УДК 519.217.2:629.46

ЛОМОТЬКО Д.В., д.т.н.,
БРОНЗА С.Д., к.ф. – м.н.,
ЮРЧАК Н.С., к.т.н.,
ОВЧІЄВ М.Ж., аспірант (УкрДАЗТ)

Розподіл імовірності станів системи обороту вагонів на залізничному вузлі. Загальне рішення Частина II

У статті розглянута система масового обслуговування (СМО) типу вантажний залізничний вузол (ВЗВ), (яка розглядається як марківський ланцюг, причому цей ланцюг нерегулярний) з метою обчислення розподілу імовірності станів обігу вагонів. Отримано загальне рішення поставленої задачі. Обчислені імовірності знаходження вагонів в будь-якому стані в будь-який час.
Ключові слова: *імовірність станів системи, диференційні рівняння Колмогорова, загальне рішення.*

У частині I розглядався випадок, коли система розподілу імовірності станів системи обороту вагонів на вантажному залізничному вузлі (ВЗВ), дійсно знаходиться в кожному із станів (у якійсь момент часу). У цій частині роботи ми розглядаємо спеціальну систему обігу вагонів, в якій система не знаходиться в одному із станів.

Приклад 2.

За лютий місяць 2010р., оборот вагонів (платформа) може бути описаний генератором марківського ланцюга [1]

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

та графом станів, який відповідає цьому ланцюгу (рисунок 2).

Система не знаходитися у стані E_2 – вагони у стані навантаження, оскільки через ВЗВ вагони йдуть транзитом. В цьому випадку покладемо $q_2 = 0$. Крім того марківський ланцюг для такого генератора не є регулярним (див. Частина I), оскільки не всі стани сполучатимуться між собою. Для подальшого розгляду задамо новий генератор марківського ланцюга, виключивши відповідний рядок і стовпець з генератора марківського ланцюга $\mathbf{\Lambda}$ (рядок 2 і стовпець 2) і відповідну вершину E_2 з графа оборотів вагонів.

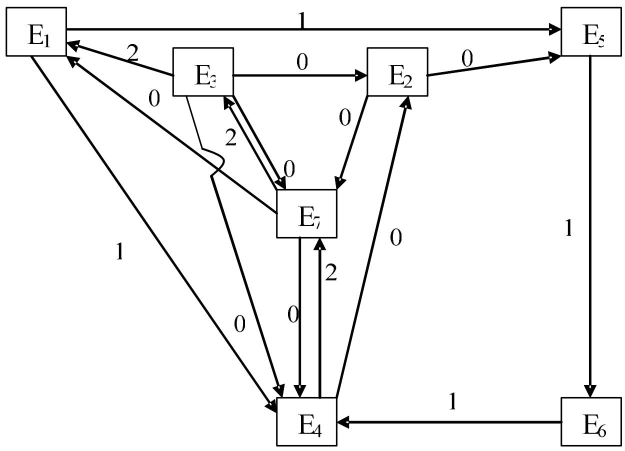

Рисунок 2 – Граф станів оборотів вагонів платформа вантажної станції: E_1 – вагони у стані розвантаження, E_2 – вагони у стані навантаження, E_3 – вагони у стані сортування, E_4 – резерв порожніх вагонів, E_5 – парк непрацюючих вагонів, E_6 – ремонтне депо вагонів, E_7 – стан знаходження вагона по за вузлом.

Маємо новий генератор марківського ланцюга, який позначимо $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

та відповідний йому граф (рисунок 3).

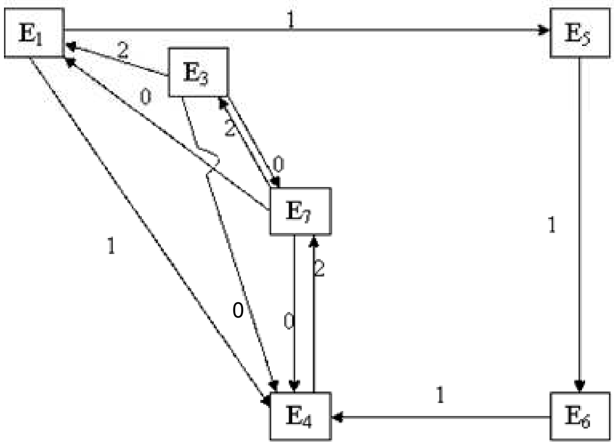

Рисунок 3 – Граф станів оборотів вагонів (платформа) вантажної станції

Необхідно визначити імовірність q_k, k=1,3,4,5,6, знаходження системи в стані E_k, в будь який момент часу t [2]. Нам зручно буде позначити змінні інакше [3]: $q_1 = p_1; q_3 = p_2; q_4 = p_3;$ $q_5 = p_4;$ $q_6 = p_5;$ $q_7 = p_6$.

Маємо систему диференційних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -2p_1 + 2p_3 \\ \frac{dp_3}{dt} = -2p_3 + 2p_7 \\ \frac{dp_4}{dt} = p_1 - 2p_4 + p_6 \\ \frac{dp_5}{dt} = p_1 - p_5 \\ \frac{dp_6}{dt} = p_5 - p_6 \\ \frac{dp_7}{dt} = 2p_4 - 2p_7 \\ p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1 \end{cases} \qquad (23)$$

Характеристичне рівняння $\chi(\lambda)$ системи (23) має вигляд:

$$\det(\widetilde{A} - \lambda E) = 0 \ ,$$

де матриця $\widetilde{A}$ є матриця A, з якої викреслені другий рядок та другий стовбець, та $A = \Lambda^T$, де Λ-генератор марківського ланцюга.

Підставляючи матрицю A, маємо:

$$\begin{bmatrix} -\lambda-2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-2 \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

Розкриваючи визначника (24), маємо:

$$\lambda^6 + 10\,\lambda^5 + 41\,\lambda^4 + 88\,\lambda^3 + 96\,\lambda^2 + 48\,\lambda = 0.$$

Характеристичне рівняння має коріння:

$\lambda_1=0$;

$\lambda_2=-1{,}027+0{,}860\ i$;

$\lambda_3=-2{,}104+1{,}649\ i$;

$\lambda_4=-2{,}104-1{,}649\ i$;

$\lambda_5=-1{,}027-0{,}860\ i$;

$\lambda_6=-3{,}735$.

Знайдемо власний вектор, відповідний однократному кореню $\lambda_1=0$ так, як ми це робили у частині І:

$$Y_1^{(\lambda=0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Розглянемо коріння λ_2, і комплексно спряжений до нього λ_3, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$.

Власний вектор:

$$Y_{2,3}^{(\lambda=-1,027+0,860\,i\,)}=\begin{pmatrix}0,051+0,418i\\0,486+0,430i\\1,153-1,020i\\-1,463+1,471i\\-1,122-1,300i\\1+0i\end{pmatrix}. \quad (26)$$

Розглянемо коріння λ_4 і комплексно спряжений до нього λ_5, $\lambda_4=\overline{\lambda_5}$.

Власний вектор:

$$Y_{4,5}^{(\lambda=-2,104+1,649\,i\,)}=\begin{pmatrix}-0,677-0,086i\\-0,052+0,824i\\-0,076-1,207i\\0,290+0,098i\\-0483+0,370i\\1-0i\end{pmatrix}. \quad (27)$$

Розглянемо λ_6.

Власний вектор:

$$Y_6^{(\lambda=-3,735)}=\begin{pmatrix}0,752\\-0,867\\-1,152\\-0,154\\0,421\\1\end{pmatrix}. \quad (28)$$

Відокремлюємо дійсні і уявні частини власних векторів:

$$Y_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\ ReY_2=\begin{pmatrix}0,051\\0,486\\1,153\\-1,463\\-1,122\\1\end{pmatrix};\ ImY_3=\begin{pmatrix}0,418\\0,430\\-1,020\\1,471\\-1,300\\0\end{pmatrix};$$

$$ReY_4=\begin{pmatrix}-0,677\\-0,052\\-0,076\\0,290\\-0483\\1\end{pmatrix};\ ImY_5=\begin{pmatrix}-0,086\\0,824\\-1,207\\0,098\\0,370\\0\end{pmatrix};$$

$$Y_6=\begin{pmatrix}0,752\\-0,867\\-1,152\\-0,154\\0,421\\1\end{pmatrix}. \quad (29)$$

Загальне рішення системи має вигляд:

$$\begin{aligned}p_1=C_1&+C_2e^{-1,027t}[0,051\cos(0,860t)-0,418\sin(0,860t)]+\\&+C_3e^{-1,027t}[0,418\cos(0,860t)+0,051\sin(0,860t)]+\\&+C_4e^{-2,104t}[-0,677\cos(1,649t)+0,086\sin(1,649t)]+\\&+C_5e^{-2,104t}[-0,086\cos(1,649t)-0,677\sin(1,649t)]+C_6e^{-3,735t}0,752;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2=C_1&+C_2e^{-1,027t}[0,486\cos(0,860t)-0,430\sin(0,860t)]+\\&+C_3e^{-1,027t}[0,430\cos(0,860t)+0,486\sin(0,860t)]+\\&+C_4e^{-2,104t}[-0,052\cos(1,649t)-0,824\sin(1,649t)]+\\&+C_5e^{-2,104t}[0,824\cos(1,649t)-0,052\sin(1,649t)]-C_6e^{-3,735t}0,867;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3=C_1&+C_2e^{-1,027t}[1,153\cos(0,860t)+1,020\sin(0,860t)]+\\&+C_3e^{-1,027t}[-1,020\cos(0,860t)+1,153\sin(0,860t)]+\\&+C_4e^{-2,104t}[-0,076\cos(1,649t)+1,207\sin(1,649t)]+\\&+C_5e^{-2,104t}[-1,207\cos(1,649t)-0,076\sin(1,649t)]-C_6e^{-3,735t}1,152;\end{aligned}$$

$$p_4 = C_1 + C_2 e^{-1,027t}[-1,463\cos(0,860t) - 1,471\sin(0,860t)] + \\ +C_3 e^{-1,027t}[1,471\cos(0,860t) - 1,463\sin(0,860t)] + \\ +C_4 e^{-2,104t}[0,290\cos(1,649t) - 0,098\sin(1,649t)] + \\ + C_5 e^{-2,104t}[0,098\cos(1,649t) + 0,290\sin(1,649t)] - C_6 e^{-3,735t}1,154;$$

$$p_5 = C_1 + C_2 e^{-1,027t}[-1,226\cos(0,860t) + 1,300\sin(0,860t)] + \\ +C_3 e^{-1,027t}[-1,300\cos(0,860t) - 1,226\sin(0,860t)] + \\ +C_4 e^{-2,104t}[-0,483\cos(1,649t) - 0,370\sin(1,649t)] + \\ + C_5 e^{-2,104t}[0,370\cos(1,649t) - 0,483\sin(1,649t)] - C_6 e^{-3,735t}0,421;$$

$$p_6 = C_1 + C_2 e^{-1,027t}\cos(0,860t) + C_3 e^{-1,027t}\sin(0,860t) + \\ +C_4 e^{-2,104t}\cos(1,649t) + C_5 e^{-2,104t}\sin(1,649) + C_6 e^{-3,735t}.$$

Підставляючи p_k k=1,2,…6 в умову нормування, маємо: $6p_k = 1, p_k = 0,167$.

Підставляючи значення $p_k = 0,167$, маємо загальне рішення системи диференційних рівнянь Колмогорова (23) і переходимо до початкових позначень

$$q_1 = p_1;\ q_2 = 0;\ q_3 = p_2; q_4 = p_3;$$
$$q_5 = p_4;\ q_6 = p_5;\ q_7 = p_6.$$

Висновки

Знайдене загальне рішення системи диференційних рівнянь далі буде використано для вирішення задачі Коши – задачі знаходження часткових розв’язок, які задовольняють заданим початковим умовам. Таким чином, для ВЗВ у кожен момент часу можна буде визначити імовірність знаходження вагонів (математичне очікування) в кожному із станів. Виходячи з них можливо обчислити показники ефективності СМО, зокрема тривалість обслуговування вагонів у кожному із станів, час їх знаходження в кожному із станів, тривалість очікування обслуговування вагонів, тобто визначити простій вагонів у ВЗВ. Це може бути покладено в основу автоматизованої системи керування ВЗВ для оперативних працівників залізниці.

Література

1. Єфременко, Р.О., Елементи теорії марковських ланцюгів [Текст] / Р.О. Єфременко, Г.Ю. Глушакова, М.Є. Резуненко // Харків, 2004. 21с.
2. Венцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров // М.: 1969. – 367с.
3. Залізничний транспорт України, № 1, 2012 – 47-48с. Функція розподілу. Імовірність знаходження вагонів у даному стані.

Резюме

В статье рассмотрена система массового обслуживания (СМО) типа грузовой железнодорожный узел (ГЖУ), (которая рассмотрена как марковская цепь, причем эта цепь нерегулярна) с целью вычисления распределения вероятностей состояний оборота вагонов. Получено общее решение поставленной задачи. Вычислены вероятности нахождения вагонов в любом состоянии в любой момент времени.

The queuing system of a freight railway junction type (which has been considered as Markov’s chain, besides this chain is irregular) has been considered in the given article for the purpose of the calculation of the state probability distribution of car turnover. General solution of the given problem has been obtained. The probabilities of car locations in any state and at any time have been calculated.

Рецензент д.т.н., професор Бутько Т.В. (УкрДАЗТ)

Поступила 21.03.2013г.