4.119,б – посібник [6, с.298-304]). Інколи існує можливість підвищити точність корекції за рахунок скорочення довжини коректованої ділянки лінії, бо для короткої ділянки залежність $a_{сл}(\omega)$ є більш простою, а відтак, більш простою буде й потрібна залежність $a_{св}(\omega)$.

Однак при такому способі підвищення точності корекції потрібна більша кількість коректорів АЧХ.

4.5.2. Коректори опорів (подовжувачі)

В п.3.7 розділу «Довгі лінії» ми показали, що вхідний опір $Z_{вх}$ ділянки довгої лінії складним чином залежить від частоти. Це впливає з виразу (3.45), в якому навіть при постійному опорі навантаження від частоти залежать хвильовий опір $Z_{в}$ та коефіцієнт поширення γ . Частотна залежність $Z_{вх}$ є фактором, який погіршує узгодження лінії з генератором. Фізичною причиною цієї залежності є те, що відбита хвиля не встигає гаснути на шляху від навантаження до генератора, якщо лінія має досить невелику довжину. Щоб з достатньою для практики точністю забезпечити постійність вхідного опору лінії (а саме його рівність хвильовому опорі), треба штучно “продовжити” лінію, включивши між генератором та нею спеціальний чотириполюсник (рис.4.122), який внесе додаткове власне згасання і майже повністю заглушить відбиту хвилю. Типовими схемами побудови такого коректора опорів (його ще називають подовжувачем) є симетричні резистивні Т- та П-подібна схеми, а також Т-подібна мостова схема (рис.4.123,в).

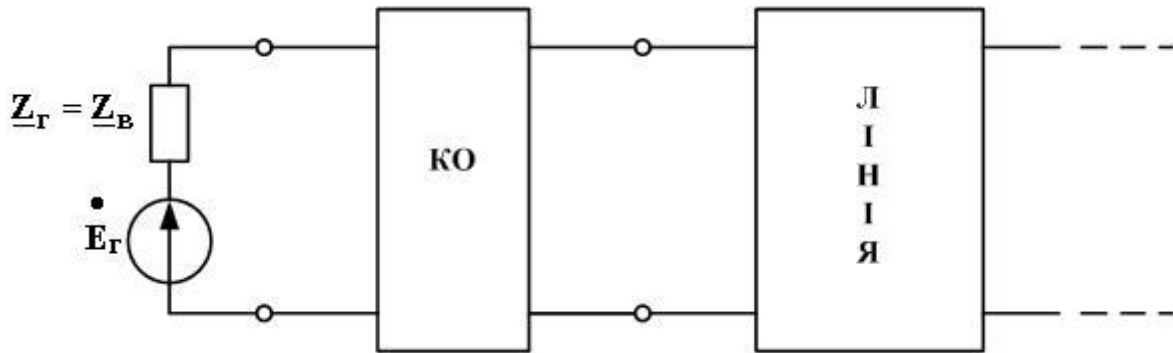


Рис. 4.122

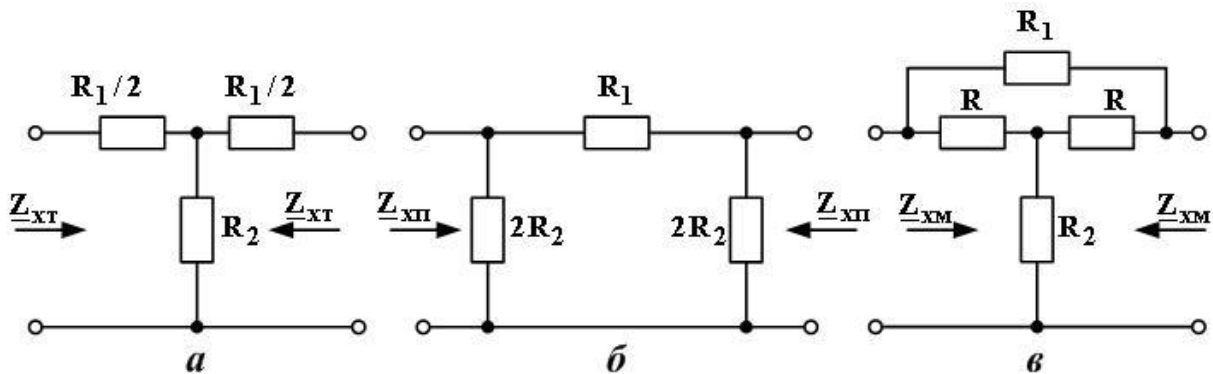


Рис. 4.123. Типові схеми подовжувачів

Вихідними даними для розрахунку подовжувача є його характеристичний опір ($\underline{Z}_{\text{XT}}$ для схеми *a*, $\underline{Z}_{\text{XII}}$ для схеми *б* та $\underline{Z}_{\text{XM}}$ для схеми *в*) та потрібна величина $a_{\text{сд}}$ додаткового власного згасання. Параметри елементів схем *a* та *б* розраховують за такими формулами:

– для схеми *a*

$$\mathbf{R}_1 = 2\underline{Z}_{\text{XT}} \cdot \text{th} \frac{a_{\text{сд}}}{2}, \quad \mathbf{R}_2 = \underline{Z}_{\text{XT}} / \text{sh} a_{\text{сд}};$$

– для схеми *б*

$$\mathbf{R}_1 = \underline{Z}_{\text{XII}} \cdot \text{sh} a_{\text{сд}}, \quad \mathbf{R}_2 = \underline{Z}_{\text{XII}} / (2\text{th} \frac{a_{\text{сд}}}{2}).$$

Схема *в* є вже знайомою нам схемою з рис.4.118,а, в якій $\underline{Z}_1 = \mathbf{R}_1$, $\underline{Z}_2 = \mathbf{R}_2$. Тоді при $\mathbf{R} = \underline{Z}_{\text{XM}}$ з формул (4.235) та (4.238) матимемо

$$\mathbf{R}_1 = \underline{Z}_{\text{XM}} \cdot (e^{a_{\text{сд}}} - 1), \quad \mathbf{R}_2 = \underline{Z}_{\text{XM}}^2 / \mathbf{R}_1.$$

Подовжувач, складений за схемою *в*, є трішки складнішим, але він більш зручний в експлуатації: щоб змінити величину $a_{\text{сд}}$, в ньому треба регулювати опори тільки двох резисторів (\mathbf{R}_1 та \mathbf{R}_2), а не всіх трьох, як у схемах *a* та *б*.

4.5.3. Коректори фазочастотних характеристик

Коректори фазочастотних характеристик (коректори ФЧХ) – це пристрої, призначені для формування заданої ФЧХ каналу зв'язку (тобто сукупності пристроїв, розташованих між генератором та навантаженням) за умови недоторканості АЧХ цього каналу.

Виявимо, яка ж ФЧХ каналу зв'язку є найбільш бажаною. Для початку згадаємо, що будь-яке гармонічне (синусоїдне) коливання, подане на вхід чотириполосника, дістається його виходу з певним спізнюванням. Нехай на вхід чотириполосника, який (чотириполосник) не вносить згасання, подано сигнал $s(t) = \sin \omega_1 t + 0,5 \sin 3\omega_1 t$ (рис.4.124). Цей сигнал дістанеться виходу неспотвореним через деякий проміжок часу t_3 (тобто спізниться на t_3 порівняно із входом), як це показано на рис. 4.125. Але ж зсув на час t_3 відповідає зсувові за власною фазою сигналу $s_1(t)$ на величину $\varphi(\omega_1) = \omega_1 t_3$, а сигналу $s_3(t)$ – на величину $\varphi(3\omega_1) = 3\omega_1 t_3$. Тому умовою неспотвореного проходження сигналу крізь чотириполосник, який не вносить згасання, є прямо пропорційна (тобто лінійна) залежність фазового зсуву гармонічних складових сигналу від частоти:

$$\varphi_c(\omega) = \omega t_3, \quad (4.240)$$

де $\varphi_c(\omega)$ – власний коефіцієнт фази чотириполюсника.

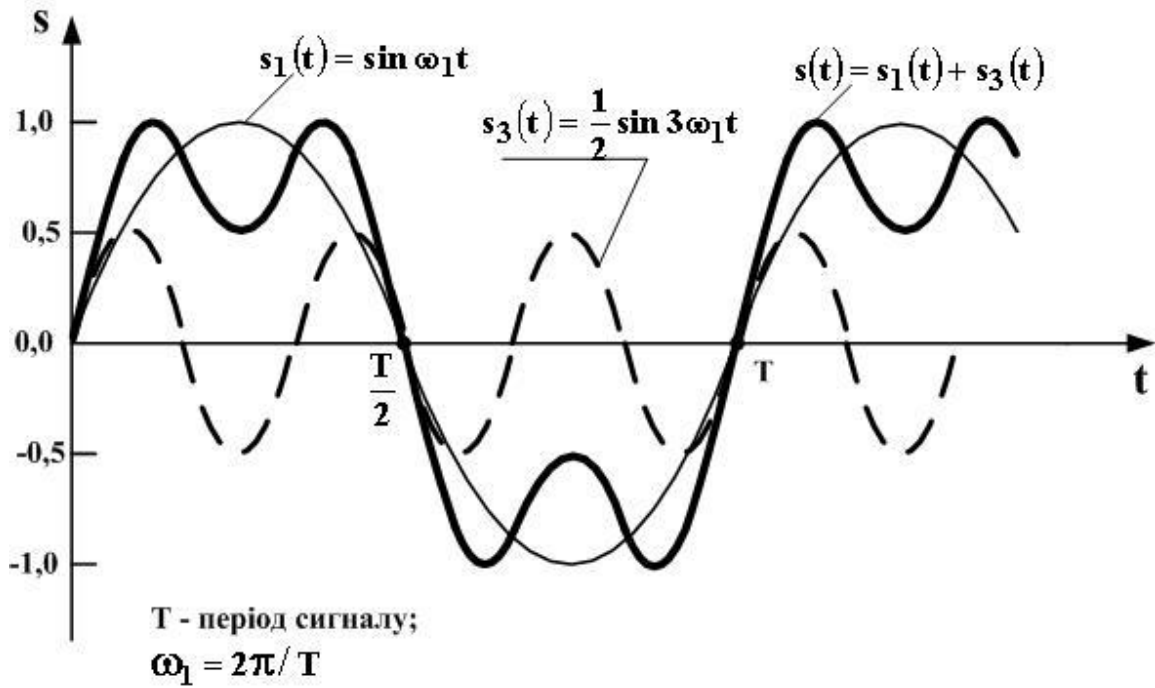


Рис. 4.124

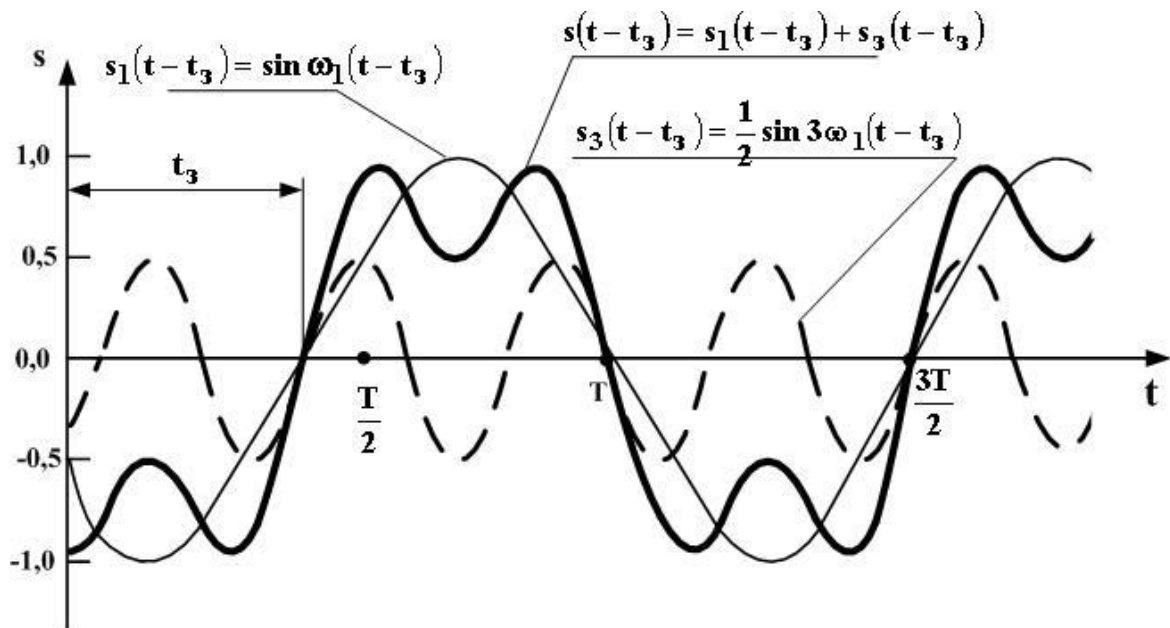


Рис. 4.125

За аналогією з фазовою швидкістю, яка є швидкістю поширення гармонічного коливання в довгій лінії, величину t_3 затримки в чотириполоснику гармоніки з частотою ω назвемо **фазовим часом проходження (затримування)**:

$$t_{3\phi} = \epsilon_c(\omega) / \omega. \quad (4.241)$$

Підкреслимо, що дотримання рівності $t_3 = \text{const}$ є умовою неспотвореної передачі сигналів чотириполосником.¹

Реальні сигнали пристроїв автоматики та зв'язку є неперіодичними і не складаються з окремих гармонік, а мають неперервний спектр (див., наприклад, п.11.4.1 посібника [1]). Для таких сигналів недостатньо знати, з якою швидкістю поширюються окремі гармонічні складові, та й самі ці складові втрачають фізичний сенс, оскільки вони становляться граничним випадком сусідніх гармонік, рознесених за частотою на нескінченно малу величину. Тому на практиці цікавляться часом, на який чотириполосник затримує групу з двох гармонічних коливань з частотами $\omega - \Delta\omega$ та $\omega + \Delta\omega$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$. Це так званий **груповий час проходження (затримування)**. Як доведено (див., наприклад, підручники [6, 12]), вони обчислюються як

$$t_{3\text{гр}} = \frac{d\epsilon_c(\omega)}{d\omega}. \quad (4.242)$$

А відтак, якщо

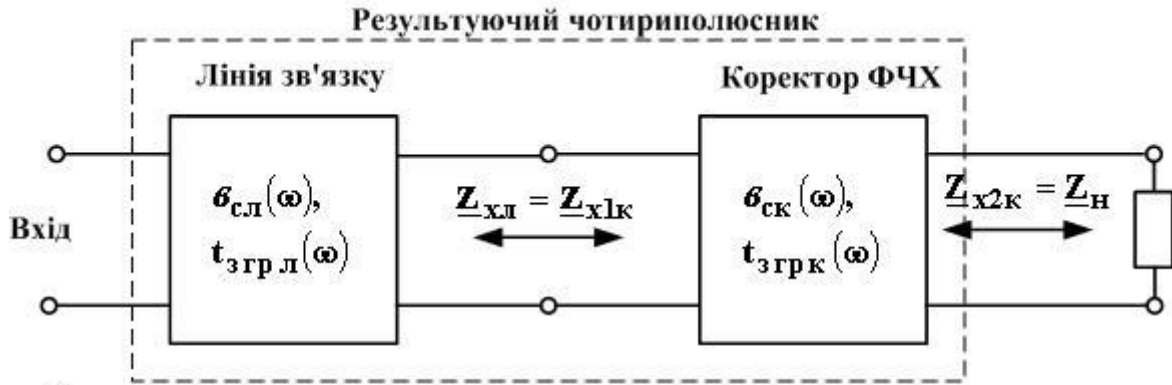
$$\epsilon_c(\omega) = k \cdot \omega + 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.243)$$

де k – постійна величина, то $t_{3\text{гр}} = \text{const}$ і чотириполосник не вносить фазо-частотних спотворень.¹

Щоб усунути фазові спотворення, внесені в сигнал реальним чотириполосником (наприклад, ділянкою лінії зв'язку), й використовують коректори ФЧХ. Їх підмикають, як і коректори АЧХ, каскадно та узгоджено (рис.4.126). Згідно з теорією чотириполосників, власний коефіцієнт фази результуючого чотириполосника $\epsilon_{c\text{рез}}$ дорівнюватиме при такому відімкненні сумі власних коефіцієнтів фази з'єднаних чотириполосників (див. п.2.4.2 цього підручника):

¹ Якщо t_3 залежить від частоти ω , то кажуть, що такий чотириполосник має властивість частотної дисперсії.

¹ Може здатися, що у виразі (4.243) можна замінити $2\pi n$ на будь-яку сталу величину ϵ_0 , і фазові спотворення все одно не виникнуть. Насправді ж це не так (див.[7, с. 305-306]).



$\underline{Z}_{хл}$ - характеристичний опір лінії (дорівнює її хвильовому опоріві);

$\underline{Z}_{хлк}$ - вхідний характеристичний опір коректора ФЧХ;

$\underline{Z}_{х2к}$ - вихідний характеристичний опір коректора ФЧХ;

$\underline{Z}_н$ - опір навантаження зкоректованої лінії.

Рис. 4.126. Підімкнення коректора ФЧХ до лінії або іншого чотириполюсника

$$\theta_{с\text{рез}}(\omega) = \theta_{сл}(\omega) + \theta_{ск}(\omega), \quad (4.244)$$

звідки результуючий груповий час проходження

$$t_{з\text{гррез}}(\omega) = t_{згрл}(\omega) + t_{згрк}(\omega), \quad (4.245)$$

де $t_{згрл}$ – груповий час проходження лінії (або іншого коректованого чотириполюсника);

$t_{згрк}$ – груповий час проходження коректора ФЧХ.

Отже, задачею коректора ФЧХ є доповнення частотної залежності власного коефіцієнта лінії (яка є нелінійною) до лінійної залежності (4.243). Можна сказати й інакше: коректор ФЧХ повинен доповнювати частотну залежність групового часу проходження лінії до постійної величини (рис.4.127). Звичайно, що ці доповнення необхідно виконувати тільки в робочій смузі частот, ззовні неї в цьому потреби немає.

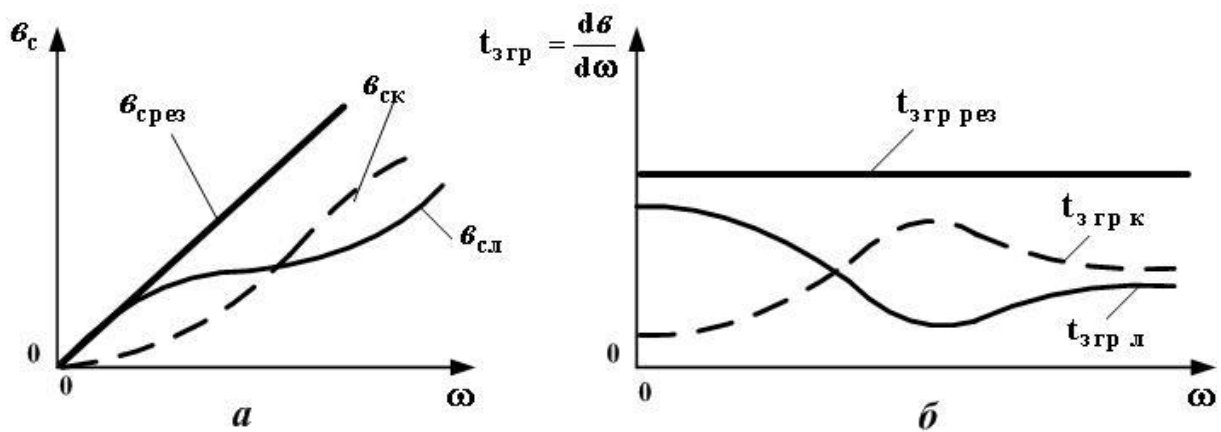


Рис. 4.127

Отже, коректор ФЧХ повинен коректувати ФЧХ, залишаючи в недоторканості АЧХ (див. визначення на початку цього параграфу). Цю властивість мають так звані немінімально-фазові чотирьохполюсники, які, як правило, складені за мостовою схемою чи перекритою Т-подібною схемою; побудувати коректор *тільки* ФЧХ за “чисто” Г-, Т- чи П-подібною схемою неможливо [40].

На практиці одиночну ланку коректора ФЧХ будують за схемою фазового контуру другого порядку – мостовою схемою, аналогічно мостовому смугово-затримуючому фільтру, але з рівними резонансними частотами всіх послідовних та паралельних контурів (рис.4.128).

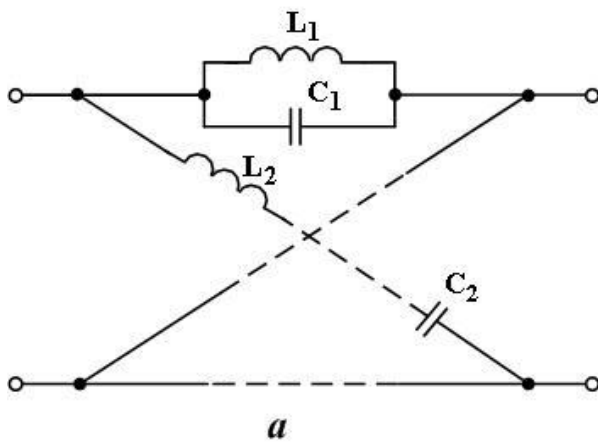


Рис. 4.128

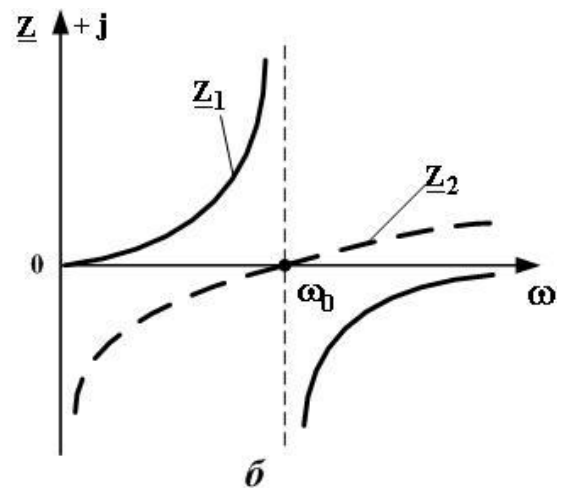


Рис. 4.129

Оскільки опори Z_1 та Z_2 (рис.4.129) усюди мають різні знаки, то в цього кола смуга пропускання – від $\omega=0$ до $\omega=\infty$ (див. умови пропускання і затримування мостового фільтра), тобто на усіх частотах власне згасання a_c дорівнює нулю. Тоді згідно з (4.140) маємо

$$\varphi_{\text{ck}} = 2\text{arctg} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (4.246)$$

Але послідовний та паралельний коливальні контури за умови однаковості їх резонансних частот є зворотними двополіусниками (див. п.1.4 цього підручника), тому маємо $Z_1 \cdot Z_2 = R^2$, де R – характеристичний опір даного мостового кола. Тому з (4.246) маємо

$$\varphi_{\text{ck}} = 2\text{arctg} \sqrt{\frac{Z_1}{R^2 / Z_1}} = 2\text{arctg} \frac{|Z_1|}{R}, \quad (4.247)$$

де

$$|Z_1| = \left| \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1} \right| = \left| \frac{1}{C_1} \cdot \frac{j\omega L_1 C_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \right|.$$

Позначивши резонансну частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, отримаємо

$$|Z_1| = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\omega / \omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Підставивши останній вираз в (4.247), отримаємо формулу для власного коефіцієнта фази коректора ФЧХ у вигляді фазового контуру другого порядку:

$$\varphi_{\text{ck}}(\omega) = 2\text{arctg} \left[\frac{1}{RC_1} \cdot \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]. \quad (4.248)$$

Графік цієї частотної залежності наведено на рис.4.130, графік відповідної частотної залежності величини $t_{з \text{ грк}}$ – на рис. 4.131. На практиці замість мостової схеми (рис.4.129,а) нерідко використовують еквівалентну їй перекриту Т-подібну схему (рис.4.132), що містить котушку $2L_1$ з відведенням від середини.

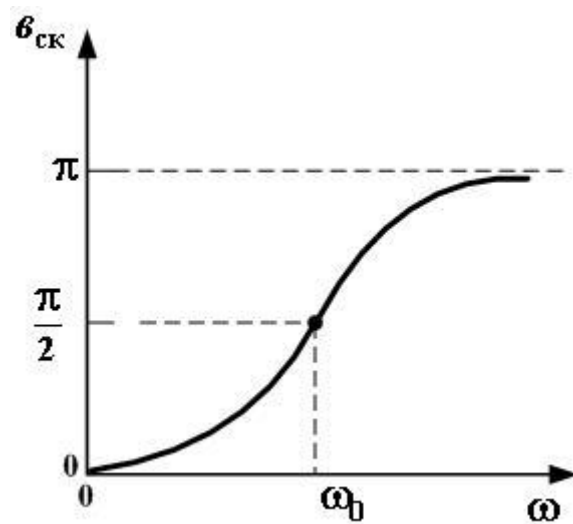


Рис. 4.130

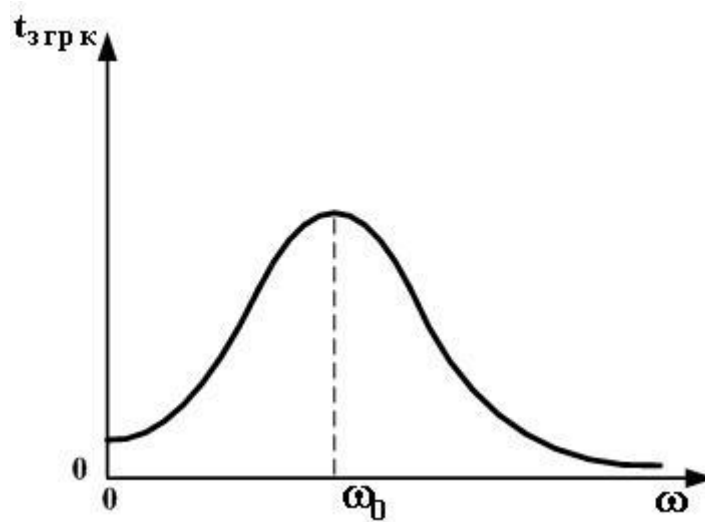


Рис. 4.131

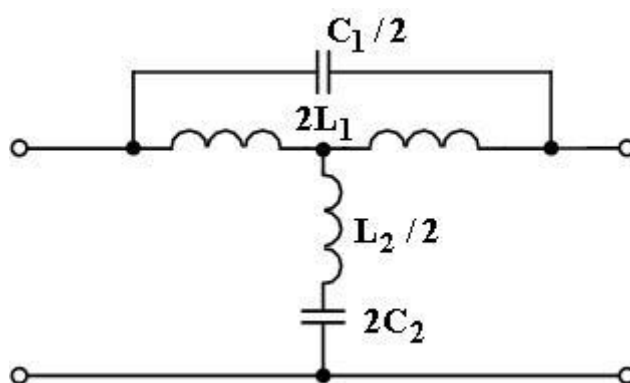


Рис. 4.132

При необхідності забезпечення складної залежності $t_{з грк}(\omega)$ коректор ФЧХ будують шляхом каскадного узгодженого з'єднання кількох фазових контурів другого порядку. Більш детальні відомості з фазових контурів можна знайти в літературі [5, 6, 12, 21].

Коректори ФЧХ можна побудувати й на базі підсилювальних елементів; початкову інформацію з цього питання можна знайти в [5], більш детальну (в тому числі щодо сумісного коректування ФЧХ та АЧХ) – в [29, 41].

4.5.4. Завдання для самоконтролю

1. Для чого потрібні коректори АЧХ?
2. Що означає вираз “коректор АЧХ узгоджений з навантаженням”?
3. Навіщо потрібний подовжувач? Чи завжди він потрібний?
4. Навіщо потрібен коректор ФЧХ?
5. Що таке фазовий час затримування? Груповий час затримування?
6. Накресліть можливі варіанти схеми фазового контуру другого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Соболев Ю.В., Бабаев М.М., Давиденко М.Г. Теорія електричних і магнітних кіл. – Харків: ХФВ “Транспорт України”, 2002. – 264 с.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2000. – 638 с.
4. Основы теории цепей / Г.В.Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – Энергия, 1975. – 752 с.
5. Каллер М.Я., Соболев Ю.В., Богданов А.Г. Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. – М.: Транспорт, 1987. – 336 с.
6. Кощев И.А. Основы теории электрической связи. Линейные системы с сосредоточенными параметрами. – М.: Связьиздат, 1954. – 372 с.
7. Босый Н.Д. Электрические фильтры. – К: Гос. изд-во техн. литер. УССР, 1959. – 616 с.
8. Гарновский Н.Н. Теоретические основы электропроводной связи. Ч. 1. Общая теория пассивных линейных цепей с сосредоточенными постоянными. – М.: Связьиздат, 1956. – 692 с.
9. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 2000. – 576 с.
10. Основи теорії кіл. / Ю.О.Коваль, Л.В. Гринченко, І. О. Милютченко, О.І. Рибін. – Харків: ХНУРЕ: Колегіум, 2004. – Ч. 1. – 436 с.
11. Агасьян М.В., Мартиненко О.Г. Основи електрорадіотехнічних кіл. – К.: Вища школа, 1993. – 488 с.
12. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1978. – 512 с.
13. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
14. Жуховицкий Б.Я., Негневицкий И.Б. Теоретические основы электротехники. Ч.2. Четырехполюсники, длинные линии, нелинейные цепи. – М.;Л.: Энергия, 1965. – 240 с.
15. Метрологическое обеспечение систем передачи / Б.П.Хромой, В.Л. Серебрин, А.А. Сенявский и др.; Под ред. проф. Б.П. Хромого. – М.: Радио и связь, 1991. – 392 с.
16. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 1980. – 152 с.
17. Князев А.Д., Кечиев Л.Н., Петров Б.В. Конструирование радиоэлектронной и электронно-вычислительной аппаратуры с учетом электромагнитной совместимости. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
18. Барнс Дж. Электронное конструирование: методы борьбы с помехами. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
19. Путевая блокировка и авторегулировка / Н.Ф. Котляренко, А.В. Шишляков, Ю.В.Соболев др.; Под ред. Н.Ф.Котляренко – М.: Транспорт, 1983. – 408 с.

20. Современная теория фильтров и их проектирование /Под ред. Г.Темеша и С. Митра. –М.: Мир, 1977. –560 с.
21. Бессонов Л.А. Линейные электрические цепи. Новые разделы курса теоретических основ электротехники. – М.: Высшая школа, 1983. – 336 с.
22. Черне Х.И. Индуктивные связи и трансформации в электрических фильтрах. – М.: Связьиздат, 1962. – 316 с.
23. Ленк Дж. Справочник по проектированию электронных схем. – К.: Техніка, 1979. – 208 с.
24. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. – М.: Мир, 2001. – 704 с.
25. Баскаков С.И. Лекции по теории цепей.- М.: Изд-во МЭИ, 1991. – 224 с.
26. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
27. Ногин В.Н. Аналоговые электронные устройства. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.
28. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электронных схем. – М.: Связь, 1978. – 336 с.
29. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем /С.А. Букашкин, В.П. Власов, Б.Ф. Змий и др.; Под ред. А.А. Ланнэ. – М.: Радио и связь, 1984. – 368 с.
- 30 Хьюлсман Л.П. Теория и расчет активных RC-цепей. –М.: Связь, 1973. –240 с.
31. Полупроводниковые аналоги реактивностей. – М.: Знание, 1990. – 64 с.
32. Расчет электронных схем. Примеры и задачи /Г.И. Изъюрова, Г.В. Королев, В.А. Терехов и др. – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.
33. Масленников В.В., Сироткин А.П. Избирательные RC - усилители. – М.: Энергия, 1980. – 216 с.
34. Новиков Ю.Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа. – С.Пб.: Питер, 2005. – 384 с.
35. Великин Я.И., Гельмонт З.Я., Зелях Э.В. Пьезоэлектрические фильтры. – М.: Связь, 1966. – 396 с.
36. Пьезоэлектрические резонаторы: Справочник /В.Г. Андросова, Е.Г. Бронникова, А.М. Васильев и др.; Под ред. П.Е. Кандыбы и П.Г. Позднякова. – М.: Радио и связь, 1992. – 392 с.
- 37 Великин Я.И., Зелях Э.В., Иванова А.И. Магнитострикционные фильтры. – М.: Связь, 1976. – 80 с.
38. Филатов Г.А., Баев Е.Ф., Цымбалюк В.С. Малогабаритные низкочастотные механические фильтры. – М.: Связь, 1974. – 264 с.
39. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник /За ред. Ю.Л. Мазора, Є.А. Магуського, В.І. Правди. – К.: Вища школа, 1999. – 838 с.

40. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003. – 462 с.
41. Трифонов И.И. Расчет электронных цепей с заданными частотными характеристиками. – М.: Радио и связь, 1988. – 304 с.
42. Гумен М.Б., Гуржій А.М., Співак В.М. Основи теорії електричних кіл: У 3 кн. Кн.2 Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область. – К.: Вища школа, 2004. – 358 с.
43. Корректирующие цепи в автоматике. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1954. – 520 с.