УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра машинобудування та технічного сервісу машин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни
«*ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ*»

Харків – 2021

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри машинобудування та технічного сервісу машин 27 вересня 2021 р., протокол № 2.

Наведено алгоритми і приклади розв'язання з графічною інтерпретацією практичних задач, що передбачені робочою програмою навчальної дисципліни «Основи наукових досліджень».

Методичні вказівки призначено для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) освітнього рівня спеціальностей 131 «Прикладна механіка» та 133 «Галузеве машинобудування» усіх форм навчання.

Укладачі:

доценти Є. В. Романович,
Л. М. Козар

Рецензент

доц. А. В. Євтушенко

ЗМІСТ

ВСТУП

Експериментальні дослідження є вищою формою емпіричних методів пізнання навколишньої дійсності. Процес пізнання є багатоетапним і включає різні форми: спостереження, порівняння, контроль і вимір.

Спостерігаючи за поведінкою об'єкта або протіканням явища, дослідник робить припущення про наявність деяких взаємозв'язків і закономірностей. Після цього формується мета дослідження, визначаються фактори, що впливають на властивості об'єкта і вид їх взаємозв'язку, висувається гіпотеза про модель досліджуваного об'єкта. Відповідно до виду математичної моделі будується план експерименту.

Ухвалення проєктних рішень у машинобудуванні і оцінка їх якості в основному здійснюються на підставі даних експерименту, а ускладнення об'єктів випробування викликає різке підвищення вартості їх дослідження. Тому завдання з вилучення найбільшого обсягу інформації про досліджувані процеси або пристрої при обмежених бюджетах є доволі актуальним. Вирішенню зазначеної проблеми сприяє, серед інших, широке використання в прикладних дослідженнях методів математичної обробки результатів експериментів.

Планування експерименту і математична обробка його результатів все більше входять у коло питань, необхідних студентам, аспірантам і інженерам. Засвоєння і використання методів планування експерименту дають можливість підвищити ефективність прийнятих рішень.

У даних методичних вказівках викладені деякі математичні методи, що застосовуються при практичному використанні теорії планування експерименту.

1 ОЦІНКА ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

В експерименті властивості фізичних явищ і об'єктів вивчаються за допомогою вимірювань відповідних фізичних величин. Виміряти будь-яку фізичну величину означає порівняти її з іншою однорідною їй фізичною величиною, що прийнята за одиницю міри.

При вимірюванні фізичних величин користуються, зрозуміло, не еталонами, які зберігаються в спеціальних державних метрологічних установах, а вимірювальними приладами, які тим чи іншим способом є звіреними з еталонами.

Унаслідок неточності вимірювальних приладів, недосконалості органів почуттів людини, неповноти знань дослідників, складності врахування всіх побічних явищ, при багаторазовому повторенні одного і того самого вимірювання виходять різні числові значення досліджуваної фізичної величини. Під час практичного використання результатів тих чи інших вимірювань виникає питання про істинність досліджуваної фізичної величини, про точність її вимірювання.

Термін «точність вимірювання», тобто ступінь наближення результатів вимірювань до деякого дійсного значення, використовується для якісного порівняння вимірювальних операцій. Для кількісної оцінки використовується поняття «похибка вимірювань». Ці терміни тісно пов'язані один з одним: чим менше похибка, тим вище точність. Оцінка похибки вимірювань – один з важливих заходів для забезпечення достовірності вимірювань.

1.1 Похибка вимірювань

При виконанні експериментальних досліджень на значення вимірюваної величини впливає безліч випадкових факторів, що не мають прямого відношення до досліджуваного явища або об'єкта. Ці фактори можуть істотно впливати на результати вимірювань, але не мати закономірного характеру. Тому всі величини, що виходять з експерименту, є випадковими. Похибки, що виникають при цьому, називають випадковими. Випадкові похибки усунути неможливо, але завдяки тому, що вони підпорядковуються закономірностям теорії ймовірностей, можна визначити межі, всередині яких буде перебувати істинне значення вимірюваної величини.

Випадковими величинами називаються величини, які в результаті досліду, проведеного при одних і тих самих умовах, можуть набувати різних числових значень. Випадкові похибки вимірювань є одним із прикладів випадкових величин. Випадкова величина називається *дискретною*, якщо вона може набувати тільки певних числових значень. Випадкова величина називається *неперервною*, якщо вона може набувати неперервного ряду значень. Так, вимірюючи багаторазово діаметр круглого стрижня, можна в деякому діапазоні отримати неперервний ряд різних його значень.

Згідно з [1], головною характеристикою якості вимірювань, що відображає близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини, є *точність вимірювання*.

Істинне значення фізичної величини x_I – це значення фізичної величини, яке ідеально відображає певну властивість об'єкта. Визначити істинне значення величини вимірюванням неможливо через недосконалість відображення при вимірюваннях, це є причиною неминучої похибки вимірювання. Для визначення похибки вимірювань істинне значення фізичної величини замінюють *дійсним значенням величини* x_0 – значенням фізичної величини, яке знайдене експериментальним шляхом і настільки наближене до істинного значення x_I, що може використовуватись замість нього.

Різницю між результатом вимірювання x та істинним (дійсним) значенням вимірюваної величини називають *абсолютною похибкою* та визначають за формулою

$$\Delta x = x - x_I = x - x_0, \tag{1.1}$$

де x – результат вимірювання фізичної величини.

Абсолютна похибка є розмірною величиною, яка має таку саму розмірність, що і величина, яка вимірюється.

Відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного (дійсного) значення фізичної величини, виражене у відсотках, називають *відносною похибкою вимірювання*

$$\delta x = \pm \frac{\Delta x}{X_I} \cdot 100\ \% = \pm \frac{\Delta x}{X_0} \cdot 100\ \%. \quad (1.2)$$

Чим меншою є відносна похибка, тим точнішим є вимірювання.

Найбільш достовірне значення, яке можна приписати вимірюваній величині на підставі ряду вимірювань, є середнє значення неперервної випадкової величини (математичне очікування)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (1.3)$$

де n – кількість вимірювань фізичної величини x.

Залежно від характеру прояву, причин виникнення та можливостей усунення розрізняють систематичну і випадкову складову похибки вимірювання, а також грубі похибки (промахи).

Складова похибки, що залишається сталою або прогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї самої величини, називається *систематичною похибкою вимірювання*. Типовими джерелами систематичних похибок
бувають:

- недосконалість використовуваної вимірювальної апаратури;
- недосконалість використовуваного методу вимірювань;
- погана настройка вимірювальної апаратури;
- недостатня сталість умов досліду;
- вплив навколишнього середовища;
- постійні похибки експериментатора;
- невраховані впливи інших параметрів.

Систематичні похибки вважаються такими, що їх потенційно можливо усунути. Щоб уникнути або зменшити систематичні похибки, необхідно критично ставитися до методів дослідження, удосконалюючи їх, застосовуючи більш точні прилади, стежачи за їх справністю тощо.

Складова похибки, що непрогнозовано змінюється в ряді вимірювань тієї самої величини, називається *випадковою похибкою вимірювання*. Випадкові похибки обумовлюються великою кількістю випадкових причин, що діють в кожному окремому вимірі невідомим чином. До таких причин належать, наприклад, випадкові вібрації окремих частин приладу, різні зміни в середовищі (температурні, електричні, магнітні впливи, зміна вологості, коливання повітря), тертя, фізіологічна зміна органів чуття експериментатора (наприклад, стомлення) і безліч інших причин, які практично неможливо виключити. Передбачити величину випадкової похибки для одного виміру в принципі неможливо. Тому доводиться повторювати вимірювання до певної розумної межі, а отриману сукупність експериментальних результатів обробляти за допомогою методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

Похибка вимірювання, що суттєво перебільшує очікувану (в даних умовах) похибку, називається *надмірною похибкою вимірювання*. Вона виникає в результаті недбалості при відліку за приладом або нерозбірливого запису показів, при неправильному ввімкненні приладу, або при порушенні умов, в яких має проводитися дослід. Такі помилкові дані слід відкинути або зробити повторні (контрольні) вимірювання.

1.2 Основні статистичні характеристики неперервних випадкових величин

Поведінка неперервної випадкової величини визначається функцією щільності ймовірності $f(x)$ для розподілу, якому підпорядковується дана величина. Всі статистичні характеристики випадкової величини визначаються на основі функції щільності ймовірності $f(x)$.

Середнє значення (математичне очікування) випадкової величини є середнім значенням при довгостроковому повторенні одного і того самого експеримента, який воно представляє

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{1.4}$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини відносно середнього значення

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x_1)^2 f(x) dx. \tag{1.5}$$

Середнє квадратичне відхилення характеризує абсолютне середнє відхилення випадкової величини від середнього значення

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \tag{1.6}$$

Модою називається значення випадкової величини, яке зустрічається найчастіше, тобто має максимальну ймовірність. Для неперервної випадкової величини мода збігається з максимумом функції щільності ймовірності *f(x)*.

Таким чином, якщо відомий аналітичний вид функції щільності ймовірності *f(x)* випадкової величини, то такі величини, як середнє значення, середньоквадратичне відхилення і найбільш ймовірне значення можуть бути легко підраховані.

У теорії ймовірностей вивчаються різні закони розподілу, кожному з яких відповідає певна функція щільності ймовірності. Вони отримані шляхом обробки великої кількості спостережень над випадковими величинами. Ці закони можуть бути використані для обробки результатів вимірювань, але попередньо необхідно встановити, якому закону розподілу підпорядковується дана випадкова величина.

1.3 Нормальний розподіл неперервної випадкової величини

Для статистичної обробки результатів досліджень найчастіше застосовують нормальний закон розподілу випадкової величини (розподіл Гаусса) [2, 3]. Крім того, багато інших розподілів у деяких граничних випадках переходять в нормальний розподіл. Випадкова величина *x* з нормальним розподілом може набувати будь-яких значень в інтервалі від -∞ до ∞ (рисунок 1.1) і має функцію щільності ймовірності вигляду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \tag{1.7}$$

де x – виміряне значення фізичної величини.

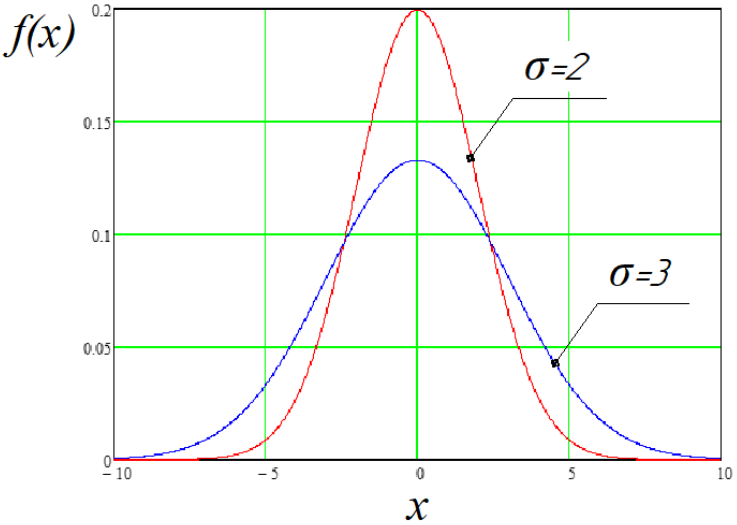

Рисунок 1.1 – Приклад нормального розподілу (розподілу Гаусса)

Вважають [1], що значення, яке з'являється в експерименті найчастіше, є істинним значенням вимірюваної фізичної величини. Отже, для фізичної величини, що підпорядковується нормальному розподілу, дійсне значення x_0 збігається з математичним очікуванням $x_0=\bar{x}$. Тоді стосовно до задачі оцінки похибки експериментальних вимірювань параметри нормального розподілу (Гаусса) $\bar{x}$ і σ^2 можна інтерпретувати таким чином:

а) в однакових умовах виконаємо серію вимірювань деяких двох фізичних величин, математичне очікування (істинне значення) яких дорівнює x_1 і x_2. Максимум щільності ймовірності для другої величини буде зміщений відносно максимуму щільності ймовірності першої (рисунок 1.2), а ширини кривих будуть однаковими. Дисперсія розподілу σ характеризує розкид значень при вимірюванні цим методом;

б) якщо одна і та сама величина виміряна різними методами, наприклад, різними приладами, то розкид результатів щодо істинного значення $\bar{x}$, викликаний випадковою похибкою, буде різним (рисунок 1.3). Якщо метод вимірювання є більш точним, то розкид результатів (середнє квадратичне відхилення σ) буде менше, крива звужується.

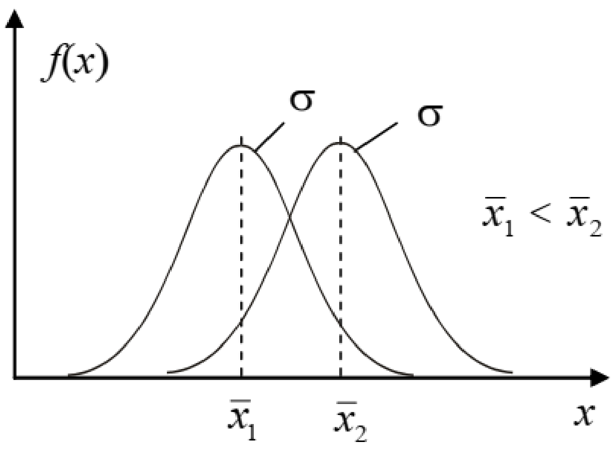

Рисунок 1.2 – Криві щільностей імовірностей двох фізичних величин при їх вимірюваннях одним і тим самим обладнанням або однаковим методом

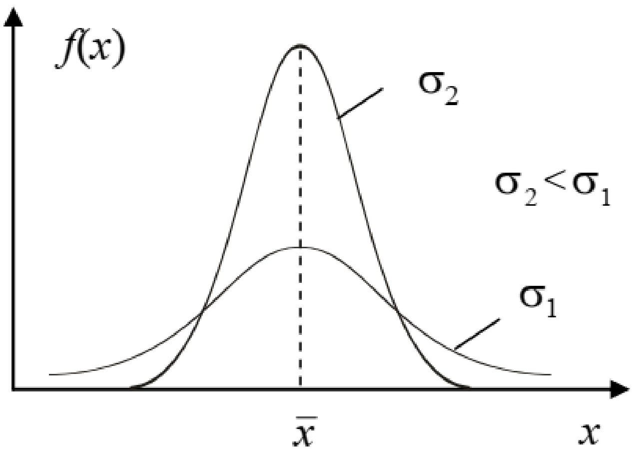

Рисунок 1.3 – Криві щільностей імовірностей двох фізичних величин при їх вимірюваннях за допомогою різного обладнання або різними методами

Таким чином, середнє квадратичне відхилення σ характеризує прилад або метод вимірювання, а математичне очікування $\bar{x}$ – істинне значення вимірюваної величини (при нескінченній кількості дослідів).

Оскільки $\bar{x}$ відповідає істинному значенню вимірюваної величини, для експериментальних досліджень важливо визначити ймовірність α того, що виміряні значення лежать поблизу $\bar{x}$, тобто в деякому інтервалі $(\bar{x} - \Delta x,\ \bar{x} + \Delta x)$, симетричному відносно $\bar{x}$. Відповідно до теорії ймовірності [4], ймовірність α визначається як площа під кривою функції щільності ймовірності *f(x)* на відповідному інтервалі шляхом інтегрування

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} f(x)dx. \qquad (1.8)$$

Значення ймовірності того, що виміряна величина набуває значення з інтервалу, довжина якого Δx є пропорційною σ, наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Значення ймовірності залежно від довжини інтервалу Δx

Інтервал	Ймовірність, %
$\bar{x} - \sigma \le x \le \bar{x} + \sigma$	68,3
$\bar{x} - 1{,}96\sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}96\sigma$	95,0
$\bar{x} - 2\sigma \le x \le \bar{x} + 2\sigma$	95,5
$\bar{x} - 2{,}58\sigma \le x \le \bar{x} + 2{,}58\sigma$	99,0
$\bar{x} - 3\sigma \le x \le \bar{x} + 3\sigma$	99,7

На рисунку 1.4 наведені значення ймовірності α для інтервалів $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ щодо x для нормального розподілу.

Через те, що на результати вимірювання впливає безліч випадкових факторів, не всі отримані в експерименті результати в рівній мірі можуть достовірно характеризувати досліджуване явище чи об'єкт. Можлива ситуація, коли вплив сторонніх факторів виявиться настільки значним, що виміряне значення не можна вважати приналежним до досліджуваної фізичної величини. Імовірність, з якою в умовах даного експерименту отримані експериментальні дані можна вважати надійними (достовірними), називають *довірчою ймовірністю,* або *надійністю*. Величина довірчої ймовірності визначається характером здійснених вимірювань. Наприклад, при виконанні інженерних досліджень найчастіше приймають значення довірчої ймовірності рівним 95 %.

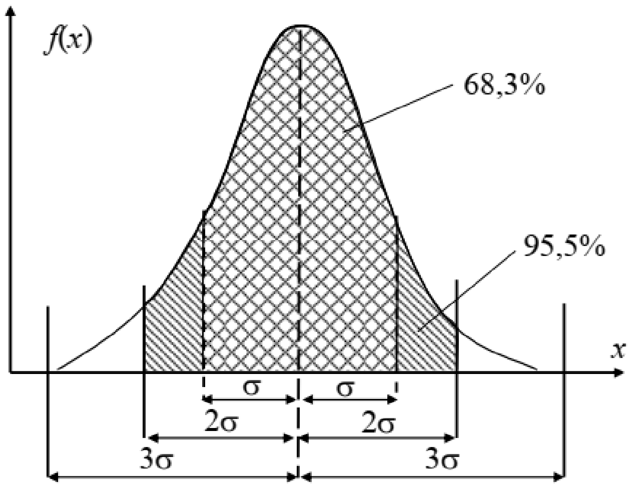

Рисунок 1.4 – Значення ймовірності α для інтервалів $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ щодо x для нормального розподілу

Інтервал Δx, в який потрапляють виміряні в експерименті значення, що відповідають довірчій ймовірності α, називається *довірчим інтервалом*. Довірчому інтервалу $\Delta x=\sigma$ відповідає довірча ймовірність 68,3 %. Це означає, що 68,3 % результатів входять в інтервал $(x\text{-}\sigma;\ x+\sigma)$, а 31,7 % перебувають поза цим інтервалом. З іншого боку, якщо довірча ймовірність дорівнює 95,5 %, це означає, що 95,5 % експериментальних значень перебувають в інтервалі $(x\text{-}2\sigma;\ x+2\sigma)$.

Оскільки при даних умовах експерименту (довірчому інтервалі) довіри заслуговують лише результати вимірювань, що лежать всередині довірчого інтервалу Δx, то абсолютна похибка (відхилення від істинного значення) цих значень вимірюваної фізичної величини обмежена довжиною довірчого інтервалу Δx. Тобто довжина довірчого інтервалу Δx є характеристикою похибки серії проведених експериментальних вимірювань. Тоді похибка серії вимірювань визначається через середньоквадратичне відхилення σ вимірюваної фізичної величини і довірчу ймовірність α даної серії експериментів, які обидва залежать від умов проведення експерименту. Тому для характеристики величини випадкової похибки результату багаторазових вимірювань необхідно вказувати два числа: величину довірчого інтервалу Δx і величину відповідної йому довірчої ймовірності α.

1.4 Точність прямих вимірювань фізичної величини

1.4.1 Розподіл Гаусса

На практиці, під час вимірювання конкретної фізичної величини кількість дослідів є обмеженою, а параметри x і σ нормального розподілу, якому підпорядковується вимірювана фізична величина, є невідомими. Виникає необхідність при обмеженій кількості вимірювань оцінити дійсне значення і похибку вимірювань.

Припустимо, що в результаті n рівноточних вимірювань отримано n значень фізичної величини, дійсне значення $x_0 = \bar{x}$ якої нам невідомо, а вимірювана величина x підпорядковується розподілу Гаусса. Позначимо через x_1, x_2, ..., x_n результати окремих вимірювань, а через Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n – відхилення результатів вимірювань від істинного значення $x_0 = \bar{x}$ (дійсні абсолютні похибки окремих вимірювань). Тоді

$$\begin{array}{c} \Delta_1 = \bar{x} - x_1 \\ \Delta_2 = \bar{x} - x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \Delta_n = \bar{x} - x_n \end{array} \tag{1.9}$$

Абсолютні похибки Δ_1, Δ_2, ... Δ_n можуть набувати як позитивних, так і негативних значень. Підсумуємо ліву і праву сторони рівняння (1.9)

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i. \tag{1.10}$$

Розділимо обидві частини останньої рівності на кількість вимірювань n та отримаємо

$$\bar{x} = \tilde{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i, \tag{1.11}$$

де $\tilde{x}$ – середнє арифметичне значень результатів вимірювань $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Середнє арифметичне значень результатів вимірювань випадкової величини

$$\tilde{x}_\text{в} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \qquad (1.12)$$

З симетрії кривої Гаусса видно, що при великій кількості експериментів ймовірність отримати значення більше істинного на *Δ* така сама, як і ймовірність значення менше істинного на *Δ* (ймовірності позитивних і негативних абсолютних похибок є рівними).

Тобто середнє значення абсолютної випадкової похибки при великій кількості експериментів ($n \to \infty$) прагне до нуля. Отже, якщо кількість вимірювань велика ($n \to \infty$), а випадкова величина *x* підпорядковується розподілу Гаусса, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x} = \bar{x}$.

Дисперсія σ^2 в розподілі Гаусса показує середньоквадратичний розкид вимірювань, а середньоквадратичне відхилення σ є пропорційним величині довірчого інтервалу для заданої довірчої ймовірності *α*. Відповідно до теорії ймовірності та математичної статистики [4] для кінцевої кількості вимірювань *n* середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \cdots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}}. \qquad (1.13)$$

Для невеликої кількості дослідів $n \leq 10$ рекомендується застосовувати *виправлене (незміщене) середньоквадратичне відхилення*, яке визначається за формулою

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x}_\text{в} - x_1)^2 + (\tilde{x}_\text{в} - x_2)^2 + \cdots + (\tilde{x}_\text{в} - x_n)^2}{n-1}}. \qquad (1.14)$$

При великій кількості вимірювань (n→∞) $\tilde{\sigma} = \sigma$. Тоді величина довірчого інтервалу $\Delta x = \Delta\tilde{x}_\text{в}$ і пропорційна $\tilde{\sigma}$ для даної довірчої ймовірності *α*. Отже, вимірювана фізична величина має значення в інтервалі $\tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}_\text{в}$ з довірчою ймовірністю *α*. При цьому істинне значення вимірюваної величини дорівнює $\bar{x} = \tilde{x}$.

Вибір довірчого інтервалу передбачає, що кількість вимірювань є великою (*n≥30*). В такому випадку можна скористатися розподілом Гаусса. Якщо ж кількість вимірювань фізичної величини є невеликою, то істинне значення вимірюваної величини відрізняється від середнього арифметичного. При малій кількості n вимірювань для визначення довірчого інтервалу користуватися розподілом Гаусса не можна.

1.4.2 Розподіл Стьюдента

При кількості вимірювань $2 \leq n \leq 10$ довірчий інтервал визначається за допомогою розподілу Стьюдента, запропонованого в 1908 році англійським математиком і хіміком В. С. Госсетом (псевдонім Стьюдент)

$$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}, \tag{1.15}$$

де $\tilde{\sigma}$ – середньоквадратичне відхилення результатів вимірювань від середнього арифметичного $\tilde{x}$ у даній серії з n вимірювань.

Значення $\tilde{x}$ і $\tilde{\sigma}$ залежать від кількості вимірювань n. Тому при кількості n_1 вимірювань величина t набуває числового значення t_1, при n_2 – значення t_2 і т. ін. Цей закон розподілу (щільність ймовірності) $S_n(t)$ випадкової величини є деякою математичною функцією від n і t. Закон Стьюдента – це закон розподілу похибок вимірювань нормальних (гауссівських) випадкових величин. Ця функція (щільність ймовірності α) має максимум при $t = 0$, коли $\bar{x} = \tilde{x}$. На рисунку 1.5 наведено розподіл Стьюдента.

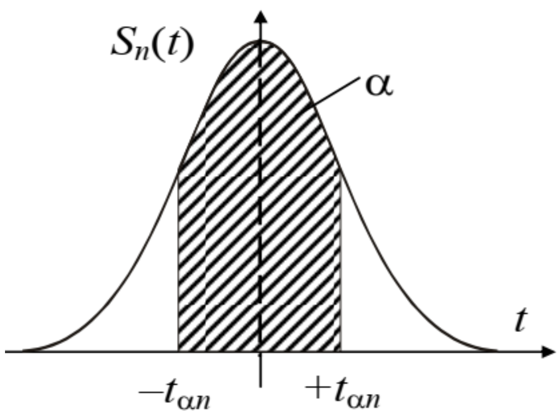

Рисунок 1.5 – Приклад розподілу Стьюдента

Інтервалу значень величини x, який є симетричним відносно $\bar{x}$, відповідає інтервал значень змінної t, який є симетричним щодо нуля. Позначимо ймовірність того, що величина t набуває значення з деякого інтервалу від $-t_{\alpha n}$ до $+t_{\alpha n}$, через α (заштрихована площа на рисунку 1.5). Якщо при деякій кількості вимірювань n задати значення довірчої ймовірності α, то, використовуючи функцію $S_n(t)$, можна розрахувати межі відповідного симетричного інтервалу $t_{\alpha n}$, який залежить від довірчої ймовірності α і кількості n вимірювань

$$\alpha = \int_{-t_{\alpha n}}^{+t_{\alpha n}} S_n(t)dt. \tag{1.16}$$

Значення $t_{\alpha n}$ називають критерієм Стьюдента, вони наведені в таблиці А.1 для різних значень довірчої ймовірності α і кількості n вимірювань.

Критерій Стьюдента $t_{\alpha n}$ відповідає максимальному відхиленню середнього арифметичного від істинного значення. Для відомої кількості дослідів n і довірчої ймовірності α максимальне відхилення середнього арифметичного $\tilde{x}$ від математичного очікування $\bar{x}$ дорівнює довжині довірчого інтервалу $\Delta\tilde{x}_в$. Тоді, з урахуванням формули (1.15), отримаємо формулу для визначення межі довірчого інтервалу

$$\Delta\tilde{x}_в = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}, \tag{1.17}$$

де $t_{\alpha n}$ – критерій Стьюдента для кількості вимірювань n при заданій довірчій ймовірності α (таблиця А.1);

$\tilde{\sigma}$ – середньоквадратичне відхилення результатів вимірювань від середнього арифметичного $\tilde{x}_в$ в даній серії вимірювань.

При невеликій кількості вимірювань n→∞ розподіл Стьюдента переходить в нормальний (розподіл Гаусса). На практиці при однаковій довірчій ймовірності α розподіл Стьюдента переходить в нормальний вже при кількості вимірювань $n \geq 50$ [6].

1.5 Визначення приладових похибок

Похибка одноразових вимірювань визначається характеристиками використовуваних в експерименті приладів. Основними характеристиками вимірювальних приладів, що впливають на похибку виконуваних з їх допомогою вимірювань, є межа вимірювання і ціна ділення. Для приладів важливою величиною також є клас точності приладу.

Межа вимірювання П – це максимальне значення величини, яке може бути виміряно за допомогою цієї шкали приладу. Якщо межа вимірювання не вказана окремо, то його визначають з оцифрування приладу.

Ціна поділки Ц – значення вимірюваної величини, яке відповідає найменшій поділці шкали. Багато вимірювальних приладів мають кілька діапазонів вимірювання. При перемиканні з одного краю на інший змінюється і ціна поділки приладу.

Клас точності приладу К являє собою відношення абсолютної приладової похибки Δx_0 до межі вимірювання шкали *П*, виражене у відсотках

$$K = \frac{\Delta x_0}{\text{П}} \cdot 100\%. \tag{1.18}$$

Значення класу точності (без символу %) вказується, як правило, на приладах. Наприклад, манометри можуть мати клас точності 0,4; 0,6; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Більш грубі прилади позначення класу точності не мають.

Якщо на приладі вказаний клас точності приладу, то з формули (1.18) визначається приладова похибка

$$\Delta x_0 = \frac{\text{К} \cdot \text{П}}{100\%}. \tag{1.19}$$

1.6 Визначення загальної похибки вимірювань

При багаторазових вимірюваннях деякої величини *x* кожне окреме вимірювання можна розглядати як одноразове. Тому при оцінці похибки необхідно враховувати

- випадкові похибки багаторазових вимірювань, що підкоряються розподілу Гаусса;
- похибки одноразових вимірювань, що підкоряються рівномірному розподілу вимірювань.

Фактори, що сприяють формуванню похибок того й іншого типу, діють незалежно один від одного. Тому для визначення сумарної похибки результату використовують закон складання незалежних величин (похибок), який наведений в теорії ймовірностей [7].

Цей закон справедливий і для складання довірчих інтервалів. Тому довірчий інтервал Δx (загальна похибка) вимірюваної величини x визначається з формули

$$\Delta x = \sqrt{\Delta \tilde{x}_{\text{в}}^2 + \Delta x_0^2}, \tag{1.20}$$

де $\Delta \tilde{x}_{\text{в}}$ – довірчий інтервал, відповідний випадковій похибці багаторазових вимірювань;

Δx_0 – довірчий інтервал, відповідний похибці одноразових вимірювань.

2 АПРОКСИМАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Первинним здобутком експерименту зазвичай є цифрові величини у формі певної залежності від одного або кількох аргументів. Для наочного зіставлення отриманих результатів вони мають бути поданими у більш зручних формах запису: таблиці, графіки тощо.

Під час обробки результатів вимірів та спостережень дослідники широко застосовують *методи графічного зображення* параметрів процесів, які на відміну від результатів, наданих у формі таблиць, дають можливість більш наочно вивчати характеристики предмету дослідження.

Найчастіше для графічного зображення результатів експерименту застосовують систему прямокутних координат з відповідними системами: декартових, напівлогарифмічних, логарифмічних або ймовірнісних координат. Для цього у системі прямокутних координат відмічають значення x_1y_1, x_2y_2, ... , x_ny_n у вигляді точок. Точки на графіку з'єднують між собою плавною лінією таким чином, аби вона якнайближче проходила повз відмічені точки.

Крім графічного зображення результати експериментальних вимірів можна надати в аналітичному вигляді, тобто у вигляді певних алгебраїчних формул. Але аналітичні формули, аби бути адекватними до результатів експерименту, зазвичай мають громіздкий вигляд, що ускладнює можливість їх подальшого застосування. Тому *аналітичні формули* намагаються замінити спрощеними, так званими *емпіричними (empirio (лат.) – дослід)* формулами. На відміну від останніх емпіричні формули, поступаючись аналітичним формулам у точності, мають суттєві переваги перед ними у можливості їх швидкого та простого застосування у вивченні тих процесів, які є предметом дослідження.

У даний час завдання апроксимації є актуальною темою практично для кожного технічного дослідження. Від вибору виду апроксимації в істотній мірі залежать кількісні характеристики і якісні властивості опису досліджуваних об'єктів. Процедура заміни аналітичних формул певними спрощеними, наближеними (емпіричними) називається *апроксимацією*, а отримані формули – *апроксимуючими*. *Апроксимація* (від лат. *proxima* – наближення) – науковий метод, що полягає в заміні одних об'єктів іншими, в якомусь сенсі близькими до вихідних, але більш простими. Апроксимація дає змогу досліджувати числові характеристики і якісні властивості об'єкта, зводячи завдання до вивчення більш простих або більш зручних об'єктів, характеристики яких легко обчислюються або властивості яких вже відомі [8].

Розглянемо приклад. В таблиці 2.1 наведені результати вимірювань тиску в паливній системі двигуна. Ці вимірювання проводились з інтервалом 1 с. Результати вимірювань зручно подати у графічній формі, відклавши дослідні точки на координатній площині та поєднавши їх плавною кривою.

Таблиця 2.1 – Результати вимірювань тиску в паливній системі двигуна

Дослід	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Час *t*, с	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Тиск *P*, бар	92,5	99,6	107,5	109,6	118,1	108,2	103,9	96,1	89,7	79,7

Результати вимірювань зручно подати у графічній формі, відклавши дослідні точки на координатній площині та поєднавши їх плавною кривою. Таким чином отримують дослідну залежність тиску *P* у паливній системі двигуна від часу *t* (рисунок 2.1).

Під час подальших теоретичних досліджень графічною залежністю користуватись не зручно, тому виникає необхідність у встановленні емпіричної залежності (закону) тиску в паливній системі двигуна від часу у вигляді

$$y = f(x),$$

де x – абсциса залежності, яка в даному прикладі $x = t$;
y – ордината, яка в даному прикладі $y = P$.

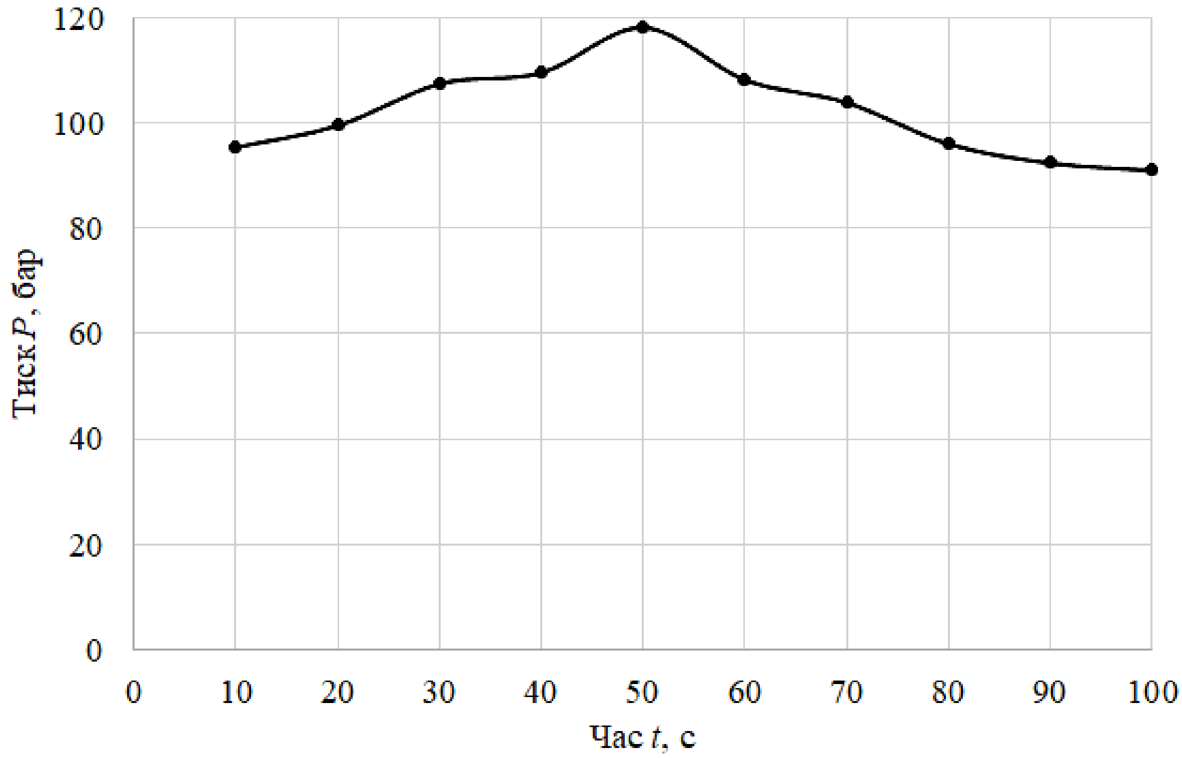

Рисунок 2.1 – Залежність тиску в паливній системі двигуна від часу

Процедура підбору емпіричних формул складається з двох етапів.

На *першому етапі* відповідно до даних експерименту вибудовують графік аналогічно рисунку 2.1 та орієнтовно підбирають для нього вигляд $y = f(x)$ тієї аналітичної формули, яка б найкраще відповідала такому графіку.

На другому етапі розраховують параметри винайденої на першому етапі аналітичної формули.

2.1 Метод крайніх точок

Сутність методу крайніх точок полягає у гіпотезі, що досліджувана крива, яка побудована за експериментальними даними (рисунок 2.1), є подібною до прямої лінії. Таким чином, функція апроксимації матиме вигляд

$$y = a + b \cdot x, \tag{2.1}$$

де a, b – постійні коефіцієнти функції.

Для ілюстрації дій за методом крайніх точок розглянемо наступний приклад.

Після досліджень впливу запиленості x навколишнього повітря на інтенсивність зношування y гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння були отримані результати, що подані у таблиці 2.2. Підібрати емпіричну формулу, яка б відповідала результатам експерименту.

Таблиця 2.2 – Експериментальна залежність $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
$y_{експерим.}$	0,5	1,1	1,7	2,2	2,7	3,1	3,4	3,7	3,9	4,1

Спочатку побудуємо графік отриманої залежності, з чого робимо висновок, що він має вигляд, наближений до лінійного (рисунок 2.2).

Обираємо крайні точки, наприклад, дослідна точка 1 з координатами (x_1=0,3; y_1=0,5) та дослідна точка 10 з координатами (x_{10}=3,0; y_8=4,1). Підставляємо ці координати в формулу (2.1) та отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} y_1 = a + b \cdot x_1 \\ y_8 = a + b \cdot x_8 \end{cases}, \qquad (2.2)$$

де x_1, y_1, x_8, y_8 – координати обраних точок.

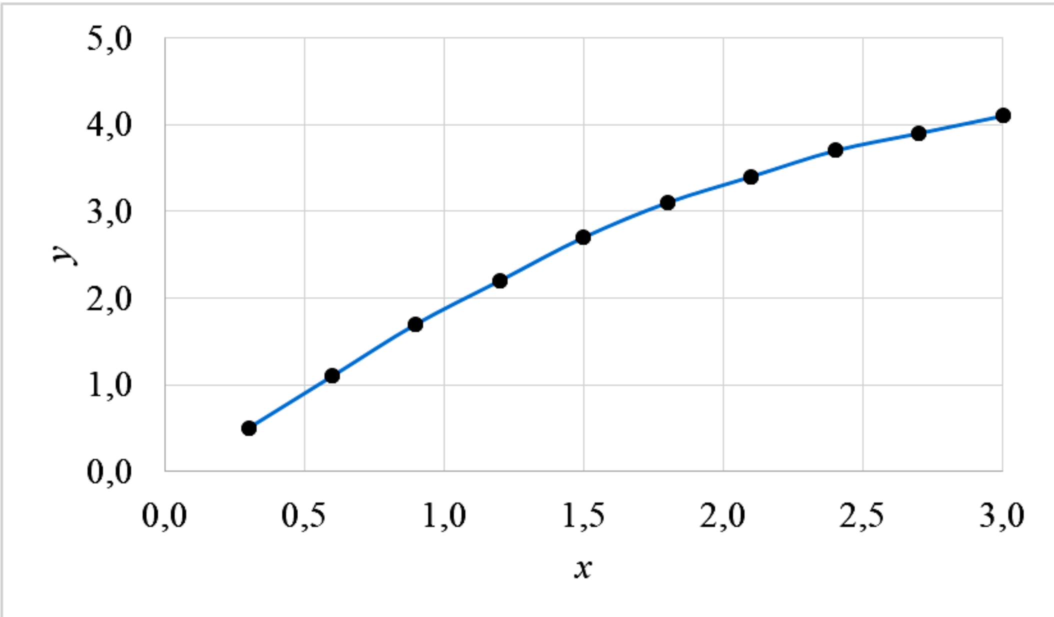

Рисунок 2.2 – Експериментальна залежність інтенсивності зношування y гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості x навколишнього повітря

Система рівнянь (2.2) набуде вигляду

$$\begin{cases} 0{,}5 = a + b \cdot 0{,}3 \\ 4{,}1 = a + b \cdot 3{,}0 \end{cases}.$$

Розв’язавши систему, визначаємо, що a =0,1; b = 1,338. Підставивши одержані значення коефіцієнтів a і b у формулу (2.1), отримаємо рівняння апроксимуючої лінії

$$y = 0{,}1 + 1{,}33 \cdot x.$$

Визначимо значення y функції при тих самих значеннях аргумента x, що зазначені в таблиці 2.2. Результат занесемо в таблицю 2.3. За результатами експериментальних і розрахункових даних побудуємо графіки (рисунок 2.3).

Таблиця 2.3 – Експериментальна і розрахункова залежності $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
$y_{експерим.}$	0,5	1,1	1,7	2,2	2,7	3,1	3,4	3,7	3,9	4,1
$y_{розрах.}$	0,5	0,9	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1

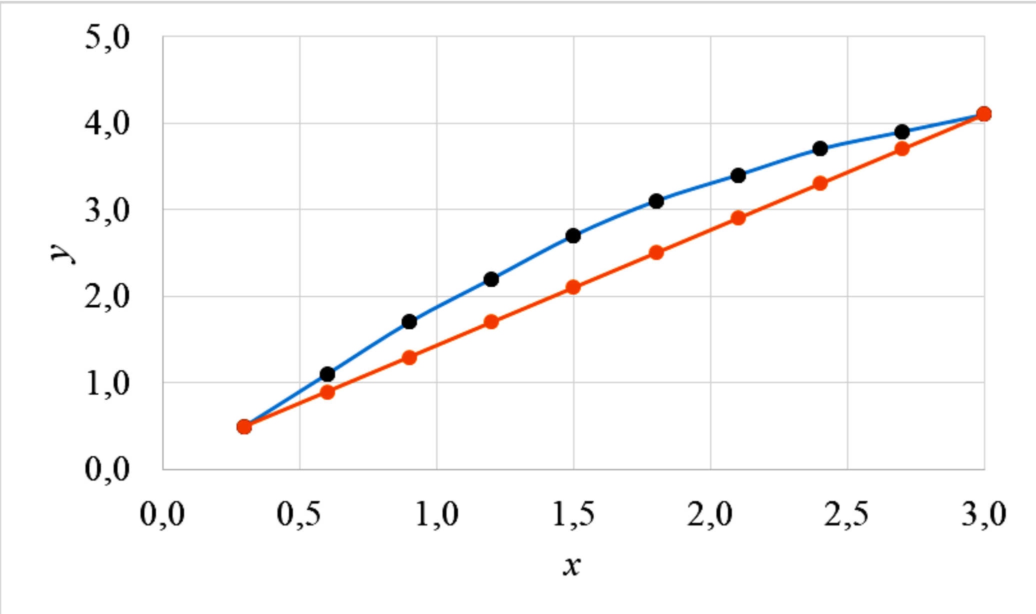

Рисунок 2.3 – Експериментальна і розрахункова залежності інтенсивності зношування y гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості x навколишнього повітря

Точність підбору емпіричної формули можна підвищити, застосувавши інший метод розрахунку – *метод парних точок*. Відповідно до цього методу згрупуємо координати точок вимірів з таблиці 2.2 у п’ять пар:

- пара 1 (точки 1 і 6);
- пара 2 (точки 2 і 7);
- пара 3 (точки 3 і 8);
- пара 4 (точки 4 і 9);
- пара 5 (точки 5 і 10).

Далі за попередньою методикою підставляємо у (2.2) координати кожної пари точок, вирішуємо п’ять систем рівнянь та визначаємо для кожної пари коефіцієнти a_i та b_i:

- для пари 1 $a=-0{,}02,\ b=1{,}73;$
- для пари 2 $a=0{,}18,\ b=1{,}53;$
- для пари 3 $a=0{,}50,\ b=1{,}33;$
- для пари 4 $a=0{,}68,\ b=1{,}13;$
- для пари 5 $a=1{,}30,\ b=1{,}98.$

Визначаємо середні арифметичні коефіцієнтів a_i і b_i за формулами:

$$a = \frac{\sum_1^n a_i}{n}, \tag{2.3}$$

$$b = \frac{\sum_1^n b_i}{n}, \tag{2.4}$$

де a_i, b_i – коефіцієнти пар точок;

n – кількість пар точок.

Таким чином, розрахункові коефіцієнти становлять $a = 0{,}53$, $b = 1{,}33$.

Тобто розрахункове рівняння апроксимуючої лінії матиме вигляд

$$y = 0{,}53 + 1{,}33 \cdot x.$$

Визначимо значення y функції при тих самих значеннях аргумента x, що зазначені в таблиці 2.2. Результат занесемо в таблицю 2.4. За результатами експериментальних і розрахункових даних побудуємо графіки (рисунок 2.4).

Таблиця 2.4 – Експериментальна і розрахункова залежності $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
$y_{експерим.}$	0,5	1,1	1,7	2,2	2,7	3,1	3,4	3,7	3,9	4,1
$y_{розрах.}$	0,9	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1	4,5

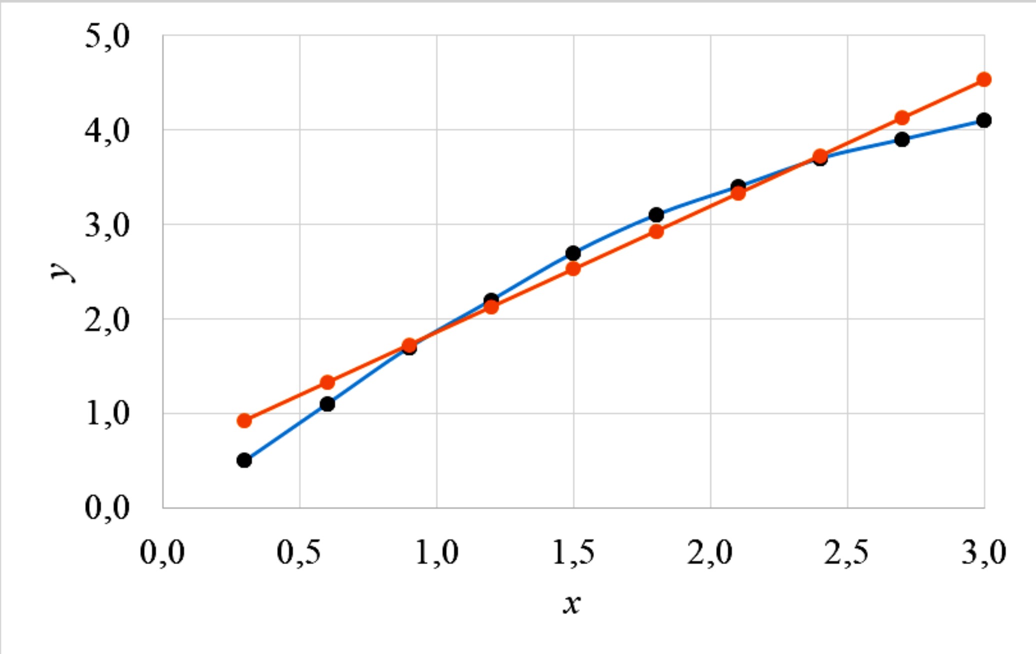

Рисунок 2.4 – Експериментальна і розрахункова залежності інтенсивності зношування *y* гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості *x* навколишнього повітря

При порівнянні графіків з рисунків 2.3 і 2.4 видно, що останній є більш подібним до графіка, побудованого за експериментальними даними.

Вихідні дані для виконання практичного завдання 1 наведені в додатку Б.

2.2 Метод вирівнювання (логарифмування)

У випадку, коли графік експериментальної функції має нелінійний вигляд, для спрощення процедури апроксимації функцію штучно піддають лінеаризації, тобто застосовують *метод вирівнювання*, сутність якого полягає в такому диференціюванні функцій, при якому спочатку знаходиться логарифм функції, а потім обчислюється похідна від нього.

Після побудови за вихідними даними графіка, пересвідчившись у нелінійному характері функції, у залежності від форми графічної кривої застосовується певна наближена функція, яка б відповідала графічній кривій.

При значному різноманітті форм будь-яких можливих експериментальних кривих для кожної з них можна підібрати відповідну формулу. Форми найбільш розповсюджених залежностей кривих та відповідні формули для їх апроксимації подано на рисунку 2.5.

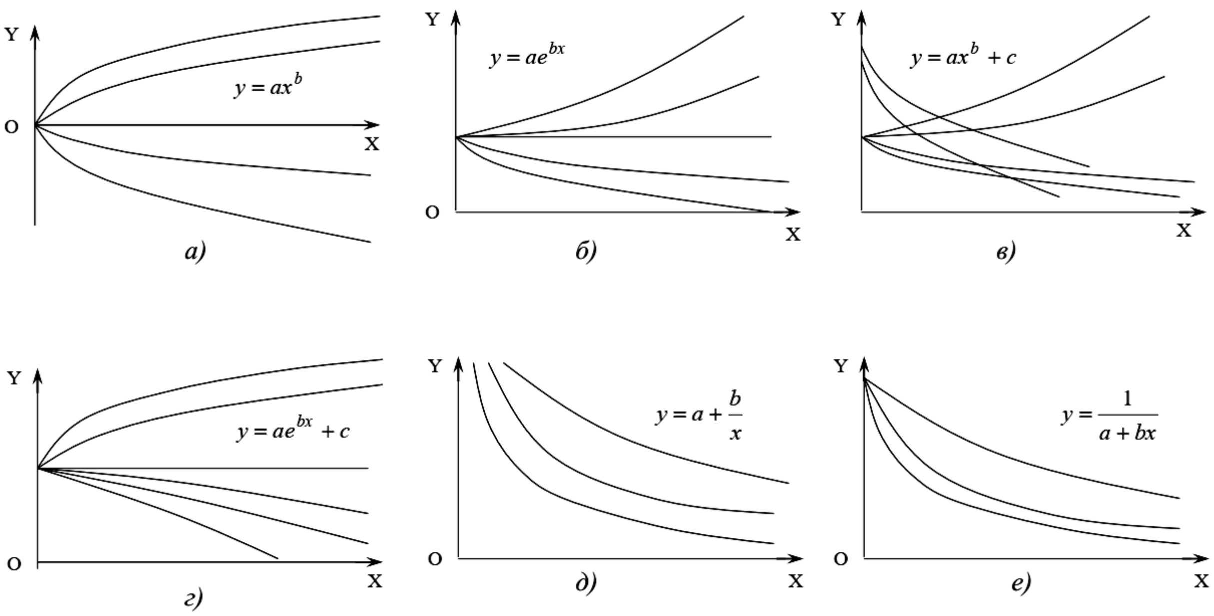

Рисунок 2.5 – Основні види графіків емпіричних формул

Розглянемо експериментальні дані, що наведені в таблиці 2.5. На рисунку 2.6 наведена крива, що побудована за цими даними.

Таблиця 2.5 – Експериментальна залежність $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
$y_{експерим.}$	0,03	0,28	0,47	0,79	1,23	1,73	2,26	2,82	3,55	4,45

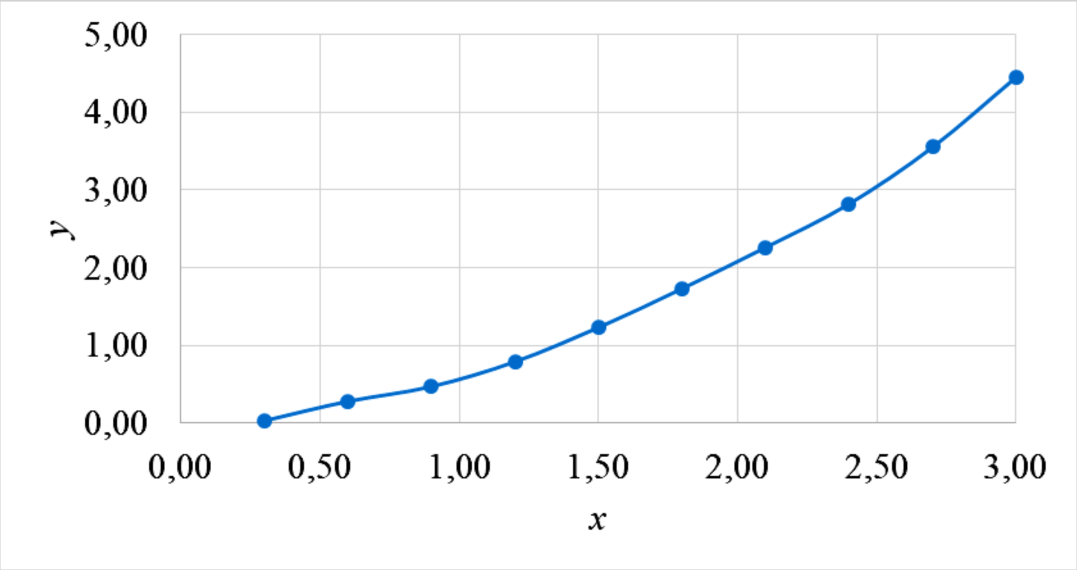

Рисунок 2.6 – Експериментальна залежність інтенсивності зношування *y* гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості *x* навколишнього повітря

Можна побачити ознаки того, що ця крива є подібною до тієї, яку подано на рисунку 2.5, в.

Тоді для апроксимації обираємо формулу

$$y = a \cdot x^b + \text{c}. \tag{2.5}$$

Процедура логарифмування полягає у заміні складових функції (2.5) їх логарифмами, а саме $y = lg(y)$, $a = lg(a)$, $x^b = b \cdot lg(x)$, $c = lg(c)$. Тоді формула (2.5) набуває такого вигляду:

$$lg(y) = lg(a) + b \cdot lg(x) + lg(c). \tag{2.6}$$

Після перестановок та згрупування

$$lg\left(\frac{y}{c}\right) = a + b \cdot lg(x). \tag{2.7}$$

Виконаємо такі заміни:

$$Y = lg\left(\frac{y}{c}\right), \tag{2.8}$$

$$X = lg(x). \tag{2.9}$$

Таким чином, рівняння (2.7) набуває вигляду рівняння прямої на координатній площині (2.1)

$$Y = a + b \cdot X. \tag{2.10}$$

Для визначення величини коефіцієнта c необхідно знати координати трьох точок з таблиці 2.5. Спочатку з цього графіка обираємо дві будь-які точки з координатами $(x_I;\ y_I)$ та $(x_{II};\ y_{II})$, причому ці точки мають бути достатньо віддаленими одна від одної. Наприклад, координати обраних двох точок є, відповідно, $(x_I = 0{,}6;\quad y_I = 0{,}28)$ та $(x_{II} = 2{,}7;\quad y_{II} = 3{,}55)$. Визначимо розрахункову абсцису третьої точки за формулою

$$[x_{III}] = \sqrt{x_I \cdot x_{II}}. \tag{2.11}$$

З таблиці 2.5 обираємо таку точку, у якої абсциса буде найбільш наближеною до розрахункової, тобто $x_{III} \approx [x_{III}]$. В даному випадку це точка з координатами $(x_{III} = 1{,}2;\ y_{III} = 0{,}79)$.

Значення коефіцієнта c визначається за формулою

$$c = \frac{y_I \times y_{II} - y_{III}^2}{y_I + y_{II} + 2 \cdot y_{III}}, \tag{2.12}$$

$$c = \frac{0{,}28 \times 3{,}55 - 0{,}79^2}{0{,}28 + 3{,}55 - 2 \cdot 0{,}79} = 0{,}16.$$

Наступним кроком є використання методу крайніх точок, описаного в пункті 2.1. Різниця полягає в тому, що за рахунок підстановки вигляду $lg(x) = X$ замість прямокутної (декартової) системи координат у даному випадку використовується логарифмічна. Як крайні точки обираємо точку 1 з координатами $(x_1 = 0{,}3;\ y_1 = 0{,}03)$ і точку 1 з координатами $(x_{10} = 3{,}0;\ y_{10} = 4{,}45)$. З формул (2.8) і (2.9) визначаємо координати крайніх точок

$$Y_1 = lg\left(\frac{0{,}03}{0{,}16}\right) = -0{,}739;$$

$$X_1 = lg(0{,}3) = -0{,}523;$$

$$Y_{10} = lg\left(\frac{4,45}{0,16}\right) = 1,432;$$

$$X_{10} = lg(3,0) = 0,477.$$

Система рівнянь (2.2) набуде вигляду

$$\begin{cases} -0,739 = a - 0,523 \cdot b \\ 1,432 = a + 0,477 \cdot b \end{cases}.$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначаємо, що a = 0,4; b = 2,17. Підставивши одержані значення коефіцієнтів a, b і c у формулу (2.5), отримаємо рівняння апроксимуючої кривої

$$y = 0,4 \cdot x^{2,17} + 0,16. \qquad (2.13)$$

Визначимо значення y функції при тих самих значеннях аргумента x, що зазначені в таблиці 2.5. Результат занесемо в таблицю 2.6. За результатами експериментальних і розрахункових даних побудуємо графіки (рисунок 2.7).

Таблиця 2.6 – Експериментальна і розрахункова залежності $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
$y_{експерим.}$	0,03	0,28	0,47	0,79	1,23	1,73	2,26	2,82	3,55	4,45
$y_{розрах.}$	0,03	0,13	0,32	0,59	0,96	1,42	1,99	2,65	3,43	4,31

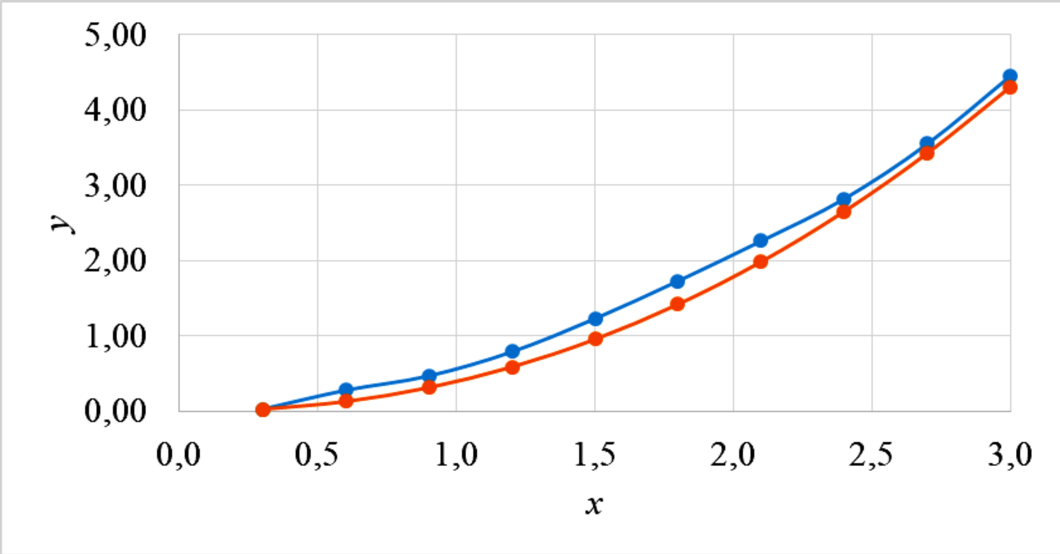

Рисунок 2.7 – Експериментальна і розрахункова залежності інтенсивності зношування *y* гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості *x* навколишнього повітря

З таблиці 2.6 і графіка (рисунок 2.7) можна пересвідчитись, що емпірична формула (2.13) достатньо точно відповідає експериментальним даним.

Аналогічною за порядком є процедура пошуку емпіричних формул для будь-яких інших експериментальних функцій та їх графіків. Залежності, які застосовуються для пошуку емпіричних формул у залежності від форми графіка (рисунок 2.5) експериментальної кривої, подано у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7 – Залежності, які застосовуються для пошуку емпіричних формул в залежності від форми графіка експериментальної кривої

Вигляд графіка (рисунок 2.5)	а	б
Формула рівняння кривої	$y = a \cdot x^b$	$y = a \cdot e^{b \cdot x}$ (e=2,7183)
Застосовані зміни	$X = lg(x)$ $Y = lg(y)$	$Y = lg(y)$
Вигляд після логарифмування	$lg(y) = a + b \cdot lg(x)$	$lg(y) = a + b \cdot lg(e \cdot x)$
Вигляд після лінеаризації	$Y = a + b \cdot X$	$Y = a + b \cdot X \cdot lg(e)$

Продовження таблиці 2.7

Вигляд графіка (рисунок 2.5)	в	г
Формула рівняння кривої	$y = a \cdot x^b + c$	$y = a \cdot e^{b \cdot x} + c$
Застосовані зміни	$Y = lg\left(\frac{y}{c}\right)$ $X = lg(x)$	$Y = lg\left(\frac{y}{c}\right)$
Вигляд після логарифмування	$lg\left(\frac{y}{c}\right) = a + b \cdot lg(x)$	$lg\left(\frac{y}{c}\right) = a + b \cdot lg(e \cdot x)$
Вигляд після лінеаризації	$Y = a + b \cdot X$	$Y = a + b \cdot lg(e \cdot x)$
Величини $[x_{III}]$, c	$[x_{III}] = \sqrt{x_I \cdot x_{II}}$ $c = \frac{y_I \times y_{II} - y_{III}^2}{y_I + y_{II} + 2 \cdot y_{III}}$	$[x_{III}] = 0{,}5 \cdot (x_I + x_{II})$ $c = \frac{y_I \times y_{II} - y_{III}^2}{y_I + y_{II} + 2 \cdot y_{III}}$
Вигляд графіка (рисунок 2.5)	д	е
Формула рівняння кривої	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = \frac{1}{a + b \cdot x}$
Застосовані зміни	$x = \frac{1}{z}$	$y = \frac{1}{z}$
Вигляд після логарифмування	логарифмування не застосовується	
Вигляд після лінеаризації	$y = a + b \cdot z$	$z = a + b \cdot x$

2.3 Метод поліномів

Для підбору емпіричних формул до будь-яких безперервних функцій, крім описаних вище методів, широко застосовують також метод поліномів. За цим методом апроксимації емпірична формула певної функції подається у вигляді полінома

$$y = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \dots + A_n \cdot x^n, \tag{2.14}$$

де A_0, A_1, A_2,..., A_n – постійні коефіцієнти полінома.

Відповідно до цього методу результати експерименту подають у вигляді системи поліномів вигляду

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_1^2 + \cdots + A_n \cdot x_1^n - y_1 = \varepsilon_1 \\ A_0 + A_1 \cdot x_2 + A_2 \cdot x_2^2 + \cdots + A_n \cdot x_2^n - y_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 + A_1 \cdot x_m + A_2 \cdot x_m^2 + \cdots + A_n \cdot x_m^n - y_m = \varepsilon_m \end{cases}, \quad (2.15)$$

де $x_1, x_2, ..., x_m$ – величини аргументу;
$y_1, y_2, ..., y_m$ – величини функції аргументу;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m$ – величина похибки розрахунків.

Якщо величини похибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m$ прирівняти до нуля, то формула (2.16) набуде вигляду системи початкових рівнянь

$$\begin{cases} y_1 = A_0 + A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_1^2 + \cdots + A_n \cdot x_1^n \\ y_2 = A_0 + A_1 \cdot x_2 + A_2 \cdot x_2^2 + \cdots + A_n \cdot x_2^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = A_0 + A_1 \cdot x_m + A_2 \cdot x_m^2 + \cdots + A_n \cdot x_m^n \end{cases}. \quad (2.16)$$

Порядок розрахунку коефіцієнтів полінома наступний.

Спочатку визначають кількість членів ряду. Зазвичай їх обирають від 2 до 4, тобто $2 \le m \le 4$. У визначену систему (2.16) послідовно підставляють координати *x* та *y* всіх точок експерименту.

Далі послідовно розбивають систему зверху донизу на групи, кількість яких має дорівнювати кількості коефіцієнтів А. У кожній групі утворюють рівняння і укладають нову систему, кількість рівнянь у якій буде дорівнювати кількості груп. Вирішуючи систему рівнянь, визначають постійні коефіцієнти полінома *А*.

Процес апроксимації методом поліномів розглянемо на наступному прикладі (таблиця 2.8). На рисунку 2.8 наведена крива, що побудована за цими даними.

Таблиця 2.8 – Експериментальна залежність $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
$y_{експерим.}$	0,03	0,28	0,47	0,79	1,23	1,73	2,26	2,82	3,55	4,45

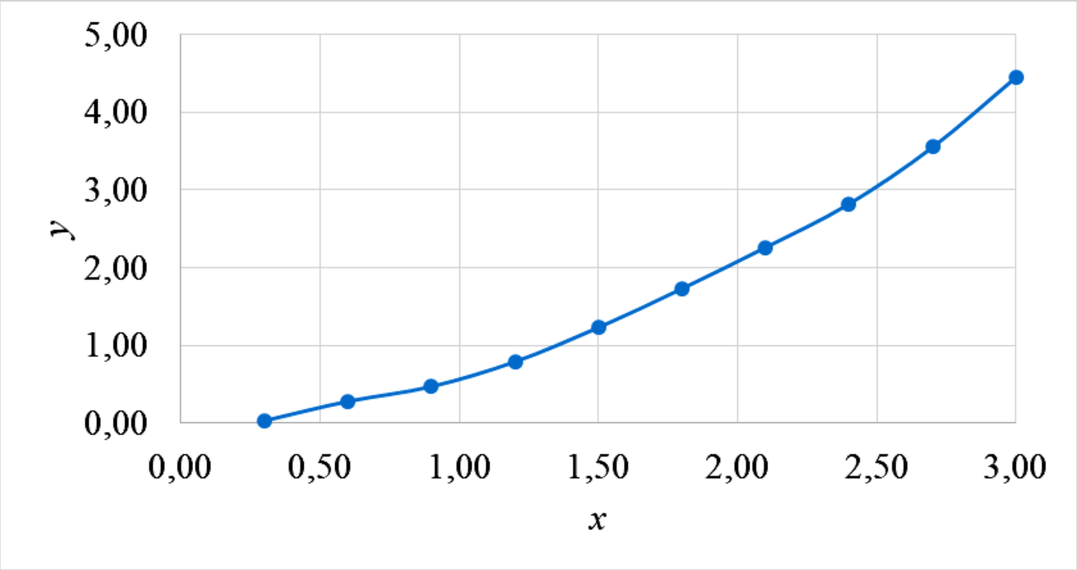

Рисунок 2.8 – Експериментальна залежність інтенсивності зношування y гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості x навколишнього повітря

Призначимо кількість коефіцієнтів полінома $m = 3$, тобто A_0, A_1, A_2. Таким чином, загальна форма полінома матиме такий вигляд

$$y = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2. \qquad (2.17)$$

Дослідні точки (таблиця 2.8) розділимо на будь-які три групи. Наприклад:

- група 1 містить точки 1, 2 і 3 з координатами, відповідно, $(x_1 = 0{,}3;\ y_1 = 0{,}03)$, $(x_2 = 0{,}6;\ y_2 = 0{,}28)$, $(x_3 = 0{,}9;\ y_1 = 0{,}47)$;
- група 2 містить точки 4, 5 і 6 з координатами, відповідно, $(x_4 = 1{,}2;\ y_4 = 0{,}79)$, $(x_5 = 1{,}5;\ y_5 = 1{,}23)$, $(x_6 = 1{,}8;\ y_6 = 1{,}73)$;
- група 3 містить точки 7, 8, 9 і 10 з координатами, відповідно, $(x_7 = 2{,}1;\ y_7 = 2{,}26)$, $(x_8 = 2{,}4;\ y_8 = 2{,}82)$, $(x_9 = 1{,}7;\ y_6 = 3{,}55)$, $(x_{10} = 3{,}0;\ y_{10} = 4{,}45)$.

Підставимо координати кожної з точок у рівняння (2.17) та утворюємо три системи рівнянь. Так, для першої групи точок система рівняння (2.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} 0{,}03 = A_0 + 0{,}3 \cdot A_1 + 0{,}3^2 \cdot A_2 \\ 0{,}28 = A_0 + 0{,}6 \cdot A_1 + 0{,}6^2 \cdot A_2, \\ 0{,}47 = A_0 + 0{,}9 \cdot A_1 + 0{,}9^2 \cdot A_2 \end{cases} \qquad (2.18)$$

або

$$\begin{cases} A_0 + 0{,}3 \cdot A_1 + 0{,}90 \cdot A_2 = 0{,}03 \\ A_0 + 0{,}6 \cdot A_1 + 0{,}36 \cdot A_2 = 0{,}28. \\ A_0 + 0{,}9 \cdot A_1 + 0{,}81 \cdot A_2 = 0{,}47 \end{cases} \tag{2.19}$$

Для другої групи точок система рівняння (2.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} A_0 + 1{,}2 \cdot A_1 + 1{,}44 \cdot A_2 = 0{,}79 \\ A_0 + 1{,}5 \cdot A_1 + 2{,}25 \cdot A_2 = 1{,}23. \\ A_0 + 1{,}8 \cdot A_1 + 3{,}24 \cdot A_2 = 1{,}73 \end{cases} \tag{2.20}$$

Для третьої групи точок система рівняння (2.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} A_0 + 2{,}1 \cdot A_1 + 4{,}41 \cdot A_2 = 2{,}26 \\ A_0 + 2{,}4 \cdot A_1 + 5{,}76 \cdot A_2 = 2{,}89 \\ A_0 + 2{,}7 \cdot A_1 + 7{,}29 \cdot A_2 = 3{,}55 \\ A_0 + 3{,}0 \cdot A_1 + 9{,}00 \cdot A_2 = 4{,}45 \end{cases}. \tag{2.21}$$

У кожній системі рівнянь (2.19)–(2.21) визначимо суми коефіцієнтів та отримаємо рівняння сум коефіцієнтів. Рівняння сум коефіцієнтів для першої групи точок

$$\begin{cases} A_0 + 0{,}3 \cdot A_1 + 0{,}90 \cdot A_2 = 0{,}03 \\ A_0 + 0{,}6 \cdot A_1 + 0{,}36 \cdot A_2 = 0{,}28 \\ A_0 + 0{,}9 \cdot A_1 + 0{,}81 \cdot A_2 = 0{,}47 \\ \hline 3 \cdot A_0 + 1{,}8 \cdot A_1 + 1{,}26 \cdot A_2 = 0{,}78 \end{cases}. \tag{2.22}$$

Рівняння сум коефіцієнтів для другої групи точок

$$\begin{cases} A_0 + 1{,}2 \cdot A_1 + 1{,}44 \cdot A_2 = 0{,}79 \\ A_0 + 1{,}5 \cdot A_1 + 2{,}25 \cdot A_2 = 1{,}23 \\ A_0 + 1{,}8 \cdot A_1 + 3{,}24 \cdot A_2 = 1{,}73 \\ \hline 3 \cdot A_0 + 4{,}5 \cdot A_1 + 6{,}93 \cdot A_2 = 3{,}75 \end{cases}. \tag{2.23}$$

Рівняння сум коефіцієнтів для третьої групи точок

$$\begin{cases} A_0 + 2{,}1 \cdot A_1 + 4{,}41 \cdot A_2 = 2{,}26 \\ A_0 + 2{,}4 \cdot A_1 + 5{,}76 \cdot A_2 = 2{,}89 \\ A_0 + 2{,}7 \cdot A_1 + 7{,}29 \cdot A_2 = 3{,}55 \\ A_0 + 3{,}0 \cdot A_1 + 9{,}00 \cdot A_2 = 4{,}45 \\ \hline 4 \cdot A_0 + 10{,}2 \cdot A_1 + 26{,}46 \cdot A_2 = 13{,}08 \end{cases} . \tag{2.24}$$

Підсумкові рівняння систем (2.22)–(2.24) об'єднаємо в окрему систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 3 \cdot A_0 + 1{,}8 \cdot A_1 + 1{,}26 \cdot A_2 = 0{,}78 \\ 3 \cdot A_0 + 4{,}5 \cdot A_1 + 6{,}93 \cdot A_2 = 3{,}75 \\ 4 \cdot A_0 + 10{,}2 \cdot A_1 + 26{,}46 \cdot A_2 = 13{,}08 \end{cases} . \tag{2.25}$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.25), отримуємо значення постійних коефіцієнтів полінома: $A_0 = -0{,}054$, $A_1 = 0{,}2254$, $A_2 = 0{,}4127$. Підставивши одержані значення в рівняння (2.17), отримаємо рівняння розрахункової кривої

$$y = -0{,}054 + 0{,}225 \cdot x + 0{,}412 \cdot x^2. \tag{2.26}$$

Визначимо значення y функції при тих самих значеннях аргумента x, що зазначені в таблиці 2.8. Результат занесемо в таблицю 2.9. За результатами експериментальних і розрахункових даних побудуємо графіки (рисунок 2.9).

Таблиця 2.9 – Експериментальна і розрахункова залежності $y = f(x)$

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
$y_{експерим.}$	0,03	0,28	0,47	0,79	1,23	1,73	2,26	2,82	3,55	4,45
$y_{розрах.}$	0,05	0,24	0,49	0,82	1,23	1,70	2,26	2,88	3,58	4,36

З таблиці 2.9 і графіка (рисунок 2.9) можна пересвідчитись, що емпірична формула (2.26) достатньо точно відповідає експериментальним даним.

Вихідні дані для виконання практичного завдання 2 наведені в додатку В.

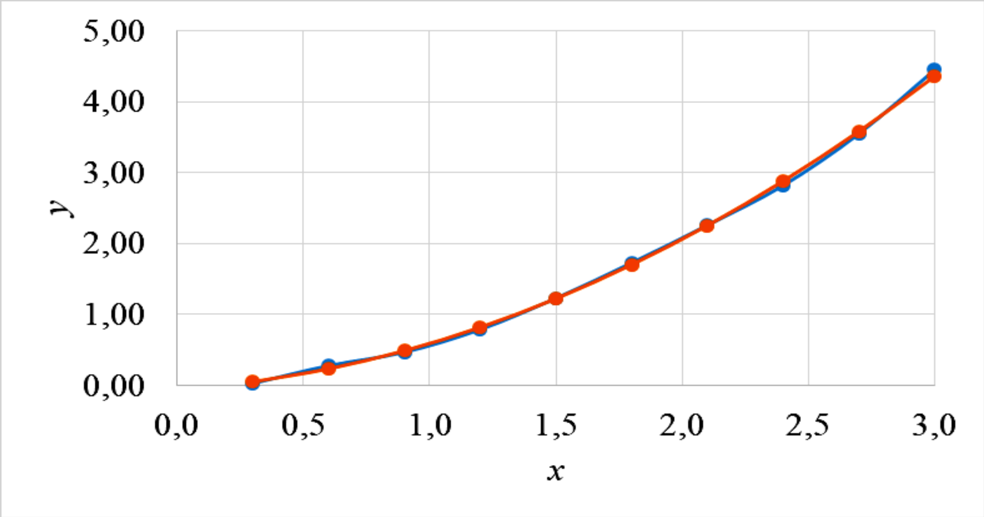

Рисунок 2.9 – Експериментальна і розрахункова залежності інтенсивності зношування *y* гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості *x* навколишнього повітря

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 ДСТУ 2681-94 Метрологія. Терміни та визначення. Чинний від 1994-07-26. Київ : Держстандарт України, 1994. 68 с.

2 Нестерчук Д. М., Квітка С. О., Галько С. В. Основи метрології та засоби вимірювань: навч. посіб. Мелітополь: ТДАУ, 2017. 256 с.

3 Важинський С.Е., Щербак Т.І. Методика та організація наукових досліджень: навч. посіб. Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. 260 с.

4 Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.

5 Середа Б. П. Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Моделювання технологічних та фізичних процесів» освітньо-наукової програми третього рівня (підготовка докторів філософії) вищої освіти зі спеціальності 274 «Автомобільний транспорт». Кам’янське: ДДТУ, 2017. 77 с.

6 Мазур В. А., Липовий В. Г., Мордванюк М. О. Методика наукових досліджень в агрономії: навч. посіб. Вінниця: Твори, 2020. 204 с.

7 Медведєв М. Г. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник. Київ: Ліра-К, 2008. 536 с.

8 Нестеренко О. Н. Елементи теорії наближень у задачах і прикладах. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. 53 с.

ДОДАТОК А
Таблиця значень критерію Стьюдента

Таблиця А.1 – Значення критерію Стьюдента $t_{\alpha n}$ в залежності від довірчої ймовірності α і кількості дослідів n

n	α=0,90	α=0,95	α=0,99	n	α=0,90	α=0,95	α=0,99
2	6,3130	12,7060	63,6560	17	1,7450	2,1190	2,9200
3	2,9200	4,3020	9,9240	18	1,7396	2,1098	2,8982
4	2,3534	3,1820	5,8400	19	1,7341	2,1009	2,8784
5	2,1318	2,7760	4,6040	20	1,7291	2,0930	2,8609
6	2,0150	2,5700	4,0321	21	1,7247	2,0860	2,8453
7	1,9430	2,4460	3,7070	22	1,7200	2,0790	2,8310
8	1,8946	2,3646	3,4995	23	1,7167	2,0739	2,8188
9	1,8596	2,3060	3,3554	24	1,7139	2,0687	2,8073
10	1,8331	2,2622	3,24498	25	1,7109	2,0639	2,7969
11	1,8125	2,2281	3,1693	26	1,7081	2,0595	2,7874
12	1,7950	2,2010	3,1050	27	1,7050	2,0560	2,7780
13	1,7823	2,1788	3,0845	28	1,7033	2,0518	2,7707
14	1,7709	2,1604	3,0123	29	1,7011	2,0484	2,7633
15	1,7613	2,1448	2,9760	30	1,6991	2,0452	2,7564
16	1,7530	2,1314	2,9467	32	1,6930	2,0360	2,7380

ДОДАТОК Б
Завдання до практичної роботи 1

У завданні необхідно при довірчій ймовірності *α=0,95* встановити точність вимірювань максимального тиску в паливній системі двигуна (таблиця Б.1). Межа вимірювань і клас точності вимірювального приладу наведені в таблиці Б.2.

Порядок виконання практичного завдання 1:

а) визначити середнє арифметичне значення результатів вимірювань $\tilde{x}$;

б) розрахувати середньоквадратичне відхилення $\tilde{\sigma}$;

в) призначити довірчу ймовірність α (наприклад, α = 0,95);

г) з таблиці А.1 встановити коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha n}$ для заданої кількості вимірювань n і призначеної довірчої ймовірності α;

д) визначити довірчий інтервал серії вимірювань $\Delta\tilde{x}_{\text{в}}$;

е) розрахувати приладову похибку Δx_0;

ж) визначити загальну похибку вимірювань Δx;

и) сформулювати висновок з роботи у вигляді: «*Максимальний тиск в паливній системі двигуна становлять $\tilde{x} \pm \Delta x$ бар з довірчою ймовірністю α=0,95*».

Таблиця Б.1 – Вихідні дані для виконання завдання 1

в барах

Дослід	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,60	6,44	7,41	8,52	9,79	11,26	12,95	14,90	17,13	19,70
2	6,30	7,25	8,33	9,58	11,02	12,67	14,57	16,76	19,27	22,16
3	6,50	7,48	8,60	9,89	11,37	13,07	15,03	17,29	19,88	22,87
4	6,75	7,76	8,93	10,27	11,81	13,58	15,61	17,96	20,65	23,75
5	7,00	8,05	9,26	10,65	12,24	14,08	16,19	18,62	21,41	24,63
6	7,30	8,40	9,65	11,10	12,77	14,68	16,89	19,42	22,33	25,68
7	7,55	8,68	9,98	11,48	13,20	15,19	17,46	20,08	23,10	26,56
8	7,60	8,74	10,05	11,56	13,29	15,29	17,58	20,22	23,25	26,74
9	7,70	8,86	10,18	11,71	13,47	15,49	17,81	20,48	23,55	27,09
10	8,30	9,55	10,98	12,62	14,52	16,69	19,20	22,08	25,39	29,20

Продовження таблиці Б.1

Дослід	Варіант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	22,66	26,05	29,96	34,46	39,62	45,57	52,40	60,26	69,30	79,70
2	25,49	29,31	33,71	38,76	44,58	51,26	58,95	67,80	77,97	89,66
3	26,30	30,24	34,78	39,99	45,99	52,89	60,82	69,95	80,44	92,51
4	27,31	31,40	36,11	41,53	47,76	54,93	63,16	72,64	83,53	96,06
5	28,32	32,57	37,45	43,07	49,53	56,96	65,50	75,33	86,63	99,62
6	29,53	33,96	39,06	44,92	51,65	59,40	68,31	78,56	90,34	103,89
7	30,54	35,13	40,39	46,45	53,42	61,43	70,65	81,25	93,43	107,45
8	30,75	35,36	40,66	46,76	53,78	61,84	71,12	81,79	94,05	108,16
9	31,15	35,82	41,20	47,38	54,48	62,66	72,05	82,86	95,29	109,58
10	33,58	38,61	44,41	51,07	58,73	67,54	77,67	89,32	102,72	118,12

Таблиця Б.2 – Межа вимірювань і клас точності вимірювального приладу

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Клас точності приладу	1,0	1,5	2,5	4,0	1,0	1,5	2,5	4,0	1,0	1,5
Межа вимірювань, бар	20	20	20	20	20	20	20	30	30	30
Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Клас точності приладу	2,5	4,0	1,0	1,5	2,5	4,0	1,0	1,5	2,5	4,0
Межа вимірювань, бар	50	50	50	80	80	80	120	120	120	120

ДОДАТОК В
Завдання до практичної роботи 2

У завданні необхідно визначити залежності інтенсивності зношування *у* гільз циліндрів двигунів внутрішнього згоряння від рівня запиленості *х* навколишнього повітря та побудувати графіки цих залежностей. Під час виконання завдання застосувати такі методи:

а) крайніх точок;

б) вирівнювання (логарифмування);

в) поліномів.

Таблиця В.1 – Вихідні дані для виконання завдання 2 методом крайніх точок

Ва-ріант		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	17,0	32,0	40,0	48,0	55,0	63,0	69,0	72,0	75,0	78,0
2	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	21,3	40,0	50,0	60,0	68,8	78,8	86,3	90,0	93,8	97,5
3	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	25,0	43,0	59,0	72,0	80,0	89,0	96,0	103,0	108,0	112,0
4	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	31,3	53,8	73,8	90,0	100,0	111,3	120,0	128,8	135,0	140,0
5	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	10,0	18,0	25,0	31,0	35,0	40,0	42,0	46,0	50,0	51,0
6	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	12,5	22,5	31,3	38,8	43,8	50,0	52,5	57,5	62,5	63,8
7	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	31,0	52,0	70,0	81,0	92,0	99,0	108,0	112,0	117,0	119,0
8	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	40,3	67,6	91,0	105,3	119,6	128,7	140,4	145,6	152,1	154,7
9	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	6,0	10,0	14,0	15,0	16,0	18,0	20,0	20,0	21,0	22,0

Продовження таблиці В.1

Варіант		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	7,8	13,0	18,2	19,5	20,8	23,4	26,0	26,0	27,3	28,6
11	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	7,0	14,0	20,0	25,0	29,0	32,0	36,0	38,0	40,0	41,0
12	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	9,1	18,2	26,0	32,5	37,7	41,6	46,8	49,4	52,0	53,3
13	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	11,0	22,0	31,0	38,0	45,0	51,0	56,0	60,0	62,0	63,0
14	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	14,3	28,6	40,3	49,4	58,5	66,3	72,8	78,0	80,6	81,9
15	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	17,2	34,3	48,4	59,3	70,2	79,6	87,4	93,6	96,7	98,3
16	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	18,9	37,8	53,2	65,2	77,2	87,5	96,1	103,0	106,4	108,1
17	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	20,8	41,5	58,5	71,7	84,9	96,3	105,7	113,3	117,0	118,9
18	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	22,8	45,7	64,4	78,9	93,4	105,9	116,3	124,6	128,7	130,8
19	*x*	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
	y	27,4	54,8	77,2	94,7	112,1	127,1	139,5	149,5	154,5	157,0
20	*x*	1,3	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5	8,8	10,0	11,3	12,5
	y	32,9	65,8	92,7	113,6	134,5	152,5	167,4	179,4	185,4	188,4

Таблиця В.2 – Вихідні дані для виконання завдання 2 методом вирівнювання (логарифмування)

Варіанти		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Застосувати рівняння $y = a \cdot x^b$											
1	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	17	32	40	48	55	63	69	72	75	78
2	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	10	18	25	31	35	40	42	46	50	51
3	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	25	43	59	72	80	89	96	103	108	112

Продовження таблиці В.2

Варіанти		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	31	52	70	81	92	99	108	112	117	119
5	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	6	10	14	15	16	18	20	20	21	22
6	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	7	14	20	25	29	32	36	38	40	41
7	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	11	22	31	38	45	51	56	60	62	63
8	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	17	32	42	54	64	72	78	84	88	90
Застосувати рівняння $y = a \cdot e^{b \cdot x}$											
9	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	1,1	1,4	1,7	2,1	2,5	2,8	3,2	3,7	4,3	5,2
10	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	6,2	5,1	4,9	4,7	4,3	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5
11	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	5,0	4,2	3,8	3,5	3,1	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3
12	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	9,2	8,1	7,9	7,7	7,3	7,0	6,8	6,7	6,6	6,5
13	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,0	3,1	2,3	1,6	1,1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1
14	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,7	3,9	3,5	3,2	2,8	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0
15	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	40	32	28	25	21	18	16	15	14	12
16	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	11	14	1,7	21	25	28	32	37	43	52
Застосувати рівняння $y = a \cdot x^b + c$											
9	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,0	3,1	2,3	1,6	1,1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1
10	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	6,5	5,6	4,8	4,1	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6
11	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	5,4	4,5	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,7	1,6	1,5

Продовження таблиці В.2

Варіанти		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	6,2	5,1	4,9	4,7	4,3	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5
13	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	1,1	1,4	1,7	2,1	2,5	2,8	3,2	3,7	4,3	5,
14	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	59	51	47	44	40	37	35	34	32	31
15	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	3,7	2,9	2,5	2,2	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0
16	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,8	4,0	3,6	3,3	2,9	2,6	2,4	2,3	2,2	2,0
Застосувати рівняння $y = a \cdot e^{b \cdot x} + c$											
1	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	8,1	7,8	7,3	6,7	6,0	5,2	4,3	3,2	2,1	0,7
2	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	92	90	88	86	82	78	73	67	60	51
3	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8	3,4	3,1	2,7	2,2	1,6
4	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	86	83	78	72	65	57	48	37	26	12
5	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	9,7	9,5	9,3	9,1	8,7	8,3	7,8	7,3	6,5	5,6
6	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	50	48	47	45	43	39	36	32	27	21
7	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	71	68	63	57	50	42	33	22	11	1
8	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	9,4	9,2	9,0	8,8	8,4	8,0	7,5	6,9	6,2	5,3
Застосувати рівняння $y = a + \frac{b}{x}$											
17	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	5,8	4,5	3,4	2,6	1,8	1,3	0,9	0,5	0,2	0,1
18	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	69	35	21	14	9	7	6	5	4,5	4
19	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	100	55	36	24	18	12	10	8	7	6

Продовження таблиці В.2

Варіанти		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	95	84	74	66	59	53	47	43	41	40
Застосувати рівняння $y = \frac{1}{a+b\cdot x}$											
17	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,0	3,0	2,2	1,7	1,1	0,8	0,4	0,2	0,1	0,1
18	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	105	72	55	40	28	17	9	4	2	1
19	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	95	84	74	66	59	53	47	43	41	40
20	*x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	69	35	21	14	9	7	6	5	4,5	4

Таблиця В.3 – Вихідні дані для виконання завдання 2 методом поліномів

Варіант		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	*x*	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00	3,3
	y	0,03	0,28	0,47	0,79	1,23	1,73	2,26	2,82	3,55	4,4
2	*x*	0,72	1,08	1,44	1,80	2,16	2,52	2,88	3,24	3,60	3,9
	y	0,04	0,34	0,56	0,95	1,48	2,08	2,71	3,38	4,26	5,3
3	*x*	0,86	1,30	1,73	2,16	2,59	3,02	3,46	3,89	4,32	4,7
	y	0,04	0,40	0,68	1,14	1,77	2,49	3,25	4,06	5,11	6,4
4	*x*	1,04	1,56	2,07	2,59	3,11	3,63	4,15	4,67	5,18	5,7
	y	0,05	0,48	0,81	1,37	2,13	2,99	3,91	4,87	6,13	7,6
5	*x*	1,24	1,87	2,49	3,11	3,73	4,35	4,98	5,60	6,22	6,8
	y	0,06	0,58	0,97	1,64	2,55	3,59	4,69	5,85	7,36	9,2
6	*x*	1,49	2,24	2,99	3,73	4,48	5,23	5,97	6,72	7,46	8,2
	y	0,07	0,70	1,17	1,97	3,06	4,30	5,62	7,02	8,83	11,0
7	*x*	1,79	2,69	3,58	4,48	5,37	6,27	7,17	8,06	8,96	9,8
	y	0,09	0,84	1,40	2,36	3,67	5,17	6,75	8,42	10,6	13,2
8	*x*	2,15	3,22	4,30	5,37	6,45	7,52	8,60	9,67	10,7	11,8
	y	0,11	1,00	1,68	2,83	4,41	6,20	8,10	10,1	12,7	15,9
9	*x*	2,58	3,87	5,16	6,45	7,74	9,03	10,	11,6	12,9	14,1
	y	0,13	1,20	2,02	3,40	5,29	7,44	9,72	12,1	15,2	19,1
10	*x*	3,10	4,64	6,19	7,74	9,29	10,8	12,3	13,9	15,4	17,0
	y	0,15	1,44	2,43	4,08	6,35	8,9	11,6	14,5	18,3	22,9
11	*x*	3,72	5,57	7,43	9,29	11,15	13,0	14,8	16,7	18,5	20,4
	y	0,19	1,73	2,91	4,89	7,62	10,7	13,9	17,4	21,9	27,5

Продовження таблиці В.3

Варіант		Дослідні точки									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	*x*	4,46	6,69	8,92	11,15	13,37	15,6	17,8	20,0	22,2	24,5
	y	0,22	2,08	3,49	5,87	9,14	12,8	16,7	20,9	26,3	33,0
13	*x*	5,35	8,02	10,7	13,3	16,0	18,7	21,4	24,0	26,7	29,4
	y	0,27	2,50	4,19	7,04	10,9	15,4	20,1	25,1	31,6	39,6
14	*x*	6,42	9,63	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8	32,1	35,3
	y	0,32	3,00	5,03	8,45	13,1	18,5	24,1	30,1	37,9	47,6
15	*x*	7,70	11,5	15,4	19,2	23,1	26,9	30,8	34,6	38,5	42,3
	y	0,39	3,59	6,03	10,1	15,7	22,2	29,0	36,2	45,5	57,1
16	*x*	9,24	13,8	18,4	23,1	27,7	32,3	36,9	41,6	46,2	50,8
	y	0,46	4,31	7,24	12,1	18,9	26,6	34,8	43,4	54,6	68,5
17	*x*	11,0	16,6	22,1	27,7	33,2	38,8	44,3	49,9	55,4	61,0
	y	0,55	5,18	8,69	14,6	22,7	31,9	41,7	52,1	65,6	82,2
18	*x*	13,3	19,9	26,6	33,2	39,9	46,5	53,2	59,9	66,5	73,2
	y	0,67	6,21	10,4	17,5	27,2	38,3	50,1	62,5	78,7	98,7
19	*x*	15,9	23,9	31,9	39,9	47,9	55,9	63,9	71,8	79,8	87,8
	y	0,80	7,45	12,5	21,0	32,7	46,0	60,1	75,0	94,5	118,4
20	*x*	19,1	28,7	38,3	47,9	57,5	67,0	76,6	86,2	95,8	105,4
	y	0,96	8,95	15,0	25,2	39,3	55,2	72,2	90,0	113,4	142,1

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни
«*ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ*»

Відповідальний за випуск Романович Є. В.

Редактор Буранова Н. В.

Підписано до друку 30.11.21 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,5. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.