

УДК 625.03

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ КОЛІЇ І РУХОМОГО СКЛАДУ В ЗОНІ РЕЙКОВИХ СТИКІВ

**Д-р техн. наук О. М. Даренський**, канд. техн. наук Н. В. Бугаєць,  
магістранти І. О. Покотецький, В. М. Коваль

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУТИ И ПОДВИЖНОГО СОСТАВА В ЗОНЕ РЕЛЬСОВЫХ СТЫКОВ

**Д-р техн. наук А. Н. Даренский**, канд. техн. наук Н. В. Бугаец,  
магистранты И. О. Покотецкий, В. Н. Коваль

## MATHEMATICAL MODEL OF INTERACTION OF WAY AND MOBILE COMPOSITION IN AREA OF RAIL JOINTS

**D. Sc. (Tech.) A. N. Darenskiy**, PhD (Tech.) N.V. Bugaec, masters I.O. Pokotecky, V.N. Koval

*Розроблена математична модель, яка характеризує роботу рейок під дією вертикального навантаження від рухомого складу в прямих і кривих ділянках колії, а також на ділянках, що знаходяться в зоні рейкових стиків, які характеризуються високими динамічними впливами. Розроблена математична модель дає можливість визначити приведену до точки контакту колеса і рейки жорсткість рейкової нитки, що в свою чергу дає можливість визначити вертикальні динамічні сили взаємодії колії і рухомого складу з урахуванням змін параметрів згинальної жорсткості рейкової нитки в зоні рейкового стику.*

**Ключові слова:** математична модель, рейковий стик, рейка, вертикальне навантаження, жорсткість.

*Разработана математическая модель, характеризующая работу рельсов под действием вертикальной нагрузки от подвижного состава на прямых и кривых участках пути, а также на участках, находящихся в зоне рельсовых стыков, характеризующихся высокими динамическими воздействиями. Разработанная математическая модель дает возможность определить приведенную к точке контакта колеса и рельса жесткость рельсовой нити, что дает возможность определить вертикальные динамические силы взаимодействия пути и подвижного состава с учетом изменений параметров изгибной жесткости рельсовой нити в зоне рельсового стыка.*

**Ключевые слова:** математическая модель, рельсовый стик, рельс, вертикальная нагрузка, жесткость.

*A mathematical model characterizing work of rails under action of the vertical loading from mobile composition on the areas of way direct and crooked is developed, and also on the areas of the found in an area rail joints characterized by high dynamic influences. These questions are especially actual for the terms of ways of the no common use (high axial loading, features of the special mobile composition, curves of small radiuses, feature of the modes of conduct of trains). Executing the design of work of rail filament it is needed to take into account under action of the external loading, level of dynamic action of crews on a way in the area of rail joints. The use of number methods of research of co-operation of way and mobile composition enables exactly to determine basic calculation data, by comparison to experimental works, but it is possible to use*

*number methods only when a mathematical model represents the real work of construction of way, taking into account dynamic processes which take place in the area of joints. In the article the general calculation chart of subsystem was considered "crew", in a basis to which the spatial calculation chart of four-axle train crew which moves on the way is stopped up. As a calculation model a beam which is found separate discrete resiliently was accepted - dissipative supports with nonlinear descriptions. The developed mathematical model enables to define resulted to the point of contact of wheel and rail inflexibility of rail filament, that enables to define vertical dynamic forces of co-operation of way and mobile composition taking into account the changes of parameters of bending inflexibility of rail filament in the area of rail joint. It is necessary to underline that influence of these parameters on forces of co-operation of way and mobile composition changes in the process of motion continuously. Inflexibilities of rails in the area of rail joint and out of joint affect motion of these processes as inflexibilities of rail supports so. Multiple calculations which were executed for the most widespread types of the carriages of enterprises metallurgical and mining specialized and special allowed to set that at the rates of movement, which will be realized on the ways of industrial transport, vertical shock forces can measure up 27-28 kN at in good condition rail joints. At presence of disrepairs in joints («steps») the shock loading are multiplied in 1,7-3,2 times, measuring up 65-70 kN. Data which are got calculations are confirmed by the results of experimental works.*

**Keywords:** *mathematical model, rail joint, rail, vertical loading, inflexibility.*

**Вступ.** Питання взаємодії колії і рухомого складу в зоні рейкових стиків, як для прямих, так і для кривих ділянок колії, є достатньо актуальними при виконанні досліджень впливу рухомого складу на колію [1–6]. Особливо це важливо для умов колій незагального користування (особливості спеціального рухомого складу, особливості режимів ведення потягів, криві малого радіуса).

Виконуючи моделювання роботи рейкової нитки під дією зовнішнього навантаження, потрібно враховувати рівень динамічної дії екіпажів на колію в зоні рейкових стиків. Використання чисельних методів дослідження взаємодії колії і рухомого складу дає можливість точно визначати вихідні розрахункові дані, у порівнянні з експериментальними роботами, але чисельні методи можливо використовувати тільки, коли математична модель відображає реальну роботу конструкції колії, враховуючи динамічні процеси, які відбуваються в зоні стиків.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Здебільшого в останніх дослідженнях, в яких розглядалися питання взаємодії колії і рухомого складу,

розраховувалися вертикальні або горизонтальні поперечні сили, що діють на колію при русі екіпажів в прямих та кривих ділянках колії, були прийняті моделі, що описують плоскі коливання [7–8], вони розроблені із припущення, що рухи системи в різних площинах слабо зв'язані між собою. Але такі методи не підходять для специфічних умов колій незагального користування, необхідно врахувати суттєві нелінійності залежності, в тому числі нелінійності розривного типу, тільки нелінійна модель адекватно описує взаємодію елементів в динамічній системі «екіпаж-колія». Дослідження взаємодії колії і спеціального рухомого складу, оцінку динаміки екіпажа з нелінійними просторовими силовими і кінематичними зв'язками слід проводити на нелінійній просторовій моделі, оскільки для нелінійних систем принцип суперпозиції неможливо застосувати [9–11].

**Визначення мети та завдання дослідження.** Метою даної статті є моделювання математичної моделі роботи рейок в зоні рейкових стиків під дією вертикального навантаження від рухомого складу. Це актуальне завдання, що дасть

зможу визначити наведену до точки контакту колеса і рейки жорсткість рейкової нитки. Це у свою чергу дасть можливість визначити вертикальні динамічні сили взаємодії колії та рухомого складу з урахуванням змін параметрів згинальної жорсткості рейкової нитки в зоні стику.

**Основна частина дослідження.** У роботі [10] розглянута загальна розрахункова схема підсистеми «екіпаж» (рис. 1), в основу якої закладена просторова

розрахункова схема чотиривісного екіпажа, що рухається по колії. Як розрахункова модель колії прийнята балка, що спирається на багато пружно-дисипативних опор – шпал з нелінійними характеристиками. Це дає змогу встановлювати вплив на динамічні сили нерівнопружності підрейкової основи, термінів служби колії, вертикальних і горизонтальних геометричних нерівностей рейкової колії.

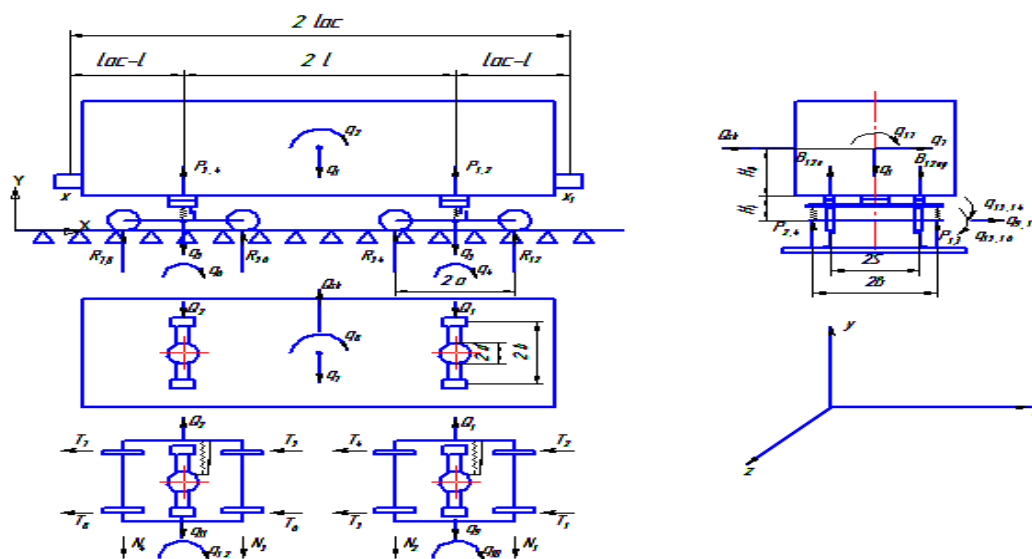


Рис. 1. Загальна розрахункова схема динамічної підсистеми «екіпаж»

При проходженні колесом рейкового стику без вертикальної сходинки (рис. 2) максимальну силу удару можна визначити за формулою [12–14]

$$R_{y\delta 1-8} = \mu v_{y\delta} \sqrt{\frac{C_k \cdot C_n \cdot m_{кол} \cdot m_p}{(C_k + C_n) \cdot (m_{кол} + m_n)}} \quad (1)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт, який враховує місце розташування сили удару відносно нейтральної осі рейки;

$v_{y\delta}$  – вертикальна швидкість удару колеса;

$C_k$  – контактна жорсткість між колесом та рейкою;

$C_n$  – жорсткість колії при співударі;

$m_{кол}, m_p$  – еквівалентні маси колеса та колії, які беруть участь в співударі.

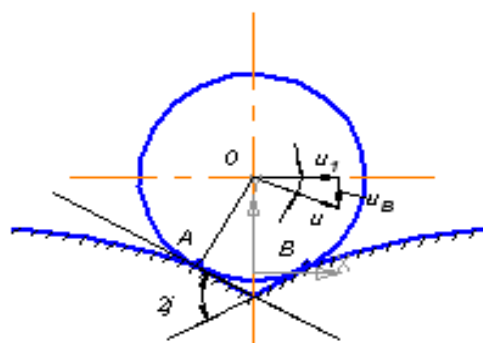


Рис. 2. Кінематична схема проходження стику колесом

Параметри  $m_{кол}$  та  $m_p$  визначаються за формулами

$$m_{кол} = 0,5 \cdot n \cdot m_{к-1}, \quad (2)$$

$$m_p = 0,5 \cdot l_p \cdot m_{поз}, \quad (3)$$

де  $m_{к-1}$  – маса одного колеса екіпажа, кг;  
 $n$  – частка участі маси колеса до кінця наростання сили в співударі;

$l_p$  – довжина рейки, що бере участь в коливанні до кінця співудару (1 ÷ 1,6 м при залізобетонних і 1,5 ÷ 2,2 м при дерев'яних шпалах);

$m_{поз}$  – погонна маса рейки, кг/м.

Контактна жорсткість між колією та рейкою [15] приймається рівною  $C_k = 10^8$  н/м. Жорсткість колії при співударі  $C_n$  повинна враховувати спільну роботу рейки та підрейкової основи. Професор Е. І. Даниленко [15] пропонує визначити цей параметр за формулою

$$C_n = (64 \cdot E \cdot I)^{1/3} \cdot (U_y)^{3/4}, \quad (4)$$

де  $E$  – модуль пружності рейкової сталі ( $2,1 \cdot 10^5$  МПа);

$I$  – момент інерції рейки при роботі на вертикальний вигин;

$U_y$  – модуль пружності підрейкової основи.

Значення коефіцієнта  $\mu$  у формулі (1) слід приймати рівним  $\mu = 1$  при визначенні сили удару  $R_{y\delta}$ , який приведено до нейтральної осі рейки.

Вертикальна швидкість удару колеса в рейку (рис. 3) визначається за формулою

$$v_{y\delta} = v \cdot \text{tg} \varphi, \quad (5)$$

де  $v$  – горизонтальна швидкість руху екіпажа;

$\varphi$  – кут нахилу пружної лінії до початкового положення.

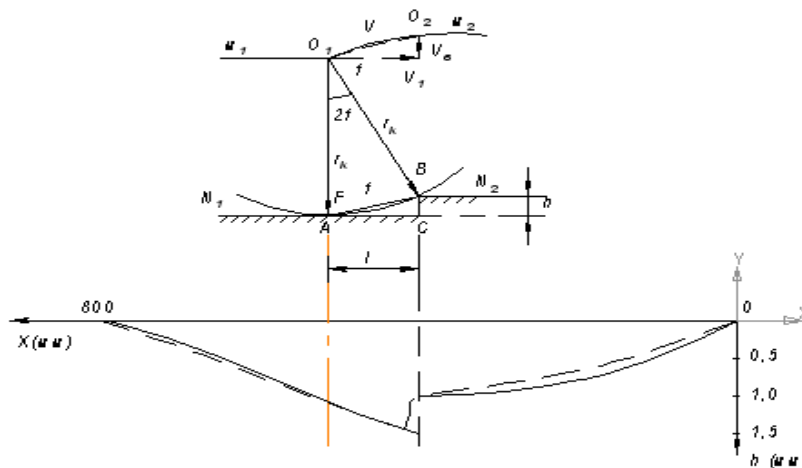


Рис. 3. Рух колеса через вертикальну сходинку в стикі

Параметр  $\varphi$  за даними досліджень професора Е. І. Даниленка [15] для

стикової нерівності може бути знайдено за виразом:

$$\varphi = \frac{\bar{P}_{дин}}{4k} \cdot \frac{2}{(1 + \gamma_{cm} \cdot k) \cdot (1 + \frac{\delta}{2k^3}) + 1} \cdot \frac{\gamma_{cm}}{EI}, \quad (6)$$

де  $\bar{P}_{дин}$  – середньодинамічне значення вертикальної сили, яка діє на рейку;

$k$  – коефіцієнт відносної жорсткості основи та рейки;

$\delta$  – коефіцієнт впливу зближення стикових шпал на жорсткість рейкового стику;

$\gamma$  – кутова жорсткість стану.

Решта позначень колишня.

Значення коефіцієнта  $\delta$  визначається рівнянням

$$\delta = \frac{l_m - l_{уст}}{2} \cdot \frac{U}{EI}, \quad (7)$$

де  $l_m$  – відстань між осями шпал;

$l_{уст}$  – відстань між осями шпал у стику.

Жорсткість стику  $\gamma_{ст}$  можна визначити за формулою, яка запропонована професором Е. І. Даниленком [15], залежно від характеристик вертикальної жорсткості рейок, основи і характеристики елементів стику

$$\gamma_{ст} = \frac{4EI \cdot k^2}{\frac{\bar{P}_{дин}}{Z_{max}} - 4EI \cdot k^3 - 4EI \cdot \delta} - \frac{1}{k}. \quad (8)$$

При наявності сходинки у стику максимальна ударна сила взаємодії визначається виразом (1). У цьому випадку вертикальну швидкість удару треба розраховувати за формулою (5), де  $\varphi$  – кут удару, може бути знайдений за допомогою рівняння (рис. 3)

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{h}{2r_k}}, \quad (9)$$

де  $h$  – величина сходинки;

$r_k$  – радіус колеса.

Враховуючи вищенаведене, розглянемо вертикальні сили взаємодії підсистем «екіпаж» і «колія» з урахуванням прийнятих допущень про пружно-дисипативні властивості колії і дію вертикальних динамічних сил в зоні стиків:

$$R_i = C_\epsilon (y_p) + \beta_\epsilon (\dot{y}_p) \cdot \text{sign } \dot{y}_p, \quad (10)$$

де  $C_\epsilon$  – приведена вертикальна жорсткість рейкової нитки в точці контакту колії і рейки, Н/м;

$y_p$  – вертикальний вигин рейки під колесом, м;

$\beta_\epsilon$  – параметр розсіювання енергії конструкцією колії у вертикальній площині  $\left( \frac{H \cdot c^2}{m} \right)$ .

Загальний підхід до розрахунку нерозрізних балок за допомогою рівнянь трьох моментів [15] поширюється і на випадок розрахунку балок на пружних опорах. Тут замість рівнянь трьох опорних моментів розглядаються рівняння п'яти опорних моментів. Під жорсткістю опори  $C_{yi}$  будемо розуміти навантаження, яке потрібно для одиничного осідання цієї опори, Н/м.

Для балки, що має постійну жорсткість  $EI$ , з умови нерозривності пружної лінії, рівняння п'яти опорних моментів буде мати вигляд

$$M_{n-2} \theta_{n,n-2} + M_{n-1} \theta_{n,n-1} + M_n \theta_{n,n} + M_{n+1} \theta_{n,n+1} + M_{n+2} \cdot \theta_{n,n+2} + \Delta_{n,p} = 0. \quad (11)$$

В окремому випадку рівнопрогонової балки  $l_u$  і постійної жорсткості опор  $C_y$  рівняння п'яти моментів набуває вигляду

$$M_{n-2} \cdot \alpha + M_{n-1}(1 - 4\alpha) + M_n(4 + 6\alpha) + M_{n+1} \cdot (1 - 4\alpha) + M_{n+2} \cdot \alpha = \frac{6(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi)}{\ell} - \alpha \ell (R_{n-1}^0 - 2R_n^0 + R_{n+1}^0) \quad (12)$$

де  $R_{n-1}^0, R_n^0, R_{n+1}^0$  – реакції опор  $n-1, n, n+1$  в припущенні шарнірів над опорами, які викликані зовнішнім навантаженням;

$A_{n+1}^\phi u B_n^\phi$  – фіктивні реакції опори  $n$  в  $n$ -му і  $n+1$  прогонах [14].

Розглянемо роботу рейкової нитки під дією пружної становлячої  $R_{yn}$  вертикальної сили взаємодії підсистем «екіпаж» і «колія». Це сила, яка рухається уздовж колії із швидкістю  $V$ .

Розрахунки колії і численні експериментальні роботи [5, 12, 14, 17] показали, що осідання опор, які знаходяться далі 2,5 м від точки дії вертикальної сили, складають величини 3-го порядку малості в порівнянні з осіданнями опор, які знаходяться ближче ніж 0,5 м від цієї точки. Тому рейкову нитку розглядаємо як дев'ятипрогонову балку на десяти пружних опорах (рис. 5) [10].

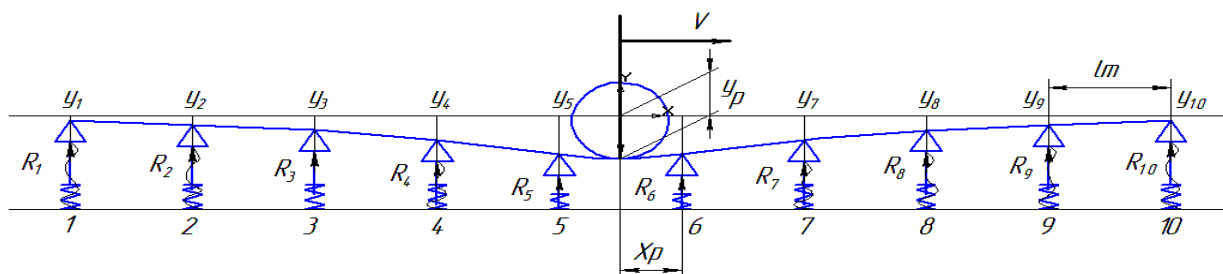


Рис. 4. Розрахункова схема рейкової нитки на пружних опорах під дією рухомої сили:  $y_i$  – прогинання рейки на опорах;  $y_p$  – прогинання рейки під колесом

Відстані  $X_p$  від опори 5 до точки прикладання сили  $R_{yn}$  змінні і визначаються для прийнятої розрахункової схеми співвідношенням

$$X_p = \ell_{us} \left( 1 - \left\{ \frac{X_n}{\ell_{us}} \right\} \right), \quad (13)$$

де  $\ell_{us}$  – відстані між опорами, м;

$\left\{ \frac{X_n}{\ell_{us}} \right\}$  – дробова частина

співвідношення  $\frac{X_n}{\ell_{us}}$ ;

$X_n$  – поточна абсциса колісної пари, м.

Змінна величина приведеної вертикальної жорсткості рейкової нитки в точці контакту колеса і рейки, яку треба знайти, з урахуванням прийнятих позначень, буде визначатися так:

$$C_\phi = \frac{R_{yn}}{y_p}, \text{ Н/м}, \quad (14)$$

де  $y_p$  – вигин рейки під колесом.

Запишемо рівняння п'яти моментів (12) для кожної з десяти опор:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{для } 1^{\text{ї}} \text{ опори : } M_1(4 + 6\alpha) + M_2(1 - 4\alpha) + M_3\alpha + 0 \dots = 0 \\
 \text{для } 2^{\text{ї}} \text{ опори : } M_1(1 - 4\alpha) + M_2(4 + 6\alpha) + M_3(1 - 4\alpha) + M_4\alpha + 0 \dots = 0 \\
 \text{для } 3^{\text{ї}} \text{ опори : } M_1\alpha + M_2(1 - 4\alpha) + M_3(4 + 6\alpha) + M_4(1 - 4\alpha) + M_5 \cdot \alpha + 0 \dots = 0 \\
 \text{для } 4^{\text{ї}} \text{ опори : } 0 + M_2\alpha + M_3(1 - 4\alpha) + M_4(4 + 6\alpha) + M_5(1 - 4\alpha) + M_6\alpha + 0 \dots = \\
 = -a(\ell_u - x_p) \\
 \text{для } 5^{\text{ї}} \text{ опори : } \dots 0 + M_3\alpha + M_4(1 - 4\alpha) + M_5(4 + 6\alpha) + M_6(1 - 4\alpha) + M_7\alpha + 0 \dots = \\
 = -\frac{R_{yni}}{\ell_u^2} x_p (\ell_u - x_p) \cdot x_p (2\ell_u - x_{pi}) + R_{yni} [\alpha(2\ell_u - 3x_p)] \\
 \text{для } 6^{\text{ї}} \text{ опори : } 0 + M_4\alpha + M_5(1 - 4\alpha) + M_6(4 + 6\alpha) + M_7(1 - 4\alpha) + M_8\alpha + 0 = \\
 = -\frac{R_{yni}}{\ell_u^2} (\ell_u - x_{pi}) \cdot x_{pi} (\ell_u + x_p) + R_{yni} [\alpha(3x_p - \ell_u)] \\
 \text{для } 7^{\text{ї}} \text{ опори : } \dots 0 + M_5\alpha + M_6(1 - 4\alpha) + M_7(4 + 6\alpha) + M_8(1 - 4\alpha) + M_9\alpha + 0 \dots = -\alpha x_p \\
 \text{для } 8^{\text{ї}} \text{ опори : } \dots 0 + M_6\alpha + M_7(1 - 4\alpha) + M_8(4 + 6\alpha) + M_9(1 - 4\alpha) + M_{10}\alpha = 0 \\
 \text{для } 9^{\text{ї}} \text{ опори : } \dots 0 + M_7\alpha + M_8(1 - 4\alpha) + M_9(4 + 6\alpha) + M_{10}(1 - 4\alpha) = 0 \\
 \text{для } 10^{\text{ї}} \text{ опори : } \dots 0 + M_8\alpha + M_9(1 - 4\alpha) + M_{10}(4 + 6\alpha) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

У матричній формі цю систему можна записати у вигляді [15]

$$A \cdot M = -H, \quad (16)$$

де  $A$  – матриця жорсткостей рейкової нитки;

$M$  – матриця - стовпець невідомих опорних моментів;

$H$  – матриця - стовпець зовнішнього навантаження.

$$A = \begin{pmatrix}
 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \alpha & 1 + 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha & \alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha & 1 - 4\alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 - 4\alpha & 4 + 6\alpha
 \end{pmatrix} \quad (17)$$

За формулою Крамера елементи  $M_i$  матриці 16 можна визначити

$$M_i = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \quad (18)$$

Матриця жорсткостей рейкової нитки (16), складена для розрахункової схеми (рис. 4), отримана з умови постійної жорсткості рейки у всіх прогонах.

Однак, в зоні рейкового стику жорсткість рейкової нитки буде іншою. На цей параметр впливатимуть значення сумарної жорсткості стикових накладок, рівень натягу стикових болтів, наявність стикового зазора.

Для врахування такої особливості улаштування колії в зоні стику розглянемо

роботу рейкової нитки при наявності рейкового стику під дією вертикальної сили. Оскільки зміна згинальної жорсткості рейки впливає на приведену до точки контакту вертикальну жорсткість залежно від відстані від точки контакту до стику, необхідно розглянути декілька розрахункових схем.

У першому випадку вертикальна сила знаходиться в п'ятому прогоні від стику. Розрахункова схема в цьому випадку буде мати вигляд, як на рис. 5.



Рис. 5. Розрахункова схема першого варіанта навантаження

Запишемо рівняння п'яти моментів для кожної з десяти опор для стику:

$$\begin{aligned}
 &\text{для } 1^{\text{i}} \text{ опори: } M_1(4 + 6\alpha) + M_2(1 - 4\alpha) + M_3\alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 2^{\text{i}} \text{ опори: } M_1(1 - 4\alpha) + M_2(4 + 6\alpha) + M_3(1 - 4\alpha) + M_4\alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 3^{\text{i}} \text{ опори: } M_1\alpha + M_2(1 - 4\alpha) + M_3(4 + 6\alpha) + M_4(1 - 4\alpha) + M_5 \cdot \alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 4^{\text{i}} \text{ опори: } 0 + M_2\alpha + M_3(1 - 4\alpha) + M_4(4 + 6\alpha) + M_5(1 - 4\alpha) + M_6\alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\quad \dots 0 + M_3\alpha + M_4(1 - 4\alpha) + M_5(4 + 6\alpha) + M_6(1 - 4\alpha) + M_7\alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 5^{\text{i}} \text{ опори: } = -\frac{R_{yni}}{\ell_{uu}^2} x_p (\ell_{uu} - x_p) \cdot x_p (2\ell_{uu} - x_{pi}) + R_{yni} [2\alpha x_{pi} - \alpha(\ell_{uu} - x_{pi})] \\
 &\quad 0 + M_4\alpha + M_5(1 - 4\alpha) + M_6(4 + 6\alpha) + M_7(1 - 4\alpha) + M_8\alpha + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 6^{\text{i}} \text{ опори: } = -\frac{R_{yni}}{\ell_{uu}^2} (\ell_{uu} - x_{pi}) \cdot x_{pi} (2\ell_{uu} - x_{pi}) + R_{yni} [2\alpha(\ell_{uu} - x_{pi}) - \alpha x_{pi}] \\
 &\quad 0 + M_5\alpha + M_6(1 - 4\alpha) + M_7(4 + 6\alpha) + M_8(1 - 4\alpha) + M_9\alpha_{st} + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 7^{\text{i}} \text{ опори: } \dots 0 + M_5\alpha + M_6(1 - 4\alpha) + M_7(4 + 6\alpha) + M_8(1 - 4\alpha) + M_9\alpha_{st} + 0 \dots = 0 \\
 &\text{для } 8^{\text{i}} \text{ опори: } \dots 0 + M_6\alpha + M_7(1 - 4\alpha) + M_8(4 + 6\alpha) + M_9(1 - 4\alpha_{st}) + M_{10}\alpha_{st} = 0 \\
 &\text{для } 9^{\text{i}} \text{ опори: } \dots 0 + M_7\alpha + M_8(1 - 4\alpha) + M_9(4 + 6\alpha_{st}) + M_{10}(1 - 4\alpha_{st}) = 0 \\
 &\text{для } 10^{\text{i}} \text{ опори: } \dots 0 + M_8\alpha + M_9(1 - 4\alpha_{st}) + M_{10}(4 + 6\alpha_{st}) = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

В цьому випадку матриця жорсткостей матиме вигляд:



$$A_3 = \begin{pmatrix} 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha & \alpha_{st} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha & 4+6\alpha_{st} & 1-4\alpha_{st} & \alpha_{st} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-4\alpha_{st} & 4+6\alpha_{st} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Тут всі позначення колишні.

В цих формулах  $\alpha_{st}$  – коефіцієнт відносної жорсткості рейки і рейкової опори в зоні стикового прогону

$$\alpha_{st} = \frac{6EI_{st}}{\ell_{st} \cdot C_y}, \quad (21)$$

де  $E$  – модуль пружності рейкової сталі;

$C_y$  – вертикальна жорсткість рейкової опори;

$\ell_{st}$  – відстані між опорами в стиковому прогоні;

$I_{st}$  – момент інерції рейкової нитки у стиковому прогоні.

Далі, по мірі віддалення від стикового прогону, матриці будуть симетрично змінюватися у зворотний бік.

Складаючи визначники матриці жорсткості і визначники матриці зовнішнього завантаження, одиничні опорні моменти можна розрахувати за формулою Крамера (18).

Знаючи одиничні опорні моменти, розраховуються пружні одиничні прогини опор, одиничні прогини в точці дії навантаження (22) і шукані приведені вертикальні жорсткості рейкової нитки (формула 13). Ці значення використовуються в розрахунках вертикальних динамічних сил взаємодії за описаною вище методикою.

$$y_{одp} = y_5 \frac{x_p}{\ell_u} + y_6 \frac{(\ell_u - x_p)}{\ell_u} + \frac{(\ell_u - x_p)^2 x_p^2}{3EI \ell_u}. \quad (22)$$

В цій формулі:

$y_i$  – пружні просідання рейкових опор;

$\ell_u$  – відстані між опорами;

$x_p$  – відстань від найближчої опори до точки прикладання сили;

$R_{од yn}$  – відстань від найближчої опори до точки прикладання сили.

Для виконання досліджень чисельними методами динамічних вертикальних сил взаємодії рухомого складу і колії в зоні рейкових стиків за методикою, яка викла-

дена вище, окрім характеристик рейок, які є загальновідомими, характеристик жорсткості та дисипації рейкових опор, необхідно знати жорсткість рейкової нитки в зоні стикового прогону. Ця величина є змінною, повинна залежати від моменту інерції рейок та двох стикових накладок відносно горизонтальної осі. На неї можуть впливати рівень натягування гайок стикових болтів, стиковий зазор та відстань між стиковими опорами – шпалами.

**Висновки.** Наведена вище методика розрахунку динамічних сил, які виникають при проходженні коліс рейкових стиків, була реалізована в програмній системі Mathcad.

Вона дозволяє визначити приведену до точки контакту колеса і рейки жорсткість рейкової нитки, що дозволяє визначати вертикальні динамічні сили взаємодії колії і рухомого складу з

урахуванням змін параметрів згинальної жорсткості рейкової нитки в зоні стику.

Слід підкреслити, що вплив цих параметрів на сили взаємодії колії і рухомого складу безперервно змінюється в процесі руху. На перебіг цих процесів впливають як жорсткості рейкових опор, так і жорсткості рейок в зоні рейкового стику і поза стиком.

### *Список використаних джерел*

1. Eller, B. Railway construction [Text] / Sz. Fisher, B. Eller, Z. Kada, A. Németh // Universitas-Győr Nonprofit Kft., Győr, 2015. – 334 p.
2. Otero, J A mathematical model to study railway track dynamics for the prediction of vibration levels generated by rail vehicles [Text] / J Otero, M.A. Martinez, de los Santos, S.Cardona // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F:Journal of Rail and Rapid Transit. – 2011. – P. 62–71.
3. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган. – М. : Транспорт, 1986. – 589 с.
4. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава в кривых малого радиуса и борьба с боковым износом рельсов и гребней колёс [Текст] / М. Ф. Вериго. – М. : Транспорт, 1997. – 207 с.
5. Коган, А. Я. Вертикальные динамические силы, действующие на путь [Текст] / А. Я. Коган // Труды ЦИИТ МПС. – М. : Транспорт, 1969. – 206 с.
6. Коган, А. Я. Поперечные горизонтальные силы, действующие на путь в прямых участках [Текст] / А. Я. Коган // Труды ВНИИЖТ. – М.: Транспорт, 1979. – № 619. – С. 78-88.
7. Лазарян, В. А. Влияние параметров пути и тележки на силы взаимодействия [Текст] / В. А. Лазарян // Труды ДИИТа. – Днепропетровск : ДИИТ, 1968. – № 68. – С. 22-28.
8. Белых, К. Д. О нагрузках от колес при расчете железнодорожного пути [Текст] / К. Д. Белых, М. К. Уманов, Г. Н. Малышко // Металлургическая промышленность. – 1976. – № 5. – С. 78-79.
9. Darenskiy, A. N. Mathematical model of the rail track presented as a bar on elastic and dissipative supports under the influence of moving loads [Text] / A. Darenskiy, V. Vitolberg, D. Fast, A. Klymenko, Yar. Leibuk // MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences, 2017. – 116 p.
10. Даренський, О. М. Теоретичні та експериментальні дослідження роботи залізничних колій промислового транспорту [Текст]: монографія / О. М. Даренський. – Харків : УкрДАЗТ, 2011. – 204 с.
11. Даренський, О. М. Визначення приведеної жорсткості рейкової нитки при використанні розрахункової схеми як балки на пружних опорах з випадковими характеристиками [Текст] / О. М. Даренський, Н. В. Бугаєць, В. Г. Вітольберг // Зб. наук. праць Укр. держ. акад. залізнич. трансп. – Харків : УкрДАЗТ, 2010. – Вип. 115. – С. 151–162.
12. Даніленко, Е. І. Залізнична колія [Текст]: підруч. для вищ. навч. закл. / Е. І. Даніленко. – К. : Інпрес, 2010. – Т. 2. – 456 с.
13. Wang, P. Effects of profile wear on wheel–rail contact conditions and dynamic interaction of vehicle and turnout [Electronic resource] / J. Xu, P. Wang, L. Wang, R. Chen // Advances in Mechanical Engineering. – 2016. – Vol. 8, №1. – P. 1-14. – Available at: <http://ade.sagepub.com/content/8/1/1687814015623696.full.pdf+html>. – Title from the screen. – Accessed: 14.03.2016.
14. Шахунянц, Г. М. Железнодорожный путь [Текст]: монография / Г. М. Шахунянц. – М. : Транспорт, 1987. – 479 с.

15. Даніленко, Е. І. Правила розрахунків залізничної колії на міцність і стійкість: ЦП-0117 [Текст] / Е. І. Даніленко, В. В. Рибкін. – К. : Транспорт України, 2006. – 168 с.
16. Чихладзе, Е. Д. Будівельна механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 305 с.
17. Першин, С. П. Вертикальная жесткость пути и его надежность [Текст] / С. П. Першин // Путь и путевое хозяйство. – М. : Транспорт, 1996. – № 8. – С. 8-10.
- 

Бугаєць Наталія Володимирівна канд. техн. наук, доцент кафедри колій та колійного господарства Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: (057)730-10-59. E-mail: ppx\_xiit@kart.edu.ua.  
Покотецький Ігор Орестович, магістрант кафедри колій та колійного господарства Українського державного університету залізничного транспорту.  
Коваль Володимир Миколайович, магістрант кафедри колій та колійного господарства Українського державного університету залізничного транспорту.

Бугаєц Наталья Владимировна канд. техн. наук, доцент кафедры путей и путевого хозяйства Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Тел.: (057)730-10-59. E-mail: ppx\_xiit@kart.edu.ua.  
Покотецкий Игорь Орестович, магистрант кафедры путей и путевого хозяйства Украинского государственного университета железнодорожного транспорта.  
Коваль Владимир Николаевич, магистрант кафедры путей и путевого хозяйства Украинского государственного университета железнодорожного транспорта.

Bugaec N. V., PhD (Tech.), Associate professor, Department of Track and Track Facilities, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: (057)730-10-59. E-mail: ppx\_xiit@kart.edu.ua.  
Pokotecky Igor Orestovich, master, Ukrainian State University of Railway Transport.  
Koval Volodimir Nikolaevich, master, Ukrainian State University of Railway Transport.

Статтю прийнято 26.10.2018 р.